Examen de Mathématiques (S3PC) n° 1

Durée 2 heures . Documents et calculatrices interdits

Le 6 Novembre 2009

barême indicatif: 6 ;5 ;5 ;4

Question de cours 1.

1) Soit $F : \mathbb{R}^2 \ni (x_1, x_2) \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Donner l'expression du gradient $\vec{\nabla} F(x)$ et de la matrice Hessienne $H_F(x)$.

2) Soit $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ un arc dont un paramétrage est

$$[a, b] \ni t \mapsto x(t) = (x_1(t), x_2(t)) \in \mathbb{R}^2.$$

Donner l'expression de la longueur de l'arc γ.

3) Soit $\mathbb{R}^2 \ni x \mapsto \vec{F}(x) \in \mathbb{R}^2$ un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$. On fixe une orientation de l'arc γ. Expliquer à quelle condition le paramétrage $[a, b] \ni t \mapsto x(t)$ est compatible avec cette orientation et donner l'expression de la circulation du champ de vecteurs $\vec{F}$ le long de l'arc orienté $\overset{\curvearrowright}{\gamma}$.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Exprimer en fonction de f et f' les dérivées partielles des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} F_1(x, y) &= xyf(x + y), \\ F_2(x, y) &= f(xy)\mathrm{e}^{xy}, \\ F_3(x, y) &= f(x^2 + y^2), \end{aligned}$$

pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 2. Trouver les points critiques des fonctions F suivantes et déterminer leur nature.

$$F_1 : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto (x - y)\mathrm{e}^{xy}, \end{array}$$

$$F_2 : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \sin x + y^2 - 2y + 1. \end{array}$$

Exercice 3. On considère la courbe $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ dont un paramétrage est :

$$[0, \pi] \ni t \mapsto x(t) = ((1 + \cos t) \cos t, (1 + \cos t) \sin t) \in \mathbb{R}^2.$$

Calculer la longueur de γ.