Semaine 2: Estimateur du maximum de vraisemblance

Objectifs de la séance:

- Distinguer densité et vraisemblance
- Calculer la borne de Cramér-Rao, déterminer si un estimateur est efficace
- Calculer un EMV et déterminer sa loi asymptotique
- Révision: construction d'un intervalle de confiance

La séance de TD comprend les exercices 1 à 3. Les autres exercices permettent de s'entraîner et d'approfondir.

1 Vraisemblance

Comparer le domaine de définition de la densité d'un n-échantillon iid d'une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1,\theta)$ et celui de sa vraisemblance; donner l'allure de la vraisemblance; déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance; calculer l'information de Fisher et la borne de Cramer-Rao.

Reprendre ces questions pour un n-échantillon de loi Uniforme $\mathcal{U}_{[0;\theta]}$ $(\theta > 0)$, puis de loi Gaussienne $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

2 Loi exponentielle

Soit un n-échantillon de loi exponentielle dépendant du paramètre $\mu > 0$ et définie pour $x \geq 0$ par $f(x) = \frac{1}{\mu}\exp(-\frac{x}{\mu})$. On rappelle que $\mathbb{E}(X) = \mu$ et $\text{var}(X) = \mu^2$.

1. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\mu}$. Celui-ci est-t-il sans biais? efficace ? consistant ? uniformément de variance minimum parmi les estimateurs sans biais (UVMB)?

2. Déterminer la loi de $\widehat{\mu}$ à distance finie, puis sa loi asymptotique. Déterminer un intervalle de confiance bilatère (probabilité symétrique) de μ de niveau $1-\alpha$.

   Rappel: la somme de n variables indépendantes de loi exponentielle d'espérance 1 suit une loi Gamma $Ga(n,1)$.

3. On estime maintenant $\lambda = 1/\mu$.
   (a) Quelle est la borne de Cramer-Rao pour un estimateur sans biais de λ?
   (b) Montrer que l'estimateur $\widehat{\lambda} = (n-1)/\sum X_i$ est non biaisé pour l'estimation de λ. Est-il efficace? Asymptotiquement efficace? Déterminer sa loi asymptotique.

3 Loi de Bernoulli

Soit un n-échantillon de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. Déterminer la borne de Cramer-Rao pour un estimateur sans biais de la cote $p/(1-p)$.Proposer un estimateur asymptotiquement efficace.

4 Loi de Weibull

La durée de vie d'un matériel peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit une loi de Weibull $\mathcal{W}(\lambda, 1/2)$ de densité

$$f(x, \lambda) = \frac{1}{2\lambda\sqrt{x}} \exp\left(-\frac{\sqrt{x}}{\lambda}\right) \mathbb{1}_{x>0}$$

Son espérance vaut $\mathbb{E}(X) = \lambda\Gamma(3) = 2\lambda$ et sa variance $\mathrm{var}(X) = \lambda^2\Gamma(5) - \mathbb{E}(X)^2$.

1. La loi de Weibull $\mathcal{W}(\lambda, 1/2)$ appartient-elle à la famille exponentielle? Proposer une statistique exhaustive.
2. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\lambda}$ de λ à partir d'un n-échantillon i.i.d. $(X_1, \ldots, X_n)$ de loi $\mathcal{W}(\lambda, 1/2)$.
3. Déterminer la loi de $\widehat{\lambda}$. Aide: montrer que $\sqrt{X}$ suit une loi exponentielle d'espérance à déterminer, et en déduire que si $(X_1, \ldots, X_n)$ est un n-échantillon i.i.d. de loi $\mathcal{W}(\lambda, 1/2)$, alors $2\sum_i \sqrt{X_i}/\lambda \sim \chi^2(2n)$.
4. Calculer l'information de Fisher. $\widehat{\lambda}$ est-il efficace?

5 Loi uniforme

Soit $X_1, \ldots, X_n$ un n-échantillon de loi uniforme $\mathcal{U}_{[0;\theta]}$, où $\theta > 0$ est le paramètre inconnu.

1. Déterminer les performances de l'estimateur des moments.
2. Montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance est $T_n = \max_i X_i$, de densité
$$h_\theta(t) = \frac{n}{\theta^n} t^{n-1} \mathbb{1}_{[0;\theta]}(t).$$
3. Montrer que T_n est biaisé. En déduire un estimateur non biaisé $\tilde{T}_n$. $\tilde{T}_n$ est-il efficace?
4. Montrer que T_n est consistant, puis la convergence suivante: $n(1 - T_n/\theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{E}(1)$.

Note: La densité d'une loi du Khi-deux $\chi^2(k)$ à k degrés de liberté est définie pour $x \geq 0$ par $f_\chi(x) = \frac{2^{-k/2}}{\Gamma(k/2)} x^{k/2-1} \exp(-x/2)$ La densité d'une loi Gamma $\mathcal{G}a(n, \theta)$ est définie pour $x \geq 0$ par $f_\Gamma(x) = \frac{\theta^{-n}}{\Gamma(n)} x^{n-1} \exp(-x/\theta)$