

## Semaine 1: Exercices de révision

### Éléments de corrigé

Les exercices 1 à 3 portent sur les estimateurs, l'exercice 4 sur un exemple d'utilisation de la méthode des moments qui est introduite dans l'exercice 1, les exercices 5 à 7 sur les tests et intervalles de confiance.

#### Exercice 1.

Soit un  $n$ -échantillon iid  $(X_1, \dots, X_n)$  de loi gaussienne d'espérance  $\mu$  et de variance  $\sigma^2 > 0$  finie, toutes les deux inconnues. On s'intéresse à l'estimation de  $\sigma^2$ .

Rappel: La densité de la loi du Khi-deux à  $k$  degrés de liberté  $\chi^2(k)$  est définie sur  $\mathbb{R}^+$  par

$$f(x) = \frac{(1/2)^{k/2}}{\Gamma(k/2)} x^{k/2-1} \exp(-x/2).$$

Son espérance vaut  $k$  et sa variance  $2k$ . On a :  $K_{n-1} = \sum_i (X_i - \bar{X})^2 / \sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$ .

1. Exprimer la variance  $\sigma^2$  en fonction de  $m_1 = \mathbb{E}(X_1)$ , le moment d'ordre 1 et  $m_2 = \mathbb{E}(X_1^2)$ , le moment d'ordre 2. Donner l'expression de l'estimateur empirique de  $m_1$  puis de  $m_2$ . En déduire un estimateur  $V_n$  de  $\sigma^2$ . Cette méthode de construction s'appelle *méthode des moments*.

Quelle est l'espérance de  $V_n$ ? Est-il biaisé pour l'estimation de  $\sigma^2$ ?

**Correction.** On utilise les deux premiers moments:  $m_1 = \mathbb{E}(X_1) = \mu$  et  $m_2 = \mathbb{E}(X_1^2) = \sigma^2 + \mu^2$  qu'on estime respectivement par

$$\hat{m}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i; \quad \hat{m}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$$

La variance de la loi de  $X_1$  est définie par  $\sigma^2 = \mathbb{E}[(X_1 - \mathbb{E}(X_1))^2] = \mathbb{E}(X_1^2) - (\mathbb{E}(X_1))^2 = m_2 - m_1^2$ . D'où

$$V_n = \hat{m}_2 - \hat{m}_1^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

On a  $V_n = \frac{\sigma^2}{n} K_{n-1}$ , d'où l'espérance  $\mathbb{E}(V_n) = \frac{n-1}{n} \sigma^2$ . L'estimateur est donc biaisé.

Remarque: ce résultat est plus général, et pas restreint au cas d'un échantillon gaussien i.i.d.. En effet, sans faire appel à l'hypothèse gaussienne, on peut écrire:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(V_n) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}((X_i - \mu + \mu - \bar{X})^2) \\ &= \frac{1}{n} \sum_i \mathbb{E}((X_i - \mu)^2) + \frac{2}{n} \mathbb{E} \left( \sum_i (X_i - \mu)(\mu - \bar{X}) \right) + \frac{n}{n} \mathbb{E}((\mu - \bar{X})^2) \\ &= \frac{n}{n} \sigma^2 - 2 \text{var}(\bar{X}) + \text{var}(\bar{X}) = \frac{n}{n} \sigma^2 - \text{var}(\bar{X}) = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \frac{n-1}{n} \sigma^2 \end{aligned}$$

2. Calculer son risque quadratique. L'estimateur  $V_n$  est-il consistant pour estimer  $\sigma^2$ ?

**Correction.** Dans le cas gaussien, on a, en utilisant les propriétés de la variance d'une loi du Khi-deux

$$\text{var}(V_n) = \text{var}\left(\frac{\sigma^2}{n}K_{n-1}\right) = 2(n-1)\frac{\sigma^4}{n^2}$$

$$\begin{aligned} R(V_n) &= \text{var}(V_n) + (\mathbb{E}(V_n) - \sigma^2)^2 \\ &= 2(n-1)\frac{\sigma^4}{n^2} + \left(\frac{n-1}{n}\sigma^2 - \sigma^2\right)^2 \\ &= 2(n-1)\frac{\sigma^4}{n^2} + \frac{\sigma^4}{n^2} = (2n-1)\frac{\sigma^4}{n^2} \end{aligned}$$

Le risque tendant vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini, l'estimateur est convergent en moyenne quadratique, donc consistant (et donc asymptotiquement sans biais).

3. Proposer un estimateur  $\hat{\sigma}^2$  sans biais. Comparer son risque avec celui de l'estimateur empirique.

**Correction.** L'estimateur  $\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \sigma^2 K_{n-1} / (n-1)$  est sans biais  $\mathbb{E}(\hat{\sigma}_n^2) = \sigma^2$  et de variance égale à son risque

$$\text{var}(\hat{\sigma}_n^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1} = R(\hat{\sigma}_n^2)$$

On en déduit que  $V_n$  **domine**  $\hat{\sigma}_n^2$ , c'est à dire que son risque est inférieur à celui de  $\hat{\sigma}_n^2$ , quelle que soit la valeur de  $\sigma^2$ :

$$\begin{aligned} R(\hat{\sigma}_n^2) - R(V_n) &= \frac{2\sigma^4}{n-1} - (2n-1)\frac{\sigma^4}{n^2} \\ &= \frac{\sigma^4}{n^2(n-1)}(2n^2 - (n-1)(2n-1)) \\ &= \frac{3n-1}{(n-1)n^2}\sigma^4 > 0 \end{aligned}$$

4. Déterminer  $a$  pour que  $T_a = a \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$  soit le meilleur estimateur parmi les estimateurs de cette forme.

**Correction.**

$$R(T_a) = \sigma^4[2a^2(n-1) + a^2(n-1)^2 + 1 - 2a(n-1)]$$

On dérive par rapport à  $a$ , d'où risque minimum pour  $a = 1/(n+1)$ . Le risque vaut alors  $R(T_{1/(n+1)}) = 2\sigma^4/(n+1)$ . Cet estimateur est biaisé, et plus que l'estimateur empirique, mais de variance moindre ce qui compense. Il est uniformément meilleur que l'estimateur empirique qui n'est donc pas non plus admissible.

$$\frac{R(V_n) - R(T_{1/(n+1)})}{\sigma^4} = \frac{2n-1}{n^2} - \frac{2}{n+1} = \frac{n-1}{(n+1)n^2} > 0$$

*Mais on peut préférer perdre un peu en risque pour gagner un estimateur sans biais, surtout quand la différence de risque est faible*

$$\frac{R(\hat{\sigma}^2) - R(T_{1/(n+1)})}{\sigma^4} = \frac{2}{n-1} - \frac{2}{n+1} = \frac{4}{n^2+1} > 0$$

5. Vrai ou Faux?

- (a) Un estimateur de risque minimum est forcément de variance minimum
- (b) Un estimateur non biaisé est de risque minimum
- (c) Un estimateur dont la variance tend vers 0 est consistant

**Correction.** (a): faux : l'estimateur  $T_{1/(n+1)}$  est de risque minimum (parmi les estimateurs  $T_a$ ), mais  $T_{1/(n+2)}$  est de variance inférieure.

(b): faux : l'estimateur biaisé  $T_{1/(n+1)}$  est de risque inférieur à celui de  $T_{1/(n-1)}$  qui est sans biais.

(c): faux, dans ce cas, il faudrait aussi que son biais tende aussi vers 0.

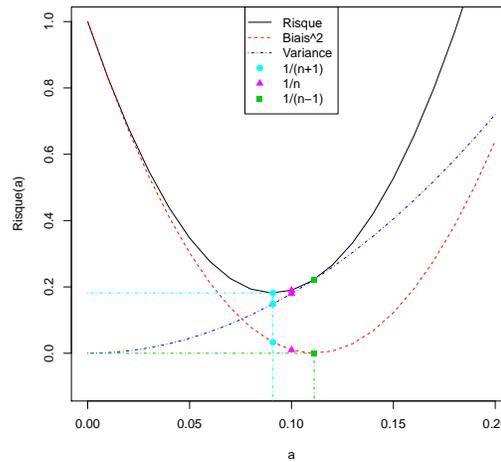


Figure 1: Risque de différents estimateurs de la variance

6. L'estimateur  $\sqrt{\hat{\sigma}^2}$  est-il biaisé pour estimer  $\sigma$ ? Commenter.

**Correction.** On commence par calculer

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\sqrt{K_{n-1}}) &= \int_{\mathbb{R}^+} \sqrt{x} \frac{(1/2)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} x^{\frac{n-1}{2}-1} e^{-x/2} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} \frac{(1/2)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-x/2} dx \\ &= \frac{(1/2)^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})(1/2)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{(1/2)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-x/2} dx \\ &= \sqrt{2} \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \end{aligned}$$

D'où

$$\mathbb{E}(\sqrt{\hat{\sigma}^2}) = \sigma \sqrt{\frac{2}{n-1}} \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}$$

et l'estimateur est biaisé. Donc:  $q(\hat{\theta})$  peut être biaisé pour estimer  $q(\theta)$ , même si  $\hat{\theta}$  ne l'est pas pour estimer  $\theta$  (pas de "lemme de la fonction continue" pour le biais...).

**Exercice 2.**

Soit un  $n$ -échantillon  $(X_1, \dots, X_n)$  iid de loi de Bernoulli  $\mathcal{B}(1, p)$

1. Soit  $\hat{p} = \sum_{i=1}^n X_i/n$ .  $\hat{p}$  est-il un estimateur de  $p$  biaisé? consistant?

**Correction.**  $\hat{p} = \bar{X}$ , non biaisé, (fortement) consistant (LGN), consistant en moyenne quadratique (risque tend vers 0).

2. Soit  $S_n = \sum_i X_i$ . Déterminer la loi de  $S_n$ .

Soit  $g(S_n)$  un autre estimateur sans biais de  $p$  fonction de  $S_n$ . Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$

$$\sum_{k=0}^n \left( g(k) - \frac{k}{n} \right) \binom{n}{k} x^k = 0$$

En déduire que  $\hat{p}$  est le seul estimateur sans biais de  $p$  fonction de  $S_n$ .

**Correction.**  $S_n$  suit une loi binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$  d'espérance  $np$ . On a:

$$\mathbb{E}_p(g(S_n)) = \sum_{k=0}^n g(k) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = p = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \left( g(k) - \frac{k}{n} \right) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n \left( g(k) - \frac{k}{n} \right) \binom{n}{k} \left( \frac{p}{1-p} \right)^k &= 0 \end{aligned}$$

valable pour tout  $p \in [0; 1[$ , donc pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$

$$\sum_{k=0}^n \left( g(k) - \frac{k}{n} \right) \binom{n}{k} x^k = 0$$

Un polynôme de degré  $n$  nul pour une infinité de valeurs est nul. Donc  $g(k) = k/n$  pour  $k = 0, \dots, n$ , donc  $g(S_n) = \bar{X}$ .

3. Construire un estimateur de la variance de  $\bar{X}$  en utilisant uniquement le premier moment, puis en utilisant également le moment d'ordre 2. Montrer que les deux estimateurs coïncident.

**Correction.** On a  $\text{var}(\bar{X}) = p(1-p)/n$ , d'où l'estimateur plug-in  $\bar{X}(1-\bar{X})/n$ . Par ailleurs,  $\widehat{\text{var}}(\bar{X}) = \widehat{\text{var}}(X)/n$  qui peut s'estimer grâce au moment moment d'ordre 2

$$\widehat{\text{var}}(\bar{X}) = \widehat{\text{var}}(X)/n = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - (\bar{X})^2 \right) = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - (\bar{X})^2 \right) = \frac{1}{n} \bar{X}(1-\bar{X})$$

On a utilisé le fait que  $X_i = X_i^2$  pour une loi de Bernoulli. Dans cet exemple, les deux estimateurs coïncident.

4. Montrer qu'il n'y a pas unicité de l'estimateur des moments en considérant le cas de l'estimation du paramètre  $\lambda$  de la loi exponentielle (de densité  $f(x) = \lambda^{-1} \exp(-x/\lambda)$  sur  $\mathbb{R}^+$ ) et ses premier et deuxième moments.

**Correction.** Dans le cas de la loi exponentielle de densité sur  $\mathbb{R}^+$  définie par

$$f(x) = \frac{1}{\lambda} \exp -\frac{x}{\lambda}$$

On a:  $\mathbb{E}(X) = \lambda$ ,  $\text{var}(X) = \lambda^2 = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$ .

D'où  $\hat{\lambda}_1 = \bar{X}$ ;  $\hat{\lambda}_2 = \sqrt{\widehat{X^2} - (\bar{X})^2}$  qui sont en général différents.

### Exercice 3.

Soit  $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$  un  $n$ -échantillon iid de loi mère telle que  $\mathbb{E}(X_1^2)$  et  $\mathbb{E}(Y_1^2)$  soient finis. Soit

$$C_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$$

1. Montrer que  $C_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i Y_i - \bar{X} \bar{Y}$ .

**Correction.**

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) \\ &= \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n X_i Y_i - \sum_i X_i \bar{Y} - \sum_i Y_i \bar{X} + n \bar{X} \bar{Y} \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i Y_i - 2 \bar{X} \bar{Y} + \bar{X} \bar{Y} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i Y_i - \bar{X} \bar{Y} \end{aligned}$$

2. Montrer que  $C_n$  est biaisé pour estimer  $\text{cov}(X_1, Y_1)$ .

**Correction.** Par linéarité de l'espérance et indépendance des  $(X_1Y_1, \dots, X_nY_n)$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(C_n) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_iY_i) - \mathbb{E}(\bar{X}\bar{Y}) \\ &= \frac{n}{n} \mathbb{E}(X_1Y_1) - \frac{1}{n^2} \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^n X_i \sum_{i=1}^n Y_j \right) \\ &= \mathbb{E}(X_1Y_1) - \frac{1}{n^2} \left( \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_iY_i) + \sum_{i \neq j} \mathbb{E}(X_iY_j) \right) \\ &= \mathbb{E}(X_1Y_1) - \frac{n}{n^2} \mathbb{E}(X_1, Y_1) - \frac{n(n-1)}{n^2} \mathbb{E}(X_i) \mathbb{E}(Y_j) \\ &= \frac{n-1}{n} \text{cov}(X_1, Y_1) \end{aligned}$$

L'estimateur est donc biaisé, mais asymptotiquement sans biais.

3. Montrer que  $C_n$  est un estimateur consistant de  $\text{cov}(X_1, Y_1)$ .

**Correction.** Par la LGN,  $\bar{X}$  est (fortement) consistant pour estimer  $\mathbb{E}(X)$ ,  $\bar{Y}$  est (fortement) consistant pour estimer  $\mathbb{E}(YX)$ . Comme  $E(|XY|) \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)}$ , on peut aussi appliquer la LGN à  $\bar{X}\bar{Y}$ . Donc  $C_n$  est (fortement) consistant

4. Proposer un estimateur consistant et sans biais de  $\text{cov}(X_1, Y_1)$ .

**Correction.**  $\tilde{C}_n = nC_n/(n-1)$  est sans biais, et consistant car si  $T_n$  est une suite d'estimateur consistant de  $\theta$  et  $a_n$  une suite de réels convergeant vers  $a$ , alors  $a_n T_n$  est un estimateur consistant de  $a\theta$ .

#### Exercice 4.

On considère un  $n$ -échantillon de loi beta de densité définie sur  $[0; 1]$  par

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)} = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$$

où  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$  On rappelle que

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \text{ et } \text{var}(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$$

Construire un estimateur des moments de  $(\alpha, \beta)$ . Est-il consistant?

**Correction.** On exprime le moment d'ordre 1 (qui ne peut pas être nul)

$$\mathbb{E}(X) = m_1 = \alpha/(\alpha + \beta) \Leftrightarrow \beta = \frac{\alpha(1 - m_1)}{m_1}$$

puis le moment d'ordre 2

$$\begin{aligned}
 V &= m_2 - m_1^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)} \\
 &= \frac{\alpha\alpha(1 - m_1)/m_1}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)} = \frac{m_1(1 - m_1)}{\alpha/m_1 + 1} = \frac{m_1^2(1 - m_1)}{\alpha + m_1}
 \end{aligned}$$

d'où  $\alpha = m_1^2(1 - m_1)/V - m_1$  qu'on reporte dans l'expression de  $\beta$

$$\beta = \left( \frac{m_1^2(1 - m_1)}{V} - m_1 \right) \frac{1 - m_1}{m_1} = \frac{m_1 - m_2}{V} (1 - m_1)$$

La consistance forte de  $m_1$  et  $m_2$  entraîne celle de l'estimateur des moments de  $\alpha$  et  $\beta$

**Exercice 5.**

Soit  $(X_1, \dots, X_{25})$  un échantillon de loi gaussienne d'espérance  $\mu$  inconnue et de variance  $v = 100$  connue.

1. Construire un test de niveau  $\alpha = 0.10$  de l'hypothèse nulle " $\mu = 0$ " contre l'hypothèse alternative " $\mu = 1.5$ ", fondé sur la moyenne empirique, estimateur du paramètre  $\mu$ .  
 On observe  $\bar{x} = 1$ . Quelle est la décision du test?  
 Quelle est l'erreur de seconde espèce du test?
2. Répondre à la question précédente si  $v = 9$ .
3. Comment modifier le test si l'alternative est " $\mu = -1.5$ "?
4. On souhaite tester  $(H_0) : \mu = 2$  contre  $(H_1) : \mu < 2$ . Définir la région de rejet. Calculer la puissance du test et étudier ses variations en fonction de  $\mu$ ,  $n$  et  $\sigma$ .

**Correction.** 1. On suit la méthodologie:

- Modèle  $X \sim \mathcal{N}(\mu, v Id_n)$ , de variance connue
- Hypothèses données dans l'énoncé:  $(H_0) : \mu = 0$  contre  $(H_1) : \mu = 1.5$
- La statistique naturelle est  $T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{v/n}}$ . Sous  $H_0$ ,  $\mu = 0$ , d'où  $T = \frac{\bar{X}}{2}$  a pour loi la loi gaussienne centrée réduite.
- Règle de décision:  $T$  prend de plus grandes valeurs sous  $H_1$ . On propose donc la région de rejet  $\mathcal{R} = \{T > q_{0.9}^* = 1.28\}$  de risque  $\alpha = 10\%$ , avec  $q_{0.9}^*$  le quantile d'une loi gaussienne centrée réduite d'ordre 0.9
- décision: On compare la valeur observée de  $T$ ,  $t^{obs} = 0.5$  au quantile  $q_{0.9}^* = 1.28$ , et on ne rejette pas  $H_0$ : compte-tenu de la variabilité de l'échantillon, une valeur observée de  $\bar{X}$  plus proche de  $(H_1)$  que de  $H_0$  ne permet pas de rejeter  $(H_0)$ .

Le risque de deuxième espèce est  $\beta = \mathbb{P}_{H_1}(T \leq 1.28) = \mathbb{P}\left(\frac{\bar{X}-1.5}{2} \leq \frac{2*1.28-1.5}{2}\right) = 0.7$ .  
 En gardant  $H_0$ , le risque de se tromper est de 70%.

2. Si  $v = 9$  (moins de variabilité) :  $t^{obs} = 5/3 = 1.66$ ; on rejette  $H_0$ . Le risque de seconde espèce est  $\beta = \mathbb{P}\left(\frac{\bar{X}-1.5}{3/\sqrt{9}} \leq 5/3 * (3/5 * 1.28 - 1.5)\right) = 0.11$ . Le test est plus puissant.
3. La région de rejet utilisée dans les questions précédentes  $\{T > q_{0.9}^*\}$  est de niveau  $\alpha$ , mais la puissance du test est alors très faible pour tester la nouvelle hypothèse ( $H_1$ ), en particulier inférieure au risque de première espèce  $\alpha$ . On dit que le test est biaisé. En effet, en notant  $\mu_1 = -1.5$ , on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\mu_1} \left( \frac{\bar{X} - \mu_1 + \mu_1 - 0}{2} > q_{0.9}^* \right) &= \mathbb{P}_{\mu_1} \left( \frac{\bar{X} - \mu_1}{2} > 1.28 + 1.5/2 \right) \\ &< \mathbb{P}_{\mu_1} \left( \frac{\bar{X} - \mu_1}{2} > 1.28 \right) = \alpha = 0.1 \end{aligned}$$

La région de rejet de la forme  $\{T < -1.28\}$ , est plus puissante que la précédente pour tester la nouvelle hypothèse alternative.

4. La stat de test  $T = (\bar{X} - 2)/\sqrt{v/n}$  suit sous ( $H_0$ ) ( $\mu = \mu_0 = 2$ ) une loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ . L'alternative est ( $H_1$ ) :  $\mu = \mu_1 < 2$  qui détermine le côté de la région de rejet  $\mathcal{R}\{T < q^*\}$ . L'alternative étant composite, la puissance  $\pi(\mu_1)$  est une fonction de  $\mu_1 \in ]-\infty; 2[$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\mu_1}(\mathcal{R}) &= \mathbb{P}_{\mu_1} \left( \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} < q_{\alpha}^* \right) \\ &= \mathbb{P}_{\mu_1} \left( \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu_1}{\sigma} < q_{\alpha}^* + \sqrt{n} \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma} \right) \\ &= F^* \left( q_{\alpha}^* + \sqrt{n} \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma} \right) = \pi(\mu_1) \end{aligned}$$

où  $F^*$  désigne la fonction de répartition de la loi gaussienne centrée réduite.

- Quand  $n$  tend vers l'infini, la puissance tend vers 1, le test est convergent
- Quand  $\mu_1 = \mu_0$ ,  $\alpha = \pi(\mu_0)$  et pour tout  $\mu_1 < \mu_0$ ,  $F^* \left( q_{\alpha}^* + \sqrt{n} \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma} \right) > F^*(q_{\alpha}^*) = \alpha$ . Le test est sans biais.
- quand  $\mu_1$  s'écarte de  $\mu_0$  vers les valeurs inférieure, la puissance augmente
- Plus  $\sigma$  est grand, moins le test est puissant.

### Exercice 6.

On dispose de 100 mesures de la vitesse de la lumière ( $\text{km s}^{-1}$ ) effectuées en 1879 par Michelson, lors de la célèbre expérience qui lui valut le prix Nobel de physique en 1907<sup>1</sup>. Avec les instruments de cette époque, les scientifiques avaient calculé une vitesse de la lumière avec une légère imprécision:  $c_{1879} = 299840 \text{ km/s}$ . Aujourd'hui, la vitesse de la lumière est établie à  $c_{2018} = 299792 \text{ km/s}$ .

Dans tout l'exercice, les niveaux des tests sont pris à 5%. On modélisera les mesures de Michelson comme des variables aléatoires iid gaussiennes d'espérance et de variance inconnues.

<sup>1</sup>John Rice: Mathematical Statistics and Data Analysis, Duxbury Press 1995

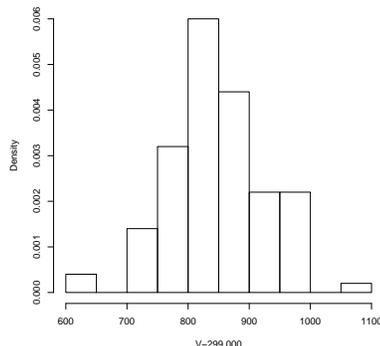


Figure 2: Histogramme des mesures de Michelson

1. On souhaite tester l'hypothèse nulle que les mesures de Michelson sont conformes à la valeur de la vitesse de la lumière communément admise en 1879.

Construire un test approprié.

Sur l'échantillon de Michelson, la moyenne observée vaut  $m = 299852$  et l'écart-type corrigé vaut  $s = 79$ . Quelle décision prendre et à quel risque?

Calculer la p-value et vérifier cette décision.

2. Construire un intervalle de confiance bilatère de niveau 95% de la vitesse de la lumière à partir de l'échantillon de Michelson.
3. Les observations de Michelson sont-elles en accord avec la valeur de la vitesse de la lumière mesurée aujourd'hui? Justifier la réponse par un test.
4. On souhaite tester la précision  $\sigma$  de la mesure. Définir la statistique de test, la région de rejet, la p-value, la décision et son risque dans les deux cas suivants:

(a)  $(H_0) : \sigma = 90$  contre  $(H_1) : \sigma < 90$ .

(b) L'écart-type  $\sigma$  de la mesure peut-il être considéré comme égal à 91 ? Commenter.

**Correction.** 1. On teste  $(H_0) : \mu = c_{1879}$  contre  $(H_1) : \mu \neq c_{1879}$ . On utilise le test de Student dont la statistique  $T = \sqrt{n}(\bar{X} - c_{1879})/\hat{\sigma}$  (avec  $\hat{\sigma}^2$  l'estimateur non biaisé de la variance) suit sous  $(H_0)$  une loi de Student  $\mathcal{T}(n-1)$ . La région de rejet du test bilatéral est  $\mathbb{P}_{(H_0)}(|T| > q_{1-\alpha/2})$  où  $q_{1-\alpha/2}$  est le quantile de la loi  $\mathcal{T}(n-1)$  d'ordre  $1 - \alpha/2$ .

A.N.:  $t_{obs} = \sqrt{n}(m - c_{1879})/s \simeq 1.52$  et  $|t_{obs}| < 1.98 = q_{0.975}$ . On conserve la valeur  $c_{1879}$ . On prend un risque (de seconde espèce) inconnu en prenant cette décision.

On a  $pval = \mathbb{P}_{(H_0)}(|T| > t_{obs}) = 2\mathbb{P}_{(H_0)}(T < -|t_{obs}|) = 2F_{\mathcal{T}(n-1)}(-1.52) \simeq 0.13 > \alpha = 5\%$ , même décision.

2. *Intervalle de confiance de Student. Soit  $q = q_{1-\alpha/2}^{T_{n-1}}$  le quantile d'ordre  $1 - \alpha/2$  de la loi de Student à  $n - 1$  degrés de liberté. Retrouver l'expression*

$$IC = [\bar{X} - q\hat{\sigma}/\sqrt{n}; \bar{X} + q\hat{\sigma}/\sqrt{n}]$$

*AN: l'IC observé: [299836; 299868].*

3. *Même test de Student avec  $(H_0) : \mu = c_{2018}$  contre  $(H_0) : \mu \neq c_{2018}$ , la statistique de test est maintenant  $T = \sqrt{n}(\bar{X} - c_{2018})/\hat{\sigma}$*

*A.N.:  $t_{obs} \simeq 7.59 > q_{0.975}$ ,  $pval \simeq 2.10^{-11} < 5\% = \alpha$ . On rejette  $(H_0)$  au risque de première espèce  $\alpha$ . La p-value étant très faible, le test est hautement significatif pour dire que la valeur de 1879 n'est pas en accord avec celle d'aujourd'hui.*

4. *Test de la variance d'un échantillon gaussien iid. La statistique de test (basée sur  $\hat{\sigma}^2$  l'estimateur non biais de la variance) est  $K = (n - 1)\hat{\sigma}^2/\sigma_0^2$  et suit sous  $(H_0)$  une loi du Khi-deux à  $(n-1)$  ddl.*

(a) *Région de rejet unilatérale à gauche de niveau  $\alpha$ :*

$$\mathbb{P}[K < q_{\chi^2(n-1)}^{(\alpha)}] = \alpha$$

*A.N.:  $\sigma_0 = 90$ ;  $k_{obs} = (100 - 1) \times (79/90)^2 = 76.3$ ,  $pval = \mathbb{P}(K < k_{obs}) = F_{\chi^2(100-1)}(k_{obs}) = 0.04$ . On rejette  $(H_0)$ . La variance est inférieure à valeur 90 avec un risque de première espèce  $\alpha = 5\%$ .*

(b) *Région de rejet bilatérale de niveau  $\alpha$ :*

$$\mathbb{P}[\{K < q_{\chi^2(n-1)}^{(\alpha/2)}\} \cup \{q_{\chi^2(n-1)}^{(1-\alpha/2)} < K\}] = \alpha$$

*A.N.:  $\sigma_0 = 91$ ;  $k_{obs} = (100 - 1) \times (79/91)^2 = 74.6$ ,  $q_{\chi^2(n-1)}^{(\alpha/2)} = 77$ ,  $pval = 2\mathbb{P}(K < k_{obs}) = 2F_{\chi^2(100-1)}(k_{obs}) = 0.064$ . On conserve la valeur 91 avec un risque de seconde espèce inconnu.*

*Ceci n'est pas incohérent avec le résultat précédent, les hypothèses n'étant pas définies sur les mêmes intervalles d'une part, et les deux décisions ne sont pas prises avec les mêmes risques d'autre part.*

### Exercice 7.

Un fournisseur de pièces mécaniques indique que son taux de pièces défectueuses ne dépasse pas 5%. Pour tester cette affirmation, le service qualité prélève au hasard 200 pièces dans un lot de 10000 pièces et trouve 14 pièces défectueuses.

Peut-on affirmer, avec une faible erreur (5%) que le lot ne remplit pas la condition de qualité annoncée?

Calculer la p-value du test.

Construire un intervalle de confiance bilatéral de niveau 95%.

**Correction.** attention, le 5% correspondant à la proportion de pièces n'a rien à voir avec le 5% du niveau du test.

1. *modèle: La population est suffisamment grande pour la considérer comme infinie. Echantillon de taille  $n = 200$  de loi de Bernoulli:  $X_i \sim_{iid} \mathcal{B}(1, \pi)$ .*
2. *hypothèses: on teste  $(H_0) : \pi \leq \pi_0 = 5\%$  contre  $(H_1) : \pi > 5\%$*
3. *Statistique de test  $T = \sqrt{n}(\bar{X} - \pi_0) / \sqrt{\pi_0(1 - \pi_0)}$  qui suit (asymptotiquement) sous  $(H_0)$  une loi gaussienne centrée réduite. L'approximation gaussienne se justifie car  $n\pi_0 > 5$  et  $n(1 - \pi_0) > 5$ .*
4. *Région de rejet (asymptotique, approchée à distance finie)  $\mathbb{P}(T > q_{1-\alpha}^*) \simeq \alpha$  où  $q_{1-\alpha}^*$  est le quantile de  $\mathcal{N}(0, 1)$  d'ordre  $1 - \alpha$ .*
5. *décision: La statistique observée vaut  $t_{obs} = 1.298 < 1.64 = q_{0.95}^*$ . Donc, au risque (de première espèce  $\alpha = 5\%$ ), on ne peut rejeter  $(H_0)$ . On considère donc que le lot remplit la condition de qualité annoncée, et cette décision est prise avec une erreur de seconde espèce inconnue.*

*La pvalue:  $\mathbb{P}(T > t_{obs}) = 1 - F^*(t_{obs}) = 0.097 > 5\%$  où  $F^*$  est la fonction de répartition de  $\mathcal{N}(0, 1)$ . On conserve  $(H_0)$ .*

*IC asymptotique gaussien qui se déduit du test  $(H_0) : \pi = \pi_0$  contre  $(H_1) : \pi \neq \pi_0$  construit avec la statistique de test  $T$ :*

$$IC = [\bar{X} - q_{0.975}^* \sqrt{\pi_0(1 - \pi_0)} / \sqrt{n}; \bar{X} + q_{0.975}^* \sqrt{\pi_0(1 - \pi_0)} / \sqrt{n}]$$

*Une version alternative, qui ne découle pas de l'équivalence avec le test précédent:  $IC = [\bar{X} - q_{0.975}^* \sqrt{\bar{X}(1 - \bar{X})} / \sqrt{n}; \bar{X} + q_{0.975}^* \sqrt{\bar{X}(1 - \bar{X})} / \sqrt{n}]$ . Justifier sa construction. Établir l'équivalence avec un test à préciser.*