Examen de Mathématiques (S3 PMCP) n° 1

Durée 3h. Documents et calculatrices interdits

Le 18 Décembre 2006.

barême indicatif: ????

Question de cours.

Exercice 1.

1) On considère la série de fonctions

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{e^{-nx}}{n}.$$

Etudier la convergence simple de cette série de fonctions.

2) Montrer que $\sum_{n\geq 1}$ converge normalement sur tout intervalle $[a,+\infty[$ avec $a>0$ et converge uniformément sur $[0,+\infty[$.

3) Montrer que la fonction:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\mapsto(-1)^n\frac{e^{-nx}}{n}$$

est continue sur $[0,+\infty[$ et dérivable sur $]0,+\infty[$.

4) Exprimer f' en termes de fonctions usuelles.
On pourra utiliser l'identité $\sum_{n=0}^{n=+\infty}(-1)^n a^n=(1+a)^{-1}$, valable pour tout $|a|<1$.

5) Montrer que

$$|f(x)|\leq e^{-x},\ \text{pour tout } x>0,$$

et en déduire la limite de f en $+\infty$.

6) En utilisant les questions 4) et 5) exprimer f en termes de fonctions usuelles.

Exercice 2.

1) Montrer que pour tout $0<x\leq 1$ l'intégrale

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{t+t^2x}dt$$

est convergente.

2) Calculer la fonction:

$$G(x)=\int_1^{+\infty}\frac{1}{t+t^2x}dt.$$

Indication: utiliser un changement de variables pour se ramener à au cas où l'intégrand ne dépend pas de x.

Exercice 3.

1) On considère la suite de fonctions $(u_n)_{n\geq 1}$ de $]0,+\infty[$ dans $\mathbf{R}$ définies par:

$$u_n(x) = \frac{1}{n+n^2x}.$$

Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

2) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1}$ converge normalement sur tout intervalle $[a,b]$ avec $0 < a < b < \infty$ et en déduire que la fonction:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x}$$

est continue sur $]0,+\infty[$.

3) On rappelle que si $f : [1,+\infty[$ est une fonction positive décroissante telle que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge, alors on a:

$$|\int_1^{+\infty} f(t)dt - \sum_{n=2}^{+\infty} f(n)| \leq \int_1^2 f(t)dt.$$

En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour $0 < x \leq 1$ on ait:

$$|F(x) - \int_1^{+\infty} \frac{1}{t+t^2x}dt| \leq C.$$

4) En utilisant l'exercice 2 montrer que

$$F(x) \simeq -\ln x \text{ quand } x \to 0^+.$$

Exercice 4.

1) On pose pour $n \in \mathbf{N}$:

$$a_n = \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(t^2)dt.$$

Montrer que $a_n = (-1)^n b_n$ où

$$b_n = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin s}{(s+n\pi)^{\frac{1}{2}}}ds,$$

et vérifier que b_n est une suite positive, décroissante vers 0.

2) Montrer que $b_n \simeq \frac{1}{(n\pi)^{\frac{1}{2}}}$ quand $n \to +\infty$, et en déduire le rayon de convergence de la série entière:

$$\sum_{n\geq 0} a_n z^n$$

3) Etudier la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ sur le cercle de convergence.

Indication: utiliser le critère d'Abel.