Partiel de Mathématiques (S3SMR) n° 1

Durée 2h. Documents et calculatrices interdits

Le 10 octobre 2008.

barême indicatif: 3 ;5 ;3 ;3 ;6.

Question de cours.

-Donner la définition d'une série $\sum u_n$ convergente.

-Donner la majoration du reste d'une série alternée.

Exercice 1. Etudier la convergence des séries :

$$\sum_{n\geq 1} \sin(\pi\sqrt{n^2+1}),$$

et

$$\sum_{n\geq 1} \cos(\pi\sqrt{n^2+n+1}).$$

Exercice 2. On pose

$$u_n = an\log(1+\frac{1}{n}) - b\cos(\frac{1}{n}) + c\sin(\frac{1}{n}),\ a,b,c \in \mathbf{R}.$$

Etudier en fonction des paramètres a, b, c la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$.

Exercice 3. On pose :

$$u_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sin x}{1+\operatorname{ch}^2 x} dx,\ n \geq 1.$$

Etudier la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$.

Exercice 4. On considère la série de terme général :

$$u_n = \frac{1! - 2! + 3! \cdots + (-1)^{n-1} n!}{(n+1)!}$$

1) Montrer que :

$$u_{2p} = -\frac{1}{(2p+1)!}\sum_{k=1}^{p}(2k-1)!(2k-1),$$

$$u_{2p+1} = \frac{1}{(2p+2)!}(1+\sum_{k=1}^{p}(2k)!2k).$$

Indication : calculer d'abord $(k)! - (k+1)!$ *et regrouper les termes dans l'expression de* u_{2p} *et* u_{2p+1}.

2) Montrer que

$$u_{2p} = -\frac{2p-1}{2p(2p+1)} + r_{2p},\ u_{2p+1} = \frac{2p}{(2p+1)(2p+2)} + r_{2p+1},$$

où la suite r_n vérifie :

$$|r_n| \leq Cn^{-2},\ \text{pour un } C > 0.$$

3) En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$.