BILLETS AIGRES-DOUX

CHRISTOPHE BREUIL

Les courts textes ci-dessous ont été postés sur le site Image des mathématiques (http://images.math.cnrs.fr/) durant l'année 2009.

1. Un matheux est-il "quelqu'un de bien ?"

Pendant longtemps, enfant, j'ai cherché à savoir ce que voulait dire l'expression "untel est quelqu'un de bien" dans la bouche des adultes. Serai-je jamais moi-même quelqu'un de bien ? Les années passant, j'ai finalement compris que, pour un homme jeune en tout cas, cela voulait dire *grosso modo* le "gendre idéal" : bon fils, bon mari, bon père, voisin sociable, courtois, spirituel (pas trop), etc.

Le destin a voulu que je devienne mathématicien, arithméticien obnubilé pratiquement jour et nuit par des objets mathématiques de nature p-adique (p est ici un nombre premier) qui n'intéressent qu'une frange extrêmement limitée de la population mondiale. Or, pour être bon mathématicien et bon chercheur, il faut s'efforcer d'oublier que l'on est un être humain afin de devenir une pure machine à penser. Tout chercheur vous dira que les considérations d'ordre affectif ou égocentrique (et plus généralement les considérations "humaines") viennent immanquablement troubler le cours limpide d'un raisonnement logique, ou embrumer une intuition mathématique en train de prendre forme. Sans compter que l'activité de recherche mathématique est, la plupart du temps, une réflexion purement solitaire, à l'opposé de toute forme de socialisation, ce qui à la longue finit forcément par "déteindre" un peu sur le comportement dans la vie de tous les jours.

Dans ces conditions, il me paraît difficile pour un matheux chevronné d'être le prototype du "gendre idéal" (demandez à ma belle famille...), c'est même pour ainsi dire antinomique avec le coeur de son activité professionnelle. Non, finalement, peut-être qu'un matheux n'est pas toujours "quelqu'un de bien", tant pis !

Ou alors tant mieux : n'est-ce pas ce qui le rend intéressant ?

2. Le redoutable "À quoi ça sert ?"

L'utilité - ou non - de ses recherches est une question récurrente qui revient régulièrement tourmenter plus d'un matheux, soit parce qu'il se la pose lui-même, soit parce qu'on la lui pose. Cette question est particulièrement redoutable lorsque sa spécialité semble déconnectée à jamais de toute application pratique, comme par exemple la géométrie arithmétique. Je relate ici de mémoire une courte scène typique qui s'est passée il y a quelques années, parmi les nombreuses conversations où j'ai dû essayer, tant bien que mal, de justifier mon activité d'arithméticien p-adicien.

Je plante le décor : un superbe mariage dans une île des rivages de la France métropolitaine, un beau samedi soir de juillet. Musique douce, toilettes et costumes soignés, jolies tables rondes, petits pains chauds qui attendent dans leurs serviettes pliées au milieu des orchidées et des photophores d'être dégustés avec le tournedos de canard aux épices. Ma voisine de gauche est une charmante demoiselle (mon épouse est à ma droite) et la conversation, inévitablement, en vient à "qui fait quoi" autour de la table. Ma voisine me demande quel est mon métier :

MOI - Je suis chercheur en arithmétique.

ELLE - Ah, mais c'est très intéressant !

(On est poli lors d'un mariage.)

ELLE - Mais c'est quoi exactement l'arithmétique, vous pourriez m'expliquer vos recherches ?

MOI - Et bien, il y a plusieurs aspects. Disons que, très grossièrement, j'essaie de comprendre certains gros espaces, appelés espaces de cohomologie, sur lesquels deux sortes de groupes agissent, des groupes dits de Galois, et des groupes dits linéaires, et j'essaie de comprendre les relations, très riches, entre leurs deux actions sur ces même gros espaces.

Silence.

ELLE - Heu, des groupes vous dites ?

MOI - Oui, des groupes. Un groupe est une des plus anciennes structures mathématiques et une des plus fondamentales aussi. Par exemple il y a le groupe des entiers relatifs, ou alors le groupe formé de toutes les manières de permuter les éléments d'un ensemble fini. Mais mes groupes et mes espaces à moi ne sont pas n'importe quoi. Ils ont en plus une topologie p-adique.

Re-silence.

MOI - Peut-être avez-vous entendu parler des nombres p-adiques si p est un nombre premier ?

ELLE - Ben, non.

MOI - Ce sont des développements formels en base p que l'on "prolonge" jusqu'à l'infini.

S'ensuit une explication confuse de ma part pour donner des exemples concrets d'entiers p-adiques.

MOI - Ce qui est amusant avec les nombres p-adiques, et très différent des nombres usuels, est que deux nombres sont très proches si leur différence est divisible par une grosse puissance de p. Bon, et bien mes groupes comme mes espaces ont une "structure p-adique", c'est-à-dire sont fabriqués à partir de groupes finis un peu comme on fabrique les entiers p-adiques à partir des nombres finis classiques, comme je viens de vous l'expliquer. Et cela fait toute leur richesse car...

Petit soupir à ma gauche.

ELLE - Houlà, et bien, j'espère qu'avec ça, vous arrivez encore à dormir la nuit !

(Très juste remarque au passage...)

À ce moment de la conversation, une petite pause dînatoire devient nécessaire. Puis je sens que ma chère voisine frémit. Elle a quelque chose à me dire, le temps de finir d'avaler. Et je sais parfaitement la question qu'elle va me poser, je la vois littéralement éclore sur ses lèvres avant qu'elle n'ouvre la bouche.

ELLE - Mais voyons, tout ça, à quoi ça sert ?

Bien entendu, je n'en étais pas à mon premier "à quoi ça sert ?". En blasé à qui on ne la fait plus, je réponds :

MOI - Il ne faut pas raisonner en termes d'utilité. Je ne me pose pas vraiment la question si ce que je fais est utile, en tout cas ce n'est absolument pas ma motivation. Non, ce que je cherche est à élargir le champ de la connaissance en explorant des domaines des mathématiques qui n'ont jamais été défrichés. En trouvant de nouvelles conjectures profondes, de nouveaux théorèmes. Et je ne suis pas le seul, toute une communauté de par le monde fait comme moi, même au sein d'universités dans des pays particulièrement "pragmatiques", comme les États-Unis, ou dans des pays qui ne croulent pas sous les capitaux, comme l'Inde. De toute façon, juger les choses en fonction de leur utilité est très subjectif. Qu'est-ce qui est vraiment utile ou pas autour de nous ? S'il s'agit uniquement de vivre biologiquement, on pourrait se passer de bien des choses si on réfléchit...

Elle me sourit.

ELLE - Je vois, c'est un peu comme l'art en quelque sorte, vous êtes un peu artiste.

Je n'en espérais pas tant !

MOI - Oui, tout à fait ! Les mathématiques par bien des aspects peuvent se voir comme une activité créatrice artistique, sans perdre bien sûr la rigueur scientifique.

Je me dis que la conversation va maintenant bifurquer vers la dernière exposition à la mode. Mais la perfide avait gardé une flèche.

ELLE - Mais quand même, l'art est accessible à bien des gens. Je ne suis pas sûre qu'il en soit de même de vos groupes et espaces p-adiques...

Aïe ! Elle avait vu juste. Effectivement, un des graves défauts des mathématiques, tout particulièrement dans les aspects les plus théoriques, est leur difficulté d'accès. À tel point que les mathématiciens eux-mêmes souffrent beaucoup pour se comprendre entre eux. Certains vont jusqu'à dire qu'ils n'ont jamais vraiment compris leurs propres articles !

Je ne me souviens pas lui avoir donné de réponse, et la conversation changea définitivement de sujet, à mon grand soulagement.

Je n'ai jamais revu ma voisine, et j'ignore l'image des mathématiques qu'elle a retenue de notre échange. Mais j'avais le sentiment de ne pas avoir totalement perdu ma soirée : elle m'avait presque comparé à un artiste !

3. Les maths et le football

En 1994, plus précisément le 17 octobre, eut lieu un évènement important : Andrew Wiles fit parvenir à la communauté mathématique deux articles, dont l'un en collaboration avec Richard Taylor, démontrant la modularité de beaucoup de courbes elliptiques sur le corps des nombres rationnels. Par les travaux antérieurs d'autres arithméticiens, ce résultat avait comme corollaire le Dernier Théorème de Fermat : "$x^n + y^n + z^n = 0$ entraîne $xyz = 0$ si x, y, z sont des entiers relatifs et n un entier supérieur ou égal à 3", qui avait résisté pendant plus de 300 ans aux assauts des plus grands mathématiciens. Il s'agissait donc d'un résultat historique qui eut droit, fait exceptionnel pour des mathématiques pures, à quelques lignes à la une de divers grands quotidiens français et étrangers, et même à quelques secondes à la fin d'un ou deux journaux télévisés. Depuis, les idées et techniques nouvelles introduites par Wiles n'ont cessé d'être mieux comprises, raffinées, généralisées, ont conduit à d'autres développements importants en arithmétique et ont inspiré une multitude d'articles.

En 1994, plus précisément le 17 juin, eut lieu un autre évènement "important" : le début de la coupe du monde de football. Là, la couverture médiatique fut d'une toute autre ampleur. Pendant un mois, comme tous les quatre ans, les journaux, radios, télés eurent un seul sujet à leur une. Pendant un mois, comme tous les quatre ans, une grande partie de la population mondiale fonctionna au ralenti, ne vivant par procuration qu'au rythme des tirs au but, coups francs et autres hors-jeux. Et encore, chez nous, un but salvateur d'un attaquant bulgare lors des éliminatoires de l'année précédente nous avait fait grâce de la participation de la France, ce qui atténua la déferlante médiatique dans l'hexagone. Mais à n'en pas douter, tous ceux que le football-spectacle, et plus généralement le sport médiatisé, laissaient indifférents ne purent une nouvelle fois y échapper...

On peut se demander ce qu'il serait advenu de la modeste couverture médiatique du résultat de Wiles si ce dernier avait travaillé plus vite et s'il avait sorti ses articles exactement quatre mois plus tôt, le 17 juin au lieu du 17 octobre. Je vous donne la réponse : son théorème serait passé totalement inaperçu du grand public (à supposer que quelques journalistes inconscients lui eussent encore réservé deux ou trois lignes dans leurs colonnes). Il semble donc clair que, de ces deux évènements de 1994, le deuxième est d'une importance infiniment supérieure au premier. Et pourtant, comment l'Histoire les jugera-t-elle dans trois siècles, c'est-à-dire le temps qu'il a fallu pour démontrer le théorème de Fermat ? Et bien je suis prêt à prendre le pari suivant dans l'au-delà : le théorème de Fermat-Wiles sera toujours là, lu, admiré, respecté par un petit nombre d'individus, et peut-être même encore sa démonstration étudiée en détails par quelques mathématiciens (s'il en reste). Mais les matchs de la coupe du monde de 1994, même la finale (qui, si j'en crois ce que je lis sur le Web, se solda par un piteux échange de tirs aux buts), auront, eux, tous sombré dans l'oubli.

Moi qui, enfant, ai pratiqué le football avec joie pendant des années comme un jeu et qui suis maintenant effrayé par une société de plus en plus frénétiquement "sportisante", je garde chevillé au corps ce triste espoir : nous, pauvres matheux, aurons peut-être notre revanche dans l'éternité.

4. De la difficulté d'être un mathématicien

Les mathématiques sont un sujet de recherche profond et inépuisable, et les pratiquer procure de grandes joies, pour peu que l'on soit prêt à surmonter l'effort intellectuel intense qu'elles requièrent. Mais être chercheur en mathématiques présente de temps en temps quelques (relatifs) inconvénients. Comme on parle moins souvent de ces derniers, je voudrais ici en donner brièvement trois. Ce billet ne doit cependant pas être pris au pied de la lettre car la réalité est bien plus nuancée et ce qui est perçu comme un inconvénient par certains peut bien être vu comme positif par d'autres.

Le premier inconvénient est la difficulté presque "surhumaine" de certains problèmes mathématiques (par exemple, pour ce qui est de mon ressort, les conjectures de Langlands sur les représentations automorphes ou celles de Grothendieck sur les motifs ou encore les conjectures sur les valeurs des fonctions L). Le terme "inconvénient" est déjà ici très discutable, car la difficulté d'une question est souvent ce qui en fait précisément son intérêt. Mais quand même, assez régulièrement, tous les chercheurs ont des moments de découragement à force de "sécher" sur des problèmes en apparence insolubles. Je voudrais me borner à rappeller une petite histoire à ce sujet (sous forme de boutade) que j'emprunte à un jeune et brillant collègue qui se reconnaîtra peut-être. Cette histoire dit qu'un mathématicien est presque toujours déprimé : (i) en effet, la plupart du temps, son sujet de recherche est très difficile et ce qu'il fait ne marche pas ; (ii) mais il arrive que parfois, un beau jour, il trouve enfin la démonstration, la bonne définition ou le juste concept qu'il a cherchés des mois durant, et là, passée une courte euphorie, il déprime encore parce qu'il a l'impression que c'était finalement facile (tant de temps gaspillé !); (iii) il se met tant bien que mal en phase de rédaction — et se rend alors vite compte que ce qu'il a fait est faux...

Le deuxième inconvénient est la quasi-impossibilité de communiquer l'essence de sa recherche à un "profane". Je ne parle pas ici d'un ami qui ne compte pas le temps passé à vous écouter, mais, disons, de connaissances, comme par exemple (typiquement) les parents des amis d'école de ses enfants. Pour ce qui me concerne, je suis cerné par des commerciaux, managers, et autres chefs de produits, tous des gens ouverts, fort honorables et avec une bonne éducation, tous assez fiers de leur situation, qui en parlent à loisir et me demandent (ou plutôt m'ont une fois demandé...) de leur décrire la mienne. C'est là que les choses se sont vite gâtées : s'il a toujours été possible d'expliquer quelques définitions très élémentaires et de décrire quelques idées vagues, inévitablement, passé un certain seuil, le regard de l'interlocuteur s'est fait plus vague, les hochements de tête moins vigoureux et il n'était pas très difficile de deviner ce qu'il avait à l'esprit "Comment peut-on donner autant de temps et d'énergie à des problèmes aussi déconnectés de la réalité" ?

Le troisième inconvénient enfin est parfois la relative indifférence des chercheurs les uns envers les autres. L'idée assez répandue du savant enthousiaste qui se réjouit lorsque son collègue fait une découverte importante ne correspond pas toujours à la réalité. Il arrive que le chercheur n'éprouve secrètement aucun plaisir à voir son collègue trouver de nouveaux résultats et pas lui. Et il arrive même qu'il le lui fasse "poliment" sentir par une moue agacée quand celui-ci les lui décrit. Voici par exemple une autre petite histoire (encore une boutade) que je tiens d'un autre collègue moins jeune (mais non moins brillant). Pour savoir si le résultat nouveau que l'on vient d'obtenir est intéressant, il faut s'y prendre de la façon suivante : (i) modestement l'expliquer à un grand expert du sujet (ii) analyser sa réaction : s'il est content, le résultat n'a probablement que peu d'intérêt, mais s'il fait la tête, alors tout espoir est permis !

Tel peut sembler être le "destin" des mathématiciens : celui de s'attaquer à des problèmes surhumains qui suscitent indifférence et incompréhension du monde extérieur. Mais il y a les maths elles-mêmes, leurs objets et structures d'une infinie richesse, leurs beaux et puissants concepts, leur profonde unité, perpétuelle source de renouvellement et de rajeunissement.

5. De l'utilité de l'inutile

Un de mes billets précédents, intitulé "Le redoutable À quoi ça sert ?", contenait un passage qui semble-t-il a suscité un peu d'émoi chez quelques personnes (non-mathématiciennes). Ce passage prétendait, en substance, qu'un chercheur en mathématiques pures se soucie peu de l'utilité pratique de ses recherches, car ce qui compte pour lui est la profondeur, la pertinence et l'originalité des mathématiques qu'elles contiennent. Sans les renier une seconde, je voudrais dans ce court billet à la fois expliquer et nuancer ces lignes.

Décider de vouer sa vie aux mathématiques pures n'est pas du tout un acte anodin. Les activités humaines plus lucratives, plus collectives, plus directement utiles, plus reconnues socialement et demandant moins d'efforts intellectuels abondent. Les activités de recherche dans des domaines scientifiques plus appliqués aussi (physique expérimentale, biologie, médecine, ingéniérie, informatique, etc.). Dans bien des cas, une telle décision est déjà une forme de renoncement à une vie normale, l'univers fabuleux des mathématiques théoriques se présentant comme une alternative (virtuelle) parfaite à un monde réel imparfait. C'est aussi souvent une façon de rejeter certains des diktats du monde moderne que sont Rentabilité, Maximisation des profits, Société de l'hyperconsommation etc. Le (futur) mathématicien se soucie donc en général peu d'être concrètement utile à la société (via ses recherches) puisqu'une part de lui-même est en rébellion silencieuse contre cette même société et le pousse en partie à s'immerger dans l'océan des mathématiques.

Non, ce n'est pas d'être utile au monde moderne qui motive en profondeur le mathématicien.

Par contre, le chercheur en mathématiques, comme dans tous les domaines (scientifiques ou non), a énormément à coeur d'être utile à son propre champ de recherches, de voir ses travaux repris et généralisés par d'autres, de laisser une petite trace. C'est même le but fondamental de toute recherche que de produire de nouveaux résultats qui seront à leur tour des marchepieds pour des résultats futurs plus puissants et plus novateurs encore. Rien n'est pire que d'écrire un article qui n'est lu ni cité par personne et qui finit par disparaître dans le néant de l'oubli.

En résumé, le souci principal d'un mathématicien, comme de tout chercheur, est d'abord d'être utile à son domaine.

Mais il arrive qu'il fasse d'une pierre deux coups car nul ne peut prédire ce qui finit par être utile ou pas. Un exemple classique consiste à se souvenir des recherches toutes théoriques de Hilbert, Gödel et Turing qui menèrent aux premiers ordinateurs. Un autre exemple plus récent (en arithmétique) est le système de codage des cartes bancaires qui, si j'en crois mes collègues spécialistes, utilise des propriétés théoriques non-triviales de certaines courbes elliptiques sur le corps des nombres rationnels. Quand certains aspects de ses mathématiques facilitent l'existence de ses concitoyens, tout en étant le premier surpris, le mathématicien en est aussi le premier ravi !

Mais soyons réalistes : l'arithméticien que je suis reste convaincu que ses recherches dans les théories p-adiques ne verront pas d'application au coin de sa rue de son vivant. Il faut donc bien se faire une raison et se résoudre au plaisir intellectuel de l'"inutile" puisque de toute manière il n'y a qu'une infime chance de tirer la moindre satisfaction du côté de l'"utile"...

C.N.R.S., Institut des Hautes Études Scientifiques, 35 route de Chartres, 91440 Bures-sur-Yvette, France

E-mail address: breuil@ihes.fr