# Examen de Mathématiques (S3 PMCP) n° 1

Durée 3h. Documents et calculatrices interdits

Le 14 Décembre 2009.

**Corrigé.**

**Exercice 1.**

On a $u_n(0) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ donc $u_n(0) \to 0$ quand $n \to \infty$. Si $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ on a $0 \leq \cos x = \rho < 1$ donc $n\rho^n \to 0$ quand $n \to \infty$ (l'exponentielle l'emporte sur la puissance), et on a encore $u_n(x) \to 0$ quand $n \to \infty$. La suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc simplement vers 0 (la fonction nulle).

Pour étudier la convergence uniforme sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on va calculer $\epsilon_n = \sup_{[0,\frac{\pi}{2}]} |u_n(x)|$ en étudiant la fonction $u_n$. On a :

$$u_n'(x) = n(-n\cos^{n-1} x \sin^2 x + \cos^{n+1} x) = n\cos^{n-1} x(\cos^2 x - n\sin^2 x) = n\cos^{n-1} x(1-(n+1)\sin^2 x).$$

En posant $x_n = \arcsin(\frac{1}{\sqrt{n+1}})$, on a donc $u_n'(x) \geq 0$ sur $[0, x_n]$, $u_n'(x) \leq 0$ sur $[x_n, \frac{\pi}{2}]$. On a donc

$$\epsilon_n = u_n(x_n) = \frac{n}{\sqrt{n+1}}(1 - \frac{1}{n+1})^{n/2},$$

en utilisant que $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Donc :

$$\epsilon_n = \frac{n}{\sqrt{n+1}} \mathrm{e}^{\log(1-\frac{1}{n+1})n/2}.$$

Le terme dans l'exponentielle tend vers $-\frac{1}{2}$ quand $n \to \infty$, et donc

$$\epsilon_n \simeq \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}}, \text{ quand } n \to \infty.$$

On a donc $\lim \epsilon_n = +\infty$, la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend donc pas uniformément vers 0 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

On regarde finalement la convergence uniforme sur un intervalle $[a, \frac{\pi}{2}]$ pour $a > 0$. On a alors $|\cos x| \leq \cos a$, pour $x \in [a, \frac{\pi}{2}]$ et donc :

$$\sup_{[a,\frac{\pi}{2}]} |u_n(x)| \leq n\cos^n a = \alpha_n.$$

Comme $\alpha_n \to 0$ quand $n \to \infty$, la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend uniformément vers 0 sur $[a, \frac{\pi}{2}]$.

**Exercice 2.**

Pour $x = 0$ on a $u_n(0) = 1$ donc la série $\sum u_n(0)$ diverge. Pour $x \neq 0$ on a $u_n(x) = \rho^{n^2}$ avec $0 < \rho = \mathrm{e}^{-x^2} < 1$. Comme $\rho^{n^2} \leq \rho^n$, la série $\sum u_n(x)$ converge. La série de fonctions $\sum u_n$ converge donc simplement sur $\mathbb{R}^*$, la fonction $f$ est définie sur $\mathbb{R}^*$.

2) On regarde d'abord la convergence normale sur $[a, +\infty[$ pour $a > 0$. (Le cas de $]-\infty, a]$ est similaire par parité). Les fonctions $u_n$ sont décroissantes sur $\mathbb{R}^+$ donc

$$\sup_{[a,+\infty[} |u_n(x)| = u_n(a) = \mathrm{e}^{-a^2n^2},$$

la série $\sum \mathrm{e}^{-a^2n^2}$ converge (voir plus haut). On a donc convergence normale (donc uniforme) sur $[a, +\infty[$ . Chaque fonction $u_n$ étant continue sur $\mathbb{R}$, la fonction $f$ est continue sur chaque intervalle $[a, +\infty[$ et donc sur $\mathbb{R}^*$.

3) par le même argument que plus haut, on a pour $x > 0$ et $\rho = \mathrm{e}^{-x^2}$ $(0 \leq \rho < 1)$ $\sum \mathrm{e}^{-nx^2} = \sum \rho^n$, la série est donc une série geométrique convergente. On a aussi $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-nx^2} = \rho(1-\rho)^{-1} = \mathrm{e}^{-x^2}(1-\mathrm{e}^{-x^2})^{-1}$. D'autre part comme pour tout $n$ et $x$ $\mathrm{e}^{-n^2x^2} \leq \mathrm{e}^{-nx^2}$, on a bien

$$0 \leq f(x) - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-n^2x^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-nx^2} = \mathrm{e}^{-x^2}(1-\mathrm{e}^{-x^2})^{-1}.$$

Par le théorème des gendarmes on en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - 1 = 0, \text{ donc } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.$$

5) Il suffit de faire le changement de variables $xs = \tilde{s}$ dans l'intégrale (dont la convergence est bien connue).

6) Pour $x$ fixé, la fonction $s \mapsto \mathrm{e}^{-s^2x^2} =: g_x(s)$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$. On en déduit l'encadrement bien connu :

$$\int_0^{+\infty} g_x(s) \quad ds \leq \sum_{n=0}^{+\infty} g_x(n) \leq \int_0^{+\infty} g_x(s) \quad ds - g_x(0),$$

ce qui donne l'inégalité en remarquant que $g_x(n) = u_n(x)$ et $g_x(0) = 1$.

7) On multiplie les deux membres de l'inégalité précédente par $x$, on fait tendre $x$ vers 0 en appliquant le point 5) et on obtient que

$$\lim_{x\to 0} xf(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

**Exercice 3.**

1) Fixons $x \geq 0$. On a $0 \leq n(1+x)^{-1} \leq 1$ pour $n \geq 1$ donc la suite $v_n = \sin(\frac{1}{n(1+x)})$ est décroissante vers 0, la série $\sum u_n(x)$ est donc alternée donc convergente. La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$. On remarque d'autre part que

$$|u_n(x)| = \sin(\frac{1}{n(1+x)}) \simeq \frac{1}{n(1+x)}, \text{ quand } n \to \infty,$$

comme $\sin s \simeq s$ quand $s \to 0$. La série $\sum u_n(x)$ ne converge pas absolument. On en déduit que la série de fonctions $\sum u_n$ ne peut converger normalement sur aucun intervalle de $\mathbb{R}^+$, la réponse à la question 3) est donc négative.

2) Pour établir la convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$, il faut considérer

$$R_n(x) := \sum_{k=n}^{+\infty} u_k(x),$$

et montrer que la suite de fonctions $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}^+$. On utilise la majoration bien connue du reste d'une série alternée :

$$|R_n(x)| \leq |u_n(x)|,$$

et donc

$$\sup_{[0,+\infty[} |R_n(x)| \leq \sup_{[0,+\infty[} |u_n(x)| = \sup_{[0,+\infty[} |\sin(\frac{1}{n(1+x)})| = \sup_{]0,n^{-1}]} |\sin s| = \sin(n^{-1}).$$

Comme $\sin(n^{-1}) \to 0$ quand $n \to \infty$, on en déduit que la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

**Exercice 4.**

1) En utilisant la majoration $|\sin y| \leq |y|$, on obtient

$$u_n(x)| \leq |x|^{n+1}.$$

On a donc $\sup_{[-a,a]} |u_n(x)| \leq a^{n+1}$. Pour $0 < a < 1$ la série $\sum a^{n+1}$ converge. On en déduit que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[-a, a]$ pour tout $0 < a < 1$. Comme chaque fonction $u_n$ est continue, on en déduit que la fonction $f = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est continue sur $]-1, 1[$.

2) Chaque fonction $u_n$ est de classe $C^1$ avec $u_n'(x) = x^{n-1} \sin nx + x^n \cos nx$. Comme $|\sin y|,\ |\cos y| \leq 1$, on a

$$\sup_{[-a,a]} |u_n'(x)| \leq a^{n-1} + a^{n+1}.$$

Pour $0 < a < 1$ la série $\sum a^{n-1} + a^{n+1}$ converge, et donc la série de fonctions $\sum u_n'$ converge normalement (donc uniformément) sur $]-a, a[$ pour tout $0 < a < 1$. Par un théorème vu en cours, la fonction $f$ est donc de classe $C^1$ sur $]-1, 1[$, avec

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n-1} \sin nx + x^n \cos nx.$$