Cours accéléré Statistiques
Partie 1: Bases de la statistique inférentielle
Master 2 Mathématiques et Applications

Christine Keribin

[1]Laboratoire de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay

2023-2024

université PARIS-SACLAY

FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY

L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD devient en 2020 L'UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY

Contenu

- Concepts fondamentaux en statistique : estimateur, intervalle de confiance, test ; estimateur du maximum de vraisemblance
- Modèle linéaire et applications : régression multiple, anova
- Principes de l'analyse bayésienne
- Applications pratiques avec le logiciel R.

`https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~keribin/EnseignementRaN.htm`

Bibliographie

- V. Rivoirard et G. Stoltz.
  Statistique en action.
  Vuibert, Paris, 2009.
- M. Lejeune.
  Statistique : la théorie et ses applications
  Springer, 2010.
- J. Pagès.
  Statistique générales pour utilisateurs.
  Presses Universitaires de Rennes, Rennes, 2005.
- P.-A. Cornillon et autres.
  Statistiques avec R.
  Presses Universitaires de Rennes, Rennes, 2008.
- C. Keribin.
  De la modélisation statistique à l'apprentissage supervisé.
  poly.

Introduction

- On dispose d'un échantillon de 6 relevés du temps de trajet (en min) domicile/bureau d'un employé

```
x=(15,17,15,18,16,15)
```

$$\bar{x} = \frac{1}{6}\sum_i x_i = 16$$

- Quelle est la durée moyenne d'un trajet sur l'année ?
- Peut-on affirmer avec peu de risque que la durée moyenne d'un trajet est supérieure à 15 min ?
- La durée d'un trajet a-t-elle augmenté d'une année sur l'autre ?
- Y a-t-il des facteurs qui influencent la durée de trajet ?
- Quelle sera la durée de son trajet demain ?

Introduction

- Population : ensemble d'objets "équivalents" (individus, unités statistiques), sur lesquels on observe des caractéristiques (variables qualitatives ou quantitatives)
  - finie : recensement
  - infinie : sondage
- Étude de la variabilité
- Statistique exploratoire / statistique inférentielle

Statistique inférentielle

- Probabilité : étudier les propriétés d'une loi connue
- Statistique : à partir d'un ensemble d'observations d'une loi inconnue, inférer/apprendre des propriétés de cette loi pour répondre à une question

  $\hookrightarrow$ résoudre un problème inverse
  - Modéliser
  - Estimer
  - Utiliser

Quelques objectifs de la statistique inférentielle

- estimation : valeur d'un paramètre d'intérêt, intervalle de confiance
- test : comparaison à une situation de référence, de deux échantillons, ...
- prédiction pour une nouvelle unité non encore observée
- classification dans un groupe

Problématiques :

- construction, comparaison, choix des procédures
- fiabilité (risque) de l'information obtenue ?

Sommaire

Modélisation statistique

Modéliser l'expérience, c'est proposer une loi théorique pour l'échantillon $X = (X_1, \ldots, X_n)$.

- Modèle : espace probabilisé $\mathcal{M} = (\mathcal{X}^n, \mathcal{A}^n, (\mathbb{P}_\theta^n)_{\theta \in \Theta})$
  - $\mathcal{X}^n$ espace des réalisations, $\mathcal{A}^n$ tribu des événements
  - $(\mathbb{P}_\theta^n)_{\theta \in \Theta}$ famille de lois de probabilité

  Quand il existe $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $\Theta \subset \mathbb{R}^d$, le modèle est dit *paramétrique*
- Une observation est une variable aléatoire X à valeur dans $\mathcal{X}^n$ et dont la loi appartient à $(\mathbb{P}_\theta^n)_{\theta \in \Theta}$
- Un n-échantillon i.i.d. est une observation $X = (X_1, \ldots, X_n)$ de n variables aléatoires de même loi η_θ et indépendantes. Alors, $\mathbb{P}_\theta^n = (\eta_\theta)^{\otimes n}$
- Les données sont les réalisations (valeurs) $x_1, \ldots, x_n$ prises par l'échantillon $X_1, \ldots, X_n$

Exemples de modèles (simples)

- Etude de la moyenne (espérance) d'un temps de trajet : $\mathcal{M} = (\mathbb{R}^n, \mathcal{A}^n, \mathbb{P}_\theta^{\otimes n}, \theta \in \Theta)$

$$X_i \sim_{i.i.d.} \mathbb{P}(\mu, \sigma^2)$$

- Comparaison du rendement de maïs sous deux conditions de culture

$$X \sim \mathcal{N}^{\otimes n}(\mu_x, \sigma_x^2) \text{ et } Y \sim \mathcal{N}^{\otimes m}(\mu_y, \sigma_y^2) \text{ indépendants}$$

- Estimation d'une proportion par sondage $\mathcal{M} = (\{0,1\}^n, \mathcal{A}^n, \mathcal{B}_\pi^{\otimes n}, \pi \in [0;1])$

$$X_i \sim_{i.i.d.} \mathcal{B}(1, \pi)$$

Régression linéaire (simple)

$$Y_{i|X_i=x_i} = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i \text{ où } \varepsilon_{|X=x} \sim_{i.i.d.} \mathcal{L}(0, \sigma^2 I_n).$$

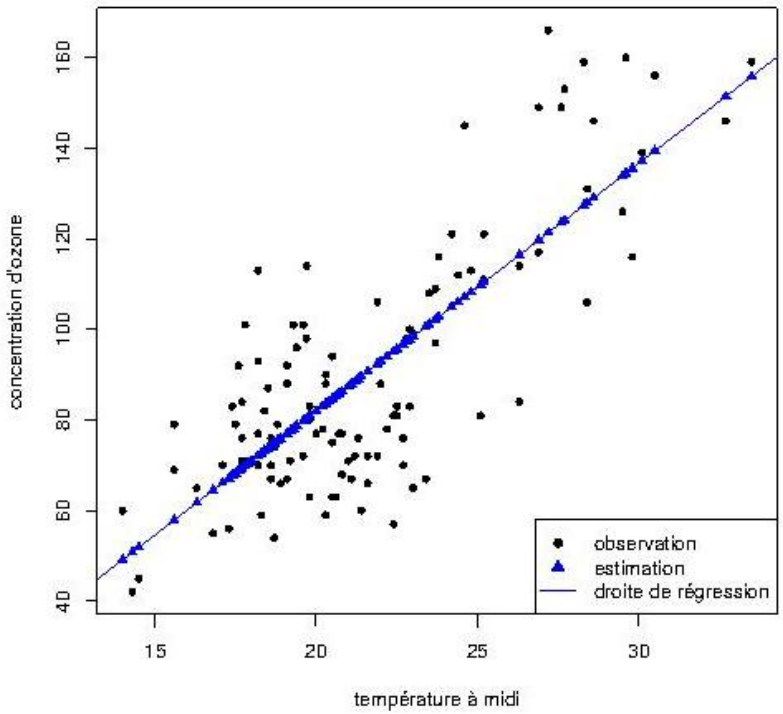


Figure – *source des données : Cornillon et Matzner-Løber, 2007*

Les étapes de la démarche statistique

A partir des données d'un n-échantillon, déduire -ou inférer- certaines propriétés du modèle inconnu

1. Acquérir et préparer les données
2. Définir un modèle adapté à la situation observée.
3. Estimer les paramètres du modèle grâce aux observations.
4. Vérifier l'adéquation de l'estimation aux observations.
5. Utiliser le modèle à des fins de décision ou de prédiction.

Sommaire

Un objet mathématique : l'estimateur

Soit $\theta \in \Theta \in \mathbb{R}$ le paramètre d'une loi $\mathbb{P}_\theta$ et soit $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon issu de cette loi

Définition

Une statistique est une variable aléatoire T_n, fonction mesurable de l'échantillon et calculable à partir de l'échantillon

$$T_n = t(X_1, \ldots, X_n).$$

Un estimateur est une statistique utilisée pour estimer un paramètre ou une quantité d'intérêt $\nu(\theta)$

- Notation $T_n = \widehat{\nu}_n$ ou $T_n = \widehat{\nu}$.
- Exemples : estimateur empirique de l'espérance, de la variance

Performance en moyenne

Soit $\widehat{\nu}_n$ un estimateur de $\nu(\theta)$, fonction du paramètre d'une loi $\mathbb{P}_\theta$:

- On appelle biais de $\widehat{\nu}_n$ pour $\nu(\theta)$ la valeur

$$b_\theta(\widehat{\nu}_n) = \mathbb{E}_\theta(\widehat{\nu}_n) - \nu(\theta)$$

  Si $b_\theta(\widehat{\nu}_n) = 0$ pour tout $\theta \in \Theta$, T_n est sans biais pour $\nu(\theta)$

- On appelle variance de $\widehat{\nu}_n$ la valeur

$$\mathrm{Var}_\theta(\widehat{\nu}_n) = \mathbb{E}_\theta\left((\widehat{\nu}_n - \mathbb{E}_\theta(\widehat{\nu}_n))^2\right)$$

- On appelle risque quadratique de $\widehat{\nu}_n$ la valeur

$$R_\theta(\widehat{\nu}_n) = \mathbb{E}_\theta\left((\widehat{\nu}_n - \nu(\theta))^2\right)$$

Décomposition du risque quadratique

$$R_\theta(\widehat{\nu}_n) = \mathrm{Var}_\theta(\widehat{\nu}_n) + (b_\theta(\widehat{\nu}_n))^2$$

Définition

Un estimateur δ_1 de $\nu(\theta)$ domine l'estimateur δ_2 si, pour tout $\theta \in \Theta$,

$$R_\theta(\delta_1) \leq R_\theta(\delta_2),$$

cette inégalité étant stricte pour au moins une valeur de θ.
Un estimateur est admissible s'il n'existe aucun estimateur le dominant.

- Soit $\theta_0 \in \Theta$. L'estimateur constant $\widehat{\nu}_n = \theta_0$ est-il admissible ?

Il n'existe en général pas d'estimateur dominant tous les autres $\hookrightarrow$ Recherche d'estimateurs UVMB

Performance asymptotique

Soit $\widehat{\nu}_n$ un estimateur de $\nu(\theta)$, défini à partir d'une observation de loi $\mathbb{P}_\theta$:

- $\widehat{\nu}_n$ est asymptotiquement sans biais pour $\nu(\theta)$:

$$\forall \theta \in \Theta, \lim_{n\to\infty} b_\theta(\widehat{\nu}_n) = 0$$

- $\widehat{\nu}_n$ est consistant : $\widehat{\nu}_n$ tend en probabilité vers $\nu(\theta)$ quand $n \to \infty$:

$$\forall \theta \in \Theta, \forall \epsilon, \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_\theta(|\widehat{\nu}_n - \nu(\theta)| > \epsilon) = 0$$

- $\widehat{\nu}$ est fortement consistant ssi

$$\forall \theta \in \Theta, \mathbb{P}_\theta(\lim_{n\to\infty} \widehat{\nu}_n = \nu(\theta)) = 1$$

- $\widehat{\nu}$ est consistant en moyenne quadratique :

$$\forall \theta \in \Theta, \lim_{n\to\infty} R_\theta(\widehat{\nu}_n) = 0$$

Aller plus loin : s'intéresser à la loi d'un estimateur

- Un constructeur automobile indique une consommation de $c_0 = 6.32\ell/100km$ pour les véhicules d'un type donné, dans des conditions précises de roulage, avec un écart-type de $\sigma_0 = 0.21\ell/100km$
- Un organisme indépendant prend 30 véhicules au hasard, et les soumet aux conditions de roulage nominales. Il observe $\bar{x} = 6.43\ell/100km > c_0$, $\widehat{\sigma} = 0.25\ell/100km$.
  - Est-ce dû à la variabilité naturelle de l'expérience ?
  - Ou le constructeur a-t-il sous-estimé la consommation de ses véhicules ?
- Déterminer si le fait d'observer une moyenne plus grande que 6.43 est d'une probabilité forte ou pas sous les indications du constructeur.
  - accéder à $\mathbb{P}(\bar{X} \geq 6.43)$,
  - loi de $\bar{X}$

Cas Gaussien

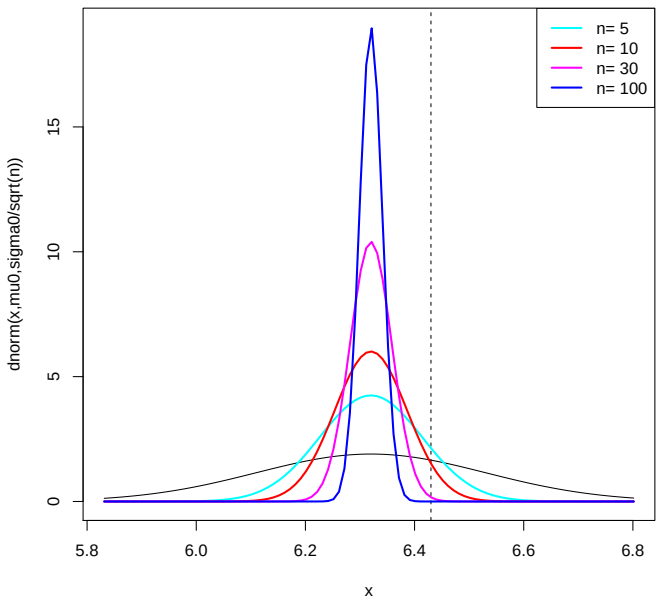
Loi de $\bar{X}$

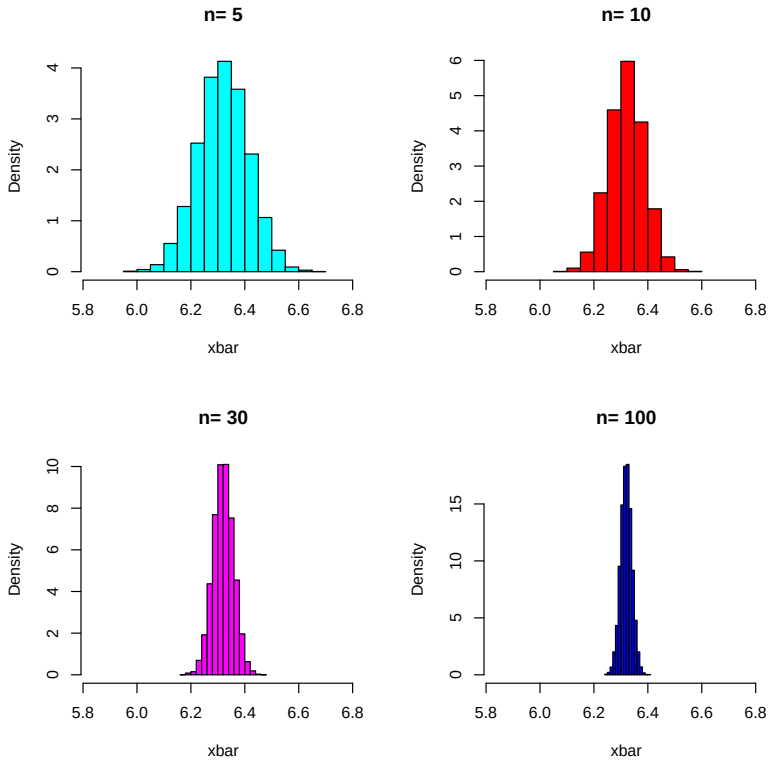
Proposition

L'estimateur empirique $\bar{X}$ de l'espérance d'une loi gaussienne $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, calculé à partir d'un échantillon i.i.d. de cette loi, est gaussien :

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

Loi de $\bar{X}$





Applications

- Si on considère que la mesure de pollution d'un véhicule de marque donnée suit $X_1 \sim \mathcal{N}(c_0 = 6.32, \sigma_0^2 = 0.21^2)$, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\bar{X} \geq 6.43) &= \mathbb{P}\left(\frac{\bar{X} - c_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \geq \frac{6.43 - c_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right) \\ &= 1 - \mathrm{F}_{\mathcal{N}}\left(\frac{6.43 - c_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right) \simeq 0.002 \end{aligned}$$

- On peut aussi se demander quelle valeur q de consommation moyenne sur 30 véhicules est dépassée avec une probabilité donnée (par ex, $\alpha = 5\%$)

$$\mathbb{P}(\bar{X} \geq q) = 1 - \mathrm{F}_{\mathcal{N}}\left(\frac{q - c_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right) = 0.05$$

Soit

$$q = c_0 + \underbrace{\mathrm{F}_{\mathcal{N}}^{-1}(0.95)}_{\text{quantile d'ordre } 95\% \text{ de } \mathcal{N}(0,1)} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} = 6.38$$

Loi de l'estimateur de la variance à espérance connue

Définition (loi du Khi-deux)

Soit Z un vecteur gaussien centré réduit de dimension n. La loi de la somme du carré de ses composantes est la loi du Khi-deux (centré) à n degrés de liberté

$$K_n = \sum_i Z_i^2 \sim \chi^2(n); \quad \psi_{K_n}(t) = \mathbb{E}(e^{tK_n}) = \frac{1}{(1-2t)^{n/2}}$$

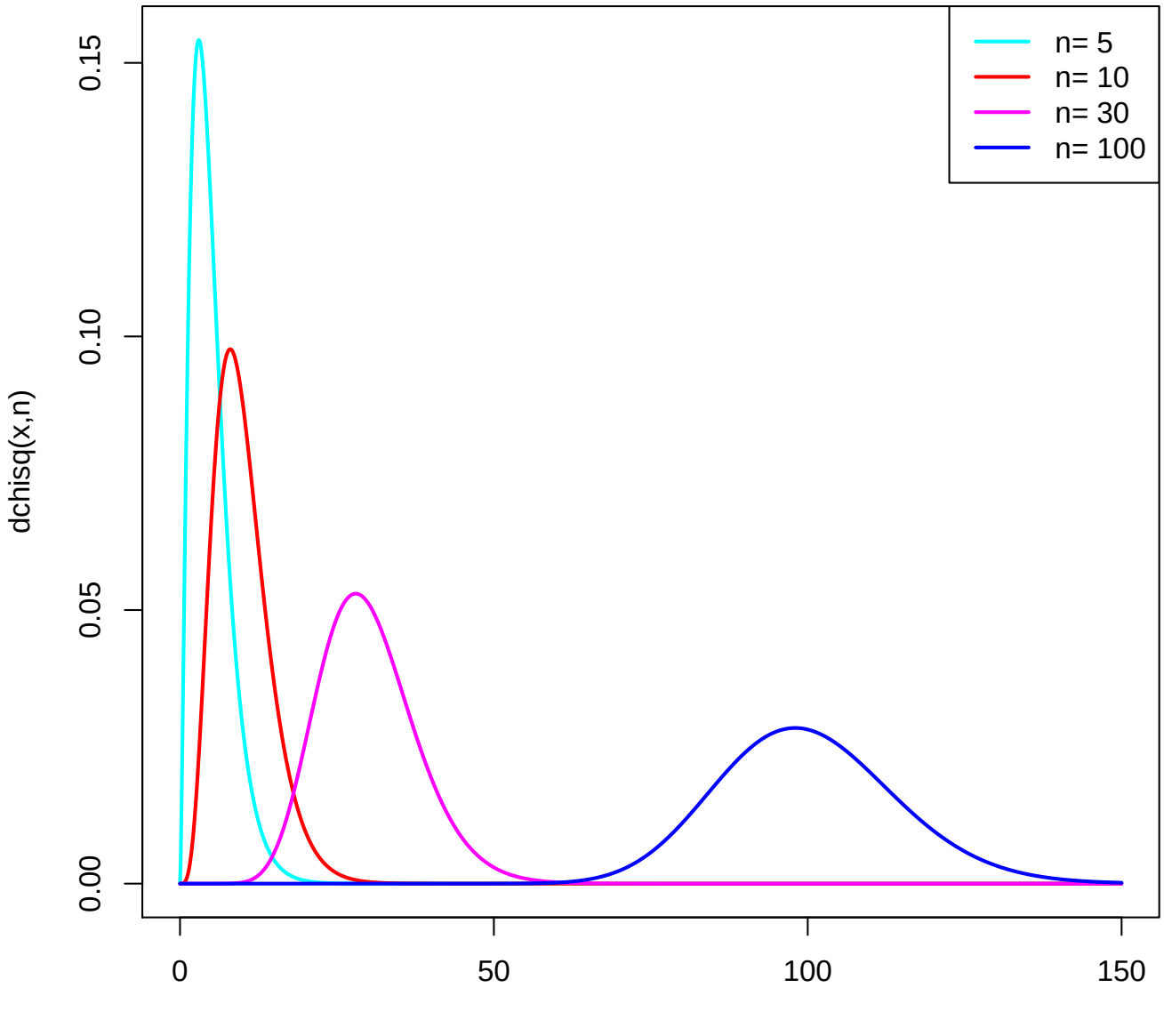
$$\mathbb{E}(K_n) = n; \quad \text{var}(K_n) = 2n$$

Proposition

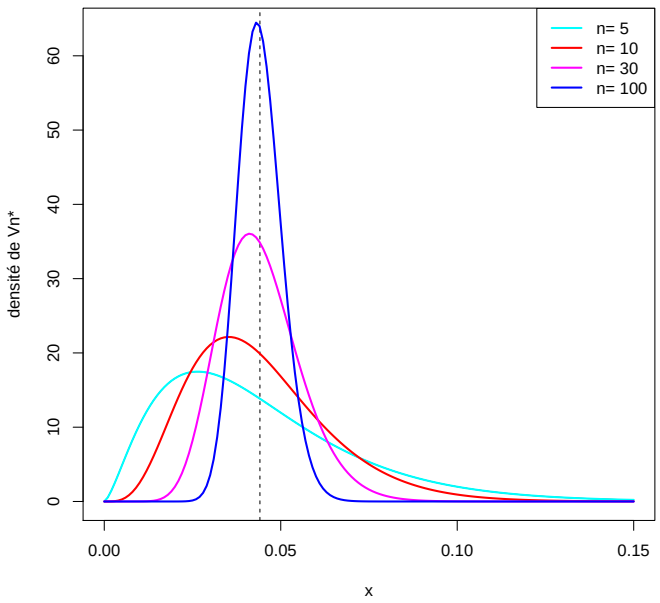
Soit $V_n^* = \frac{1}{n}\sum_i (X_i - \mu)^2$, l'estimateur empirique de la variance d'un échantillon i.i.d. X de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, μ connue :

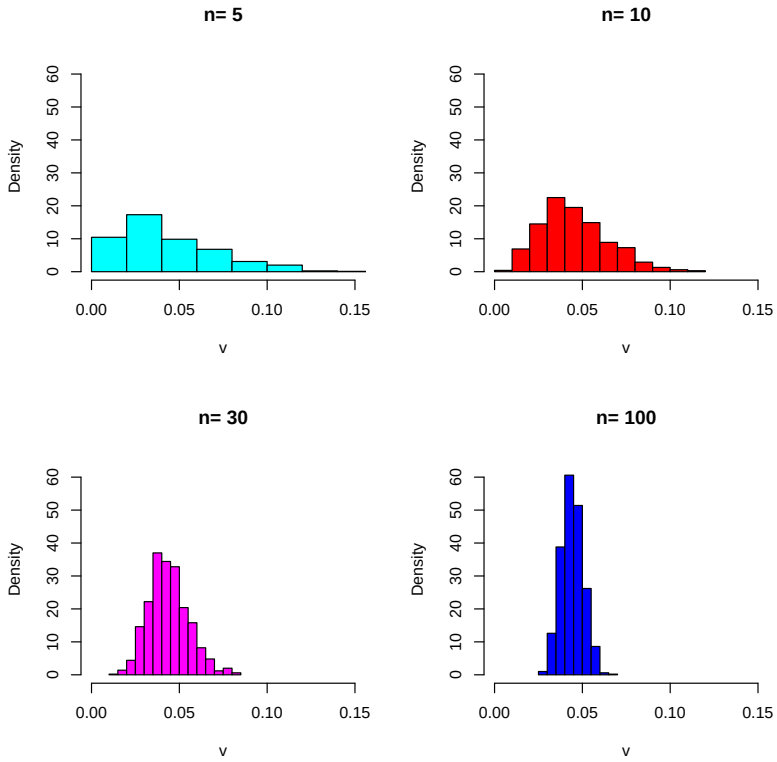
$$n\frac{V_n^*}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$$

Loi du $\chi^2(n)$



Loi de V_n^*





Loi de la variance empirique S_n^2

Proposition

La loi de l'estimateur de la variance empirique S_n^2 d'un n-échantillon i.i.d. gaussien X est telle que

$$n\frac{S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

De plus, $\bar{X}$ et S_n^2 sont indépendants .

Application :
$\mathbb{P}(\widehat{\sigma}_n > 0.25) = 1 - \mathrm{F}_{\chi^2}((n-1)(0.25/\sigma_0)^2, n-1) \simeq 0.067$

Projection d'un vecteur gaussien

Théorème (Cochran)

Si $Y \sim \mathcal{N}_n(\mu, \sigma^2 I_n)$, *et si* $E_1 \oplus \ldots \oplus E_r = \mathbb{R}^n$ *est une décomposition de* $\mathbb{R}^n$ *en* r *sous-espaces orthogonaux, alors les projections orthogonales* $\Pi_1(Y), \ldots, \Pi_r(Y)$ *sur ces sous-espaces sont des vecteurs gaussiens indépendants tels que, pour tout* $j = 1, \ldots, r$

$$||\Pi_j(Y)||^2 \sim \sigma^2 \chi^2(d_j = Dim(E_j), \mu_j = ||\Pi_j(\mu)/\sigma||^2).$$

Preuve Th. de Cochran

- $Z = Y/\sigma$
- Pour tt j, soit $(e_{j_1}, \ldots, e_{j_{d_j}})$ une base orthonormée de E_j

$$\Pi_j Z = \sum_{k=1}^{d_j} < e_{jk}, Z > e_{jk}$$

- Soit $U = (e_{11} \ldots e_{rd_r})'$ matrice de passage : $UU' = Id_n$.
  On a : $UZ \sim \mathcal{N}_n(U\mu/\sigma, Id_n)$.
  Les variables $e'_{jk}Z$ sont indépendantes quand j et k varient.
  Donc $\Pi_1(Z), \ldots, \Pi_r(Z)$ sont indépendantes
- Pour un sous-espace E_j, et pour $k = 1, \ldots, k_j$

$$e'_{jk}Z \sim \mathcal{N}(e'_{jk}\mu/\sigma, e'_{jk}e_{jk} = 1)$$

- d'où , avec $\mu_j = ||\Pi_j \mu/\sigma||^2 = \sum_{k=1}^{d_j} (e'_{jk}\mu/\sigma)^2$

$$||\Pi_j(Z)||^2 = \sum_{k=1}^{d_j} ||e'_{jk}Z||^2 \sim \chi^2(d_j, \mu_j),$$

Loi de Student (W. Gosset)

Définition (Loi de Student)

Soit deux variables Z et K indépendantes telles que $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $K \sim \chi^2(p)$. Alors, la v.a.

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{K}{p}}} \sim \mathcal{T}(p)$$

suit une loi appelée loi de Student à p degrés de liberté.

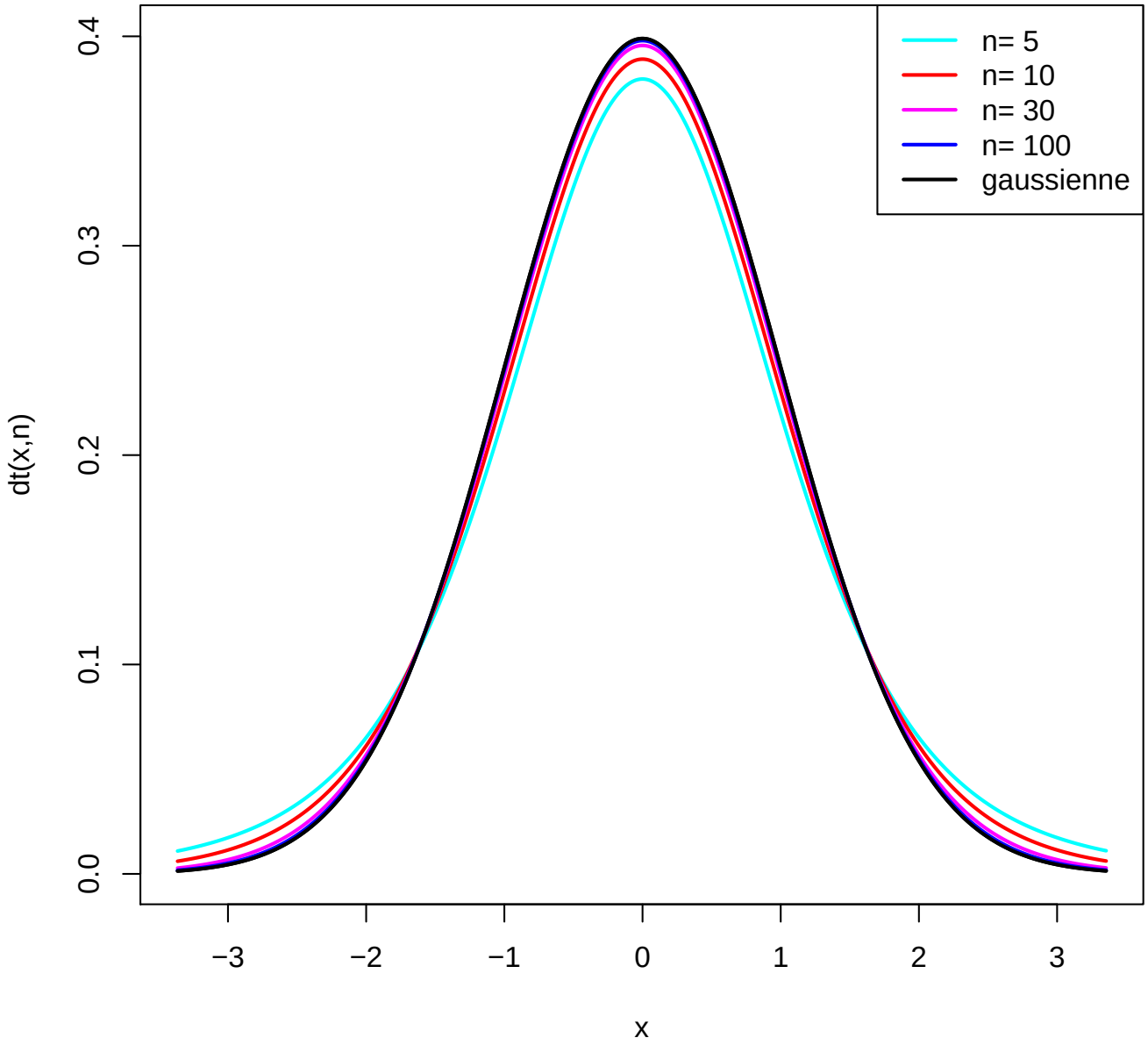
Proposition

Si $X_1, \ldots, X_n$ est un n-échantillon gaussien de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$,

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X} - \mu}{\widehat{\sigma}_n} \sim \mathcal{T}(n-1) \quad \text{avec } \widehat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

Application : $\mathbb{P}(\bar{X} > 6,43) = 1 - \mathrm{F}_{\mathcal{T}}(\frac{6.43 - c_0}{0.25/\sqrt{n}}, n-1) \simeq 0.018$

Loi de Student [W. Gosset]



Loi de Fisher

Définition (Loi de Fisher)

Soit deux variables K_1 *et* K_2 *indépendantes telles que* $K_1 \sim \chi^2(n_1)$ *et* $K_2 \sim \chi^2(n_2)$ *. Alors, la v.a.*

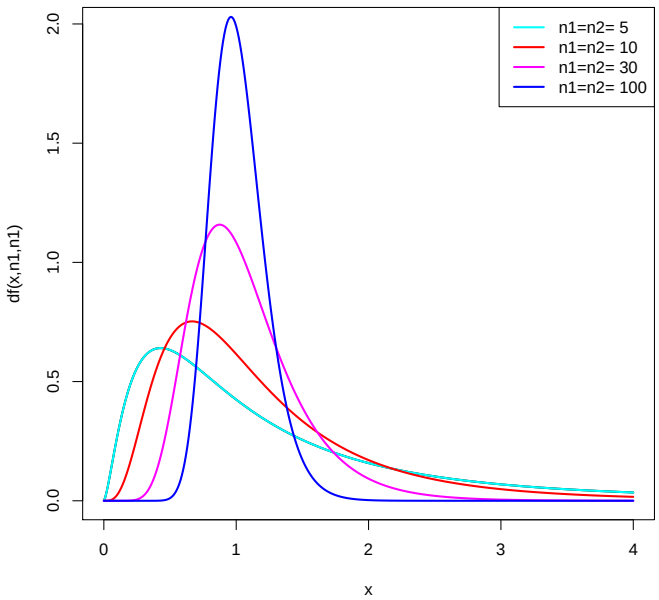
$$F = \frac{K_1/n_1}{K_2/n_2} \sim \mathcal{F}(n_1, n_2)$$

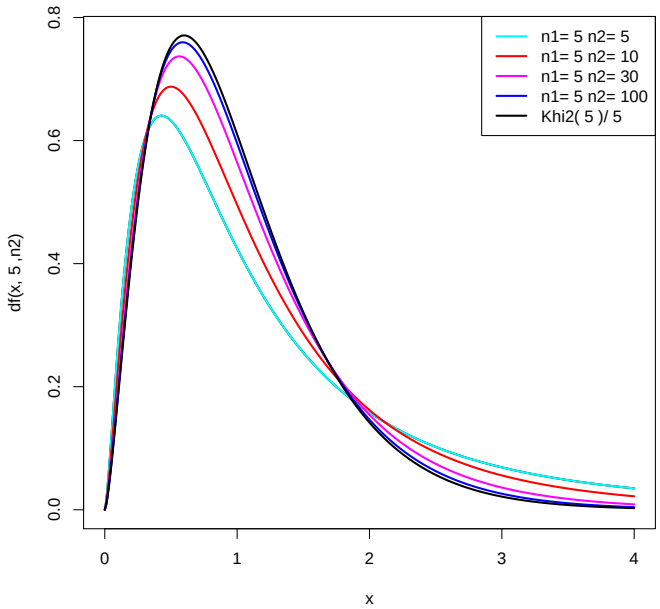
suit une loi appelée loi de Fisher à (n_1, n_2) *degrés de liberté.*

Proposition

$\mathbb{E}(F)$ *existe pour* $n_2 \geq 2$ *et vaut* $\mathbb{E}(F) = \frac{n_2}{n_2-2}$. $\text{var}(F)$ *existe pour* $n_2 \geq 5$ *et vaut* $\text{var}(F) = \frac{2n_2^2(n_1+n_2-2)}{n_1(n_2-2)^2(n_2-4)}$

Loi de Fisher





Application de la loi de Fisher

Proposition (Loi du rapport des estimateurs de variance)

Soient deux échantillons gaussiens indépendants de taille n_1 et n_2, de même variance σ^2, et soient $\widehat{\sigma}_1^2$ et $\widehat{\sigma}_2^2$ les estimateurs non biaisés de la variance σ^2 dans chacun des deux échantillons. Alors, la v.a.

$$\frac{\widehat{\sigma}_1^2}{\widehat{\sigma}_2^2} \sim \mathcal{F}(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

Approximation gaussienne

Si la loi mère n'est pas gaussienne, et si la loi de $\bar{X}$ est difficile à identifier, on peut utiliser des approximations gaussiennes pour des échantillons suffisamment grands.

Théorème (de limite centrale)

Soit $\{X_n\}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. admettant une espérance μ et une variance σ^2 finie. Alors, la suite des variables $\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n-\mu}{\sigma}$ converge en loi vers la v.a. $\mathcal{N}(0,1)$ quand $n \to \infty$

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Application

La loi de l'estimateur empirique de l'espérance d'une loi quelconque de moment d'ordre 2 fini peut être approximée par une loi gaussienne

$$\bar{X} \overset{appr}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

Exemple

- si $X \sim \mathcal{B}(\pi)$, si $n\pi > 5$ et $n(1-\pi) > 5$

$$\bar{X} \overset{appr}{\sim} \mathcal{N}(\pi, \frac{\pi(1-\pi)}{n}), \text{ ou } n\bar{X} \overset{appr}{\sim} \mathcal{N}(n\pi, n\pi(1-\pi))$$

Slutsky

Proposition

si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ *et* $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} c$ *où* c *est une constante, alors*
$(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X, c)$
En particulier :
$X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X + c$, $X_n Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} cX$; $X_n / Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X/c$

Application : Si $X_1, \ldots, X_n$ est un n-échantillon de loi d'espérance μ et de variance σ^2 finie,

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X} - \mu}{\widehat{\sigma}_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1) \quad \text{avec } \widehat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X} - \mu}{S_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1) \quad \text{avec } S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

Normalité asymptotique

Définition

Si un estimateur $\widehat{\nu}_n$ *de* $\nu \in \mathbb{R}^p$ *de variance* $\text{var}(\widehat{\nu}_n) = V_n \to 0$ *a un comportement asymptotique tel que*

$$V_n^{-1/2}(\widehat{\nu}_n - \nu) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}_p(0, Id_p)$$

on dit que l'estimateur est asymptotiquement normal. Si $nV_n \to V_0$ *où* $V_0 > 0$ *est finie, on dit que la vitesse de l'estimateur est en* $\sqrt{n}$

$\hookrightarrow$ Un estimateur est d'autant meilleur que sa vitesse de convergence est rapide et sa loi limite concentrée autour de 0.

Delta-méthode

Proposition

Si h est une fonction différentiable de $\nu \in \mathbb{R}^p$ et $\widehat{\nu}_n$ un estimateur asymptotiquement normal, alors $h(\widehat{\nu}_n)$ est un estimateur asymptotiquement normal de $h(\nu)$

$$(D_\nu V_n(\nu) D'_\nu)^{-1/2}(h(\widehat{\nu}_n) - h(\nu)) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}_p(0, Id_p)$$

avec $D_\nu = \begin{pmatrix} \partial h(\nu)/\partial \nu_1 & \dots & \partial h(\nu)/\partial \nu_p \end{pmatrix}$

Sommaire

Méthodes de construction d'estimateurs

Méthode des moments

Soit $X_1, \ldots, X_n \sim \mathbb{P}_\theta$.

- Les moments de $\mathbb{P}_\theta$ dépendent de θ. Moment d'ordre k

$$\mathbb{E}(X_1^k) = m_k(\theta)$$

- On définit le moment empirique d'ordre k $\widehat{m}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^k$ fortement consistant si $\mathbb{E}(|X^k|)$ existe.
- On exprime $\nu(\theta) = g(m_1, \ldots, m_k)$ en fonction des moments
- On remplace chaque moment par son estimateur empirique (méthode *plug-in*) : $\widehat{\nu(\theta)} = g(\widehat{m}_1, \ldots, \widehat{m}_k)$

Méthode du maximum de vraisemblance

Modèle statistique $\mathcal{M} = (\mathcal{X}^n, \mathcal{A}^n, \mathcal{P} = (\mathbb{P}_\theta{}^n))$ dominé

Modèle paramétrique dominé : les lois $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta\in\Theta}$ admettent une densité $p_\theta(x)$ par rapport à une mesure commune ξ (mesure de Lebesgue, mesure de comptage)

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad \mathbb{P}_\theta(A) = \int_A p_\theta(x)\, d\xi(x)$$

Fonction de vraisemblance

Définition

Dans un modèle paramétrique dominé, on appelle vraisemblance d'une réalisation $(x_1, \ldots, x_n)$ du n-échantillon, la fonction de θ :

$$\theta \mapsto L(\theta; x_1, \ldots, x_n) = p_\theta(x_1, \ldots, x_n)$$

Pour un échantillon i.i.d. : $L(\theta; x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^n p_\theta(x_i)$

! : Vraisemblance $\neq$ densité

Exemple : loi gaussienne, loi de Bernoulli

Modèle régulier

Définition

Un modèle paramétrique $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathbb{P}_\theta)$, $\theta \in \Theta$ ouvert de $\mathbb{R}^p$, et tel que $\mathbb{P}_\theta$ admette une densité $f(.;\theta)$ par rapport à une mesure dominante ν, est régulier si

- *Le support des lois $f(.;\theta)$ est indépendant de $\theta \in \Theta$*
- *$\theta \mapsto \log f(x;\theta)$ est deux fois continûment différentiable sur Θ, pour tout $x \in \mathcal{X}$*
- *Pour tout $A \in \mathcal{A}$, l'intégrale $\int_A f(x;\theta)d\nu(x)$ est au moins deux fois dérivable sous le signe d'intégration et on peut permuter intégration et dérivation*

Ex : Bernoulli, gaussien ; Contre-ex : $\mathcal{U}[0,\theta]$

Vecteur du score

Soit $\ell_\theta = \log f_\theta$

Définition

Dans un modèle paramétrique dominé, si pour tout $x \in \mathcal{X}$ la vraisemblance est différentiable, le vecteur gradient de la log-vraisemblance est le vecteur aléatoire appelé score (de Fisher) et défini par

$$\dot{\ell}_\theta(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \ell_\theta(X) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \theta_p} \ell_\theta(X) \end{pmatrix}$$

Vecteur du score : propriétés

- le score est additif : pour deux variables aléatoires indépendantes X et Y de même loi,

$$\dot{\ell}_\theta(X, Y) = \dot{\ell}_\theta(X) + \dot{\ell}_\theta(Y)$$

- Dans un modèle régulier, le score est un vecteur aléatoire centré

Information de Fisher

Définition

Dans un modèle paramétrique régulier, on appelle Information de Fisher au point $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$ la matrice de variance du score :

$$I_n(\theta) = \mathbb{E}_\theta[\dot{\ell}_\theta(X)[\dot{\ell}_\theta(X)]'] \underbrace{=}_{\text{modèle régulier}} \text{var}(\dot{\ell}_\theta(X))$$

où la notation prime $'$ indique la transposée. C'est une matrice de taille $p \times p$, symétrique, semi-définie positive.

Propriétés

- Si $X = (X_1, \ldots, X_n)$ est un *n*-échantillon iid d'information $I_n(\theta)$, alors (additivité)

$$I_n(\theta) = nI_1(\theta)$$

- modèle régulier. Soit $\ddot{\ell}_\theta(X)$ la matrice des dérivées secondes en θ de la log-vraisemblance, alors :

$$I_n(\theta) = \mathbb{E}_\theta[\dot{\ell}_\theta(X)[\dot{\ell}_\theta(X)]'] = -\mathbb{E}_\theta[\ddot{\ell}_\theta(X)]$$

Exemple : modèle de Bernoulli, Gaussien

Borne Fréchet-Darmois-Cramér-Rao

Théorème (FDCR)

Soit h une fonction différentiable de Θ, un ouvert de $\mathbb{R}^k$. Dans un modèle est régulier d'information de Fisher finie et inversible, pour tout estimateur T_n de $h(\theta)$, sans biais et de carré intégrable et on a

$$\text{var}(T_n) \geq [\dot{h}(\theta)]' I_n(\theta)^{-1} \dot{h}(\theta)$$

- La limite inférieure de la variance des estimateurs sans biais s'appelle borne de Cramér-Rao
- L'information de Fisher est la précision maximale avec laquelle la fonction $h(\theta)$ peut être estimée.

Efficacité

Définition

Un estimateur sans biais T_n est efficace pour $h(\theta)$ s'il atteint la borne de Cramér-Rao, ie pour tout $\theta \in \Theta$,

$$\text{var}(T_n) = [\dot{h}(\theta)]' I_n(\theta)^{-1} \dot{h}(\theta)$$

et il est donc UVMB, optimal parmi les estimateurs sans biais.

Efficacité mais...

Théorème (admis)

La borne de Cramér-Rao n'est atteinte que si

(a) *la loi des observations est d'une famille exponentielle : modèle dominé dont la densité de la loi mère peut s'écrire sous la forme*

$$f(x;\theta) = \exp\Big(a(x)\alpha(\theta) + \beta(\theta) + c(x)\Big)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$

(b) *et pour l'estimation d'une fonction particulière de* θ *définie à une transformation affine près*

$$h(\theta) = \mathbb{E}_\theta(a(X)).$$

Rem : il peut ne pas exister d'estimateurs efficaces - Il peut y avoir des estimateurs optimaux (UVMB) non efficaces

Sommaire

Méthode du maximum de vraisemblance

La valeur θ_1 de θ est plus vraisemblable que la valeur θ_2, si $L(\theta; x) > L(\theta_2; x)$

Définition (EMV)

On appelle estimation du maximum de vraisemblance, une valeur $\widehat{\theta}_n$ maximisant la vraisemblance

$$\widehat{\theta}_n \in \text{Arg} \max_{\theta \in \Theta} L(\theta; x).$$

$\widehat{\theta}_n = t(x_1, \ldots, x_n)$ est une fonction des données, ce qui induit la statistique $t(X_1, \ldots, X_n)$ que l'on note (abusivement) avec la même notation :
$\widehat{\theta}_n = t(X_1, \ldots, X_n)$ est appelé Estimateur du Maximum de Vraisemblance

Calcul de l'EMV

Remarque : quand l'échantillon est i.i.d. on utilise plutôt la log-vraisemblance

$$\ell_n(\theta; x) = \log L(\theta; x) = \sum_{i=1}^{n} \log p_\theta(x_i)$$

Méthode :

- Chercher $\widehat{\theta}_n$ annulant les équations de vraisemblance (ou équations du score)

$$U_n(\widehat{\theta}_n) := \dot{\ell}_n(\widehat{\theta}_n; x) = \left(\frac{\partial}{\partial \theta_k} \ell_n(\widehat{\theta}_n; x) \right)_{k=1,\ldots,dim(\theta)} = 0,$$

- Vérifier que $\widehat{\theta}_n$ est bien un maximum : $H_n(\theta) = \ddot{\ell}_n(\theta; x)$ est définie négative autour de $\widehat{\theta}_n$.

Exemple : loi gaussienne, loi de Bernoulli

EMV *pitfalls*

- si la vraisemblance n'est pas strictement concave pour tout θ, il peut exister des optima locaux
- l'EMV n'est pas forcément unique
- l'EMV peut ne pas exister
- pb de dérivabilité, par ex : $\mathcal{U}(0, \theta)$
- utilisation d'un schéma numérique si le calcul analytique n'est pas possible

mais

- Pour n'importe quelle application g de Θ, si $\widehat{\theta}$ est l'EMV de θ, alors $g(\widehat{\theta})$ est l'EMV de $g(\theta)$.
- de bonnes propriétés asymptotiques

Propriétés l'EMV

Proposition

Sous des conditions de régularité du modèle, l'EMV $\widehat{\theta}_n$ du paramètre θ calculé sur un n-échantillon i.i.d. est

- *asymptotiquement sans biais*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_\theta(\widehat{\theta}_n) = \theta$$

- *convergent*
- *asymptotiquement normal*

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, I_1(\theta)^{-1})$$

où $I_1(\theta) = \mathbb{E}_\theta[\dot{\ell}_n(X_1)(\dot{\ell}_n)']$ est l'information de Fisher

Conséquences

Proposition

Des propriétés intéressantes pour les "grands" échantillons (par ex $n \geq 30$)

- *L'EMV $\widehat{\theta}_n$ est asymptotiquement efficace et donc UVMB :*
  $\hookrightarrow$ *très bonne qualité d'estimation*
- *$\widehat{\theta}_n$ tend à devenir gaussien :*
  $\hookrightarrow$ *loi approchée à distance finie*

$$\widehat{\theta}_n \overset{appr}{\sim} \mathcal{N}(0, [nI(\theta)]^{-1} = [I_n(\theta)]^{-1})$$

EMV dans le modèle gaussien

Proposition

Si $X_1, \ldots, X_n$ est un n-échantillon gaussien de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$,

- *l'EMV est*

$$\hat{\mu}_n = \bar{X}, \quad S_n = \frac{(n-1)}{n}\widehat{\sigma_n^2}$$

où $\widehat{\sigma_n^2} = \sum_i (X_i - \bar{X})^2/(n-1)$ est l'estimateur sans biais de la variance.

- *$\bar{X}$ et $\widehat{\sigma_n^2}$ sont indépendants et vérifient*

$$\sqrt{n}(\bar{X} - \mu) \sim \mathcal{N}(0, \sigma), \quad \frac{(n-1)\widehat{\sigma_n^2}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$