# Partiel d'Analyse (S3PMCP) n° 1

Durée 1h30. Documents et calculatrices interdits

Le 9 octobre 2009.

*barême indicatif: 4 ;4 ;3 ;4 ;5*

**Question de cours.**

- Donner la définition de la convergence et de la convergence absolue d'une série $\sum u_n$.

-Donner la définition d'une série alternée et la majoration de son reste à l'ordre $n$.

**Exercice 1.** Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par :

$$u_n = \ln(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}),\ \alpha > 0.$$

Discuter en fonction de $\alpha$ la convergence et convergence absolue de la série $\sum u_n$.

**Exercice 2.** Etudier la convergence de la série

$$\sum_{n\geq 1} \sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1.$$

**Exercice 3.** Etudier la convergence des séries $\sum u_n$ de terme général :

$$u_n = \frac{2.4.6 \ldots 2n}{n^n},$$

$$u_n = \frac{(\log n)^n}{n^{\log n}}$$

**Exercice 4.** 1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que la série $\sum u_n$ converge. Montrer que la série $\sum \sqrt{u_n u_{n+1}}$ converge.

*Indication : on pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz :*

$$|\sum_{k=1}^n a_k b_k| \leq (\sum_{k=1}^n a_k^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{k=1}^n b_k^2)^{\frac{1}{2}}$$

*pour deux suites $(a_n)$, $(b_n)$ réelles et considérer les sommes partielles de la série $\sum \sqrt{u_n u_{n+1}}$.*

2) Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{n},\ n \text{ pair}, \\ \frac{1}{n^2},\ n \text{ impair}. \end{cases}$$

Montrer que la série $\sum \sqrt{u_n u_{n+1}}$ converge mais que la série $\sum u_n$ ne converge pas.