Partiel de Mathématiques (S3SMR) n° 2

Durée 1h30. Documents et calculatrices interdits.

Le Mercredi 5 Novembre 2008.

barême indicatif:

Question de cours

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions $u_n :]0,1[\to \mathbf{R}$.

Donner la définition des notions :

1) la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers la fonction $f :]0,1[\to \mathbf{R}$;

2) la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur $]0,1[$ vers la fonction $f :]0,1[\to \mathbf{R}$.

Exercice 1. Etudier en fonction du paramètre $\alpha > 0$ la convergence de la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ pour

$$1)\ u_n = \ln(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}),$$

$$2)\ u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}.$$

Exercice 2. 1) Montrer que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-s}}{s^{1/2}} ds$$

est convergente.

2) Montrer que pour $\alpha \geq 1$, on a :

$$|\int_\alpha^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-s}}{s^{3/2}} ds| \leq \mathrm{e}^{-\alpha}\alpha^{-3/2}.$$

3) Soit

$$F(\alpha) = \int_\alpha^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-s}}{s^{1/2}} ds.$$

Déduire de 2) que :

$$F(\alpha) \sim \mathrm{e}^{-\alpha}\alpha^{-\frac{1}{2}} \text{ quand } \alpha \to +\infty.$$

Indication : on pourra effectuer une intégration par parties.

4) En déduire un équivalent quand $\alpha \to +\infty$ de la fonction :

$$G(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha x}}{x^{1/2}} dx.$$

Exercice 3. Etudier la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \ln(1 + \frac{1}{t^2}) dt.$$