Examen de rattrapage de Mathématiques (S3 PMCP)

Durée 3h. Documents et calculatrices interdits

Le 9 Juin 2009.

barême indicatif: 4 ;3 ;3 ;6 ;4

Question de cours

Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbf{R}$, où $I \subset \mathbf{R}$ est un intervalle.

1) Donner la définition de la convergence simple et de la convergence uniforme sur I de la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbf{N}} f_n$.

2) Enoncer le critère de Cauchy pour la convergence uniforme de la série $\sum_{n\in\mathbf{N}} f_n$.

Exercice 1. Etudier la convergence et la convergence absolue de la série de terme général :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cos\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 2. Pour $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$ on pose :

$$u_n(t) = \frac{1}{t^2 + n^2},\ t \in \mathbf{R}$$

1) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge normalement sur $\mathbf{R}$.

2) On pose

$$R(t) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{t^2 + n^2}.$$

Montrer que

$$\lim_{t\to 0} R(t) = \frac{\pi^2}{6}.$$

(Justifier soigneusement votre réponse).

Exercice 3. Pour $n \in \mathbf{N}$ on pose :

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + n^2 x^2},\ x \in \mathbf{R}.$$

1) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbf{N}} f_n$ ne converge pas simplement sur $\mathbf{R}$ mais converge simplement sur $\mathbf{R}^*$. On pose :

$$S(x) := \sum_{n\in\mathbf{N}} f_n(x),\ x \in \mathbf{R}^*.$$

2) Soit $p < q$ deux entiers et soit

$$S_{p,q}(x) = \sum_{n=p}^{q} f_n(x).$$

Vérifier que

$$S_{p,q}(\frac{1}{p}) \geq \frac{1}{2}.$$

Que peut on en déduire pour la convergence uniforme sur $\mathbf{R}^*$ de la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbf{N}} f_n$?
(Justifier soigneusement votre réponse).

3) Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbf{N}} f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$ et sur $]-\infty, -a]$ pour tout $a > 0$.

4) Etudier la continuité et la dérivabilité sur $\mathbf{R}^*$ de la fonction $S(x)$.

5) On s'intéresse au comportement de la fonction $S(x)$ quand $x \to \pm\infty$. Montrer que :

$$S(x) = 1 + \frac{\pi^2}{6x^2} + o(\frac{1}{x^2}), \text{ quand } x \to \pm\infty.$$

Indication : écrire la fonction $x^2(S(x)-1)$ comme la somme d'une série de fonctions et utiliser l'exercice précédent.

Exercice 4.

1) Soient $0 < a < b$. Montrer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$$

est absolument convergente.

2) Soit $\epsilon > 0$. Justifier (en appliquant un résultat du cours) l'identité

$$\int_\epsilon^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \int_\epsilon^{+\infty} \frac{e^{-ax}}{x} dx - \int_\epsilon^{+\infty} \frac{e^{-bx}}{x} dx.$$

3) En déduire que

$$\int_\epsilon^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \int_{a\epsilon}^{b\epsilon} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

4) Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{e^{-t}-1}{t} dt$ est convergente. En déduire que

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{a\epsilon}^{b\epsilon} \frac{e^{-t} - 1}{t} dt = 0.$$

5) En utilisant le point précédent, montrer que

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{a\epsilon}^{b\epsilon} \frac{e^{-t}}{t} dt = \ln(\frac{b}{a}),$$

et en déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x} dx$.