EXT^1 LOCALEMENT ANALYTIQUE ET COMPATIBILITÉ LOCAL-GLOBAL

par

Christophe Breuil

Résumé. — On construit une famille de représentations localement analytiques indécomposables de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ toutes contenant $\mathrm{Alg}\otimes\mathrm{Steinberg}$ en sous-objet où Alg est une représentation algébrique irréductible fixée et Steinberg la représentation spéciale lisse. Soit ρ_p une représentation p-adique semi-stable de dimension 3 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ dont la représentation de Weil-Deligne associée correspond à Steinberg par la correspondance de Langlands locale classique et dont la filtration de Hodge est non critique. Lorsque ρ_p provient d'une représentation automorphe π de $G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ (pour un groupe unitaire compact $G_{/\mathbb{Q}}$ déployé en p) et $U^p \subset G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\infty,p})$ est un niveau hors p fixé tel que π est l'unique représentation de son L-paquet global vérifiant $\pi^{U^p} \neq 0$, on montre qu'une seule des représentations localement analytiques de la famille ci-dessus apparaît dans le sous-espace Hecke-isotypique associé de la cohomologie complétée en niveau U^p. On conjecture que cette représentation de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ ne dépend que de la filtration de Hodge sur le (φ, N)-module filtré $D_{\mathrm{st}}(\rho_p)$ et qu'elle la détermine complètement.

Je remercie pour leur soutien le CNRS et l'université Paris-Sud. Je remercie chaleureusement B. Schraen pour ses promptes réponses à mes questions concernant son article [**57**], qui est utilisé de manière importante dans le présent travail, et G. Dospinescu pour sa note [**29**]. Je remercie également L. Berger, G. Chenevier, G. Henniart, J. Kohlhaase, T. Schmidt et M. Strauch pour leur attention ou pour leurs réponses à mes questions. Je remercie L. Berger pour son invitation à l'UMPA où j'ai pu exposer ces résultats ainsi que F. Herzig pour ses multiples remarques et corrections. Je remercie enfin Y. Ding pour toutes ses remarques et pour son aide précieuse dans la détection et correction d'une erreur de calcul dans la première version de ce travail.

Abstract. — We construct a family of indecomposable locally analytic representations of $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$, all containing $\mathrm{Alg}\otimes\mathrm{Steinberg}$ as subobject where Alg is a fixed irreducible algebraic representation and Steinberg the smooth special representation. Let ρ_p be a 3-diml p-adic semi-stable representation of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ with associated Weil-Deligne representation corresponding to Steinberg by the classical local Langlands correspondence and with a noncritical associated Hodge filtration. When ρ_p comes from an automorphic representation π of $G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ (for a compact split at p unitary group $G_{/\mathbb{Q}}$) and $U^p \subset G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\infty,p})$ is a prime-to-p level such that π is the only representation in its global L-packet satisfying $\pi^{U^p} \neq 0$, we show that there is a unique locally analytic representation in the above family which occurs as a subrepresentation of the associated Hecke-isotypic subspace in the completed cohomology of level U^p. We conjecture that this representation of $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ only depends on the Hodge filtration of the (φ, N)-filtered module $D_{\mathrm{st}}(\rho_p)$ and that it determines it completely.

Table des matières

1. Introduction

Soit p un nombre premier et L une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Un des buts principaux - et historiquement l'une des premières motivations - du programme de Langlands p-adique est de retrouver la théorie de Hodge p-adique en dimension n pour $\mathrm{Gal}(\overline{L}/L)$ dans la théorie des représentation p-adiques continues ou localement analytiques de $\mathrm{GL}_n(L)$ ($n \geq 2$), alors qu'elle est essentiellement invisible dans la théorie classique des représentations lisses de $\mathrm{GL}_n(L)$. Si ce but a largement été atteint dans le cas de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ ([**3**], [**20**], [**22**], [**34**]), on est encore loin du compte dès que $n \neq 2$ ou $L \neq \mathbb{Q}_p$, malgré plusieurs résultats partiels non triviaux dans cette direction (cf. par exemple [**26**], [**27**]). L'objectif de cet article est de faire un pas (de plus) vers ce but en reliant conjecturalement modules filtrés à la Fontaine et Ext^1 localement analytiques, en illustrant cette relation par la construction d'une famille de représentations localement analytiques indécomposables de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ contenant $\mathrm{Alg} \otimes \mathrm{Steinberg}$ en sous-objet où Alg est la représentation algébrique de plus haut poids les poids de Hodge-Tate distincts considérés (décalés de la manière habituelle) et Steinberg la représentation spéciale lisse, puis en montrant que certaines de ces représentations localement analytiques de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ apparaissent dans la cohomologie complétée.

Dans la suite on suppose $L = \mathbb{Q}_p$ pour simplifier les notations et on fixe un corps des coefficients E. Soit ρ_p une représentation de de Rham de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ de dimension n sur E et de poids de Hodge-Tate distincts $k_1 > \cdots > k_n$. D'une part on peut associer à ρ_p le E-espace vectoriel $D_{dR}(\rho_p) = (B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \rho_p)^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$ de dimension n qui est naturellement muni d'une action du groupe de Weil-Deligne de $\mathbb{Q}_p$ et d'une filtration décroissante $(\mathrm{Fil}^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ dont les sauts sont aux entiers $-k_i$ ([**37**]). D'autre part on devrait également pouvoir associer à ρ_p une (au moins) représentation localement analytique admissible de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ sur E que l'on note ici simplement $\Pi^{\mathrm{an}}(\rho_p)^?$, par exemple en prenant l'une des spécialisations (supposée non nulle) $V(\rho_p)$ construites dans [**15**, § 2.10]. Si le lecteur a des réticences à considérer la représentation $\Pi^{\mathrm{an}}(\rho_p)^?$, il peut la remplacer dans le reste de l'introduction par un sous-espace Hecke-isotypique de la cohomologie complétée comme au § 6.1 (lorsque ρ_p se globalise). On sait dans beaucoup de cas (cf. [**15**, § 5]) que $\Pi^{\mathrm{an}}(\rho_p)^?$ contient la représentation localement algébrique $\mathrm{Alg} \otimes_E \Pi^\infty$ où Alg est la représentation algébrique irréductible de GL_n de plus haut poids $k_1-(n-1) \geq k_2-(n-2) \geq \cdots \geq k_n$ et Π^∞ la représentation lisse de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ sur E correspondant à la représentation de Weil-Deligne sur $D_{\mathrm{dR}}(\rho_p)$ ([**36**]) par la correspondance locale classique de Langlands ([**38**], [**39**]) légèrement modifiée comme dans [**12**, § 4].

On fixe désormais n entiers $\underline{k} = (k_i)_{1\leq i\leq n}$ avec $k_1 > \cdots > k_n$, une représentation de Weil-Deligne WD dont la restriction à $\mathrm{Weil}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ est semi-simple sans multiplicité, et on définit $\mathrm{Alg}\otimes_E\Pi^\infty$ comme ci-dessus. Afin que la Conjecture 1.1 ci-dessous ne soit pas trivialement fausse, on suppose de plus qu'il existe au moins une représentation de de Rham ρ_p de dimension n de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ sur E de poids de Hodge-Tate $\underline{k}$ telle que $D_{\mathrm{dR}}(\rho_p) \cong \mathrm{WD}$. En pratique, il est plus commode dans la suite de voir WD plutôt comme un "(φ, N)-module filtré sans filtration", ce que l'auteur appelle un module de Deligne-Fontaine cf. § 2.2, mais on oublie ce point pour l'instant. Si $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ et ρ_p est une représentation de de Rham quelconque de poids de Hodge-Tate $\underline{k}$, on définit :

$$\mathrm{Fil}^{\max}\big(\wedge_E^j D_{\mathrm{dR}}(\rho_p)\big) \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Fil}^{-k_{n-j+1}} D_{\mathrm{dR}}(\rho_p) \wedge \mathrm{Fil}^{-k_{n-j+2}} D_{\mathrm{dR}}(\rho_p) \wedge \cdots \wedge \mathrm{Fil}^{-k_n} D_{\mathrm{dR}}(\rho_p) \subseteq \wedge_E^j D_{\mathrm{dR}}(\rho_p)$$

qui est un sous-E-espace vectoriel de dimension 1 de $\wedge_E^j D_{\mathrm{dR}}(\rho_p)$. Si Π, Π' sont deux représentations localement analytiques admissibles ([**54**]) de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ sur E et si $\mathcal{E}$ est un sous-E-espace vectoriel de dimension ≤ 1 de $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)}(\Pi', \Pi)$ (extensions dans la catégorie des représentations localement analytiques admissibles), on note $[\![\mathcal{E}]\!]$ l'unique représentation de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ sur E sous-jacente à $\mathcal{E}$ au sens de Yoneda. Par exemple $[\![0]\!] = \Pi \oplus \Pi'$.

La conjecture suivante est la principale motivation de cet article (on renvoie au § 2.3 et surtout à la Conjecture 6.1.1 pour plus de détails et de précision) :

Conjecture 1.1. — *À* $\underline{k}$ *et* WD *comme ci-dessus, on peut associer pour tout* $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ *une représentation localement analytique admissible de longueur finie* $\Pi^j(\underline{k}, \mathrm{WD})$ *de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ *sur* E *ainsi qu'un isomorphisme de* E*-espace vectoriels :*

$$\mathcal{R}^j : \wedge_E^j \mathrm{WD} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)}\big(\Pi^j(\underline{k}, \mathrm{WD}), \mathrm{Alg} \otimes_E \Pi^\infty\big)$$

unique à composition près à gauche par un automorphisme permis *de la représentation de Weil-Deligne* $\wedge_E^j\mathrm{WD}$ *(cf. Définition 2.3.1) vérifiant la propriété suivante : pour toute représentation de de Rham* ρ_p *de dimension* n *de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ *sur* E *de poids de Hodge-Tate* $\underline{k}$ *telle que* $D_{\mathrm{dR}}(\rho_p) \cong \mathrm{WD}$*, on a une injection* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$*-équivariante étendant l'injection* $\mathrm{Alg} \otimes_E \Pi^\infty \hookrightarrow \Pi^{\mathrm{an}}(\rho_p)^?$ *:*

$$\bigoplus_{\mathrm{Alg}\otimes_E\Pi^\infty}^{j} [\![\mathcal{R}^j\big(\mathrm{Fil}^{\max}(\wedge_E^j D_{\mathrm{dR}}(\rho_p))\big)]\!] \hookrightarrow \Pi^{\mathrm{an}}(\rho_p)^? \tag{1}$$

où le terme de gauche dans (1) est la somme amalgamée pour tout $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ *au-dessus de la représentation localement algébrique commune* $\mathrm{Alg} \otimes_E \Pi^\infty$*.*

Autrement dit, pour tout j la droite $\mathrm{Fil}^{\max}(\wedge_E^j D_{\mathrm{dR}}(\rho_p)) \subseteq \wedge^j D_{\mathrm{dR}}(\rho_p)$ définie par la filtration de Hodge correspond via $\mathcal{R}^j$ à une certaine extension non scindée :

$$[\![\mathcal{R}^j\big(\mathrm{Fil}^{\max}(\wedge_E^j D_{\mathrm{dR}}(\rho_p))\big)]\!] \ = \ \mathrm{Alg} \otimes_E \Pi^\infty \text{ —— } \Pi^j(\underline{k}, \mathrm{WD})$$

qui est présente dans $\Pi^{\mathrm{an}}(\rho_p)^?$. Sauf pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, la somme amalgamée (1) n'est qu'une sous-représentation *stricte* de $\Pi^{\mathrm{an}}(\rho_p)^?$, elle correspond seulement à ce qui se passe "juste après" les vecteurs localement algébriques $\mathrm{Alg}\otimes_E \Pi^\infty$. Mais au moins lorsque WD est indécomposable, ou de manière équivalente Π^∞ est irréductible et essentiellement de carré intégrable, il semble raisonnable de conjecturer qu'elle suffit à complètement déterminer la filtration de Hodge sur $D_{\mathrm{dR}}(\rho_p)$, c'est-à-dire ρ_p (cf. fin du § 2.3, Conjecture 6.1.1 et le commentaire qui suit la Conjecture 6.1.2).

On donne plusieurs exemples de (candidats pour les) représentations $\Pi^j(\underline{k},\mathrm{WD})$ et les isomorphismes $\mathcal{R}^j$ dans l'article :

(i) $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ au § 3.1, sauf le cas où WD est irréductible, qui reste ouvert;
(ii) $\mathrm{GL}_2(L)$ semi-stable au § 3.2, ce cas est largement motivé par les résultats de Ding ([**25**], [**26**], [**27**]);
(iii) $\mathrm{GL}_n(L)$ cristallin au § 3.3, ce cas montre une compatibilité entre la Conjecture 1.1 et les conjectures de [**5**] sur le socle localement analytique, récemment démontrées (dans le cas cristallin sous les conditions de Taylor-Wiles) dans [**8**];
(iv) $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ semi-stable non cristallin au §§ 4, 5 et 6, ce cas occupe la majeure partie de l'article.

On décrit maintenant plus en détails ce cas semi-stable non cristallin pour $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$. Plus précisément, quitte à tordre par un caractère non ramifié, on suppose $\Pi^\infty = \mathrm{St}_3^\infty$= Steinberg lisse de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ (le cas semi-stable non cristallin le plus intéressant). La représentation de Weil-Deligne WD, ou alternativement le module de Deligne-Fontaine correspondant, est alors :

$$Ee_2\oplus Ee_1\oplus Ee_0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases}\varphi(e_2) &=& e_2\\ \varphi(e_1) &=& p^{-1}e_1\\ \varphi(e_0) &=& p^{-2}e_0\end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases}N(e_2) &=& e_1\\ N(e_1) &=& e_0\\ N(e_0) &=& 0\end{cases}$$

(en fait, lorsque $\underline{k}\neq(2,1,0)$ il faut garder une torsion non ramifiée, que l'on oublie ici pour alléger les notations). On note $v_{P_i}^\infty \stackrel{\text{déf}}{=} (\mathrm{Ind}_{P_i(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} 1)^\infty/1$ pour $i\in\{1,2\}$ (induites lisses) où $P_1,P_2\subset \mathrm{GL}_3$ sont les deux paraboliques maximaux contenant le Borel B des matrices triangulaires inférieures. On considère les socles localement analytiques (cf. § 4.1) :

$$(2)\qquad \begin{aligned} C_1 &\stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\big(\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} t^{\underline{k}^{(2)}}\otimes_E(|\cdot|^{-1}\otimes|\cdot|\otimes 1)\big)^{\mathrm{an}}\\ C_3 &\stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\big(\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} t^{\underline{k}^{(2)}}\otimes_E(1\otimes|\cdot|^{-1}\otimes|\cdot|)\big)^{\mathrm{an}}\\ C_5 &\stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\big(\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} t^{\underline{k}^{(2)}}\otimes_E(|\cdot|^{-2}\otimes 1\otimes|\cdot|^2)\big)^{\mathrm{an}}\\ \widetilde{C}_2 &\stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\big(\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} t^{\underline{k}^{(3)}}\big)^{\mathrm{an}}\\ \widetilde{C}_4 &\stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\big(\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} t^{\underline{k}^{(3)}}\otimes_E(|\cdot|^{-1}\otimes|\cdot|^{-1}\otimes|\cdot|^2)\big)^{\mathrm{an}} \end{aligned}$$

où $\underline{k}^{(2)}\stackrel{\text{déf}}{=}(k_1-2,k_3-1,k_2)$, $\underline{k}^{(3)}\stackrel{\text{déf}}{=}(k_3-2,k_1-1,k_2)$, t^ν pour $\nu=(\nu_1,\nu_2,\nu_3)\in\mathbb{Z}^3$ est le caractère algébrique $\mathrm{diag}(t_1,t_2,t_3)\mapsto t_1^{\nu_1}t_2^{\nu_2}t_3^{\nu_3}$ et $|\cdot|$ le caractère norme usuel. Les représentations C_i sont irréductibles et distinctes. Le théorème suivant se démontre par une longue suite de calculs de cohomologie localement analytique assez fastidieux mais que l'on donne pour beaucoup en détails (cf. §§ 4 et 5). On adopte la notation pratique $X \text{ — } Y$ (resp. $X \text{ -- } Y$) pour désigner une extension *non scindée* (resp. quelconque) de Y par X (donc X en sous-objet).

Théorème 1.2 **(Corollaire 4.5.1(i) & Corollaire 4.6.2)**

(i) Il existe une unique représentation localement analytique admissible $\Pi^1(\underline{k}, \mathrm{WD})$ *de* $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ *sur* E *de la forme :*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=tiny]
 & \widetilde{C}_2 \arrow[dr, dash, dashed] & & \widetilde{C}_4 \arrow[dr, dash, dashed] & \\
C_1 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & C_3 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & C_5 . \\
 & \mathrm{Alg} \otimes_E v_{P_2}^{\infty} \arrow[ur, dash] & & \mathrm{Alg} \otimes_E v_{P_1}^{\infty} \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}$$

(ii) On a $\dim_E \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\big(\Pi^1(\underline{k}, \mathrm{WD}), \mathrm{Alg} \otimes_E \mathrm{St}_3^{\infty}\big) = 3$.

On a un énoncé complètement symétrique pour $\Pi^2(\underline{k}, \mathrm{WD})$ en échangeant les paraboliques P_1 et P_2. Il est très vraisemblable que les deux extensions (uniques) en pointillé apparaissant en sous-quotient de la représentation dans le (i) du Théorème 1.2 soient non scindées (et c'est au moins vrai pour la première, cf. le (ii) de la Remarque 4.4.3), mais nous n'avons pas besoin de ce résultat. On peut expliquer heuristiquement la raison de la dimension 3 dans le (ii) du Théorème 1.2 : elle vient du fait que l'on peut "raccrocher" la représentation $\mathrm{Alg} \otimes_E \mathrm{St}_3^{\infty}$ aux trois endroits suivants de $\Pi^1(\underline{k}, \mathrm{WD})$ (et seulement à ceux-là) :

(3)

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=tiny]
 & & \widetilde{C}_2 \arrow[dr, dash, dashed] & & \widetilde{C}_4 \arrow[dr, dash, dashed] & \\
 & C_1 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & C_3 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & C_5 \\
\mathrm{Alg} \otimes_E \mathrm{St}_3^{\infty} \arrow[ur, dash] & & \mathrm{Alg} \otimes_E v_{P_2}^{\infty} \arrow[ur, dash] & & \mathrm{Alg} \otimes_E v_{P_1}^{\infty} \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=tiny]
 & & \widetilde{C}_2 \arrow[dr, dash, dashed] & & \widetilde{C}_4 \arrow[dr, dash, dashed] & \\
 & C_1 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & C_3 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & C_5 \\
 & & \mathrm{Alg} \otimes_E v_{P_2}^{\infty} \arrow[ur, dash] & & \mathrm{Alg} \otimes_E v_{P_1}^{\infty} \arrow[ur, dash] & \\
 & \mathrm{Alg} \otimes_E \mathrm{St}_3^{\infty} \arrow[ur, dash] & & & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=tiny]
 & \widetilde{C}_2 \arrow[dr, dash, dashed] & & \widetilde{C}_4 \arrow[dr, dash, dashed] & \\
C_1 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & C_3 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & C_5 \\
 & \mathrm{Alg} \otimes_E v_{P_2}^{\infty} \arrow[ur, dash] & & \mathrm{Alg} \otimes_E v_{P_1}^{\infty} \arrow[ur, dash] & \\
 & & \mathrm{Alg} \otimes_E \mathrm{St}_3^{\infty} \arrow[ur, dash] & &
\end{tikzcd}$$

les deux configurations du bas donnant des sous-espaces de dimension respectivement 2 et 1 de $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}(\Pi^1(\underline{k}, \mathrm{WD}), \mathrm{Alg} \otimes_E \mathrm{St}_3^{\infty})$. Noter que les sous-représentations $\mathrm{Alg} \otimes_E \mathrm{St}_3^{\infty} \text{ — } C_1 \text{ — } \mathrm{Alg} \otimes_E v_{P_2}^{\infty}$ dans la représentation du haut en (3) sont déjà présentes dans [**57**, § 5.4]. Les configurations (3) suggèrent que l'isomorphisme $\mathcal{R}^1$

(qui ici doit être défini à multiplication près par un scalaire non nul) devrait satisfaire :

$$\mathcal{R}^1(Ee_1 \oplus Ee_0) = \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\Big(\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=tiny] & & \widetilde{C}_4 \arrow[dr, dash] & \\ \mathrm{Alg}\otimes_E v^\infty_{P_2} \arrow[r, dash] & C_3 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & C_5 \\ & & \mathrm{Alg}\otimes_E v^\infty_{P_1} \arrow[ur, dash] & \end{tikzcd}, \mathrm{Alg}\otimes_E \mathrm{St}_3^\infty\Big)$$

$$\mathcal{R}^1(Ee_0) = \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\big(\mathrm{Alg}\otimes_E v^\infty_{P_1} — C_5\,, \mathrm{Alg}\otimes_E \mathrm{St}_3^\infty\big)$$

(vus comme sous-espaces de $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}(\Pi^1(\underline{k}, \mathrm{WD}), \mathrm{Alg}\otimes_E \mathrm{St}_3^\infty))$, et de même par symétrie pour $\mathcal{R}^2(Ee_2\wedge e_0 \oplus Ee_1\wedge e_0)$ et $\mathcal{R}^2(Ee_1\wedge e_0)$, cf. le (i) de la Remarque 6.1.4. Mais j'ignore pour l'instant comment "calibrer" $\mathcal{R}^1$ et $\mathcal{R}^2$ avec plus de précision. En effet, même dans le cas analogue pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, qui présente deux configurations :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=tiny] & C_1 \arrow[r, dash] & \mathrm{Alg} \arrow[r, dash] & C_3 \\ \mathrm{Alg}\otimes_E \mathrm{St}_2^\infty \arrow[ur, dash] & & & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=tiny] C_1 \arrow[r, dash] & \mathrm{Alg} \arrow[r, dash] & C_3, \\ \mathrm{Alg}\otimes_E \mathrm{St}_2^\infty \arrow[ur, dash] & & \end{tikzcd}$$

un signe apparaît dans la définition de $\mathcal{R}^1$ (cf. (25) ci-dessous) qu'il est difficile de prévoir *a priori*. Noter que le cas $\mathrm{Fil}^{\max}(D_{\mathrm{dR}}(\rho_p)) \subseteq \mathcal{R}^1(Ee_1 \oplus Ee_0)$ peut vraiment arriver, cf. le (ii) de la Remarque 6.1.4, et (3) montre que la Conjecture 1.1 prévoit alors le constituant C_1 en socle de $\Pi^{\mathrm{an}}(\rho_p)^?$, constituant qui est déjà effectivement prévu (de manière essentiellement indépendante) par [**5**, Conj. 5.3].

Supposons maintenant (toujours dans ce cas semi-stable non cristallin de dimension 3) que l'on a $\rho_p \cong \rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$ où $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \to \mathrm{GL}_3(E)$ est absolument irréductible et provient d'une représentation automorphe de $G(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$, $G/\mathbb{Q}$ étant un groupe unitaire compact à l'infini et isomorphe à GL_3 sur une extension quadratique imaginaire F de $\mathbb{Q}$ où p se décompose totalement (cf. [**51**]). On suppose de plus que $\mathrm{Fil}^{\max}(D_{\mathrm{dR}}(\rho_p)) \nsubseteq Ee_1 \oplus Ee_0$ (et l'analogue avec $\mathrm{Fil}^{\max}(\wedge^2 D_{\mathrm{dR}}(\rho_p)))$, i.e. la filtration de Hodge est "non critique". Si $U^p \subset G(\mathbb{A}_\mathbb{Q}^{\infty,p})$ est un sous-groupe ouvert compact hors p, on considère l'espace de Banach p-adique habituel $\widehat{S}(U^p, E) \overset{\text{déf}}{=} \{f : G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_\mathbb{Q}^\infty)/U^p \longrightarrow E,\ f \text{ continue}\}$ avec action unitaire de $G(\mathbb{Q}_p) \cong \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ par translation à droite sur les fonctions. On dispose du sous-espace fermé invariant Hecke isotypique $\widehat{S}(U^p, E)[\mathfrak{m}_\rho]$ (éventuellement nul) associé à ρ, ainsi que de ses vecteurs localement analytiques $\widehat{S}(U^p, E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho]$ et localement algébriques $\widehat{S}(U^p, E)^{\mathrm{alg}}[\mathfrak{m}_\rho]$ (cf. § 6.1). Le théorème suivant résume le résultat principal de compatibilité local-global de l'article (ε est le caractère cyclotomique p-adique et on renvoie au § 6.2 pour un énoncé plus détaillé).

Théorème 1.3 **(Théorème 6.2.1)**. — *Avec les notations et hypothèses précédentes, supposons de plus qu'une seule représentation automorphe π de $G(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ contribue* *à* $\widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{alg}}[\mathfrak{m}_\rho]$. *Alors il existe une unique représentation de* $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ *de la forme :*

$$\mathrm{Alg}\otimes_E \mathrm{St}_3^\infty \begin{array}{l} \!\!\!\frown\ \Pi^1(\underline{k},\mathrm{WD}) \\ \!\!\!\smile\ \Pi^2(\underline{k},\mathrm{WD}) \end{array} \tag{4}$$

de socle $\mathrm{Alg}\otimes_E \mathrm{St}_3^\infty$ *telle que l'isomorphisme* $(\pi^p)^{U^p}\otimes_E(\mathrm{Alg}\otimes_E \mathrm{St}_3^\infty\otimes\varepsilon^2\circ\det)\cong \widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{alg}}[\mathfrak{m}_\rho]$ *(cf. (63)) s'étend en une injection* $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$*-équivariante :*

$$(\pi^p)^{U^p}\otimes_E\Big(\mathrm{Alg}\otimes_E \mathrm{St}_3^\infty \begin{array}{l} \!\!\!\frown\ \Pi^1(\underline{k},\mathrm{WD}) \\ \!\!\!\smile\ \Pi^2(\underline{k},\mathrm{WD}) \end{array}\otimes\varepsilon^2\circ\det\Big)\hookrightarrow \widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho]. \tag{5}$$

La preuve est une généralisation/variante de celle de [**6**, Prop. 5.5.4]. L'hypothèse qu'une seule π contribue à $\widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{alg}}[\mathfrak{m}_\rho]$ dans le Théorème 1.3 peut sembler forte, mais sans elle je ne sais pas comment montrer que *toutes* les représentations de la forme (4) qui s'injectent dans $\widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho]$ (à twist près) sont isomorphes, cf. le (ii) de la Remarque 6.2.2. Noter par ailleurs que l'un des points techniques dans la preuve est que l'on ignore en général si les représentations très fortement admissibles au sens de [**33**, Def. 0.12] sont stables par extension (à cause de ce point, une première version de ce travail supposait $\underline{k}=(2,1,0)$ dans le Théorème 1.3). Finalement, on peut contourner ce problème, mais pour cela j'ai dû généraliser certains résultats d'Emerton de [**33**], cette généralisation technique est reléguée en appendice.

L'intérêt potentiel de la représentation (4) vient de la conjecture ci-dessous, qui est en fait impliquée par la Conjecture 1.1 lorsque $n=3$, $\Pi^\infty=\mathrm{St}_3^\infty$ et en prenant $\Pi^j(\underline{k},\mathrm{WD})$ comme dans le Théorème 1.2 (cf. la discussion qui suit la Conjecture 6.1.2) :

Conjecture 1.4. — *La représentation* $\mathrm{Alg}\otimes_E \mathrm{St}_3^\infty \begin{array}{l} \!\!\!\frown\ \Pi^1(\underline{k},\mathrm{WD}) \\ \!\!\!\smile\ \Pi^2(\underline{k},\mathrm{WD}) \end{array}$ *du Théorème 1.3 détermine complètement et ne dépend que de* ρ_p.

Terminons cette introduction avec quelques notations.

Dans tout le texte, L (le corps de base) et E (le corps des coefficients) sont deux extensions finies de $\mathbb{Q}_p$ telles que $|\mathcal{S}|=[L:\mathbb{Q}_p]$ où $\mathcal{S}\overset{\text{déf}}{=}\mathrm{Hom}(L,E)$. Si $x\in\overline{\mathbb{Q}_p}$, on note $|x|_L\overset{\text{déf}}{=}q^{-e\,\mathrm{val}(x)}$ où $q=p^f$ est le cardinal du corps résiduel de L, $e=[L:\mathbb{Q}_p]/f$ et val est normalisé par $\mathrm{val}(p)=1$ (en particulier $|x|_L\in q^{\mathbb{Z}}$ si $x\in L$). Si $L=\mathbb{Q}_p$ on note juste $|x|$. On note également $W(\overline{L}/L)$ le groupe de Weil de L et rec_L : $W(\overline{L}/L)^{\mathrm{ab}}\xrightarrow{\sim}L^\times$ l'application de réciprocité de la théorie du corps de classes local normalisée de sorte que les Frobenius *géométriques* s'envoient sur les uniformisantes. Si $\alpha\in E^\times$, on note $\mathrm{nr}(\alpha):L^\times\to E^\times$ l'unique caractère non ramifié qui envoie une uniformisante quelconque de L sur α (par exemple $|\cdot|_L=\mathrm{nr}(q^{-1})$). On note ε le caractère cyclotomique p-adique de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ ou de $\mathbb{Q}_p^\times$ (via $\mathrm{rec}_{\mathbb{Q}_p}$) et on convient que son poids de Hodge-Tate est 1.

Irréductible (resp. de longueur finie) pour une représentation continue π d'un groupe topologique G veut dire topologiquement irréductible (resp. topologiquement de longueur finie), i.e. ne possédant pas de sous-espace strict non nul fermé stable sous l'action de G (resp. ne possédant qu'un nombre fini de sous-espaces non nuls fermés stables sous l'action du groupe). Si P est un sous-groupe fermé de G on note $(\mathrm{Ind}_P^G *)^\infty$ les induites *non normalisées* lisses. Si P et G sont de plus des groupes p-adiques L-analytiques, on note $(\mathrm{Ind}_P^G *)^{\sigma\text{-an}}$ les induites localement σ-analytiques pour $\sigma \in \mathcal{S}$, et juste $(\mathrm{Ind}_P^G *)^{\mathrm{an}}$ si $L = \mathbb{Q}_p$ (induites localement analytiques). Pour $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, on note St_n^∞ la représentation de Steinberg usuelle lisse de $\mathrm{GL}_n(L)$ sur E et $\det_n$ le caractère déterminant usuel $\mathrm{GL}_n(L) \to L^\times$. On normalise la correspondance de Langlands locale pour $\mathrm{GL}_n(L)$ de sorte que la représentation $\chi_1 \oplus \cdots \oplus \chi_n$ de $W(\overline{L}/L)$ corresponde (pour des χ_i génériques) à :

$$\big(\mathrm{Ind}_{B(L)}^{\mathrm{GL}_n(L)} \chi_1|\cdot|_L^{1-n} \otimes \chi_2|\cdot|_L^{2-n} \otimes \cdots \otimes \chi_n\big)^\infty$$

où $B \subset \mathrm{GL}_n$ est le sous-groupe des matrices triangulaires inférieures et où l'on écrit χ_i pour $\chi_i \circ \mathrm{rec}_L$ (il s'agit de la normalisation notée $\pi^{\mathrm{unit}} \otimes |\det|^{-d/2}$ de [**12**, p.163]).

Si Π_1, Π_2 sont deux représentations localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques admissibles au sens de [**54**, § 6] d'un groupe p-adique localement $\mathbb{Q}_p$-analytique H sur un E-espace vectoriel de type compact, on note $\mathrm{Ext}^1_H(\Pi_2, \Pi_1)$ (resp. $\mathrm{Hom}_H(\Pi_2, \Pi_1)$) le E-espace vectoriel des extensions (resp. des homomorphismes) dans la catégorie des représentations localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques admissibles de H sur E. Si H est localement L-analytique et Π_1, Π_2 sont localement σ-analytiques pour $\sigma \in \mathcal{S}$, on note $\mathrm{Ext}^1_{H,\sigma}(\Pi_2, \Pi_1)$ le sous-E-espace vectoriel de $\mathrm{Ext}^1_H(\Pi_2, \Pi_1)$ des extensions localement σ-analytiques. La notation imagée $\Pi_1 \!-\!\!\!-\!\!\!-\, \Pi_2$ signifie une extension *non scindée* de Π_2 par Π_1, i.e. un élément non nul de $\mathrm{Ext}^1_H(\Pi_2, \Pi_1)$ tandis que $\Pi_1 - - \Pi_2$ signifie une extension qui peut être scindée. Ainsi une représentation Π de la forme
$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny] & \Pi_2 \arrow[dr, dash, dashed] & \\ \Pi_1 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & \Pi_4 \\ & \Pi_3 \arrow[ur, dash] & \end{tikzcd}$$
est telle que $\Pi_1 \!-\!\!\!-\!\!\!-\, \Pi_2$ et $\Pi_1 \!-\!\!\!-\!\!\!-\, \Pi_3$ sont en sous-objets de Π, Π_2 et Π_3 sont en sous-objets de Π/Π_1, et $\Pi_3 \!-\!\!\!-\!\!\!-\, \Pi_4$, $\Pi_2 - - \Pi_4$ sont en quotients de Π.

Enfin si A est un anneau (unitaire), on note Mod_A la catégorie des A-modules à gauche.

2. Rappels et préliminaires

On donne quelques rappels sur la théorie localement analytique et les modules de Deligne-Fontaine, puis on énonce le formalisme d'une propriété conjecturale (**EXT**) des représentations localement analytiques "correspondant" aux représentations de de Rham à poids de Hodge-Tate distincts.

2.1. Préliminaires sur les représentations localement analytiques. — On donne de très brefs rappels et préliminaires sur les représentations localement σ-analytiques.

On fixe $\sigma \in \mathcal{S}$. Si H est un groupe p-adique localement L-analytique, on note $D_\sigma(H,E)$ l'algèbre des distributions localement σ-analytiques sur H à valeurs dans E, c'est-à-dire le dual fort du E-espace vectoriel localement convexe $C^{\sigma\text{-an}}(H,E)$ des fonctions localement L-analytiques pour le plongement σ de L dans les coefficients E. Si Π_1, Π_2 sont deux représentations localement σ-analytiques de H sur un E-espace vectoriel de type compact, leur dual fort Π_1', Π_2' est un $D_\sigma(H,E)$-module à gauche et on note $\mathrm{Ext}^i_{D_\sigma(H,E)}(\Pi_2',\Pi_1')$ pour $i \geq 0$ les groupes (en fait des E-espaces vectoriels) d'extension dans $\mathrm{Mod}_{D_\sigma(H,E)}$. Lorsque Π_1 et Π_2 sont admissibles on a par exemple $\mathrm{Hom}_H(\Pi_1,\Pi_2) \cong \mathrm{Hom}_{D_\sigma(H,E)}(\Pi_2',\Pi_1')$ par [**54**, Th. 6.3]. Le lemme crucial suivant sera souvent utilisé de manière tacite.

Lemme 2.1.1. — *Soit* Π_1, Π_2 *deux représentations localement σ-analytiques de H sur un E-espace vectoriel de type compact. On suppose que* Π_1 *et* Π_2 *sont admissibles. Alors on a un isomorphisme de E-espaces vectoriels :*

$$\mathrm{Ext}^1_{H,\sigma}\big(\Pi_1,\Pi_2\big) \cong \mathrm{Ext}^1_{D_\sigma(H,E)}\big(\Pi_2',\Pi_1'\big).$$

Démonstration. — Par [**54**, Th. 6.3] et par définition de $\mathrm{Ext}^1_{H,\sigma}(\Pi_1,\Pi_2)$, on a une injection $\mathrm{Ext}^1_{H,\sigma}(\Pi_1,\Pi_2) \hookrightarrow \mathrm{Ext}^1_{D_\sigma(H,E)}(\Pi_2',\Pi_1')$, il suffit donc de montrer la surjectivité. Soit M un $D_\sigma(H,E)$-module extension de Π_2' par Π_1', par la discussion qui suit [**53**, Lem. 3.6] il suffit de montrer que M est coadmissible. En effet, par [**54**, § 6] M est alors muni d'une topologie canonique qui en fait un espace de Fréchet nucléaire muni d'une action séparément continue de $D_\sigma(H,E)$, donc par [**53**, Cor. 3.3] le dual fort d'une représentation localement analytique, qui est l'extension dans $\mathrm{Ext}^1_{H,\sigma}(\Pi_1,\Pi_2)$ cherchée. Soit $H_0 \subseteq H$ un sous-groupe ouvert compact quelconque, pour $1/p < r < 1$ on dispose des E-algèbres de Banach $D_{\sigma,r}(H_0,E)$ (cf. la preuve de [**54**, Th. 5.1]). On définit $M_r \stackrel{\text{déf}}{=} M \otimes_{D_\sigma(H_0,E)} D_{\sigma,r}(H_0,E)$ et de même $(\Pi_1')_r$, $(\Pi_2')_r$. Comme $D_{\sigma,r}(H_0,E)$ est plat sur $D_\sigma(H_0,E)$ ([**54**, Th. 5.1] et [**54**, Rem. 3.2]) on a encore des suites exactes courtes de $D_{\sigma,r}(H_0,E)$-modules :

$$0 \longrightarrow (\Pi_1')_r \longrightarrow M_r \longrightarrow (\Pi_2')_r \longrightarrow 0 \tag{6}$$

d'où on déduit que M_r est de type fini sur $D_{\sigma,r}(H_0,E)$ puisque $(\Pi_1')_r$ et $(\Pi_2')_r$ le sont. Il reste donc à montrer que l'on a un isomorphisme $M \xrightarrow{\sim} \varprojlim_r M_r$. Mais en passant à la limite projective sur les suites exactes (6) on en déduit un diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \varprojlim_r (\Pi_1')_r & \to & \varprojlim_r M_r & \to & \varprojlim_r (\Pi_2')_r & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \to & \Pi_1' & \to & M & \to & \Pi_2' & \to & 0
\end{array}$$

où les deux flèches verticales de gauche et de droite sont des isomorphismes par hypothèse. Une chasse au diagramme donne immédiatement l'isomorphisme de la flèche verticale du milieu. □

Remarque 2.1.2. — Si $Z \subseteq H$ est un sous-groupe p-adique localement L-analytique fermé contenu dans le centre de H et si Z agit par un caractère (localement σ-analytique) χ sur Π_1 et Π_2, on a un isomorphisme analogue $\mathrm{Ext}^1_{H,\sigma,\chi}(\Pi_1,\Pi_2) \cong \mathrm{Ext}^1_{D_\sigma(H,E),\chi'}(\Pi_2',\Pi_1')$ où l'on prend les extensions sur lesquelles Z (resp. $D_\sigma(Z,E)$) agit par χ (resp. par le dual χ' de χ).

Soit G un groupe algébrique réductif connexe déployé sur L, $T \subseteq G$ un tore maximal déployé et $B \subseteq G$ un sous-groupe de Borel contenant T. On note $\mathfrak{g}_\sigma$ (resp. $\mathfrak{b}_\sigma$) la E-algèbre de Lie de $G\times_{L,\sigma}E$ (resp. $B\times_{L,\sigma}E$) et $U(\mathfrak{g}_\sigma)$, $U(\mathfrak{b}_\sigma)$ les algèbres enveloppantes. Pour $\mu_\sigma \in X(T\times_{L,\sigma}E) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr}}(T\times_{L,\sigma}E, \mathbb{G}_{\mathrm{m}/E})$ on note $L(\mu_\sigma)$ l'unique objet simple de la catégorie $\mathcal{O}^{\mathfrak{b}_\sigma}_{\mathrm{alg}}$ (cf. [**50**, § 2.5]) de plus haut poids μ_σ, c'est-à-dire l'unique quotient irréductible de $U(\mathfrak{g}_\sigma)\otimes_{U(\mathfrak{b}_\sigma)}\mu_\sigma$. Pour P sous-groupe parabolique de G contenant B de sous-groupe de Levi L_P contenant T, et π^∞ représentation lisse de $L_P(L)$ sur E de longueur finie, si de plus $L(\mu_\sigma)$ est dans la sous-catégorie $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}_\sigma}_{\mathrm{alg}} \subseteq \mathcal{O}^{\mathfrak{b}_\sigma}_{\mathrm{alg}}$ (cf. *loc. cit.*, $\mathfrak{p}_\sigma$ est la E-algèbre de Lie de $P\times_{L,\sigma}E$) alors on dispose des représentations localement σ-analytiques fortement admissibles $\mathcal{F}^G_P(L(\mu_\sigma),\pi^\infty)$ construites par Orlik et Strauch dans [**50**] en voyant E comme extension de L via $\sigma : L \hookrightarrow E$ (cf. aussi [**4**, § 1] pour un bref résumé).

Dans la suite, G sera (sauf mention contraire) un groupe linéaire $\mathrm{GL}_{n/L}$, T le sous-groupe des matrices diagonales et B le sous-groupe des matrices triangulaires *inférieures*. On note $N \subset B$ le radical unipotent de B, $\overline{B}$ le sous-groupe des matrices triangulaires *supérieures* et $\overline{N}$ le radical unipotent de $\overline{B}$. Si $\mu_\sigma = (\mu_{i,\sigma})_{i\in\{1,\dots,n\}} \in X(T\times_{L,\sigma}E) \cong \mathbb{Z}^n$, on rappelle que $\dim_E L(\mu_\sigma) < +\infty$ si et seulement si $\mu_{1,\sigma} \leq \mu_{2,\sigma} \leq \cdots \leq \mu_{n,\sigma}$ (i.e. μ_σ est dominant par rapport à $B\times_{L,\sigma}E$) et dans ce cas on peut aussi voir $L(\mu_\sigma)$ comme une représentation algébrique de $G\times_{L,\sigma}E$ sur E, et donc en particulier comme une représentation de $G(L) \subseteq (G\times_{L,\sigma}E)(E)$. Lorsque $\mu_{1,\sigma} \geq \mu_{2,\sigma} \geq \cdots \geq \mu_{n,\sigma}$, on note $\overline{L}(\mu_\sigma)$ la représentation algébrique irréductible de dimension finie de $G\times_{L,\sigma}E$ sur E de plus haut poids dominant μ_σ par rapport au Borel opposé $\overline{B}\times_{L,\sigma}E$. On a alors $L(w_0\mu_\sigma) = \overline{L}(\mu_\sigma)$ où w_0 est l'élément de longueur maximal du groupe de Weyl de $G\times_{L,\sigma}E$ ($w_0\mu_\sigma$ devient dominant pour $B\times_{L,\sigma}E$). Enfin pour $\mu_\sigma = (\mu_{i,\sigma})_{i\in\{1,\dots,n\}} \in X(T\times_{L,\sigma}E) \cong \mathbb{Z}^n$, on note $\sigma(t)^{\mu_\sigma}$ le caractère :

$$t \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{diag}(t_1,\dots,t_n) \in T(L) \longmapsto \sigma(t)^{\mu_\sigma} \overset{\text{déf}}{=} \sigma(t_1)^{\mu_{1,\sigma}}\cdots\sigma(t_n)^{\mu_{n,\sigma}} \in E^\times.$$

2.2. Rappels sur les modules de Deligne-Fontaine. — On donne quelques rappels sur les modules de Deligne-Fontaine ([**36**]).

Fixons L' une extension finie galoisienne de L et soit $L_0' \subseteq L'$ la sous-extension non ramifiée (sur $\mathbb{Q}_p$) maximale. On suppose $|\mathrm{Hom}(L',E)| = [L' : \mathbb{Q}_p]$ et on note

$f' = [L'_0 : \mathbb{Q}_p]$ et φ'_0 le Frobenius arithmétique sur L'_0 (qui modulo p est l'élévation à la puissance p). Rappelons qu'un module de Deligne-Fontaine est un quadruplet $(D, \varphi, N, \mathrm{Gal}(L'/L))$ où D est un $L'_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$-module libre de rang fini équipé d'une application bijective (appelée Frobenius) $\varphi : D \to D$ telle que $\varphi((l'_0 \otimes e) \cdot d) = (\varphi'_0(l'_0) \otimes e) \cdot \varphi(d)$, d'un endomorphisme $L'_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$-linéaire $N : D \to D$ (appelé opérateur de monodromie) tel que $N\varphi = p\varphi N$ et d'une action de $\mathrm{Gal}(L'/L)$ (appelée donnée de descente) qui commute à φ, N et telle que $g((l'_0 \otimes e) \cdot d) = (g(l'_0) \otimes e) \cdot g(d)$ ($l'_0 \in L'_0$, $e \in E$, $d \in D$, $g \in \mathrm{Gal}(L'/L)$). Les modules de Deligne-Fontaine forment une catégorie de manière évidente en prenant pour morphismes les applications $L'_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$-linéaires qui commutent à φ, N et à l'action de $\mathrm{Gal}(L'/L)$.

Par un résultat de Fontaine (cf. [**36**] ou [**12**, Prop. 4.1]), la catégorie des modules de Deligne-Fontaine est en fait équivalente à la catégorie des représentations du groupe de Weil-Deligne de L sur un E-espace vectoriel de dimension finie telles que la restriction au groupe de Weil de L' est non ramifiée. Rappelons comment associer une représentation de Weil-Deligne à un module de Deligne-Fontaine $\underline{D} = (D, \varphi, N, \mathrm{Gal}(L'/L))$ (cf. [**12**, § 4]). On fixe un plongement $\sigma'_0 : L'_0 \hookrightarrow E$, qui induit $\sigma'_0 \otimes \mathrm{Id} : L'_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} E \twoheadrightarrow E$, et on pose $D_{L'_0,\sigma'_0} \stackrel{\text{déf}}{=} D \otimes_{L'_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} E, \sigma'_0 \otimes \mathrm{Id}} E$. Comme N est $L'_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$-linéaire, il induit un endomorphisme E-linéaire nilpotent encore noté $N : D_{L'_0,\sigma'_0} \to D_{L'_0,\sigma'_0}$. Pour $w \in W(\overline{L}/L)$, on définit $r(w) \stackrel{\text{déf}}{=} \varphi^{-\alpha(w)} \circ \overline{w}$ où $\overline{w}$ est l'image de w dans $\mathrm{Gal}(L'/L)$ et $\alpha(w) \in f\mathbb{Z}$ est l'unique entier tel que l'image de w dans $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}_p}/\mathbb{F}_p)$ est la puissance $\alpha(w)$-ième du Frobenius arithmétique absolu. On voit immédiatement que $r(w)$ est $L'_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$-linéaire et donc induit une application encore notée $r(w) : D_{L'_0,\sigma'_0} \to D_{L'_0,\sigma'_0}$. Si l'on remplace σ'_0 par $\sigma'_0 \circ {\varphi'_0}^{-d}$ pour $d \in \mathbb{Z}$, l'application $\varphi^d : D \to D$ induit un isomorphisme E-linéaire encore noté $\varphi^d : D_{L'_0,\sigma'_0} \xrightarrow{\sim} D_{L'_0,\sigma'_0 \circ {\varphi'_0}^{-d}}$ qui, composé avec un certain automorphisme E-linéaire de $D_{L'_0,\sigma'_0}$ (voir les preuves de [**11**, Lem. 2.2.1.2] et [**24**, Lem. 8.4.3]), commute à N et $r(w)$ pour tout $w \in W(\overline{L}/L)$: $(r, N, D_{L'_0,\sigma'_0})$ est la représentation de Weil-Deligne associée à $\underline{D}$, qui ne dépend donc pas du plongement σ'_0 à isomorphisme près.

Pour tenir compte de la filtration de Hodge, il sera plus pratique d'avoir une variante de la définition de cette représentation de Weil-Deligne faisant intervenir des plongements de L dans E plutôt que de L'_0.

On pose $D_{L'} \stackrel{\text{déf}}{=} D \otimes_{L'_0} L'$ auquel on étend l'action de $\mathrm{Gal}(L'/L)$ par $g((l' \otimes e) \cdot d) = (g(l') \otimes e) \cdot g(d)$. La décomposition $L \otimes_{\mathbb{Q}_p} E \xrightarrow{\sim} \prod_{\sigma \in \mathcal{S}} E$, $l \otimes e \mapsto (\sigma(l)e)_\sigma$ induit $D_{L'} \cong \prod_{\sigma \in \mathcal{S}} D_{L',\sigma}$ où chaque $D_{L',\sigma}$ est un $L' \otimes_{L,\sigma} E$-module libre de rang celui de D sur $L'_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ et l'action de $\mathrm{Gal}(L'/L)$ sur $D_{L'}$ induit une action sur chaque $D_{L',\sigma}$. Par le théorème de Hilbert 90 on a un isomorphisme $L' \otimes_{L,\sigma} E$-linéaire pour tout σ :

$$L' \otimes_L D_{L',\sigma}^{\mathrm{Gal}(L'/L)} \xrightarrow{\sim} D_{L',\sigma}. \tag{7}$$

où $D_{L',\sigma}^{\mathrm{Gal}(L'/L)} = (D_{L',\sigma})^{\mathrm{Gal}(L'/L)} = D_{L'}^{\mathrm{Gal}(L'/L)} \otimes_{L\otimes_{\mathbb{Q}_p}E,\sigma\otimes\mathrm{Id}} E$. Pour tout $\sigma' : L' \hookrightarrow E$, soit $D_{L',\sigma'} \stackrel{\text{déf}}{=} D_{L'} \otimes_{L'\otimes_{\mathbb{Q}_p}E,\sigma'\otimes\mathrm{Id}} E$, l'injection $D \hookrightarrow D_{L'}$ induit un isomorphisme de E-espaces vectoriels $D_{L'_0,\sigma'|_{L'_0}} \xrightarrow{\sim} D_{L',\sigma'}$ qui permet de transporter sur $D_{L',\sigma'}$ l'action de Weil-Deligne précédemment définie sur $D_{L'_0,\sigma'|_{L'_0}}$.

Lemme 2.2.1. — *Fixons $\sigma \in \mathcal{S}$.*
(i) Pour tout $\sigma' : L' \hookrightarrow E$ tel que $\sigma'|_L = \sigma$, l'application composée :

$$p_{\sigma'} : D_{L',\sigma}^{\mathrm{Gal}(L'/L)} \hookrightarrow D_{L',\sigma} \twoheadrightarrow D_{L',\sigma'}$$

est un isomorphisme de E-espaces vectoriels de dimension n. En particulier $p_{\sigma'}$ permet de transporter sur $D_{L',\sigma}^{\mathrm{Gal}(L'/L)}$ l'action de Weil-Deligne sur $D_{L',\sigma'}$.
(ii) Pour tout $\sigma', \sigma'' : L' \hookrightarrow E$ tels que $\sigma''|_L = \sigma'|_L = \sigma$ et tout $w \in W(\overline{L}/L)$ relevant $g \stackrel{\text{déf}}{=} \sigma''^{-1}\sigma' \in \mathrm{Gal}(L'/L)$, l'action de Weil-Deligne induite sur $D_{L',\sigma}^{\mathrm{Gal}(L'/L)}$ par $p_{\sigma''}$ est isomorphe à l'action induite par $p_{\sigma'}$ conjuguée par w^{-1}.

Démonstration. — (i) se déduit de (7). Démontrons (ii). Le diagramme commutatif $\begin{array}{ccc} D_{L'} & \hookleftarrow & D \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ D_{L'} & \hookleftarrow & D \end{array}$ induit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} D_{L',\sigma'} & \xleftarrow{\sim} & D_{L'_0,\sigma'|_{L'_0}} \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ D_{L',\sigma''} & \xleftarrow{\sim} & D_{L'_0,\sigma''|_{L'_0}} \end{array}$$

qui s'inscrit dans un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} D_{L',\sigma}^{\mathrm{Gal}(L'/L)} & \xrightarrow{p_{\sigma'}} & D_{L',\sigma'} & \xleftarrow{\sim} & D_{L'_0,\sigma'|_{L'_0}} \\ {\scriptstyle w^{-1}}\downarrow & & {\scriptstyle w^{-1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle w^{-1}} \\ D_{L',\sigma}^{\mathrm{Gal}(L'/L)} & \xrightarrow{p_{\sigma'}} & D_{L',\sigma'} & \xleftarrow{\sim} & D_{L'_0,\sigma'|_{L'_0}} \\ {\scriptstyle \mathrm{Id}}\downarrow & & {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ D_{L',\sigma}^{\mathrm{Gal}(L'/L)} & \xrightarrow{p_{\sigma''}} & D_{L',\sigma''} & \xleftarrow{\sim} & D_{L'_0,\sigma''|_{L'_0}}. \end{array}$$

Or, par définition de l'action $r(w^{-1})$ sur $D_{L'_0,\sigma'|_{L'_0}}$, la composée $g \circ w^{-1}$ à droite est de la forme φ^d pour un $d \in \mathbb{Z}$, donc entrelace les actions respectives de Weil-Deligne sur $D_{L'_0,\sigma'|_{L'_0}}$ et $D_{L'_0,\sigma''|_{L'_0}}$ (lorsque composée avec un certain automorphisme E-linéaire de $D_{L'_0,\sigma'|_{L'_0}}$, cf. ci-dessus). On en déduit que $w^{-1} : D_{L',\sigma}^{\mathrm{Gal}(L'/L)} \to D_{L',\sigma}^{\mathrm{Gal}(L'/L)}$ (pour l'action induite par $p_{\sigma'}$) composé avec un automorphisme E-linéaire de la source entrelace les actions de Weil-Deligne induites par $p_{\sigma'}$ et $p_{\sigma''}$. □

Dans la suite de l'article on munit toujours $D_{L',\sigma}^{\mathrm{Gal}(L'/L)}$ de l'action de Weil-Deligne induite par un quelconque plongement $\sigma' : L' \hookrightarrow E$ tel que $\sigma'|_L = \sigma$ (le choix du plongement σ' n'aura pas d'incidence via le (ii) du Lemme 2.2.1).

Fixons un module de Deligne-Fontaine $\underline{D} = (D, \varphi, N, \mathrm{Gal}(L'/L))$ de rang n sur $L'_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ et, pour chaque plongement $\sigma : L \hookrightarrow E$ de $\mathcal{S}$, une liste d'entiers $\underline{k} = (k_{i,\sigma})_{\substack{i\in\{1,\dots,n\}\\ \sigma\in\mathcal{S}}}$ dans $\mathbb{Z}$ telle que $k_{1,\sigma} > k_{2,\sigma} > \cdots > k_{n,\sigma}$ pour tout σ. Appelons filtration de Hodge de poids de Hodge-Tate $\underline{k}$ sur $\underline{D}$ la donnée de sous-$L' \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$-modules $(\mathrm{Fil}^i D_{L'})_{i\in\mathbb{Z}}$ de $D_{L'}$ vérifiant les propriétés suivantes :
(i) $\mathrm{Fil}^{i+1} D_{L'} \subseteq \mathrm{Fil}^i D_{L'}$ pour tout i;
(ii) $\mathrm{Fil}^i D_{L'}$ est stable par l'action de $\mathrm{Gal}(L'/L)$ pour tout i;
(ii) $\mathrm{Fil}^i D_{L',\sigma}/\mathrm{Fil}^{i+1} D_{L',\sigma} \neq 0$ si et seulement si $i \in \{-k_{1,\sigma}, \dots, -k_{n,\sigma}\}$;
où $\mathrm{Fil}^i D_{L',\sigma}$ est l'image de $\mathrm{Fil}^i D_{L'}$ dans $D_{L',\sigma}$. Notons que (i) et (iii) forcent $\mathrm{Fil}^i D_{L',\sigma} = D_{L',\sigma}$ si $i \leq -k_{1,\sigma}$ et $\mathrm{Fil}^i D_{L',\sigma} = 0$ si $i > -k_{n,\sigma}$. Comme $\mathrm{Fil}^i D_{L'} = \prod_{\sigma\in\mathcal{S}} \mathrm{Fil}^i D_{L',\sigma}$, chaque $\mathrm{Fil}^i D_{L',\sigma}$ est stable par l'action de $\mathrm{Gal}(L'/L)$ dans $D_{L',\sigma}$ et par le théorème de Hilbert 90 encore, on a un isomorphisme $L' \otimes_{L,\sigma} E$-linéaire :

$$L' \otimes_L (\mathrm{Fil}^i D_{L',\sigma})^{\mathrm{Gal}(L'/L)} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Fil}^i D_{L',\sigma}$$

pour tout i et tout σ. En particulier chaque $\mathrm{Fil}^i D_{L',\sigma}$ et chaque $\mathrm{Fil}^i D_{L',\sigma}/\mathrm{Fil}^{i+1} D_{L',\sigma}$ est libre (de rang fini) sur $L' \otimes_{L,\sigma} E$ et se donner $\mathrm{Fil}^i D_{L',\sigma}$ revient juste à se donner un sous-E-espace vectoriel $(\mathrm{Fil}^i D_{L',\sigma})^{\mathrm{Gal}(L'/L)}$ de $D_{L',\sigma}^{\mathrm{Gal}(L'/L)}$. Pour chaque $j \in \{1, \dots, n\}$, le E-espace vectoriel $\bigwedge_E^j D_{L',\sigma}^{\mathrm{Gal}(L'/L)}$ possède ainsi une droite canonique donnée par :

$$\begin{aligned}(8)\quad \mathrm{Fil}^{\max}\big(\wedge_E^j D_{L',\sigma}^{\mathrm{Gal}(L'/L)}\big) \stackrel{\text{déf}}{=} {}& (\mathrm{Fil}^{-k_{n-j+1,\sigma}} D_{L',\sigma})^{\mathrm{Gal}(L'/L)} \wedge_E \\ & (\mathrm{Fil}^{-k_{n-j+2,\sigma}} D_{L',\sigma})^{\mathrm{Gal}(L'/L)} \wedge_E \cdots \wedge_E (\mathrm{Fil}^{-k_{n,\sigma}} D_{L',\sigma})^{\mathrm{Gal}(L'/L)}.\end{aligned}$$

Enfin, si ρ_p est une représentation potentiellement semi-stable de dimension finie de $\mathrm{Gal}(\overline{L}/L)$ sur E, et si L' est une extension galoisienne finie de L telle que $\rho_p|_{\mathrm{Gal}(\overline{L}/L')}$ est semi-stable, rappelons ([**37**, § 5.6]) qu'il lui est associé le module de Deligne-Fontaine $\underline{D} = ((B_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \rho_p)^{\mathrm{Gal}(\overline{L}/L')}, \varphi, N, \mathrm{Gal}(L'/L))$, les opérateurs φ, N provenant de ces mêmes opérateurs sur B_{st} et l'action de $\mathrm{Gal}(L'/L)$ étant l'action résiduelle de $\mathrm{Gal}(\overline{L}/L)$. Notons qu'alors $D_{L'} = (B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \rho_p)^{\mathrm{Gal}(\overline{L}/L')}$ et donc pour tout $\sigma \in \mathcal{S}$:

$$D_{L',\sigma}^{\mathrm{Gal}(L'/L)} = (B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \rho_p)^{\mathrm{Gal}(\overline{L}/L)} \otimes_{L\otimes_{\mathbb{Q}_p} E, \sigma\otimes\mathrm{Id}} E.$$

Si ρ_p a des poids de Hodge-Tate distincts $k_{1,\sigma} > k_{2,\sigma} > \cdots > k_{n,\sigma}$ pour chaque plongement $\sigma : L \hookrightarrow E$, la filtration de Hodge sur B_{st} induit une filtration de Hodge sur $\underline{D}$ de poids de Hodge-Tate $\underline{k} = (k_{i,\sigma})_{i,\sigma}$.

2.3. Propriétés de la "correspondance" localement analytique. — On énonce une propriété (conjecturale) nouvelle (**EXT**) que devraient satisfaire les représentations localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques de $\mathrm{GL}_n(L)$ portées par les composantes Hecke isotypiques de la cohomologie complétée.

On fixe un module de Deligne-Fontaine $\underline{D} = (D, \varphi, N, \mathrm{Gal}(L'/L))$ de rang n sur $L'_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ et on note $\mathrm{WD}(\underline{D})$ la représentation de Weil-Deligne associée (cf. § 2.2).

Notons que la représentation de Weil sous-jacente à $\mathrm{WD}(\underline{D})$ est associée au module de Deligne-Fontaine $(D, \varphi, 0, \mathrm{Gal}(L'/L))$. On suppose dans ce qui suit que les constituants irréductibles de cette représentation de Weil sous-jacente sont *absolument irréductibles et distincts deux à deux.* En particulier, la représentation de Weil sous-jacente est absolument semi-simple et $\mathrm{WD}(\underline{D})$ est F-semi-simple.

Définition 2.3.1. — *Soit $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, on dit qu'un automorphisme de la représentation de Weil-Deligne $\wedge_E^j \mathrm{WD}(\underline{D})$ est* permis *s'il induit un automorphisme* scalaire *sur tous les sous-espaces de la forme* $\mathrm{WD}(\underline{D})_1 \wedge_E \cdots \wedge_E \mathrm{WD}(\underline{D})_j$ *où les* $\mathrm{WD}(\underline{D})_i$, $1 \leq i \leq j$ *sont des sous-représentations de Weil-Deligne* indécomposables *de* $\mathrm{WD}(\underline{D})$ *et où la notation signifie l'image par la surjection canonique :*

$$\underbrace{\mathrm{WD}(\underline{D}) \otimes_E \cdots \otimes_E \mathrm{WD}(\underline{D})}_{j \text{ fois}} \twoheadrightarrow \wedge_E^j \mathrm{WD}(\underline{D}).$$

Lorsque $j = 1$, par l'hypothèse ci-dessus sur $\mathrm{WD}(\underline{D})$ tout automorphisme de $\mathrm{WD}(\underline{D})$ est automatiquement permis, mais il n'en est pas de même en général lorsque $j > 1$. Tout automorphisme de $\wedge_E^j \mathrm{WD}(\underline{D})$ induit par un automorphisme de $\mathrm{WD}(\underline{D})$ est permis. Si $\mathrm{WD}(\underline{D})$ est indécomposable, les automorphismes permis de $\wedge_E^j \mathrm{WD}(\underline{D})$ pour tout j sont les scalaires non nuls.

On fixe $\underline{k} = (k_{i,\sigma})_{\substack{i \in \{1,\ldots,n\} \\ \sigma \in \mathcal{S}}}$ dans $\mathbb{Z}$ tel que $k_{1,\sigma} > k_{2,\sigma} > \cdots > k_{n,\sigma}$ pour tout σ et on pose $\lambda_\sigma = (\lambda_{i,\sigma})_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ avec $\lambda_{i,\sigma} \overset{\text{déf}}{=} k_{i,\sigma} - (n-i)$ pour i, σ (on a $\lambda_{1,\sigma} \geq \lambda_{2,\sigma} \geq \cdots \geq \lambda_{n,\sigma}$). On rappelle (cf. § 2.1) que $\overline{L}(\lambda_\sigma)$ désigne la représentation algébrique irréductible de $\mathrm{GL}_n \times_{L,\sigma} E$ de plus haut poids λ_σ par rapport à $\overline{B} \times_{L,\sigma} E$.

On suppose qu'il existe au moins une représentation potentiellement semi-stable ρ_p de $\mathrm{Gal}(\overline{L}/L)$ de dimension n sur E dont les poids de Hodge-Tate sont $\underline{k} = (k_{i,\sigma})_{i,\sigma}$ et dont le module de Deligne-Fontaine associé est $\underline{D}$ (cf. fin du § 2.2). À une telle ρ_p correspond pour tout $\sigma \in \mathcal{S}$ et tout $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ une droite $\mathrm{Fil}^{\max}(\wedge_E^j D_{L',\sigma}^{\mathrm{Gal}(L'/L)}) \subseteq \wedge_E^j D_{L',\sigma}^{\mathrm{Gal}(L'/L)}$ comme en (8). À ρ_p devrai(en)t également correspondre une - ou plusieurs - représentation(s) localement $\mathbb{Q}_p$-analytique(s) admissible(s) $\Pi^{\mathrm{an}}(\rho_p)^?$ de $\mathrm{GL}_n(L)$ sur E de caractère central $(\varepsilon^{-\frac{n(n-1)}{2}} \det \rho_p) \circ {\mathrm{rec}_L}^{-1}$. Par exemple, on peut prendre pour $\Pi^{\mathrm{an}}(\rho_p)^?$ l'une quelconque (à twist près) des spécialisations *non nulles* $V(\rho_p)$ construites dans [**15**, § 2.10] (on sait qu'il en existe au moins lorsque $n = 2$, $N = 0$ et $k_{1,\sigma} - k_{2,\sigma} \leq 1$ pour tout σ, ou bien lorsque L est non ramifiée, ρ_p est cristalline et $k_{1,\sigma} - k_{n,\sigma} \leq p - 2$ pour tout σ, cf. [**15**, § 5]). Ou bien, si ρ_p se "globalise" en une représentation galoisienne automorphe cohomologique, on peut prendre pour $\Pi^{\mathrm{an}}(\rho_p)^?$ (à twist convenable près) le sous-espace Hecke-isotypique associé dans les vecteurs localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques d'un espace de cohomologie complétée convenable, cf. par exemple § 6.1 ci-dessous.

Les représentations $\Pi^{\mathrm{an}}(\rho_p)^?$ restent encore mystérieuses, mais plusieurs de leurs propriétés (conjecturales) commencent à émerger. Rappelons-en deux.

(**ALG**) Une propriété déjà attendue de $\Pi^{\mathrm{an}}(\rho_p)^?$ (voir en particulier [**12**], [**31**], [**15**] ou (56) ci-dessous) est que l'on devrait avoir une injection $\mathrm{GL}_n(L)$-équivariante, unique à scalaire non nul près :

$$\Pi^{\mathrm{alg}}(\underline{k},\underline{D}) \overset{\text{déf}}{=} \big(\otimes_{\sigma\in\mathcal{S}}\overline{L}(\lambda_\sigma)\big)\otimes_E \Pi^\infty(\underline{D}) \hookrightarrow \Pi^{\mathrm{an}}(\rho_p)^? \tag{9}$$

où $\Pi^\infty(\underline{D})$ est la représentation lisse admissible (pas forcément irréductible) de $\mathrm{GL}_n(L)$ sur E correspondant à $\mathrm{WD}(\underline{D})$ par la correspondance de Langlands locale normalisée comme au § 1 puis modifiée comme dans [**12**, § 4]. Notons que $\Pi^{\mathrm{alg}}(\underline{k},\underline{D})$ est une représentation localement $\mathbb{Q}_p$-algébrique de $\mathrm{GL}_n(L)$ sur E (qui ne dépend que de $\underline{k}$ et $\underline{D}$).

(**SOC**) Une autre propriété attendue de $\Pi^{\mathrm{an}}(\rho_p)^?$ est qu'elle devrait en général aussi contenir en sous-objet (i.e. en socle) des représentations localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques irréductibles qui ne sont pas localement $\mathbb{Q}_p$-algébriques : voir [**4**, § 6] et [**5**, Conj. 5.3][(1)], voir aussi § 3.3 ci-dessous et le (ii) de la Remarque 6.1.4.

On décrit ici une possible autre propriété de $\Pi^{\mathrm{an}}(\rho_p)^?$ que l'on explore dans toute la suite de l'article. On renvoie au § 6.1 pour une conjecture précise dans un cadre global. On rappelle (cf. § 1) que si Π,Π' sont deux représentations localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques admissibles de $\mathrm{GL}_n(L)$ sur E et si $\mathcal{E}$ est un sous-E-espace vectoriel de dimension ≤ 1 du E-espace vectoriel $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_n(L)}(\Pi',\Pi)$, on note $[\![\mathcal{E}]\!]$ l'unique représentation de $\mathrm{GL}_n(L)$ sur E sous-jacente à $\mathcal{E}$ au sens de Yoneda.

(**EXT**) Pour tout plongement $\sigma\in\mathcal{S}$ et tout $j\in\{1,\dots,n-1\}$, il devrait exister une représentation localement σ-analytique admissible de longueur finie $\Pi^{j,\sigma}(\underline{k}_\sigma,\underline{D})$ de $\mathrm{GL}_n(L)$ sur E ne dépendant que de $\underline{k}_\sigma=(k_{i,\sigma})_i$ et de $\underline{D}$ ainsi qu'un isomorphisme de E-espace vectoriels :

$$\mathcal{R}^{j,\sigma} : \wedge_E^j D_{L',\sigma}^{\mathrm{Gal}(L'/L)} \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_n(L),\sigma}\Big(\Pi^{j,\sigma}(\underline{k}_\sigma,\underline{D}),\overline{L}(\lambda_\sigma)\otimes_E\Pi^\infty(\underline{D})\Big) \tag{10}$$

unique à composition près à gauche par un automorphisme *permis* de la représentation de Weil-Deligne $\wedge_E^j D_{L',\sigma}^{\mathrm{Gal}(L'/L)}$ (Définition 2.3.1) tels que, pour *toute* représentation ρ_p de dimension n de $\mathrm{Gal}(\overline{L}/L)$ sur E qui est potentiellement semi-stable de poids de Hodge-Tate $\underline{k}$ et de module de Deligne-Fontaine $\underline{D}$, on ait une injection $\mathrm{GL}_n(L)$-équivariante :

$$\big(\otimes_{\tau\in\mathcal{S}\backslash\{\sigma\}}\overline{L}(\lambda_\tau)\big)\otimes_E [\![\mathcal{R}^{j,\sigma}\big(\mathrm{Fil}^{\max}(\wedge_E^j D_{L',\sigma}^{\mathrm{Gal}(L'/L)})\big)]\!] \hookrightarrow \Pi^{\mathrm{an}}(\rho_p)^? \tag{11}$$

---

(1) En fait, ces références supposent un petit peu plus que ce qui est supposé ci-dessus sur la représentation de Weil sous-jacente, cf. [**4**, Hyp. 5.2].

unique à composition près par un automorphisme de la $\mathrm{GL}_n(L)$-représentation de gauche dans (11) et induisant une injection $\mathrm{GL}_n(L)$-équivariante :

$$\bigoplus_{\Pi^{\mathrm{alg}}(\underline{k},\underline{D})}^{j,\sigma}\Big(\big(\otimes_{\tau\in\mathcal{S}\setminus\{\sigma\}}\overline{L}(\lambda_\tau)\big)\otimes_E [\![\mathcal{R}^{j,\sigma}\big(\,\mathrm{Fil}^{\max}(\wedge_E^j D_{L',\sigma}^{\mathrm{Gal}(L'/L)})\big)]\!]\Big)\hookrightarrow \Pi^{\mathrm{an}}(\rho_p)^? \tag{12}$$

où le terme de gauche dans (12) est la somme amalgamée pour tout σ, j au-dessus de la représentation localement $\mathbb{Q}_p$-algébrique commune $\Pi^{\mathrm{alg}}(\underline{k},\underline{D})$ (qui s'injecte de manière unique par la propriété (**ALG**)).

Je m'attends à ce que l'injection (12) ne soit un isomorphisme que dans le cas $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, et on ne peut espérer non plus que la sous-représentation de $\Pi^{\mathrm{an}}(\rho_p)^?$ donnée par la somme amalgamée en (12) suffise en général à déterminer la représentation galoisienne ρ_p (cf. par exemple § 3.3). Mais la dernière propriété suivante semble raisonnable.

(**GAL**) Supposons qu'il existe pour tout j,σ des représentations $\Pi^{j,\sigma}(\underline{k}_\sigma,\underline{D})$ et des isomorphismes $\mathcal{R}^{j,\sigma}$ vérifiant (10). Supposons de plus la représentation de Weil-Deligne $D_{L',\sigma}^{\mathrm{Gal}(L'/L)}$ *indécomposable*, ou de manière équivalente $\Pi^\infty(\underline{D})$ *irréductible et essentiellement de carré intégrable*. Alors la représentation localement $\mathbb{Q}_p$-analytique de $\mathrm{GL}_n(L)$ donnée par la somme amalgamée en (12) :

$$\bigoplus_{\Pi^{\mathrm{alg}}(\underline{k},\underline{D})}^{j,\sigma}\Big(\big(\otimes_{\tau\in\mathcal{S}\setminus\{\sigma\}}\overline{L}(\lambda_\tau)\big)\otimes_E [\![\mathcal{R}^{j,\sigma}\big(\,\mathrm{Fil}^{\max}(\wedge_E^j D_{L',\sigma}^{\mathrm{Gal}(L'/L)})\big)]\!]\Big) \tag{13}$$

détermine complètement la représentation galoisienne ρ_p.

Remarque 2.3.2. — (i) Rappelons que la représentation de $\mathrm{GL}_n(L)$:

$$\big(\otimes_{\tau\in\mathcal{S}\setminus\{\sigma\}}\overline{L}(\lambda_\tau)\big)\otimes_E [\![\mathcal{R}^{j,\sigma}\big(\,\mathrm{Fil}^{\max}(\wedge_E^j D_{L',\sigma}^{\mathrm{Gal}(L'/L)})\big)]\!]$$

est par construction une extension non scindée de $\big(\otimes_{\tau\in\mathcal{S}\setminus\{\sigma\}}\overline{L}(\lambda_\tau)\big)\otimes_E \Pi^{j,\sigma}(\underline{k}_\sigma,\underline{D})$ par $\Pi^{\mathrm{alg}}(\underline{k},\underline{D})$.
(ii) Une représentation localement σ-analytique admissible de longueur finie $\Pi^{j,\sigma}(\underline{k}_\sigma,\underline{D})$ pour laquelle il existe un isomorphisme $\mathcal{R}^{j,\sigma}$ tel que les assertions (10), (11) et (12) soient satisfaites n'est pas unique en général, voir par exemple la Remarque 4.6.3 ci-dessous. Cependant il n'est pas impossible qu'il existe une unique représentation localement σ-analytique admissible de longueur finie $\Pi^{j,\sigma}(\underline{k}_\sigma,\underline{D})$ *maximale* pour l'inclusion parmi celles satisfaisant (10), (11) et (12).

3. Quelques cas particuliers

On donne plusieurs exemples ou candidats de représentations $\Pi^{j,\sigma}(\underline{k}_\sigma,\underline{D})$ et d'isomorphismes $\mathcal{R}^{j,\sigma}$.

3.1. Le cas $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. — On commence par faire le point sur le cas $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$.

On conserve les notations du § 2. On rappelle que B (resp. $\overline{B}$) désigne les matrices triangulaires inférieures (resp. supérieures) de GL_2 et T les matrices diagonales. On fixe deux poids de Hodge-Tate $k_1 > k_2$, on a donc $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) = (k_1 - 1, k_2)$ et on pose $\nu \overset{\text{déf}}{=} -\lambda = (\nu_1, \nu_2) = (-k_1+1, -k_2)$ (donc $\nu_1 \leq \nu_2$), $s_1 \cdot \nu \overset{\text{déf}}{=} (\nu_2+1, \nu_1-1) = (-k_2+1, -k_1)$. On rappelle que $\overline{L}(\lambda) = \overline{L}(-\nu)$ est la représentation algébrique irréductible de dimension finie de $\mathrm{GL}_2 \times_{\mathbb{Q}_p} E$ de plus haut poids λ par rapport aux racines de $\overline{B}$, que son dual est $L(\nu)$ et que $\Pi^{\mathrm{alg}}(\underline{k}, \underline{D}) = \overline{L}(\lambda) \otimes_E \Pi^\infty(\underline{D})$. On note s_1 l'unique réflexion simple de GL_2.

Soit $\Pi^{\mathrm{an}}(\rho_p)$ la représentation localement analytique de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur E de caractère central $(\varepsilon^{-1}\det \rho_p) \circ \mathrm{rec}_{\mathbb{Q}_p}^{-1}$ associée à ρ_p par la correspondance localement analytique ([**20**], [**22**]). Si ρ_p est une représentation potentiellement semi-stable de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ de dimension 2 sur E et de poids de Hodge-Tate $\underline{k} = (k_1, k_2)$, et si $\underline{D}$ est son module de Deligne-Fontaine (cf. § 2.2), alors on a :

$$\Pi^1(\underline{k}, \underline{D}) = \Pi^{\mathrm{an}}(\rho_p)/\Pi^{\mathrm{alg}}(\underline{k}, \underline{D}).$$

Un théorème de Colmez ([**20**, Th. VI.6.43]) assure que $\Pi^1(\underline{k}, \underline{D})$ ne dépend que de $\underline{k}, \underline{D}$ et pas de la filtration de Hodge. On explicite dans la suite $\Pi^1(\underline{k}, \underline{D})$ et $\mathcal{R}^1$ (sauf dans le cas supercuspidal).

Cas cristallin.
On considère $\underline{D} = (D, \varphi, 0)$ pour $L = L' = \mathbb{Q}_p$ où $\alpha_1, \alpha_0 \in E^\times$ avec $\alpha_1 \neq \alpha_0$ et :

$$D = Ee_1 \oplus Ee_0 \qquad \begin{cases} \varphi(e_1) &= \alpha_1 e_1 \\ \varphi(e_0) &= \alpha_0 e_0. \end{cases}$$

On suppose d'abord $\alpha_1 \neq \alpha_0 p$. On a $\Pi^\infty(\underline{D}) = (\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \mathrm{nr}(\alpha_0)|\cdot|^{-1} \otimes \mathrm{nr}(\alpha_1))^\infty \cong (\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \mathrm{nr}(\alpha_1)|\cdot|^{-1} \otimes \mathrm{nr}(\alpha_0))^\infty$ et on pose :

$$\begin{aligned} I_0(\nu) &\overset{\text{déf}}{=} \big(\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} t^{-\nu} \otimes_E (\mathrm{nr}(\alpha_0)|\cdot|^{-1} \otimes \mathrm{nr}(\alpha_1))\big)^{\mathrm{an}} \\ I_1(\nu) &\overset{\text{déf}}{=} \big(\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} t^{-\nu} \otimes_E (\mathrm{nr}(\alpha_1)|\cdot|^{-1} \otimes \mathrm{nr}(\alpha_0))\big)^{\mathrm{an}} \\ I_0(s_1\cdot\nu) &\overset{\text{déf}}{=} \big(\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} t^{-s_1\cdot\nu} \otimes_E (\mathrm{nr}(\alpha_0)|\cdot|^{-1} \otimes \mathrm{nr}(\alpha_1))\big)^{\mathrm{an}} \\ I_1(s_1\cdot\nu) &\overset{\text{déf}}{=} \big(\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} t^{-s_1\cdot\nu} \otimes_E (\mathrm{nr}(\alpha_1)|\cdot|^{-1} \otimes \mathrm{nr}(\alpha_0))\big)^{\mathrm{an}}. \end{aligned} \tag{14}$$

On a alors $\Pi^1(\underline{k}, \underline{D}) = I_0(s_1\cdot\nu) \oplus I_1(s_1\cdot\nu)$ par [**44**].

Lemme 3.1.1. — *On a :*

$$\dim_E \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(I_0(s_1\cdot\nu), \overline{L}(\lambda) \otimes_E \Pi^\infty(\underline{D})\big) = \dim_E \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(I_1(s_1\cdot\nu), \overline{L}(\lambda) \otimes_E \Pi^\infty(\underline{D})\big) = 1.$$

Démonstration. — Les dimensions sont ≥ 1 car $I_0(\nu)$ et $I_1(\nu)$ fournissent de telles extensions non scindées. Il suffit de montrer qu'elles sont aussi ≤ 1. Par [**43**, Th. 8.15

& Th. 8.18] on a $\dim_E \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(I_0(s_1\cdot\nu), I_1(\nu)) = \dim_E \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(I_1(s_1\cdot\nu), I_0(\nu)) = 1$ d'où le résultat puisque $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(I_0(s_1\cdot\nu), \overline{L}(\lambda)\otimes_E \Pi^\infty(\underline{D})) \subseteq \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(I_0(s_1\cdot\nu), I_1(\nu))$ et $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(I_1(s_1\cdot\nu), \overline{L}(\lambda)\otimes_E \Pi^\infty(\underline{D})) \subseteq \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(I_1(s_1\cdot\nu), I_0(\nu))$. □

De plus $\mathcal{R}^1$ est une bijection quelconque telle que :

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^1(Ee_0) &= \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(I_1(s_1\cdot\nu), \overline{L}(\lambda)\otimes_E \Pi^\infty(\underline{D})\big)\\ \mathcal{R}^1(Ee_1) &= \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(I_0(s_1\cdot\nu), \overline{L}(\lambda)\otimes_E \Pi^\infty(\underline{D})\big).\end{aligned}$$

On suppose maintenant $\alpha_1 = \alpha_0 p = \alpha$, on a $\Pi^\infty(\underline{D}) = (\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} |\cdot|^{-1}\otimes|\cdot|)^\infty \otimes_E (\mathrm{nr}(\alpha)\circ\det)$ et on pose :

$$\begin{aligned} I(\nu) &\overset{\text{déf}}{=} \big(\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} t^{-\nu}\big)^{\mathrm{an}}\\ \widetilde{I}(\nu) &\overset{\text{déf}}{=} \big(\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} t^{-\nu}\otimes_E(|\cdot|^{-1}\otimes|\cdot|)\big)^{\mathrm{an}}\\ I(s_1\cdot\nu) &\overset{\text{déf}}{=} \big(\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} t^{-s_1\cdot\nu}\big)^{\mathrm{an}}\\ \widetilde{I}(s_1\cdot\nu) &\overset{\text{déf}}{=} \big(\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} t^{-s_1\cdot\nu}\otimes_E(|\cdot|^{-1}\otimes|\cdot|)\big)^{\mathrm{an}}.\end{aligned} \tag{15}$$

On a (cf. [**44**]) :

$$\Pi^1(\underline{k},\underline{D}) = \big(I(s_1\cdot\nu)\oplus\widetilde{I}(s_1\cdot\nu)\big)\otimes_E(\mathrm{nr}(\alpha)\circ\det)$$

et $\dim_E \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(I(s_1\cdot\nu)\otimes_E(\mathrm{nr}(\alpha)\circ\det), \overline{L}(\lambda)\otimes_E\Pi^\infty(\underline{D})) = \dim_E \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(\widetilde{I}(s_1\cdot\nu)\otimes_E(\mathrm{nr}(\alpha)\circ\det), \overline{L}(\lambda)\otimes_E\Pi^\infty(\underline{D})) = 1$ (comme pour le Lemme 3.1.1, on a facilement $\dim_E \geq 1$, l'inégalité ≤ 1 pour le premier se démontre comme au Lemme 3.1.1 via $\overline{L}(\lambda)\otimes_E\Pi^\infty(\underline{D}) \subset \widetilde{I}(\nu)\otimes_E(\mathrm{nr}(\alpha)\circ\det)$ et pour le deuxième suit de $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(\widetilde{I}(s_1\cdot\nu), \widetilde{I}(\nu)) = 0$, cf. [**43**, Th. 8.15 & Th. 8.18], et de $\widetilde{I}(\nu) \twoheadrightarrow \widetilde{I}(s_1\cdot\nu)$). Enfin $\mathcal{R}^1$ est une bijection quelconque telle que :

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^1(Ee_0) &= \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(\widetilde{I}(s_1\cdot\nu)\otimes_E(\mathrm{nr}(\alpha)\circ\det), \overline{L}(\lambda)\otimes_E \Pi^\infty(\underline{D})\big)\\ \mathcal{R}^1(Ee_1) &= \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(I(s_1\cdot\nu)\otimes_E(\mathrm{nr}(\alpha)\circ\det), \overline{L}(\lambda)\otimes_E \Pi^\infty(\underline{D})\big).\end{aligned}$$

Le cas cristabellin est très similaire au cas cristallin et laissé au lecteur.

Cas semi-stable non cristallin.
On considère $\underline{D} = (D,\varphi,N)$ pour $L = L' = \mathbb{Q}_p$ où $\alpha\in E^\times$ et :

$$D = Ee_1\oplus Ee_0 \qquad \begin{cases}\varphi(e_1) = \alpha e_1\\ \varphi(e_0) = \alpha p^{-1}e_0\end{cases} \qquad \begin{cases}N(e_1) = e_0\\ N(e_0) = 0.\end{cases}$$

On a $\Pi^\infty(\underline{D}) = \mathrm{St}_2^\infty\otimes_E(\mathrm{nr}(\alpha)\circ\det)$.

Lemme 3.1.2. — *(i) La représentation $\Pi^1(\underline{k},\underline{D})$ est l'unique représentation localement analytique $\Pi^1(\underline{k},\underline{D})$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur E de la forme :*

$$I(s_1\cdot\nu) — \overline{L}(\lambda) — \widetilde{I}(s_1\cdot\nu)\ \otimes_E(\mathrm{nr}(\alpha)\circ\det). \tag{16}$$

(ii) On a $\dim_E \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(\Pi^1(\underline{k},\underline{D}),\overline{L}(\lambda)\otimes_E \Pi^\infty(\underline{D}))=2$.
(iii) La restriction induit un isomorphisme :

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(\Pi^1(\underline{k},\underline{D}),\overline{L}(\lambda)\otimes_E \Pi^\infty(\underline{D})\big)\\ &\qquad\xrightarrow{\sim}\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(I(s_1\cdot\nu)\longrightarrow\overline{L}(\lambda)\ \otimes_E(\mathrm{nr}(\alpha)\circ\det),\overline{L}(\lambda)\otimes_E\Pi^\infty(\underline{D})\big).\end{aligned}$$

Démonstration. — On suppose $\alpha=1$ quitte à twister et on note que l'on peut partout dans l'énoncé remplacer $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}$ par $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),\psi}$ où $\psi:\mathbb{Q}_p^\times\to E,\ t\mapsto t^{-(\nu_1+\nu_2)}$.

Commençons par (i). Le fait que $\Pi^1(\underline{k},\underline{D})$ a cette forme est démontré dans [**45**] (et certainement aussi dans [**20**]+[**22**]), on se contente ici de montrer l'existence et l'unicité d'une représentation de la forme (16). Par [**59**, (11)] on a $\dim_E \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),\psi}(\overline{L}(\lambda),I(\nu)/\overline{L}(\lambda))=2$. En utilisant la suite exacte (non scindée par [**59**, (8)]) :

$$0\to I(s_1\cdot\nu)'\to\big(I(\nu)/\overline{L}(\lambda)\big)'\to\overline{L}(\lambda)'\otimes_E\mathrm{St}_2^{\infty\prime}\to 0,\tag{17}$$

les égalités $\dim_E\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),E),\psi'}(\overline{L}(\lambda)'\otimes_E\mathrm{St}_2^{\infty\prime},\overline{L}(\lambda)')=1$, $\mathrm{Ext}^2_{D(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),E),\psi'}(\overline{L}(\lambda)'\otimes_E \mathrm{St}_2^{\infty\prime},\overline{L}(\lambda)')=0$ ([**57**, Prop. 4.7(2)] et [**48**, Th. 1] ou [**23**, Th. 1.3], ou plus directement [**57**, Cor. 4.8]) et le Lemme 2.1.1, on en déduit $\dim_E\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(\overline{L}(\lambda),I(s_1\cdot\nu))=1$. On note $I(s_1\cdot\nu)\longrightarrow\overline{L}(\lambda)$ l'unique extension non scindée. Par [**43**, Th. 8.15 & Th. 8.18] on a $\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),E)}(I(s_1\cdot\nu)',\widetilde{I}(s_1\cdot\nu)')=\mathrm{Ext}^2_{D(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),E)}(I(s_1\cdot\nu)',\widetilde{I}(s_1\cdot\nu)')=0$ d'où l'on déduit :

$$\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),E)}\big(\overline{L}(\lambda)'\longrightarrow I(s_1\cdot\nu)',\widetilde{I}(s_1\cdot\nu)'\big)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),E)}\big(\overline{L}(\lambda)',\widetilde{I}(s_1\cdot\nu)'\big)$$

ce qui démontre (i) par la troisième égalité dans la Proposition 3.1.6 ci-dessous.

Continuons avec (ii) et (iii). Par (17) on a $\dim_E\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(I(s_1\cdot\nu),\overline{L}(\lambda)\otimes_E \Pi^\infty(\underline{D}))\geq 1$ et comme $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(I(s_1\cdot\nu),\overline{L}(\lambda)\otimes_E\Pi^\infty(\underline{D}))\subseteq\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(I(s_1\cdot\nu),\widetilde{I}(\nu))$ qui a dimension 1 par [**43**, Th. 8.15 & Th. 8.18], on a $\dim_E\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(I(s_1\cdot\nu),\overline{L}(\lambda)\otimes_E\Pi^\infty(\underline{D}))=1$. Avec $\dim_E\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),\psi}(\overline{L}(\lambda),I(\nu)/\overline{L}(\lambda))=2$, on en déduit facilement (on laisse les détails au lecteur) :

$$\dim_E\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(I(s_1\cdot\nu)\longrightarrow\overline{L}(\lambda),\overline{L}(\lambda)\otimes_E\Pi^\infty(\underline{D})\big)=2.\tag{18}$$

Avec les quatrième et cinquième égalités de la Proposition 3.1.6 ci-dessous, on obtient (ii) et (iii) en même temps. □

Pour expliciter l'unique bijection $\mathcal{R}^1$ (à scalaire non nul près) compatible avec la correspondance localement analytique dans ce cas, on a besoin de quelques lemmes préliminaires. Soit $\mathrm{Ext}^1_{T(\mathbb{Q}_p),\psi}(t^{-\nu},t^{-\nu})$ le sous-E-espace vectoriel de $\mathrm{Ext}^1_{T(\mathbb{Q}_p)}(t^{-\nu},t^{-\nu})$ des extensions sur lesquelles les scalaires $\mathbb{Q}_p^\times\subset T(\mathbb{Q}_p)$ agissent par $\psi:\mathbb{Q}_p^\times\to E^\times,\ t\mapsto$

$t^{-(\nu_1+\nu_2)}$. On déduit de [**43**, Th. 8.15 & Th. 8.18] (appliqué à $\chi_1 = \chi_2$) et du Lemme 2.1.1 que l'induction parabolique localement analytique induit un isomorphisme :

$$\mathrm{Ext}^1_{T(\mathbb{Q}_p),\psi}(t^{-\nu}, t^{-\nu}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),\psi}(I(\nu), I(\nu)) \tag{19}$$

de E-espaces vectoriels de dimension 2 (noter que la dimension dans [**43**] est 4 mais devient 2 avec la condition sur l'action du centre).

Lemme 3.1.3. — *Par "pullback" et "pushforward" on a des isomorphismes de E-espaces vectoriels de dimension 2 :*

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),\psi}\big(I(\nu), I(\nu)\big) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),\psi}\big(\overline{L}(\lambda)\otimes_E \big(\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} 1\big)^\infty, I(\nu)\big)\\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),\psi}\big(\overline{L}(\lambda)\otimes_E \big(\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} 1\big)^\infty, I(\nu)/\overline{L}(\lambda)\big)\\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),\psi}\big(\overline{L}(\lambda), I(\nu)/\overline{L}(\lambda)\big).\end{aligned}$$

Démonstration. — Le premier isomorphisme découle de $\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(I(s_1\cdot\nu), I(\nu)\big) = 0$ pour tout i (par [**43**, Th. 8.15 & Th. 8.18] et le Lemme 2.1.1). Le deuxième isomorphisme découle de $\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),\psi}(\overline{L}(\lambda)\otimes_E \big(\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} 1\big)^\infty, \overline{L}(\lambda)) = 0$ pour $i \in \{1,2\}$ (qui se déduit aisément par dévissage de [**57**, Cor. 4.8]). Par ailleurs on sait que la composée des trois morphismes de l'énoncé est un isomorphisme par (19) et [**59**, (11)]. On en déduit que le dernier morphisme est aussi un isomorphisme. □

Par [**40**, § 3.12] il existe une unique extension non scindée $M \overset{\text{déf}}{=} L(\nu) — L(s_1\cdot\nu)$ dans la catégorie $\mathcal{O}^{\mathfrak{b}}_{\mathrm{alg}}$. La représentation $\mathcal{F}_B^{\mathrm{GL}_2}(M,1)$ de [**50**] (cf. fin du § 2.1) est alors une extension de $\mathcal{F}_B^{\mathrm{GL}_2}(L(\nu),1) = \overline{L}(\lambda)\otimes_E (\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} 1)^\infty$ par $\mathcal{F}_B^{\mathrm{GL}_2}(L(s_1\cdot\nu),1) = I(s_1\cdot\nu)$ sur laquelle le centre agit par ψ.

Lemme 3.1.4. — *(i) On a un isomorphisme de E-espaces vectoriels de dimension 1 :*

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),\psi}\big(\overline{L}(\lambda)\otimes_E \big(\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} 1\big)^\infty, I(s_1\cdot\nu)\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),\psi}\big(\overline{L}(\lambda), I(s_1\cdot\nu)\big).$$

(ii) L'unique extension non scindée de $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),\psi}\big(\overline{L}(\lambda)\otimes_E (\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} 1)^\infty, I(s_1\cdot\nu)\big)$ *est donnée par* $\mathcal{F}_B^{\mathrm{GL}_2}(M,1)$.

Démonstration. — (i) On a déjà montré $\dim_E \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),\psi}(\overline{L}(\lambda), I(s_1\cdot\nu)) = 1$ dans la preuve du (i) du Lemme 3.1.2. On déduit de [**57**, Cor. 4.8] un isomorphisme :

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),\psi}&\big(\overline{L}(\lambda)\otimes_E \big(\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} 1\big)^\infty, \overline{L}(\lambda)\otimes_E \mathrm{St}_2^\infty\big)\\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),\psi}\big(\overline{L}(\lambda), \overline{L}(\lambda)\otimes_E \mathrm{St}_2^\infty\big)\end{aligned} \tag{20}$$

de E-espaces vectoriels de dimension 1 ainsi que :

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^2_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),\psi}&\big(\overline{L}(\lambda)\otimes_E \big(\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} 1\big)^\infty, \overline{L}(\lambda)\otimes_E \mathrm{St}_2^\infty\big)\\ &= \mathrm{Ext}^2_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),\psi}\big(\overline{L}(\lambda), \overline{L}(\lambda)\otimes_E \mathrm{St}_2^\infty\big) = 0.\end{aligned}$$

On en déduit par (17) un diagramme commutatif de suites exactes courtes où l'on abrège $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),\psi}$ en Ext^1 et $(\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} 1)^\infty$ en π^∞ :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1(\overline{L}(\lambda),\overline{L}(\lambda)\otimes_E \mathrm{St}_2^\infty) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1(\overline{L}(\lambda),I(\nu)/\overline{L}(\lambda)) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1(\overline{L}(\lambda),I(s_1\cdot\nu)) & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1(\overline{L}(\lambda)\otimes_E\pi^\infty,\overline{L}(\lambda)\otimes_E \mathrm{St}_2^\infty) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1(\overline{L}(\lambda)\otimes_E\pi^\infty,I(\nu)/\overline{L}(\lambda)) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1(\overline{L}(\lambda)\otimes_E\pi^\infty,I(s_1\cdot\nu)) & \longrightarrow & 0\,. \end{array}$$

Les deux flèches verticales de gauche sont des isomorphismes de E-espaces vectoriels de dimensions respectives 1 et 2 (par (20) pour la première et par le dernier isomorphisme du Lemme 3.1.3 pour la deuxième). On en déduit que la flèche verticale de droite est aussi un isomorphisme de E-espaces vectoriels de dimension 1.
(ii) On déduit de [**50**, Prop. 3.7 & Prop. 4.2] un diagramme commutatif de $U(\mathfrak{gl}_2)$-modules où les suites sont exactes et les flèches verticales sont injectives :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}_B^{\mathrm{GL}_2}(L(\nu),1)' & \longrightarrow & \mathcal{F}_B^{\mathrm{GL}_2}(M,1)' & \longrightarrow & \mathcal{F}_B^{\mathrm{GL}_2}(L(s_1\cdot\nu),1)' & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & L(\nu) & \longrightarrow & M & \longrightarrow & L(s_1\cdot\nu) & \longrightarrow & 0\,. \end{array}$$

Si la suite exacte du haut était scindée, en considérant une section de l'injection $\mathcal{F}_B^{\mathrm{GL}_2}(L(\nu),1)' \hookrightarrow \mathcal{F}_B^{\mathrm{GL}_2}(M,1)'$ on en déduirait un morphisme non nul de $U(\mathfrak{gl}_2)$-modules $M \longrightarrow \mathcal{F}_B^{\mathrm{GL}_2}(L(\nu),1)' \simeq L(\nu)\otimes_E (\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} 1)^{\infty'}$ ce qui est impossible puisque M est non scindé. On déduit alors le (ii) de la dimension 1 dans le (i). $\square$

Lemme 3.1.5. — *On a un isomorphisme de E-espaces vectoriels qui est canonique à multiplication près par un scalaire dans $E^\times$:*

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(\Pi^1(\underline{k},\underline{D}),\overline{L}(\lambda)\otimes_E \Pi^\infty(\underline{D})\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{T(\mathbb{Q}_p),\psi}(t^{-\nu},t^{-\nu}). \tag{21}$$

Démonstration. — Rappelons qu'on peut remplacer $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}$ par $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),\psi}$ à gauche. Soit $I(s_1\cdot\nu) - \overline{L}(\lambda)\otimes_E(\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}1)^\infty$ (resp. $I(s_1\cdot\nu) - \overline{L}(\lambda)$) l'unique extension non scindée par le (i) du Lemme 3.1.4 et supposons $\alpha=1$ quitte à twister. Par le (iii) du Lemme 3.1.2 suivi de $\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),\psi}(\overline{L}(\lambda)\otimes_E \mathrm{St}_2^\infty,\overline{L}(\lambda)\otimes_E \mathrm{St}_2^\infty)=0$ pour $i\in\{1,2\}$ ([**57**, Cor. 4.8]), on peut remplacer $\Pi^1(\underline{k},\underline{D})$ par $I(s_1\cdot\nu) - \overline{L}(\lambda)$ puis par $I(s_1\cdot\nu) - \overline{L}(\lambda)\otimes_E (\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} 1)^\infty$. Soit $J_{\overline{B}(\mathbb{Q}_p)}$ le foncteur de Jacquet-Emerton relativement à $\overline{B}(\mathbb{Q}_p)$ comme dans [**32**], [**33**] mais où l'action de $T(\mathbb{Q}_p)$ provient d'une action de Hecke qui *n'est pas tordue* par un caractère module (i.e. est comme en [**5**, (18)]). Par le (ii) du Lemme 3.1.4 et [**5**, Th. 4.3 & Rem. 4.4(i)] on a :

$$\dim_E \mathrm{Hom}_{T(\mathbb{Q}_p)}\Big(t^{-\nu},J_{\overline{B}(\mathbb{Q}_p)}\big(I(s_1\cdot\nu) - \overline{L}(\lambda)\otimes_E \big(\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} 1\big)^\infty\big)\Big)=1 \tag{22}$$

(noter que la représentation à droite est bien très fortement admissible car contenue dans l'induite parabolique d'une représentation algébrique de $B(\mathbb{Q}_p)$ de dimension 2 sur E). Soit maintenant $\mathcal{E}$ une représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ correspondant à une extension dans $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),\psi}(I(s_1\cdot\nu) — \overline{L}(\lambda)\otimes_E (\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} 1)^\infty, \overline{L}(\lambda)\otimes_E \mathrm{St}_2^\infty)$ dont l'image dans $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),\psi}(I(s_1\cdot\nu), \overline{L}(\lambda)\otimes_E \mathrm{St}_2^\infty)$ est non nulle. Alors la représentation $\mathcal{E}$ correspond également à une extension non nulle dans $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),\psi}(\overline{L}(\lambda)\otimes_E (\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} 1)^\infty, I(\nu)/\overline{L}(\lambda))$ et par le Lemme 3.1.3 est une sous-représentation du quotient $I(\nu)/\overline{L}(\lambda) — I(\nu)$ d'une extension non scindée $I(\nu) — I(\nu)$. On déduit de [**33**, Lem. 0.3] que l'on a une injection $T(\mathbb{Q}_p)$-équivariante :

$$t^{-\nu} — t^{-\nu} \hookrightarrow J_{\overline{B}(\mathbb{Q}_p)}\big(I(\nu) — I(\nu)\big) \subseteq J_{\overline{B}(\mathbb{Q}_p)}(I(\nu)) — J_{\overline{B}(\mathbb{Q}_p)}(I(\nu)) \tag{23}$$

où $t^{-\nu} — t^{-\nu}$ est l'extension non scindée qui donne $I(\nu) — I(\nu)$ par (19). Comme $\mathrm{Hom}_{T(\mathbb{Q}_p)}(t^{-\nu}, J_{\overline{B}(\mathbb{Q}_p)}(\overline{L}(\lambda))) = \mathrm{Hom}_{T(\mathbb{Q}_p)}(t^{-\nu}, J_{\overline{B}(\mathbb{Q}_p)}(I(s_1\cdot\nu))) = 0$ par [**5**, Th. 4.3 & Rem. 4.4(i)] et le (ii) du Lemme 3.1.4, on en déduit que (23) reste injective dans $J_{\overline{B}(\mathbb{Q}_p)}(I(\nu)/\overline{L}(\lambda) — I(\nu))$ et tombe dans $J_{\overline{B}(\mathbb{Q}_p)}(\mathcal{E}) \subseteq J_{\overline{B}(\mathbb{Q}_p)}(I(\nu)/\overline{L}(\lambda) — I(\nu))$. Comme $J_{\overline{B}(\mathbb{Q}_p)}(\overline{L}(\lambda)\otimes_E \mathrm{St}_2^\infty) = t^{-\nu}$, on voit que l'image de $J_{\overline{B}(\mathbb{Q}_p)}(\mathcal{E})$ dans $J_{\overline{B}(\mathbb{Q}_p)}(I(s_1\cdot\nu) — \overline{L}(\lambda)\otimes_E (\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} 1)^\infty))$ contient nécessairement l'unique caractère $t^{-\nu}$ de (22). L'isomorphisme de l'énoncé est alors construit comme suit. Fixons un plongement (canonique à scalaire non nul près par (22)) :

$$t^{-\nu} \hookrightarrow J_{\overline{B}(\mathbb{Q}_p)}\big(I(s_1\cdot\nu) — \overline{L}(\lambda)\otimes_E \big(\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} 1\big)^\infty\big), \tag{24}$$

pour toute extension $\mathcal{E}$ comme ci-dessus l'image inverse de t^ν en (24) dans $J_{\overline{B}(\mathbb{Q}_p)}(\mathcal{E})$ est une extension non scindée $t^{-\nu} — t^{-\nu}$ dans $\mathrm{Ext}^1_{T(\mathbb{Q}_p),\psi}(t^{-\nu}, t^{-\nu})$ par ce qui précède. On vérifie facilement (avec tout ce qui précède) que l'application $\mathcal{E} \longmapsto t^{-\nu} — t^{-\nu}$ ainsi définie est E-linéaire et s'étend en un morphisme E-linéaire surjectif :

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),\psi}\big(I(s_1\cdot\nu) — \overline{L}(\lambda)\otimes_E\big(\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} 1\big)^\infty, \overline{L}(\lambda)\otimes_E \mathrm{St}_2^\infty\big) \twoheadrightarrow \mathrm{Ext}^1_{T(\mathbb{Q}_p),\psi}(t^{-\nu}, t^{-\nu}).$$

Comme ces deux E-espaces vectoriels sont de dimension 2 (cf. le (ii) du Lemme 3.1.2 et (19)), c'est un isomorphisme. $\square$

L'espace $\mathrm{Ext}^1_{T(\mathbb{Q}_p),\psi}(t^{-\nu}, t^{-\nu})$ s'identifie canoniquement au E-espace vectoriel des morphismes continus $T(\mathbb{Q}_p) \to E$ qui sont nuls en restriction aux scalaires (E étant ici muni de sa structure additive) dont une base est $\mathrm{Log}_0 : t \mapsto \log_0(t_1/t_2)$ (avec $\log_0(p) \overset{\text{déf}}{=} 0$) et $\mathrm{Val} : t \mapsto \mathrm{val}(t_1/t_2)$. On définit enfin $\mathcal{R}^1 : D \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(\Pi^1(\underline{k}, \underline{D}), \overline{L}(\lambda)\otimes_E \Pi^\infty(\underline{D}))$ via l'inverse de l'isomorphisme du Lemme 3.1.5 :

$$\mathcal{R}^1(e_1) = \mathrm{Log}_0 \qquad \mathcal{R}^1(e_0) = -\mathrm{Val} \tag{25}$$

où le signe $-$ provient de la compatibilité local-global ou de la théorie p-adique continue (cf. [**3**, Th. 1.1.2] et [**19**]).

Terminons ce paragraphe avec la proposition ci-dessous qui sera utilisée dans les calculs pour $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ aux §§ 4.2, 4.3 etc. Elle n'est sûrement pas nouvelle, mais faute de l'avoir trouvée dans la littérature, on en redonne une preuve complète.

Proposition 3.1.6. — *On a :*

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{D(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),E)}\big(\overline{L}(-\nu)',\widetilde{I}(\nu)'\big) &= 0\\
\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),E)}\big(\overline{L}(-\nu)',\widetilde{I}(\nu)'\big) &= 0\\
\dim_E \mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),E)}\big(\overline{L}(-\nu)',\widetilde{I}(s_1\cdot\nu)'\big) &= 1\\
\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),E)}\big(\overline{L}(-\nu)'\otimes_E \mathrm{St}_2^{\infty\prime},\widetilde{I}(s_1\cdot\nu)'\big) &= 0\\
\mathrm{Ext}^2_{D(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),E)}\big(\overline{L}(-\nu)'\otimes_E \mathrm{St}_2^{\infty\prime},\widetilde{I}(s_1\cdot\nu)'\big) &= 0\\
\dim_E \mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),E)}\big(\widetilde{I}(s_1\cdot\nu)',\overline{L}(-\nu)'\otimes_E \mathrm{St}_2^{\infty\prime}\big) &= 1.
\end{aligned}$$

Démonstration. — Rappelons que l'on a une suite exacte dans $\mathrm{Mod}_{D(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),E)}$:

$$0\to \widetilde{I}(s_1\cdot\nu)'\to\widetilde{I}(\nu)'\to\overline{L}(-\nu)'\otimes_E\big(\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}|\cdot|^{-1}\otimes|\cdot|\big)^{\infty\prime}\to 0. \tag{26}$$

On commence par la première égalité. Par [**43**, Th. 8.14, Th. 8.15 & Th. 8.18], on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{D(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),E)}\big(I(\nu)',\widetilde{I}(\nu)'\big) &= 0\\
\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),E)}\big(I(\nu)',\widetilde{I}(\nu)'\big) &= 0.
\end{aligned}\tag{27}$$

Comme $I(\nu)'\twoheadrightarrow\overline{L}(-\nu)'\otimes_E(\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}1)^{\infty\prime}\twoheadrightarrow\overline{L}(-\nu)'$, on déduit de (27) $\mathrm{Hom}_{D(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),E)}(\overline{L}(-\nu)',\widetilde{I}(\nu)')=0$.

Montrons les deux assertions suivantes. De (26) on déduit une suite exacte de E-espaces vectoriels :

$$\begin{aligned}
0\to\mathrm{Hom}_{D(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),E)}\Big(\overline{L}(-\nu)',\overline{L}(-\nu)'\otimes_E\big(\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}|\cdot|^{-1}\otimes|\cdot|\big)^{\infty\prime}\Big)&\\
\longrightarrow\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),E)}\big(\overline{L}(-\nu)',\widetilde{I}(s_1\cdot\nu)'\big)\longrightarrow\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),E)}\big(\overline{L}(-\nu)',\widetilde{I}(\nu)'\big)&.
\end{aligned}$$

Comme le terme tout à gauche a dimension 1, il suffit de montrer la nullité du terme tout à droite. Comme (noter que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}((\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}|\cdot|^{-1}\otimes|\cdot|)^{\infty},\mathrm{St}_2^{\infty})=0$) :

$$\mathrm{Hom}_{D(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),E)}\big((I(\nu)/\overline{L}(-\nu))',\widetilde{I}(\nu)'\big)=0$$

cela découle de la deuxième égalité en (27).

Montrons les quatrième et cinquième assertions. Nous utilisons ici sans commentaire la dualité de Schneider-Teitelbaum, cf. [**54**, § 8] et [**55**, Cor. 4.4]. Soit $D^b(\mathrm{Mod}_{D(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),E)})$ la catégorie dérivée bornée des $D(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),E)$-modules à gauche et $D^b_{\mathrm{adm}}(\mathrm{Mod}_{D(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),E)})\subset D^b(\mathrm{Mod}_{D(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),E)})$ la sous-catégorie triangulée des complexes dont la cohomologie est formée de $D(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),E)$-modules coadmissibles (cf. [**55**, § 2]). Par [**54**, Rem. 4.4] (basé sur [**54**, Th. 8.12]) et [**55**, Cor. 4.2], et en argumentant comme pour [**57**, (4.6)], on voit que le dual de $[\overline{L}(-\nu)'\otimes_E \mathrm{St}_2^{\infty\prime}]$ (complexe de $D^b_{\mathrm{adm}}(\mathrm{Mod}_{D(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),E)})$ concentré en degré 0) est $[\overline{L}(-\nu)\otimes_E \mathrm{St}_2^{\infty\prime}][-4] = [\overline{L}(w_0\nu)'\otimes_E \mathrm{St}_2^{\infty\prime}][-4]$ (idem concentré en degré $4 = \dim \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, rappelons que St_2^∞ est sa propre contragrédiente). Par [**55**, Prop. 6.5], le dual de $[\widetilde{I}(s_1\cdot\nu)']$ est :

$$\big[\big(\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} t^{s_1\cdot\nu}\otimes_E (t_1^{-1}\otimes t_2)\big)^{\mathrm{an}'}\big][-3] = \big[\big(\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} t^{w_0\nu}\big)^{\mathrm{an}'}\big][-3]$$

où $w_0\nu \overset{\text{déf}}{=} (\nu_2,\nu_1)$. Par l'argument de la preuve de [**57**, Cor. 4.3], on a alors pour tout $i\geq 1$ puisque $\dim B(\mathbb{Q}_p) - \dim \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) = 3-4 = -1$:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ext}^i_{D(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),E)}\big(\overline{L}(-\nu)'\otimes_E \mathrm{St}_2^{\infty\prime}, \widetilde{I}(s_1\cdot\nu)'\big)\\ &\qquad\cong \mathrm{Ext}^{i-1}_{D(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),E)}\big((\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} t^{w_0\nu})^{\mathrm{an}'}, \overline{L}(w_0\nu)'\otimes_E \mathrm{St}_2^{\infty\prime}\big).\end{aligned}$$

Comme le terme de droite est nul pour $i=1$, on en déduit la quatrième assertion. Pour $i=2$, on applique (45) ci-dessous avec $M = \overline{L}(w_0\nu)'\otimes_E \mathrm{St}_2^{\infty\prime}$ et $N = (t^{w_0\nu})'$. Par [**57**, (4.41)] et [**57**, Th. 4.10] on a :

$$\begin{array}{rcl} H^0(N(\mathbb{Q}_p),M) &=& (t^{w_0\nu})'\otimes_E (|\cdot|^{-1}\otimes|\cdot|)' \\ H^1(N(\mathbb{Q}_p),M) &=& (t^{-s_1\cdot(-w_0\nu)})'\otimes_E (|\cdot|^{-1}\otimes|\cdot|)'. \end{array} \tag{28}$$

Comme ces caractères sont différents de $(t^{w_0\nu})'$, on obtient la nullité pour $i=2$.

Enfin, la sixième et dernière assertion découle encore de (45) avec les formules analogues à (28) pour $\overline{L}(-\nu)'\otimes_E \mathrm{St}_2^{\infty\prime}$ qui donnent $\mathrm{Hom}_{D(T(\mathbb{Q}_p),E)}(H^1(N(\mathbb{Q}_p),\overline{L}(-\nu)'\otimes_E \mathrm{St}_2^{\infty\prime}),(t^{-s_1\cdot\nu})'\otimes_E(|\cdot|^{-1}\otimes|\cdot|)') = E$. □

Cas potentiellement cristallin supercuspidal.
Malgré de spectaculaires progrès dans la compréhension des vecteurs localement analytiques $\Pi^{\mathrm{an}}(\rho_p)$ (cf. [**30**], [**21**], [**29**]), ce cas reste encore ouvert. Je rappelle explicitement ci-dessous l'énoncé à démontrer.

On considère un module de Deligne-Fontaine $\underline{D} = (D,\varphi,0,\mathrm{Gal}(L'/\mathbb{Q}_p))$ tel que $\mathrm{WD}(\underline{D})$ est absolument irréductible et on choisit une représentation ρ_p de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ potentiellement cristalline de dimension 2 sur E de poids de Hodge-Tate $\underline{k}$ et de module de Deligne-Fontaine $\underline{D}$ (on suppose qu'il en existe). En particulier $\Pi^\infty(\underline{D})$ est une représentation supercuspidale. Dans ce cas, la représentation localement analytique $\Pi^1(\underline{k},\underline{D}) = \Pi^{\mathrm{an}}(\rho_p)/\Pi^\infty(\underline{D})$ est irréductible et admissible ([**21**]). Rappelons qu'elle ne dépend que de $\underline{k},\underline{D}$ ([**20**]).

Conjecture 3.1.7. — *Il existe un isomorphisme unique à scalaire non nul près :*

$$\mathcal{R}^1 : D_{L'}^{\mathrm{Gal}(L'/\mathbb{Q}_p)} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(\Pi^1(\underline{k},\underline{D}),\Pi^\infty(\underline{D})\big)$$

tel que, pour toute représentation ρ_p de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ potentiellement cristalline de dimension 2 sur E de poids de Hodge-Tate $\underline{k}$ et de module de Deligne-Fontaine $\underline{D}$, on ait un isomorphisme continu $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariant :

$$[\![\mathcal{R}^1\big((\mathrm{Fil}^{-k_2}D_{L'})^{\mathrm{Gal}(L'/\mathbb{Q}_p)}\big)]\!] \cong \Pi^{\mathrm{an}}(\rho_p).$$

3.2. Le cas $\mathrm{GL}_2(L)$ semi-stable. — On fait le point sur ce qui est connu dans le cas $\mathrm{GL}_2(L)$ semi-stable.

On fixe des poids de Hodge-Tate $(k_{1,\sigma}, k_{2,\sigma})_{\sigma\in\mathcal{S}}$ avec $k_{1,\sigma} > k_{2,\sigma}$ pour tout σ et on note $k_\sigma = (k_{1,\sigma}, k_{2,\sigma})$, $\lambda_\sigma = (k_{1,\sigma} - 1, k_{2,\sigma})$, $\nu_\sigma = -\lambda_\sigma$. On fixe un module de Deligne-Fontaine $\underline{D} = (D, \varphi, N)$ avec $L = L'$ et D de rang 2 sur $L_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$, et on suppose que $\mathrm{WD}(\underline{D})$ vérifie la condition du § 2.3. On fixe enfin un plongement $\sigma \in \mathcal{S}$ et on rappelle que $D_{L,\sigma} = (D \otimes_{L_0} L) \otimes_{L,\sigma} E$ est muni d'une action du groupe de Weil-Deligne (cf. § 2.2).

Cas cristallin.
On a $\alpha_0 \neq \alpha_1 \in E^\times$ tels que :

$$D_{L,\sigma} = Ee_{1,\sigma} \oplus Ee_{0,\sigma} \qquad \begin{cases} \varphi^{[L_0:\mathbb{Q}_p]}(e_{1,\sigma}) &= \alpha_1 e_{1,\sigma} \\ \varphi^{[L_0:\mathbb{Q}_p]}(e_{0,\sigma}) &= \alpha_0 e_{0,\sigma}. \end{cases}$$

On suppose d'abord $\alpha_1 \neq \alpha_0 q$. On a $\Pi^\infty(\underline{D}) = (\mathrm{Ind}_{B(L)}^{\mathrm{GL}_2(L)} \mathrm{nr}(\alpha_0)|\cdot|_L^{-1} \otimes \mathrm{nr}(\alpha_1))^\infty \cong (\mathrm{Ind}_{B(L)}^{\mathrm{GL}_2(L)} \mathrm{nr}(\alpha_1)|\cdot|_L^{-1} \otimes \mathrm{nr}(\alpha_0))^\infty$ et on définit $I_0(\nu_\sigma), I_1(\nu_\sigma), I_0(s_1\cdot\nu_\sigma), I_1(s_1\cdot\nu_\sigma)$ comme en (14) en remplaçant t par $\sigma(t)$, ν par ν_σ, $|\cdot|^{-1}$ par $|\cdot|_L^{-1}$ et an par σ-an.

Un examen de la preuve du Lemme 3.1.1 montre qu'elle s'étend au cadre localement σ-analytique, i.e. on a $\dim_E \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(L),\sigma}(I_0(s_1\cdot\nu_\sigma), \overline{L}(\lambda_\sigma) \otimes_E \Pi^\infty(\underline{D})) = \dim_E \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(L),\sigma}(I_1(s_1\cdot\nu_\sigma), \overline{L}(\lambda_\sigma) \otimes_E \Pi^\infty(\underline{D})) = 1$. Avec les résultats de compatibilité local-global de [**25**], on peut en déduire que l'on a :

$$\begin{aligned} \Pi^{1,\sigma}(\underline{k}_\sigma, \underline{D}) &= I_0(s_1\cdot\nu_\sigma) \oplus I_1(s_1\cdot\nu_\sigma) \\ \mathcal{R}^{1,\sigma}(Ee_{0,\sigma}) &= \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(L),\sigma}\big(I_1(s_1\cdot\nu_\sigma), \overline{L}(\lambda_\sigma) \otimes_E \Pi^\infty(\underline{D})\big) \\ \mathcal{R}^{1,\sigma}(Ee_{1,\sigma}) &= \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(L),\sigma}\big(I_0(s_1\cdot\nu_\sigma), \overline{L}(\lambda_\sigma) \otimes_E \Pi^\infty(\underline{D})\big). \end{aligned}$$

Lorsque $\alpha_1 = \alpha_0 q = \alpha$, la situation est encore strictement analogue au cas $\alpha_1 = \alpha_0 p$ de $L = \mathbb{Q}_p$ (et les preuves s'étendent). On définit $I(\nu_\sigma), \widetilde{I}(\nu_\sigma), I(s_1\cdot\nu_\sigma), \widetilde{I}(s_1\cdot\nu_\sigma)$ comme en (15) (en transférant au cadre localement σ-analytique comme ci-dessus) et on a :

$$\begin{aligned} \Pi^{1,\sigma}(\underline{k}_\sigma, \underline{D}) &= I(s_1\cdot\nu_\sigma) \oplus \widetilde{I}(s_1\cdot\nu_\sigma) \\ \mathcal{R}^{1,\sigma}(Ee_{0,\sigma}) &= \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(L),\sigma}\big(\widetilde{I}(s_1\cdot\nu_\sigma), \overline{L}(\lambda_\sigma) \otimes_E \Pi^\infty(\underline{D})\big) \\ \mathcal{R}^{1,\sigma}(Ee_{1,\sigma}) &= \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(L),\sigma}\big(I(s_1\cdot\nu_\sigma), \overline{L}(\lambda_\sigma) \otimes_E \Pi^\infty(\underline{D})\big). \end{aligned}$$

Cas semi-stable non cristallin.
On a $\alpha \in E^\times$ tel que :

$$D_{L,\sigma} = Ee_{1,\sigma} \oplus Ee_{0,\sigma} \qquad \begin{cases} \varphi^{[L_0:\mathbb{Q}_p]}(e_{1,\sigma}) &= \alpha e_{1,\sigma} \\ \varphi^{[L_0:\mathbb{Q}_p]}(e_{0,\sigma}) &= \alpha q^{-1} e_{0,\sigma} \end{cases} \qquad \begin{cases} N(e_{1,\sigma}) &= e_{0,\sigma} \\ N(e_{0,\sigma}) &= 0. \end{cases}$$

Un examen de la preuve du Lemme 3.1.2 et de ce qu'elle utilise de [**59**] ou de la Proposition 3.1.6 montre qu'elle s'étend au cadre localement σ-analytique *sauf (éventuellement) la dernière phrase* (qui utilise $L = \mathbb{Q}_p$ via [**54**, § 8] et [**55**, Cor. 4.4]). De même les Lemmes 3.1.3 et 3.1.4 s'étendent au cadre localement σ-analytique, ainsi que le Lemme 3.1.5 à condition de remplacer dans l'énoncé $\Pi^{1,\sigma}(\underline{k}_\sigma, \underline{D})$ par $\Pi^{1,\sigma}(\underline{k}_\sigma, \underline{D})^- \stackrel{\text{déf}}{=} I(s_1 \cdot \nu_\sigma) — \overline{L}(\lambda_\sigma) \ \otimes_E (\mathrm{nr}(\alpha) \circ \det)$ (unique extension non scindée). On a donc :

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(L),\sigma}\big(\Pi^{1,\sigma}(\underline{k}_\sigma, \underline{D})^-, \overline{L}(\lambda_\sigma) \otimes_E \Pi^\infty(\underline{D})\big) = E\mathrm{Log}_{\sigma,0} \ \oplus \ E\mathrm{Val}$$

où $\mathrm{Log}_{\sigma,0} : t \in T(L) \mapsto \sigma(\log_0(t_1/t_2))$ et $\mathrm{Val} : t \in T(L) \mapsto \mathrm{val}(t_1/t_2)$. En tenant compte des résultats de compatibilité local-global de Ding ([**26**], [**27**]), on obtient :

$$\begin{array}{rcl}
\Pi^{1,\sigma}(\underline{k}_\sigma, \underline{D}) & = & I(s_1 \cdot \nu_\sigma) — \overline{L}(\lambda_\sigma) — \widetilde{I}(s_1 \cdot \nu_\sigma) \ \otimes_E (\mathrm{nr}(\alpha) \circ \det) \\
\mathcal{R}^1(e_{1,\sigma}) & = & \mathrm{Log}_{\sigma,0} \in \ \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(L),\sigma}\big(\Pi^{1,\sigma}(\underline{k}_\sigma, \underline{D})^-, \overline{L}(\lambda_\sigma) \otimes_E \Pi^\infty(\underline{D})\big) \\
\mathcal{R}^1(e_{0,\sigma}) & = & -\mathrm{Val} \ \in \ \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(L),\sigma}\big(\Pi^{1,\sigma}(\underline{k}_\sigma, \underline{D})^-, \overline{L}(\lambda_\sigma) \otimes_E \Pi^\infty(\underline{D})\big)
\end{array}$$

et l'on peut rajouter :

Conjecture 3.2.1. — *La restriction induit un isomorphisme :*

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(L),\sigma}\big(\Pi^{1,\sigma}(\underline{k}_\sigma, \underline{D}), \overline{L}(\lambda_\sigma) \otimes_E \Pi^\infty(\underline{D})\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(L),\sigma}\big(\Pi^{1,\sigma}(\underline{k}_\sigma, \underline{D})^-, \overline{L}(\lambda_\sigma) \otimes_E \Pi^\infty(\underline{D})\big).$$

3.3. Le cas $\mathrm{GL}_n(L)$ cristallin générique. — On explicite un candidat naturel pour $\Pi^{j,\sigma}(\underline{k}_\sigma, \underline{D})$ et $\mathcal{R}^{j,\sigma}$ dans le cas $\mathrm{GL}_n(L)$ cristallin suffisamment générique.

On fixe $\underline{k} = (k_{i,\sigma})_{\substack{i\in\{1,\dots,n\}\\ \sigma\in\mathcal{S}}}$ dans $\mathbb{Z}$ tel que $k_{1,\sigma} > k_{2,\sigma} > \cdots > k_{n,\sigma}$ pour tout σ et on note λ_σ comme au § 2.3, $\mu_\sigma \stackrel{\text{déf}}{=} -\lambda_\sigma$ et pour $j \in \{1, \dots, n-1\}$:

$$s_j \cdot \mu_\sigma \stackrel{\text{déf}}{=} (\mu_{1,\sigma}, \dots, \mu_{j-1,\sigma}, \mu_{j+1,\sigma} + 1, \mu_{j,\sigma} - 1, \mu_{j+2,\sigma}, \dots, \mu_{n,\sigma})$$

où les s_j sont les réflexions simples de $\mathrm{GL}_n \times_{L,\sigma} E$. On utilise les notations de la fin du § 2.1.

On fixe $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in E^\times$ et un module de Deligne-Fontaine $\underline{D} = (D, \varphi, 0)$ avec $L = L'$ tel que, pour tout $\sigma \in \mathcal{S}$:

$$D_{L,\sigma} = Ee_{0,\sigma} \oplus \cdots \oplus Ee_{n-1,\sigma} \qquad \varphi^{[L_0:\mathbb{Q}_p]}(e_{i,\sigma}) = \alpha_i e_{i,\sigma} \quad 0 \le i \le n-1.$$

Pour tout $w \in \mathcal{S}_n$, on définit les caractères lisses de $T(L)$ à valeurs dans E :

$$\mathrm{nr}_w \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{nr}(\alpha_{w^{-1}(0)})|\cdot|_L^{1-n} \otimes \mathrm{nr}(\alpha_{w^{-1}(1)})|\cdot|_L^{2-n} \otimes \cdots \otimes \mathrm{nr}(\alpha_{w^{-1}(n-1)})$$

et on suppose de plus que les α_i sont deux à deux distincts et que les induites lisses $(\mathrm{Ind}_{B(L)}^{\mathrm{GL}_n(L)} \mathrm{nr}_w)^\infty$ sont toutes irréductibles pour $w \in \mathcal{S}_n$, et donc isomorphes (ces hypothèses correspondent dans ce cas à [**4**, Hyp. 5.1 & Hyp. 5.2]). Cette unique représentation lisse est bien sûr $\Pi^\infty(\underline{D})$. On fixe $\sigma \in \mathcal{S}$.

Il résulte de [**4**, Cor. 2.5] et des hypothèses que, pour $w \in \mathcal{S}_n$ et $j \in \{1, \dots, n-1\}$, le socle de $(\mathrm{Ind}_{B(L)}^{\mathrm{GL}_n(L)} \sigma(t)^{-s_j \cdot \mu_\sigma} \mathrm{nr}_w)^{\sigma\text{-an}}$ est irréductible, on le note :

$$C^\sigma(s_j, w) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_n(L)} \big(\mathrm{Ind}_{B(L)}^{\mathrm{GL}_n(L)} \sigma(t)^{-s_j \cdot \mu_\sigma} \mathrm{nr}_w\big)^{\sigma\text{-an}}.$$

Ce socle peut être décrit par la théorie d'Orlik-Strauch [**50**]. En utilisant [**50**, Prop. 4.9] et des résultats standard sur la structure des modules de Verma (cf. [**40**, Th. 6.2]), on voit facilement que l'induite $(\mathrm{Ind}_{B(L)}^{\mathrm{GL}_n(L)} \sigma(t)^{-\mu_\sigma} \mathrm{nr}_w)^{\sigma\text{-an}}$ contient en sous-objet une extension non scindée de la forme $\overline{L}(\lambda_\sigma) \otimes_E \Pi^\infty(\underline{D}) — C^\sigma(s_j, w)$ pour tout $j \in \{1, \dots, n-1\}$ (en effet, si l'extension était scindée, on aurait $\overline{L}(\lambda_\sigma) \otimes_E \Pi^\infty(\underline{D}) \oplus C^\sigma(s_j, w)$ en socle de $(\mathrm{Ind}_{B(L)}^{\mathrm{GL}_n(L)} \sigma(t)^{-\mu_\sigma} \mathrm{nr}_w)^{\sigma\text{-an}} \subseteq (\mathrm{Ind}_{B(L)}^{\mathrm{GL}_n(L)} \sigma(t)^{-\mu_\sigma} \mathrm{nr}_w)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}} =$ induite localement $\mathbb{Q}_p$-analytique, ce qui contredit [**4**, Cor. 2.5]). On a donc $\dim_E \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_n(L),\sigma}(C^\sigma(s_j, w), \overline{L}(\lambda_\sigma) \otimes_E \Pi^\infty(\underline{D})) \geq 1$ et il ne coûte pas cher de conjecturer :

Conjecture 3.3.1. — *Pour $w \in \mathcal{S}_n$ et $j \in \{1, \dots, n-1\}$, on a :*

$$\dim_E \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_n(L),\sigma} \big(C^\sigma(s_j, w), \overline{L}(\lambda_\sigma) \otimes_E \Pi^\infty(\underline{D})\big) = 1.$$

Les $C^\sigma(s_j, w)$ ne sont pas tous distincts, on a par la même preuve que pour [**4**, Lem. 6.2] :

$$C^\sigma(s_j, w) \cong C^\sigma(s_{j'}, w') \Longleftrightarrow j = j' \quad \text{et } \{\alpha_{w^{-1}(j)}, \dots, \alpha_{w^{-1}(n-1)}\} = \{\alpha_{w'^{-1}(j)}, \dots, \alpha_{w'^{-1}(n-1)}\}.$$

Si $\mathcal{P} \subseteq \{\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}\}$ a cardinal $n-j$, on note $C^\sigma(s_j, \mathcal{P})$ la représentation $C^\sigma(s_j, w)$ pour un quelconque $w \in \mathcal{S}_n$ tel que $\mathcal{P} = \{\alpha_{w^{-1}(j)}, \dots, \alpha_{w^{-1}(n-1)}\}$. Les résultats partiels de compatibilité local-global dans le cas cristallin ([**9**], [**25**], [**7**], [**8**]) suggèrent que l'on devrait avoir pour $j \in \{1, \dots, n-1\}$:

$$\begin{aligned} \Pi^{j,\sigma}(\underline{k}_\sigma, \underline{D}) &= \bigoplus\nolimits_{\substack{\mathcal{P} \subseteq \{\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}\} \\ \mathrm{card}\mathcal{P} = j}} C^\sigma(s_{n-j}, \mathcal{P}) \\ \mathcal{R}^{j,\sigma}\big(E e_{i_1,\sigma} \wedge \cdots \wedge e_{i_j,\sigma}\big) &= \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_n(L),\sigma}\big(C^\sigma(s_{n-j}, \{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_j}\}), \overline{L}(\lambda_\sigma) \otimes_E \Pi^\infty(\underline{D})\big) \end{aligned}$$

(noter qu'à automorphisme permis près de $\wedge_E^j D_{L,\sigma}$ (Definition 2.3.1), il n'y a qu'un tel $\mathcal{R}^{j,\sigma}$). Par exemple, le lecteur motivé pourra “s'amuser” à vérifier la proposition suivante, dont on omet la preuve (voir le (ii) de la Remarque 6.1.4 pour des considérations analogues).

Proposition 3.3.2. — *Pour toute représentation cristalline ρ_p de $\mathrm{Gal}(\overline{L}/L)$ de dimension n sur E de poids de Hodge-Tate $\underline{k}$ et module de Deligne-Fontaine $\underline{D}$, on a :*

$$C^\sigma(s_{n-j}, \mathcal{P}) \hookrightarrow [\![\mathcal{R}^{j,\sigma}\big(\mathrm{Fil}^{\max}(\wedge_E^j D_{L,\sigma})\big)]\!]$$

*si et seulement si $(\otimes_{\tau \in \mathcal{S} \setminus \{\sigma\}} \overline{L}(\lambda_\tau)) \otimes_E C^\sigma(s_{n-j}, \mathcal{P})$ est dans la liste de [**4**, (6.4)], i.e. est conjecturé apparaître dans le socle de $\Pi^{\mathrm{an}}(\rho_p)^?$ (avec les notations du § 2.3).*

Sous des hypothèses additionnelles à la Taylor-Wiles, il est en particulier démontré dans [**8**] que les $C^\sigma(s_{n-j},\mathcal{P})$ ci-dessus sont bien tous en socle de la cohomologie complétée.

Le reste de cet article est consacré au cas $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ semi-stable non cristallin.

4. Le cas $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ semi-stable avec $N^2 \neq 0$

Dans le cas où $L = L' = \mathbb{Q}_p$ et $\underline{D} = (D,\varphi,N)$ avec $\dim_E D = 3$ et $N^2 \neq 0$, on construit explicitement un candidat pour les représentations localement analytiques $\Pi^1(\underline{k},\underline{D})$ et $\Pi^2(\underline{k},\underline{D})$. On suppose $L = \mathbb{Q}_p$ partout dans ce paragraphe, et on enlève σ en indice ou en exposant.

4.1. Quelques notations. — On introduit plusieurs notations.

On note $P_1 \overset{\text{déf}}{=} \left(\begin{smallmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{smallmatrix}\right)$ et $P_2 \overset{\text{déf}}{=} \left(\begin{smallmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{smallmatrix}\right)$ les deux sous-groupes paraboliques maximaux standard de $\mathrm{GL}_{3/\mathbb{Q}_p}$, $L_1 \overset{\text{déf}}{=} \left(\begin{smallmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{smallmatrix}\right)$ et $L_2 \overset{\text{déf}}{=} \left(\begin{smallmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{smallmatrix}\right)$ leur sous-groupe de Levi respectif contenant T, s_1 et s_2 les réflexions simples respectives des groupes de Weyl de L_1 et L_2. On pose :

$$v_{P_1}^\infty \overset{\text{déf}}{=} \big(\mathrm{Ind}_{P_1(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} 1\big)^\infty/1 \quad \text{et} \quad v_{P_2}^\infty \overset{\text{déf}}{=} \big(\mathrm{Ind}_{P_2(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} 1\big)^\infty/1$$

qui sont des représentations irréductibles lisses de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ sur E. Pour $\mu = (\mu_1,\mu_2,\mu_3) \in \mathbb{Z}^3$ et $w \in \mathcal{S}_3$, on définit :

$$w\cdot\mu \overset{\text{déf}}{=} \big(\mu_{w^{-1}(1)} + w^{-1}(1) - 1,\ \mu_{w^{-1}(2)} + w^{-1}(2) - 2,\ \mu_{w^{-1}(3)} + w^{-1}(3) - 3\big)$$

(il s'agit de la “dot action” usuelle par rapport au Borel inférieur B).

On fixe des poids de Hodge-Tate $k_1 > k_2 > k_3$ et le module de Deligne-Fontaine $\underline{D} = (D,\varphi,N)$ suivant pour $L = L' = \mathbb{Q}_p$ où $\alpha \in E^\times$:

$$D = Ee_2 \oplus Ee_1 \oplus Ee_0 \qquad \begin{cases} \varphi(e_2) &= \alpha e_2 \\ \varphi(e_1) &= \alpha p^{-1} e_1 \\ \varphi(e_0) &= \alpha p^{-2} e_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} N(e_2) &= e_1 \\ N(e_1) &= e_0 \\ N(e_0) &= 0. \end{cases} \tag{29}$$

On a :

$$\Pi^\infty(\underline{D}) = \mathrm{St}_3^\infty \otimes_E (\mathrm{nr}(\alpha)\circ\det).$$

Lorsque $\underline{D}$ est associé à une représentation semi-stable de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ de dimension 3 sur E de poids de Hodge-Tate $(k_i)_{i\in\{1,2,3\}}$, on a $\mathrm{val}(\alpha) = 1 - \frac{1}{3}(k_1+k_2+k_3)$.

On rappelle que $\lambda = (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = (k_1-2,k_2-1,k_3)$ et on pose $\mu \overset{\text{déf}}{=} -\lambda = (\mu_1,\mu_2,\mu_3) = (-k_1+2,-k_2+1,-k_3)$ (donc $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3$), de sorte que $L(\mu)$ est la représentation algébrique duale de $L(w_0\lambda) = \overline{L}(\lambda) = \overline{L}(-\mu)$ (cf. § 2.1). Pour toute représentation lisse de longueur finie π^∞ de $L_1(\mathbb{Q}_p)$, $L_2(\mathbb{Q}_p)$ ou $T(\mathbb{Q}_p)$ sur E, on dispose donc des représentations localement analytiques de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ sur E de longueur finie (cf. § 2.1 pour les notations) :

$$\begin{array}{lll} \mathcal{F}_{P_j}^{\mathrm{GL}_3}\big(L(\mu),\pi^\infty\big),\ j\in\{1,2\} & \mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\big(L(s_1\cdot\mu),\pi^\infty\big) & \mathcal{F}_{P_1}^{\mathrm{GL}_3}\big(L(s_2\cdot\mu),\pi^\infty\big) \\ \mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\big(L(s_1s_2\cdot\mu),\pi^\infty\big) & \mathcal{F}_{P_1}^{\mathrm{GL}_3}\big(L(s_2s_1\cdot\mu),\pi^\infty\big) & \mathcal{F}_{B}^{\mathrm{GL}_3}\big(L(s_1s_2s_1\cdot\mu),\pi^\infty\big) \end{array}$$

en remarquant que :

$$L(\mu)\in\mathcal{O}_{\mathrm{alg}}^{\mathfrak{gl}_3},\ L(s_1\cdot\mu)\in\mathcal{O}_{\mathrm{alg}}^{\mathfrak{p}_2},\ L(s_2\cdot\mu)\in\mathcal{O}_{\mathrm{alg}}^{\mathfrak{p}_1},\ L(s_1s_2\cdot\mu)\in\mathcal{O}_{\mathrm{alg}}^{\mathfrak{p}_2},\ L(s_2s_1\cdot\mu)\in\mathcal{O}_{\mathrm{alg}}^{\mathfrak{p}_1}$$

(dans $\mathcal{O}_{\mathrm{alg}}^{\mathfrak{b}}$) où $\mathfrak{gl}_3$ (resp. $\mathfrak{p}_1$, resp. $\mathfrak{p}_2$) est la E-algèbre de Lie de $\mathrm{GL}_3\times_{\mathbb{Q}_p}E$ (resp. $P_1\times_{\mathbb{Q}_p}E$, resp. $P_2\times_{\mathbb{Q}_p}E$). Par exemple pour $j\in\{1,2\}$:

$$\mathcal{F}_{P_j}^{\mathrm{GL}_3}(L(\mu),\pi^\infty)\cong L(w_0\lambda)\otimes_E\big(\mathrm{Ind}_{P_j(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\pi^\infty\big)^\infty=\overline{L}(-\mu)\otimes_E\big(\mathrm{Ind}_{P_j(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\pi^\infty\big)^\infty$$

et :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{B}^{\mathrm{GL}_3}\big(L(s_1s_2s_1\cdot\mu),\pi^\infty\big) &\cong \big(\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}t^{-s_1s_2s_1\cdot\mu}\otimes_E\pi^\infty\big)^{\mathrm{an}}\\ &= \big(\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}t_1^{k_3-2}t_2^{k_2-1}t_3^{k_1}\otimes_E\pi^\infty\big)^{\mathrm{an}}.\end{aligned}$$

On définit les représentations lisses irréductibles (distinctes) suivantes de $L_2(\mathbb{Q}_p)\cong\mathbb{Q}_p^\times\times\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur E, où B_2 désigne ici le Borel inférieur de GL_2 (pour ne pas le confondre avec $B\subset\mathrm{GL}_3$) :

$$\begin{aligned}\pi_{2,1}^\infty &\overset{\text{déf}}{=} \mathrm{nr}(\alpha)\otimes_E\big(\mathrm{St}_2^\infty\otimes_E(\mathrm{nr}(\alpha)\circ\det{}_2)\big)\\ \pi_{2,2}^\infty &\overset{\text{déf}}{=} \mathrm{nr}(\alpha)|\cdot|^{-1}\otimes_E\big(\mathrm{Ind}_{B_2(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\mathrm{nr}(\alpha)|\cdot|\otimes\mathrm{nr}(\alpha)\big)^\infty\\ \pi_{2,3}^\infty &\overset{\text{déf}}{=} \mathrm{nr}(\alpha)|\cdot|^{-2}\otimes_E\big(\mathrm{St}_2^\infty\otimes_E(\mathrm{nr}(\alpha)|\cdot|\circ\det{}_2)\big).\end{aligned}$$

On pose alors :

$$\begin{array}{lll} C_0 \overset{\text{déf}}{=} \overline{L}(-\mu)\otimes_E\Pi^\infty(\underline{D}) = \Pi^{\mathrm{alg}}(\underline{k},\underline{D}) & C_1 \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\big(L(s_1\cdot\mu),\pi_{2,1}^\infty\big) \\ C_2 \overset{\text{déf}}{=} \overline{L}(-\mu)\otimes_E v_{P_1}^\infty\otimes_E(\mathrm{nr}(\alpha)\circ\det) & C_3 \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\big(L(s_1\cdot\mu),\pi_{2,2}^\infty\big) \\ C_4 \overset{\text{déf}}{=} \overline{L}(-\mu)\otimes_E v_{P_2}^\infty\otimes_E(\mathrm{nr}(\alpha)\circ\det) & C_5 \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\big(L(s_1\cdot\mu),\pi_{2,3}^\infty\big), \end{array} \tag{30}$$

ainsi que :

$$\begin{aligned}\widetilde{C}_2 &\overset{\text{déf}}{=} \mathcal{F}_{P_1}^{\mathrm{GL}_3}\big(L(s_2s_1\cdot\mu),\mathrm{nr}(\alpha)\circ\det{}_3\big)\\ \widetilde{C}_4 &\overset{\text{déf}}{=} \mathcal{F}_{P_1}^{\mathrm{GL}_3}\big(L(s_2s_1\cdot\mu),\mathrm{nr}(\alpha)|\cdot|^{-1}\circ\det{}_2\otimes_E\mathrm{nr}(\alpha)|\cdot|^2\big).\end{aligned} \tag{31}$$

Les symétriques des constituants C_i, $\widetilde{C}_j$ s'obtiennent en échangeant $v_{P_1}^\infty$ et $v_{P_2}^\infty$, et en remplaçant s_1 par s_2, P_2 par P_1 et les $\pi_{2,j}^\infty$ par :

$$\begin{aligned}\pi_{1,1}^\infty &\overset{\text{déf}}{=} \big(\mathrm{St}_2^\infty\otimes_E(\mathrm{nr}(\alpha)\circ\det{}_2)\big)\otimes_E\mathrm{nr}(\alpha)\\ \pi_{1,2}^\infty &\overset{\text{déf}}{=} \big(\mathrm{Ind}_{B_2(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\mathrm{nr}(\alpha)\otimes\mathrm{nr}(\alpha)|\cdot|^{-1}\big)^\infty\otimes_E\mathrm{nr}(\alpha)|\cdot|\\ \pi_{1,3}^\infty &\overset{\text{déf}}{=} \big(\mathrm{St}_2^\infty\otimes_E(\mathrm{nr}(\alpha)|\cdot|^{-1}\circ\det{}_2)\big)\otimes_E\mathrm{nr}(\alpha)|\cdot|^2.\end{aligned}$$

Lemme 4.1.1. — *Les représentations localement analytiques C_i pour $i \in \{0, \dots, 5\}$ et $\widetilde{C}_j$ pour $j \in \{2, 4\}$ sont fortement admissibles ([**53**, § 3]), irréductibles et deux à deux non isomorphes.*

Démonstration. — L'admissibilité forte découle de [**50**, Prop. 4.8(ii)], l'irréductibilité de [**50**, Th. 5.8] et la dernière assertion de [**4**, Cor. 2.7]. □

Donnons plus explicitement le cas $(k_1, k_2, k_3) = (2, 1, 0)$ et $\alpha = 1$. On a $\mu = \lambda = (0, 0, 0)$, que l'on note 0, et il suit de [**50**, Th. 5.8] et [**4**, Cor. 2.5] que l'on a par exemple :

$$\begin{aligned}
C_1 &= \mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} \big(\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} t^{-s_1 \cdot 0} \otimes_E (1 \otimes |\cdot|^{-1} \otimes |\cdot|)\big)^{\mathrm{an}} \\
C_2 &= \mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} \big(\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} t^{-s_1 \cdot 0} \otimes_E (|\cdot|^{-1} \otimes |\cdot| \otimes 1)\big)^{\mathrm{an}} \\
&= \mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} \big(\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} \varepsilon(t_1)^{-1} \otimes \varepsilon(t_2) \otimes 1\big)^{\mathrm{an}} \\
C_3 &= \mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} \big(\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} t^{-s_1 \cdot 0} \otimes_E (|\cdot|^{-2} \otimes 1 \otimes |\cdot|^2)\big)^{\mathrm{an}}.
\end{aligned}$$

4.2. Calculs de Ext^1 **I.** — On donne plusieurs résultats techniques mais importants sur certains groupes d'extensions entre les C_i.

On conserve les notations du § 4.1 et on utilise aussi les notations du § 5 ci-dessous auquel on renvoie le lecteur. On ne détaille les preuves que pour les C_i explicités en (30), les preuves pour leur symétrique étant analogues. Rappelons que C_i' désigne le dual fort de C_i.

Proposition 4.2.1. — *(i) Pour $1 \leq i \leq 4$ on a $\dim_E \mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)} \big(C_i', C_{i+1}'\big) = 1$.*
(ii) On a $\dim_E \mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)} \big(C_1', \widetilde{C}_2'\big) = \dim_E \mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)} \big(\widetilde{C}_2', C_3'\big) = 1$ et $\dim_E \mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)} \big(C_3', \widetilde{C}_4'\big) = \dim_E \mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)} \big(\widetilde{C}_4', C_5'\big) = 1$.

Démonstration. — Quitte à tordre toutes les représentations par $\mathrm{nr}(\alpha^{-1}) \circ \det$, on peut supposer $\alpha = 1$.
(i) La preuve de $\dim_E \mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(C_1', C_2') = 1$ se trouve déjà détaillée dans celle de [**57**, (4.45)]. Donnons la preuve de $\dim_E \mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(C_3', C_4') = 1$. Par le Lemme 5.3.1 et [**50**, Prop. 4.9(a)] on a une suite exacte courte dans $\mathrm{Mod}_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}$: $0 \longrightarrow D_4' \longrightarrow D_3' \longrightarrow C_3' \longrightarrow 0$ où $D_3 \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(M_2(s_1 \cdot \mu), \pi_{2,2}^{\infty})$ et $D_4 \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(M_2(s_1 s_2 \cdot \mu), \pi_{2,2}^{\infty})$. On a $\mathrm{Hom}_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(D_4', C_4') = 0$ (utiliser (44) ou [**4**, Cor. 2.7]). Montrons que $\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(D_4', C_4') = 0$. Les formules du § 5.3 impliquent (cf. § 5.2 pour $\overline{L}(-s_1 s_2 \cdot \mu)_2$) :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}^1_{D(L_2(\mathbb{Q}_p),E)} \big(\overline{L}(-s_1 s_2 \cdot \mu)_2' \otimes_E \pi_{2,2}^{\infty}{}', H^0(N_2(\mathbb{Q}_p), C_4')\big) &= 0 \\
\mathrm{Hom}_{D(L_2(\mathbb{Q}_p),E)} \big(\overline{L}(-s_1 s_2 \cdot \mu)_2' \otimes_E \pi_{2,2}^{\infty}{}', H^1(N_2(\mathbb{Q}_p), C_4')\big) &= 0
\end{aligned}$$

(en effet le centre de $L_2(\mathbb{Q}_p)$ agit à chaque fois par des caractères différents à droite et à gauche, cf. aussi [**57**, Prop. 4.7(1)]). On applique alors la suite exacte (45) avec $N = \overline{L}(-s_1s_2\cdot\mu)'_2 \otimes_E {\pi_{2,2}^{\infty}}'$ et $M = C'_4$ (cf. (46) et le (ii) de la Remarque 5.1.3). On a donc $\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(C'_3, C'_4) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(D'_3, C'_4)$. Montrons que $\dim_E \mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(D'_3, C'_4) = 1$. Les formules (51) impliquent :

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{Ext}^1_{D(L_2(\mathbb{Q}_p),E)}\left(\overline{L}(-s_1\cdot\mu)'_2 \otimes_E {\pi_{2,2}^{\infty}}', H^0(N_2(\mathbb{Q}_p), C'_4)\right) & = & 0\\
\mathrm{Hom}_{D(L_2(\mathbb{Q}_p),E)}\left(\overline{L}(-s_1\cdot\mu)'_2 \otimes_E {\pi_{2,2}^{\infty}}', H^1(N_2(\mathbb{Q}_p), C'_4)\right) & = & E\\
\mathrm{Ext}^2_{D(L_2(\mathbb{Q}_p),E)}\left(\overline{L}(-s_1\cdot\mu)'_2 \otimes_E {\pi_{2,2}^{\infty}}', H^0(N_2(\mathbb{Q}_p), C'_4)\right) & = & 0
\end{array}$$

où les première et troisième égalités viennent du fait que le centre de $L_2(\mathbb{Q}_p)$ agit par des caractères différents à droite et à gauche et où la deuxième vient de $\mathrm{Hom}_{L_2(\mathbb{Q}_p)}(J_{N_2}(v_{P_2}^{\infty}), \pi_{2,2}^{\infty}) = E$. La suite exacte (45) avec $N = \overline{L}(-s_1\cdot\mu)'_2 \otimes_E {\pi_{2,2}^{\infty}}'$ et $M = C'_4$ donne alors le résultat voulu.

Montrons maintenant $\dim_E \mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(C'_2, C'_3) = 1$. Par le Lemme 5.3.1 et [**50**, Prop. 4.9(a)] on a une suite exacte courte dans $\mathrm{Mod}_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}$: $0 \longrightarrow C'_3 \longrightarrow D'_2 \longrightarrow D'_1 \longrightarrow 0$ où $D_1 \overset{\text{déf}}{=} \overline{L}(\lambda) \otimes_E (\mathrm{Ind}_{P_2(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} \pi_{2,2}^{\infty})^{\infty}$ et $D_2 \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(M_2(\mu), \pi_{2,2}^{\infty})$. On en déduit une suite exacte de E-espaces vectoriels :

$$\begin{array}{r}
\mathrm{Hom}_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}\left(C'_2, D'_2\right) \to \mathrm{Hom}_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}\left(C'_2, D'_1\right) \to \mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}\left(C'_2, C'_3\right)\\
\to \mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}\left(C'_2, D'_2\right).
\end{array}$$

Le deuxième terme à gauche a dimension 1 par [**57**, Prop. 4.7(2)] car :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\left(\left(\mathrm{Ind}_{P_2(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} \pi_{2,2}^{\infty}\right)^{\infty}, v_{P_1}^{\infty}\right) = E$$

(utiliser $(\mathrm{Ind}_{P_2(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} \pi_{2,2}^{\infty})^{\infty} \cong \left(\mathrm{Ind}_{P_1(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}(\mathrm{Ind}_{B_2(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} |\cdot|^{-1} \otimes |\cdot|)^{\infty} \otimes_E 1\right)^{\infty} \twoheadrightarrow (\mathrm{Ind}_{P_1(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} 1)^{\infty} \cong 1 \text{---} v_{P_1}^{\infty}$). Il suffit donc de montrer $\mathrm{Hom}_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(C'_2, D'_2) = \mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(C'_2, D'_2) = 0$. Par le premier isomorphisme en (53), le Lemme 5.3.1 et [**50**, Prop. 4.9] on a deux suites exactes courtes dans $\mathrm{Mod}_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}$:

$$0 \to \left(\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\left(M_2(\mu), |\cdot|^{-2} \otimes |\det{}_2|\right)/C_2\right)' \to \mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\left(M_2(\mu), |\cdot|^{-2} \otimes |\det{}_2|\right)' \to C'_2 \to 0$$

$$\begin{array}{r}
0 \to \mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\left(L(s_1\cdot\mu), |\cdot|^{-2} \otimes |\det{}_2|\right)' \to \left(\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\left(M_2(\mu), |\cdot|^{-2} \otimes |\det{}_2|\right)/C_2\right)'\\
\to \overline{L}(\lambda)' \to 0.
\end{array}$$

De la deuxième on déduit avec [**4**, Cor. 2.7] et $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}((\mathrm{Ind}_{P_2(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} \pi_{2,2}^{\infty})^{\infty}, 1) = 0$:

$$\mathrm{Hom}_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}\left(\left(\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\left(M_2(\mu), |\cdot|^{-2} \otimes |\det{}_2|\right)/C_2\right)', D'_2\right) = 0$$

et de la première qu'il suffit donc de montrer :

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{Hom}_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}\left(\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\left(M_2(\mu), |\cdot|^{-2} \otimes |\det{}_2|\right)', D'_2\right) & = & 0\\
\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}\left(\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\left(M_2(\mu), |\cdot|^{-2} \otimes |\det{}_2|\right)', D'_2\right) & = & 0.
\end{array} \tag{32}$$

Mais les formules du § 5.2 impliquent :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{D(L_2(\mathbb{Q}_p),E)}\big(\overline{L}(-\mu)'_2\otimes_E(|\cdot|^{-2}\otimes|\det{}_2|)', H^0(N_2(\mathbb{Q}_p),D'_2)\big) &= 0\\
\mathrm{Ext}^1_{D(L_2(\mathbb{Q}_p),E)}\big(\overline{L}(-\mu)'_2\otimes_E(|\cdot|^{-2}\otimes|\det{}_2|)', H^0(N_2(\mathbb{Q}_p),D'_2)\big) &= 0\\
\mathrm{Hom}_{D(L_2(\mathbb{Q}_p),E)}\big(\overline{L}(-\mu)'_2\otimes_E(|\cdot|^{-2}\otimes|\det{}_2|)', H^1(N_2(\mathbb{Q}_p),D'_2)\big) &= 0
\end{aligned}$$

(par exemple parce que le centre de $L_2(\mathbb{Q}_p)$ agit à chaque fois par des caractères différents à droite et à gauche). L'isomorphisme (44) et la suite exacte (45) appliqués avec $N=\overline{L}(-\mu)'_2\otimes_E(|\cdot|^{-2}\otimes|\det_2|)'$ et $M=D'_2$ impliquent alors (32).

Enfin, la preuve de $\dim_E \mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(C'_4,C'_5)=1$ est analogue : on utilise le dernier isomorphisme en (53) au lieu de $(\mathrm{Ind}_{P_2(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\pi^\infty_{2,2})^\infty \twoheadrightarrow 1 \text{ —— } v^\infty_{P_1}$ et on se ramène à montrer avec le deuxième isomorphisme en (53) et les formules du § 5.2 :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{D(L_1(\mathbb{Q}_p),E)}\big(\overline{L}(-\mu)'_1\otimes_E(|\det{}_2|^{-1}\otimes|\cdot|^2)', H^0(N_1(\mathbb{Q}_p),D'_5)\big) &= 0\\
\mathrm{Ext}^1_{D(L_1(\mathbb{Q}_p),E)}\big(\overline{L}(-\mu)'_1\otimes_E(|\det{}_2|^{-1}\otimes|\cdot|^2)', H^0(N_1(\mathbb{Q}_p),D'_5)\big) &= 0\\
\mathrm{Hom}_{D(L_1(\mathbb{Q}_p),E)}\big(\overline{L}(-\mu)'_1\otimes_E(|\det{}_2|^{-1}\otimes|\cdot|^2)', H^1(N_1(\mathbb{Q}_p),D'_5)\big) &= 0
\end{aligned}$$

où $D_5 \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(M_2(\mu),\pi^\infty_{2,3})$. La dernière égalité vient encore du fait que le centre de $L_1(\mathbb{Q}_p)$ agit par des caractères différents à droite et à gauche, mais les deux premières sont un peu plus subtiles et découlent (après un twist) des deux premières égalités de la Proposition 3.1.6.
(ii) On a $\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(\widetilde{C}'_2,C'_3)=E$ par (45) et les formules du § 5.3 qui donnent :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}^1_{D(L_1(\mathbb{Q}_p),E)}\big(\overline{L}(-s_2s_1\cdot\mu)'_2\otimes_E 1, H^0(N_1(\mathbb{Q}_p),C'_3)\big) &= 0\\
\mathrm{Hom}_{D(L_1(\mathbb{Q}_p),E)}\big(\overline{L}(-s_2s_1\cdot\mu)'_2\otimes_E 1, H^1(N_1(\mathbb{Q}_p),C'_3)\big) &= E\\
\mathrm{Ext}^2_{D(L_1(\mathbb{Q}_p),E)}\big(\overline{L}(-s_2s_1\cdot\mu)'_2\otimes_E 1, H^0(N_1(\mathbb{Q}_p),C'_3)\big) &= 0.
\end{aligned}$$

On a $\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(C'_1,\widetilde{C}'_2)=E$ en dévissant C'_1 en $0\longrightarrow D'_7\longrightarrow D'_6\longrightarrow C'_1\longrightarrow 0$ exactement comme on a dévissé C'_3 au début du (i) et en montrant avec les formules du § 5.2 (plus précisément leur symétrique avec $N_2(\mathbb{Q}_p)$ et P_1 au lieu de $N_1(\mathbb{Q}_p)$ et P_2 pour pouvoir les appliquer à $\widetilde{C}_2$) et (44), (45) que l'on a $\mathrm{Hom}_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(D'_7,\widetilde{C}'_2)=\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(D'_7,\widetilde{C}'_2)=0$ et $\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(D'_6,\widetilde{C}'_2)=E$ (car $\mathrm{Ext}^1_{D(L_2(\mathbb{Q}_p),E)}(\overline{L}(-s_1\cdot\mu)'_2\otimes_E(1\otimes\mathrm{St}^\infty_2)', H^0(N_2(\mathbb{Q}_p),\widetilde{C}'_2))=E$). Les deux autres égalités se montrent de manière analogue. □

Proposition 4.2.2. — *(i) Pour* $1\leq i<j\leq 5$ *et* $j>i+1$ *on a :*

$$\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(C'_i,C'_j)=0.$$

(ii) On a $\mathrm{Ext}^2_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(C'_1,C'_4)=\mathrm{Ext}^2_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(C'_1,C'_5)=\mathrm{Ext}^2_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(C'_2,C'_5)=0.$

Démonstration. — On peut encore supposer $\alpha=1$.
(i) Il faut donc montrer $\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(C'_1,C'_j)=0$ pour $j\in\{3,4,5\}$,

$\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(C'_2, C'_j) = 0$ pour $j \in \{4,5\}$ et $\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(C'_3, C'_5) = 0$. Notons que $\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(C'_2, C'_4) = 0$ découle de [**57**, Prop. 4.7(2)] avec [**48**, Th. 1] ou [**23**, Th. 1.3] (les extensions ont automatiquement ici un caractère central puisque C'_2 et C'_4 sont simples non isomorphes), et que $\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(C'_1, C'_4) = 0$ est un des cas de [**57**, (4.45)] (en fait c'est son symétrique qui est énoncé). Montrons $\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(C'_2, C'_5) = 0$. En utilisant le premier isomorphisme en (53), on voit qu'il suffit de montrer :

$$\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}\big(\overline{L}(-\mu)' \otimes_E (\mathrm{Ind}_{P_2(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} |\cdot|^{-2} \otimes |\det{}_2|)^{\infty\prime}, C'_5\big) = 0$$

(puisque $\mathrm{Hom}_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(\overline{L}(-\mu), C'_5) = 0$) et en utilisant :

$$\mathrm{Hom}_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}\big(\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(L(s_1\cdot\mu), |\cdot|^{-2} \otimes_E |\det{}_2|)', C'_5\big) = 0$$

([**4**, Cor. 2.7]) qu'il suffit de montrer $\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(D'_2, C'_5) = 0$ où $D_2 \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(M_2(\mu), |\cdot|^{-2} \otimes_E |\det{}_2|)$ (cf. Lemme 5.3.1 et [**50**, Prop. 4.9(a)]). Les formules du (i) du Corollaire 5.3.2 impliquent :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}^1_{D(L_2(\mathbb{Q}_p),E)}\big(\overline{L}(-\mu)'_2 \otimes_E (|\cdot|^{-2} \otimes |\det{}_2|)', H^0(N_2(\mathbb{Q}_p), C'_5)\big) &= 0\\
\mathrm{Hom}_{D(L_2(\mathbb{Q}_p),E)}\big(\overline{L}(-\mu)'_2 \otimes_E (|\cdot|^{-2} \otimes |\det{}_2|)', H^1(N_2(\mathbb{Q}_p), C'_5)\big) &= 0
\end{aligned}$$

car le centre de $L_2(\mathbb{Q}_p)$ agit à chaque fois par des caractères différents à droite et à gauche. La suite exacte (45) appliquée avec $N = \overline{L}(-\mu)'_2 \otimes_E (|\cdot|^{-2} \otimes |\det{}_2|)'$ et $M = C'_5$ implique alors $\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(D'_2, C'_5) = 0$. Tous les autres cas se démontrent de manière analogue en plus simple : à chaque fois, en utilisant le (i) du Corollaire 5.3.2 et la suite exacte (45), on montre $\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(D'_i, C'_j) = 0$ où D_i est défini comme C_i mais en remplaçant $L(s_1\cdot\mu)$ par $M_2(s_1\cdot\mu)$, ce qui suffit à impliquer $\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(C'_i, C'_j) = 0$.

(ii) Montrons $\mathrm{Ext}^2_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(C'_2, C'_5) = 0$ qui est le cas le plus délicat. Le (i) du Corollaire 5.3.2 et la suite spectrale (43) permettent de montrer (avec [**57**, Prop. 4.7(1)]) :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}^2_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}\big(\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(M_2(\mu), 1 \otimes \mathrm{St}_2^\infty)', C'_5\big) &= 0\\
\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}\big(\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(M_2(s_1\cdot\mu), 1 \otimes \mathrm{St}_2^\infty)', C'_5\big) &= 0
\end{aligned}$$

car le centre de $L_2(\mathbb{Q}_p)$ n'agit pas par le même caractère dans $\overline{L}(-\mu)_2 \otimes_E (1 \otimes \mathrm{St}_2^\infty)$ (resp. $\overline{L}(-s_1\cdot\mu)_2 \otimes_E (1 \otimes \mathrm{St}_2^\infty)$) et dans $H^i(N_2(\mathbb{Q}_p), C'_5)$ pour $i \in \{0,1,2\}$. Comme $\mathrm{Hom}_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(M_2(s_1s_2\cdot\mu), 1 \otimes \mathrm{St}_2^\infty)', C'_5) = 0$ ([**4**, Cor 2.7]), on en déduit $\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(L(s_1\cdot\mu), 1 \otimes \mathrm{St}_2^\infty)', C'_5) = 0$ puis :

$$\mathrm{Ext}^2_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}\big(\overline{L}(-\mu)' \otimes_E \big(\mathrm{Ind}_{P_2(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} 1 \otimes \mathrm{St}_2^\infty\big)^{\infty\prime}, C'_5\big) = 0 \tag{33}$$

(cf. Lemme 5.3.1 et [**50**, Prop. 4.9]). De même, le (ii) du Corollaire 5.3.2 et la suite exacte (45) permettent de montrer :

$$\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}\big(\mathcal{F}_{P_1}^{\mathrm{GL}_3}(M_1(\mu), \pi_{1,3}^\infty)', C'_5\big) = 0$$

(le seul point non trivial est $\mathrm{Ext}^1_{D(L_1(\mathbb{Q}_p),E)}(\overline{L}(-\mu)'_1 \otimes_E \pi_{1,3}^{\infty}{}', H^0(N_1(\mathbb{Q}_p), C'_5)) = 0$ qui se ramène après un twist à la quatrième assertion de la Proposition 3.1.6). On en déduit :

$$\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}\left(\overline{L}(-\mu)' \otimes_E \left(\mathrm{Ind}_{P_1(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} \pi_{1,3}^{\infty}\right)^{\infty'}, C'_5\right) = 0 \tag{34}$$

puisque $\mathrm{Hom}_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(\mathcal{F}_{P_1}^{\mathrm{GL}_3}(L(s_2{\cdot}\mu), \pi_{1,3}^{\infty})', C'_5) = 0$ ([**4**, Cor. 2.7]). Par le cinquième isomorphisme en (53) on déduit de (34) :

$$\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}\left(\overline{L}(-\mu)' \otimes_E \mathrm{St}_3^{\infty}{}', C'_5\right) = 0 \tag{35}$$

puisque $\mathrm{Hom}_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(\overline{L}(-\mu)' \otimes_E v_{P_1}^{\infty}{}', C'_5) = 0$. Enfin, le troisième isomorphisme en (53) donne une suite exacte :

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}&\left(\overline{L}(-\mu)' \otimes_E \mathrm{St}_3^{\infty}{}', C'_5\right) \to \mathrm{Ext}^2_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}\left(\overline{L}(-\mu)' \otimes_E v_{P_1}^{\infty}{}', C'_5\right)\\ &\to \mathrm{Ext}^2_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}\left(\overline{L}(-\mu)' \otimes_E \left(\mathrm{Ind}_{P_2(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} 1 \otimes \mathrm{St}_2^{\infty}\right)^{\infty'}, C'_5\right)\end{aligned}$$

d'où on déduit $\mathrm{Ext}^2_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(\overline{L}(-\mu)' \otimes_E v_{P_1}^{\infty}{}', C'_5) = \mathrm{Ext}^2_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(C'_2, C'_5) = 0$ par (35) et (33). Tous les autres cas se démontrent de manière analogue (en plus simple) en examinant les termes de la suite spectrale (43) avec le (i) du Corollaire 5.3.2 (et les autres formules du § 5.3) et les suites exactes issues du Lemme 5.3.1 et de [**50**, Prop. 4.9]. □

Proposition 4.2.3. — *(i) On a* $\mathrm{Ext}^i_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(C', \widetilde{C}'_4) = 0$ *pour* $C \in \{C_1, C_2, \widetilde{C}_2\}$ *et* $i \in 0,1,2$.
(ii) On a $\mathrm{Ext}^i_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(\widetilde{C}'_2, C') = 0$ *pour* $C \in \{\widetilde{C}_4, C_4, C_5\}$ *et* $i \in 0,1,2$.

Démonstration. — Cela se démontre par des arguments analogues (en plus simples) à ceux de la Proposition 4.2.2. On se contente de donner les indications sur le cas le plus délicat qui est $\mathrm{Ext}^2_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(C'_2, \widetilde{C}'_4)$. Le premier isomorphisme en (53) donne une suite exacte (pour $\alpha = 1$) :

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}&\left(\overline{L}(-\mu)', \widetilde{C}'_4\right) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}\left(\overline{L}(-\mu)' \otimes_E v_{P_1}^{\infty}{}', \widetilde{C}'_4\right)\\ &\longrightarrow \mathrm{Ext}^2_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}\left(\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(L(\mu), |\cdot|^{-2} \otimes |\mathrm{det}_2|)', \widetilde{C}'_4\right).\end{aligned}$$

Avec la suite exacte :

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}&\left(\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(L(s_1 \cdot \mu), |\cdot|^{-2} \otimes |\mathrm{det}_2|)', \widetilde{C}'_4\right)\\ &\longrightarrow \mathrm{Ext}^2_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}\left(\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(L(\mu), |\cdot|^{-2} \otimes |\mathrm{det}_2|)', \widetilde{C}'_4\right)\\ &\longrightarrow \mathrm{Ext}^2_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}\left(\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(M_2(\mu), |\cdot|^{-2} \otimes |\mathrm{det}_2|)', \widetilde{C}'_4\right),\end{aligned}$$

on voit qu'il suffit alors de démontrer $\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(M_2(\mu), 1)', \widetilde{C}'_4) = 0$ et :

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^2_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}&\left(\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(M_2(\mu), |\cdot|^{-2} \otimes |\mathrm{det}_2|)', \widetilde{C}'_4\right)\\ &= \mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}\left(\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(M_2(s_1 \cdot \mu), |\cdot|^{-2} \otimes |\mathrm{det}_2|)', \widetilde{C}'_4\right) = 0,\end{aligned}$$

ce qui découle des formules du § 5.2 en regardant l'action du centre de $L_2(\mathbb{Q}_p)$ sur la suite spectrale (43). $\square$

4.3. Calculs de Ext^1 **II.** — Ce paragraphe est consacré à la preuve de l'existence d'une représentation unique de la forme $C_2 — C_3 — C_4$.

Noter d'abord que l'existence d'une telle représentation ne suit pas formellement des résultats du § 4.2 car on a $\mathrm{Ext}^2_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(C_2', C_4') \neq 0$ (comme il suit de l'argument de [**57**, Prop. 4.7(2)] avec [**48**, Cor. 2]).

On désigne par $\chi : \mathbb{Q}_p^\times \to E^\times$ le caractère central commun des C_i et on rappelle que $B_2 \subset \mathrm{GL}_2$ est le Borel inférieur. On note $I \overset{\text{déf}}{=} (\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)\cap L_1(\mathbb{Q}_p)}^{L_1(\mathbb{Q}_p)} t^{-s_1\cdot\mu})^{\mathrm{an}}$ et $\widetilde{I} \overset{\text{déf}}{=} (\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)\cap L_1(\mathbb{Q}_p)}^{L_1(\mathbb{Q}_p)} t^{-s_1\cdot\mu} \otimes_E (|\cdot|^{-1} \otimes |\cdot| \otimes 1))^{\mathrm{an}}$.

Proposition 4.3.1. — *Notons* $C_3' — C_2'$ *l'unique extension non scindée dans* $\mathrm{Mod}_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}$ *donnée par la Proposition 4.2.1 pour* $i = 3$. *On a :*

$$\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}\big(C_3' — C_2', C_4'\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}\big(C_3', C_4'\big).$$

Démonstration. — On peut supposer $\alpha = 1$ et comme l'application est injective (car $\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(C_2', C_4') = 0$ par la Proposition 4.2.2), il suffit par la Proposition 4.2.1 de montrer $\dim_E \mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(C_3' — C_2', C_4') = 1$. On rappelle que, par la troisième assertion de la Proposition 3.1.6, il y a une unique extension non scindée $\overline{L}(-\mu)_1 — \widetilde{I}$. On pose :

$$\begin{aligned}
A &\overset{\text{déf}}{=} \big(\mathrm{Ind}_{P_1(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} \overline{L}(-\mu)_1 — \widetilde{I}\,\big)^{\mathrm{an}}\\
C &\overset{\text{déf}}{=} (\mathrm{Ind}_{P_1(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} \widetilde{I})^{\mathrm{an}}\\
B &\overset{\text{déf}}{=} \big(\mathrm{Ind}_{P_1(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} \overline{L}(-\mu)_1 — \widetilde{I}\,\big)^{\mathrm{an}}/\overline{L}(-\mu)
\end{aligned}$$

(rappelons que $\overline{L}(-\mu)\otimes_E(\mathrm{Ind}_{P_1(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} 1)^\infty \hookrightarrow (\mathrm{Ind}_{P_1(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} \overline{L}(-\mu)_1)^{\mathrm{an}} \cong \mathcal{F}_{P_1}^{\mathrm{GL}_3}(M_1(\mu), 1)$). On a donc des suites exactes dans $\mathrm{Mod}_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}$:

$$\begin{gathered}
0 \longrightarrow C' \longrightarrow A' \longrightarrow \mathcal{F}_{P_1}^{\mathrm{GL}_3}(M_1(\mu), 1)' \longrightarrow 0\\
0 \longrightarrow C' \longrightarrow B' \longrightarrow \big(\mathcal{F}_{P_1}^{\mathrm{GL}_3}(M_1(\mu), 1)/\overline{L}(-\mu)\big)' \longrightarrow 0.
\end{gathered}$$

On a $C_3 \hookrightarrow \mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(M_2(s_1\cdot\mu), \pi_{2,2}^\infty) \hookrightarrow C$ et on note $D \subset B$ l'image inverse de C_3 via $B \twoheadrightarrow C$, on a donc une suite exacte dans $\mathrm{Mod}_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}$:

$$0 \longrightarrow C_3' \longrightarrow D' \longrightarrow (\mathcal{F}_{P_1}^{\mathrm{GL}_3}(M_1(\mu), 1)/\overline{L}(-\mu))' \longrightarrow 0. \tag{36}$$

Soit $L_{1,0}$ un sous-groupe ouvert compact de $L_1(\mathbb{Q}_p)$. Par l'argument de la preuve de [**55**, Lem. 6.3] et par la preuve de [**55**, Prop. 6.5], le $D(L_1(\mathbb{Q}_p), E)$-module $\widetilde{I}'$ admet comme $D(L_{1,0}, E)$-module une résolution par des $D(L_{1,0}, E)$-modules libres de type fini. Par le Lemme 5.1.4, il admet aussi une résolution par des $D(P_{1,0}, E)$-modules libres de type fini où $P_{1,0}$ est un sous-groupe ouvert compact de $P_1(\mathbb{Q}_p)$ comme dans *loc. cit.* De même, le $D(L_1(\mathbb{Q}_p), E)$-module $\widetilde{I}' - \overline{L}(-\mu)'_1$ admet une résolution par des $D(P_{1,0}, E)$-modules libres de type fini car c'est une extension entre deux $D(L_1(\mathbb{Q}_p), E)$-modules qui admettent des résolutions par des $D(P_{1,0}, E)$-modules libres de type fini (pour $\overline{L}(-\mu)'_1$ utiliser [**43**, Th. 4.4] et l'argument de [**57**, Lem. 3.5]). On peut donc appliquer (43), (44) et (45) avec (en particulier) $N = \widetilde{I}' - \overline{L}(-\mu)'_1$ ou $N = \widetilde{I}'$.

Étape 1 : $\mathrm{Hom}_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(B', C'_3) = 0$ et $\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(\mathcal{F}_{P_1}^{\mathrm{GL}_3}(L(s_2 \cdot \mu), 1)', C'_3) = 0$. Démontrons la première assertion. On a d'abord $\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(\overline{L}(-\mu)', C'_3) = 0$. Cela découle de l'injection :

$$\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}\big(\overline{L}(-\mu)', C'_3\big) \hookrightarrow \mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}\big(\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(M_2(\mu), 1)', C'_3\big)$$

(car $\mathrm{Hom}_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}((\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(M_2(\mu), 1)/\overline{L}(-\mu))', C'_3) = 0$ en utilisant [**4**, Cor. 2.7]) et de $\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(M_2(\mu), 1)', C'_3) = 0$, qui lui-même suit via (45) de $\mathrm{Ext}^1_{D(L_2(\mathbb{Q}_p),E)}(\overline{L}(-\mu)'_2, H^0(N_2(\mathbb{Q}_p), C'_3)) = \mathrm{Hom}_{D(L_2(\mathbb{Q}_p),E)}(\overline{L}(-\mu)'_2, H^1(N_2(\mathbb{Q}_p), C'_3)) = 0$ (cf. le (i) du Corollaire 5.3.2, pour le dernier on utilise $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}((\mathrm{Ind}_{B_2(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} 1)^\infty, 1) = 0$). Il suffit donc d'avoir $\mathrm{Hom}_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(A', C'_3) = 0$ (rappelons que l'on a $0 \to B' \to A' \to \overline{L}(-\mu)' \to 0$). Par (44) c'est égal à $\mathrm{Hom}_{D(L_1(\mathbb{Q}_p),E)}(\widetilde{I}' - \overline{L}(-\mu)'_1, H^0(N_1(\mathbb{Q}_p), C'_3))$ qui (via le (ii) du Corollaire 5.3.2) est nul car $\widetilde{I}' - \overline{L}(-\mu)'_1$ est non scindée. La deuxième assertion suit de $\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(\mathcal{F}_{P_1}^{\mathrm{GL}_3}(M_1(s_2 \cdot \mu), 1)', C'_3) = 0$ (car $\mathrm{Hom}_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(\mathcal{F}_{P_1}^{\mathrm{GL}_3}(M_1(s_2 s_1 \cdot \mu), 1)', C'_3) = 0$) qui découle encore facilement de (45) avec le (ii) du Corollaire 5.3.2.

Étape 2 : $\dim_E \mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(A', C'_4) = 2$.
Par (45) il suffit de montrer :

$$\begin{aligned} \dim_E \mathrm{Ext}^1_{D(L_1(\mathbb{Q}_p),E)}\big(\widetilde{I}' - \overline{L}(-\mu)'_1, H^0(N_1(\mathbb{Q}_p), C'_4)\big) &= 2 \\ \mathrm{Hom}_{D(L_1(\mathbb{Q}_p),E)}\big(\widetilde{I}' - \overline{L}(-\mu)'_1, H^1(N_1(\mathbb{Q}_p), C'_4)\big) &= 0. \end{aligned}$$

Le deuxième est clair (cf. (52)). Pour le premier, on a que seul le terme $\mathrm{Ext}^1_{D(L_1(\mathbb{Q}_p),E)}(\widetilde{I}' - \overline{L}(-\mu)'_1, \overline{L}(-\mu)'_1 \otimes_E (\mathrm{St}_2^{\infty\prime} \otimes 1))$ peut être non nul. Comme :

$$\mathrm{Hom}_{D(L_1(\mathbb{Q}_p),E)}\big(\widetilde{I}' - \overline{L}(-\mu)'_1, \overline{L}(-\mu)'_1 \otimes_E (\mathrm{St}_2^{\infty\prime} \otimes 1)\big) = 0,$$

toute extension a un caractère central, et en twistant on se ramène à montrer $\dim_E \mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),E)}(\pi', \overline{L}(-\nu)' \otimes_E \mathrm{St}_2^{\infty\prime}) = 2$ où $\nu \stackrel{\text{déf}}{=} (\mu_1, \mu_2)$ et :

$$\pi \stackrel{\text{déf}}{=} \overline{L}(-\nu) — \big(\mathrm{Ind}_{B_2(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} t^{-s_1 \cdot \nu} \otimes_E (|\cdot|^{-1} \otimes |\cdot|)\big)^{\mathrm{an}}$$

(unique extension non scindée). On peut remplacer $\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),E)}$ par $\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),E),\psi'}$ où $\psi : \mathbb{Q}_p^\times \to E$, $t \mapsto t^{-(\mu_1+\mu_2)}$. Le résultat découle alors par un dévissage de la dernière égalité de la Proposition 3.1.6 et de $\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),E),\psi'}(\overline{L}(-\nu)', \overline{L}(-\nu)'\otimes_E \mathrm{St}_2^{\infty\prime}) = E$, $\mathrm{Ext}^2_{D(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),E),\psi'}(\overline{L}(-\nu)', \overline{L}(-\nu)'\otimes_E \mathrm{St}_2^{\infty\prime}) = 0$ ([**57**, Prop. 4.7(2)] et [**48**, Th. 1] ou [**23**, Th. 1.3]).

Étape 3 : $\dim_E \mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(B', C_4') = 1$.
Comme $\mathrm{Hom}_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(B', C_4') = 0$ (on laisse cette vérification au lecteur), il revient au même de montrer $\dim_E \mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E),\chi'}(B', C_4') = 1$. Comme on a $\mathrm{Ext}^2_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E),\chi'}(\overline{L}(-\mu)', C_4') = 0$ par [**57**, Prop. 4.7(2)] et [**48**, Th. 1], on déduit une suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E),\chi'}\big(\overline{L}(-\mu)', C_4'\big) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E),\chi'}\big(A', C_4'\big) \\ \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E),\chi'}\big(B', C_4'\big) \longrightarrow 0$$

d'où le résultat par l'étape 2 et $\dim_E \mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E),\chi'}(\overline{L}(-\mu)', C_4') = 1$ ([**57**, Prop. 4.7(2)] et [**48**, Th. 1] encore).

Étape 4 : $\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(*', C_4') = 0$ pour $*$ constituant de B autre que C_3.
Il suit de [**40**, §§ 5.1, 5.2] et de [**50**, Prop. 4.9] que les constituants de B autres que C_3 sont : C_2, $\mathcal{F}_{P_1}^{\mathrm{GL}_3}(L(s_2\cdot\mu), 1)$, $\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(L(s_1s_2\cdot\mu), \pi_{2,2}^\infty)$, $\mathcal{F}_{P_1}^{\mathrm{GL}_3}(L(s_2s_1\cdot\mu), \mathrm{St}_2^\infty\otimes 1)$, $\mathcal{F}_{P_1}^{\mathrm{GL}_3}(L(s_2s_1\cdot\mu), 1)$ et $\mathcal{F}_{B}^{\mathrm{GL}_3}(L(s_2s_1s_1\cdot\mu), |\cdot|^{-1}\otimes|\cdot|\otimes 1)$. On sait que $\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(C_2', C_4') = 0$. Pour $* \in \{\mathcal{F}_{P_1}^{\mathrm{GL}_3}(M_1(s_2\cdot\mu), 1), \mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(L(s_1s_2\cdot\mu), \pi_{2,2}^\infty), \mathcal{F}_{P_1}^{\mathrm{GL}_3}(L(s_2s_1\cdot\mu), \mathrm{St}_2^\infty\otimes 1), \mathcal{F}_{P_1}^{\mathrm{GL}_3}(L(s_2s_1\cdot\mu), 1)\}$, on vérifie avec les formules du § 5.2 et (51), (52) que les premier et troisième termes (un Ext^1 et un Hom) dans (45) avec $N = *'$ et $M = C_4'$ sont tous nuls, donc $\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(*', C_4') = 0$ pour ces $*$. On en déduit aussi $\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(\mathcal{F}_{P_1}^{\mathrm{GL}_3}(L(s_2\cdot\mu), 1)', C_4') = 0$ par le Lemme 5.3.1 car $\mathrm{Hom}_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(\mathcal{F}_{P_1}^{\mathrm{GL}_3}(L(s_2s_1\cdot\mu), 1)', C_4') = 0$. Enfin, on a :

$$\mathcal{F}_B^{\mathrm{GL}_3}\big(L(s_1s_2s_1\cdot\mu), |\cdot|^{-1}\otimes|\cdot|\otimes 1\big) \\ \cong \big(\mathrm{Ind}_{P_2(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\big(\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)\cap L_2(\mathbb{Q}_p)}^{L_2(\mathbb{Q}_p)} t^{-s_1s_2s_1\cdot\mu}\otimes_E(|\cdot|^{-1}\otimes|\cdot|\otimes 1)\big)^{\mathrm{an}}\big)^{\mathrm{an}}$$

et on voit que les premier et troisième termes de (45) appliqué avec $M = C_4'$ et $N = (\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)\cap L_2(\mathbb{Q}_p)}^{L_2(\mathbb{Q}_p)} t^{-s_1s_2s_1\cdot\mu}\otimes_E(|\cdot|^{-1}\otimes|\cdot|\otimes 1))^{\mathrm{an}\prime}$ (cf. argument au début de cette preuve) sont nuls car le caractère central de $L_2(\mathbb{Q}_p)$ n'y agit pas pareil à gauche et à droite. Ceci montre la nullité du Ext^1 restant.

Étape 5 : fin de la preuve.
Il suit du premier résultat de l'étape 1 que $\mathrm{Hom}_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(D', C_3') = 0$ (car $B' \twoheadrightarrow D'$), donc que la suite exacte (36) est non scindée, puis du deuxième que D' est isomorphe au produit fibré de $C_3' — C_2'$ (unique extension non scindée par la Proposition 4.2.1) et $(D/C_3)' = (\mathcal{F}_{P_1}^{\mathrm{GL}_3}(M_1(\mu), 1)/\overline{L}(-\mu))'$ au-dessus de C_2' (rappelons que

$0 \to \mathcal{F}_{P_1}^{\mathrm{GL}_3}(L(s_2\cdot\mu),1)' \to (\mathcal{F}_{P_1}^{\mathrm{GL}_3}(M_1(\mu),1)/\overline{L}(-\mu))' \to C_2' \to 0$ par le Lemme 5.3.1). Il suit alors facilement de l'étape 4 et de $\mathrm{Hom}_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(\mathcal{F}_{P_1}^{\mathrm{GL}_3}(L(s_2\cdot\mu),1)', C_4') = \mathrm{Hom}_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}((B/D)', C_4') = 0$ que :

$$\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(\,C_3' - C_2'\,, C_4') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(D', C_4') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(B', C_4').$$

Le résultat final suit donc de l'étape 3. □

Remarque 4.3.2. — La Proposition 4.3.1 implique aussi :

$$\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}\big(C_2', C_4' - C_3'\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}\big(C_2', C_3'\big)$$

puisque $\dim_E \mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(C_2', C_3') = 1$ et $\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(C_2', C_4') = 0$.

4.4. Calculs de Ext^1 **III.** — Ce paragraphe est consacré à la preuve de l'existence de représentations uniques de la forme $\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=tiny] & \widetilde{C}_2 \arrow[dr, dashed, no head] & \\ C_1 \arrow[ur, no head] \arrow[dr, no head] & & C_3 \\ & C_2 \arrow[ur, no head] & \end{tikzcd}$ et $\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=tiny] & \widetilde{C}_4 \arrow[dr, dashed, no head] & \\ C_3 \arrow[ur, no head] \arrow[dr, no head] & & C_5 \\ & C_4 \arrow[ur, no head] & \end{tikzcd}$ (avec les conventions du § 1).

On commence par $\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=tiny] & \widetilde{C}_2 \arrow[dr, dashed, no head] & \\ C_1 \arrow[ur, no head] \arrow[dr, no head] & & C_3 \\ & C_2 \arrow[ur, no head] & \end{tikzcd}$. On conserve les notations du § 4.3 et on ne donne les preuves que pour $\alpha = 1$. Par la Proposition 4.2.1, rappelons que l'on a des représentation uniques de la forme $C_1 - \widetilde{C}_2$, $C_1 - C_2$ et $C_2 - C_3$.

Lemme 4.4.1. — *On a* $\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}\big(\widetilde{C}_2' - C_1', C_3'\big) = 0$.

Démonstration. — Comme au début de la preuve de la Proposition 4.3.1, on peut appliquer (45) avec $N = I'$. On vérifie alors que $\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}((\mathrm{Ind}_{P_1(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} I)^{\mathrm{an}\prime}, C_3') = 0$ en utilisant (45), le (ii) du Corollaire 5.3.2 et $\mathrm{Ext}^1_{D(L_1(\mathbb{Q}_p),E)}(I', \widetilde{I}') = 0$ (qui se déduit de [**43**, Th. 8.15 & Th. 8.18]), la nullité des autres termes dans la suite spectrale étant claire. En utilisant la structure des modules de Verma pour $\mathfrak{gl}_3$ et la théorie de [**50**], on vérifie que l'on a une injection $\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(M_2(s_1\cdot\mu),1) \hookrightarrow (\mathrm{Ind}_{P_1(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} I)^{\mathrm{an}}$ s'inscrivant dans un diagramme commutatif de suites exactes (qui définit les quotients W et X) :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\big(L(s_1\cdot\mu),1\big) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \big(\mathrm{Ind}_{P_1(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} I\big)^{\mathrm{an}} \arrow[r] \arrow[d, equal] & W \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\big(M_2(s_1\cdot\mu),1\big) \arrow[r] & \big(\mathrm{Ind}_{P_1(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} I\big)^{\mathrm{an}} \arrow[r] & X \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{37}$$

où $X \simeq W/\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}(L(s_1s_2\cdot\mu),1)$. On vérifie facilement avec (43) et le (i) du Corollaire 5.3.2 que $\mathrm{Ext}^2_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(M_2(s_1\cdot\mu),1)', C_3') = 0$ (le seul terme un peu subtil est $\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),E)}(\overline{L}(\nu)', I(s_1\cdot\nu)')$ avec les notations de la Proposition

3.1.6, qui est nul par un argument analogue à la fin de la preuve de *loc. cit.* via la dualité de [**55**]). Un dévissage sur la suite exacte du bas en (37) donne alors $\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(X', C_3') = 0$. Par ailleurs, on a $\mathrm{Hom}_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(X', \widetilde{C}_2') = 0$ en utilisant $\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(M_2(s_1\cdot\mu),1)', \widetilde{C}_2') = 0$ (qui découle du symétrique du (ii) du Corollaire 5.3.2 et de la deuxième égalité de la Proposition 3.1.6). Comme $\widetilde{C}_2$ apparaît en sous-quotient de X, on obtient (avec la structure des modules de Verma pour $\mathfrak{gl}_3$) que $C_1 — \widetilde{C}_2$ apparaît en *sous-objet* de X. Comme C_3 n'apparaît pas dans X, on en déduit le résultat voulu. □

Proposition 4.4.2. — *On a :*

$$\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}\left(\begin{matrix}\widetilde{C}_2' \\ C_2'\end{matrix} \gtrdot C_1', C_3'\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}\left(C_2', C_3'\right).$$

Démonstration. — Rappelons que, par le (i) du Lemme 3.1.2, on a une unique représentation de $L_1(\mathbb{Q}_p)$ sur E de la forme $I — \overline{L}(-\mu)_1 — \widetilde{I}$.

Étape 1 : $\big(\mathrm{Ind}_{P_1(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} I — \overline{L}(-\mu)_1\big)^{\mathrm{an}}$ contient $C_1 — C_2$ en sous-quotient.
Comme au début de la preuve de la Proposition 4.3.1, on peut appliquer (45) avec $N = I'$, et on déduit de (45), de la discussion qui le suit (avec le (ii) de la Remarque 5.1.3) et de [**57**, (4.41)], [**57**, Th. 4.10] que le "pullback" de :

$$\big(\mathrm{Ind}_{P_1(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} I — \overline{L}(-\mu)_1\big)^{\mathrm{an}} \simeq \big(\mathrm{Ind}_{P_1(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} I\big)^{\mathrm{an}} — \big(\mathrm{Ind}_{P_1(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} \overline{L}(-\mu)_1\big)^{\mathrm{an}}$$

le long de $\mathcal{F}_{P_1}^{\mathrm{GL}_3}(L(\mu),1) \hookrightarrow (\mathrm{Ind}_{P_1(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} \overline{L}(-\mu)_1)^{\mathrm{an}}$ donne l'unique extension non scindée de $\mathcal{F}_{P_1}^{\mathrm{GL}_3}(L(\mu),1)$ par $(\mathrm{Ind}_{P_1(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} I)^{\mathrm{an}}$. Par ailleurs on vérifie facilement que l'on a une injection $\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(L(s_1\cdot\mu), 1\otimes(\mathrm{Ind}_{B_2(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} 1)^{\infty}) \hookrightarrow (\mathrm{Ind}_{P_1(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} I)^{\mathrm{an}}$ dont on note Y le conoyau. Comme dans l'Étape 4 de la preuve de la Proposition 4.3.1, on a $\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(Y', \mathcal{F}_{P_1}^{\mathrm{GL}_3}(L(\mu),1)') = 0$ car le Ext^1 est nul avec le dual de chaque constituant de Y (utiliser [**57**, (4.41)] et [**57**, Th. 4.10]). Autrement dit $(\mathrm{Ind}_{P_1(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} I — \overline{L}(-\mu)_1)^{\mathrm{an}}$ a en *sous-objet* l'unique extension non scindée de $\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(L(s_1\cdot\mu), 1\otimes(\mathrm{Ind}_{B_2(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} 1)^{\infty})', \mathcal{F}_{P_1}^{\mathrm{GL}_3}(L(\mu),1)')$ (dualisée). Mais comme $\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(L(s_1\cdot\mu),1)', \mathcal{F}_{P_1}^{\mathrm{GL}_3}(L(\mu),1)') = \mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(L(s_1\cdot\mu), 1\otimes \mathrm{St}_2^{\infty})', \overline{L}(-\mu)') = 0$ (ce que l'on vérifie avec [**57**, (4.41), (4.43) & (4.44)]), on en déduit facilement l'énoncé.

Étape 2 : $\big(\mathrm{Ind}_{P_1(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} \overline{L}(-\mu)_1 — \widetilde{I}\,\big)^{\mathrm{an}}$ contient $C_2 — C_3$ en sous-quotient.
On vérifie d'abord en utilisant (45) et le (ii) du Corollaire 5.3.2 que $\dim_E \mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}((\mathrm{Ind}_{P_1(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} \overline{L}(-\mu)_1)^{\mathrm{an}\prime}, C_3') = 1$. Comme dans l'Étape 1, il suit

de la discussion suivant (45) que le “pullback” de :

$$\big(\mathrm{Ind}_{P_1(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\,\overline{L}(-\mu)_1\big)^{\mathrm{an}} \;\text{—}\; \big(\mathrm{Ind}_{P_1(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\,\widetilde{I}\big)^{\mathrm{an}}$$

le long de l'injection $C_3 \hookrightarrow (\mathrm{Ind}_{P_1(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\,\widetilde{I})^{\mathrm{an}}$ est non scindé, donc est l'unique extension non scindée de $\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}((\mathrm{Ind}_{P_1(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\,\overline{L}(-\mu)_1)^{\mathrm{an}\prime}, C_3')$ (dualisée). On a $\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}((\mathrm{Ind}_{P_2(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\,\overline{L}(-\mu)_2)^{\mathrm{an}\prime}, C_3') = 0$ (par le (i) du Corollaire 5.3.2) d'où on déduit facilement $\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(\overline{L}(-\mu)', C_3') = 0$. De même on a $\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(\mathcal{F}_{P_1}^{\mathrm{GL}_3}(L(s_2\cdot\mu),1)', C_3') = 0$ car $\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(\mathcal{F}_{P_1}^{\mathrm{GL}_3}(M_1(s_2\cdot\mu),1)', C_3') = 0$ ((ii) du Corollaire 5.3.2). On en déduit l'énoncé.

Étape 3 : $\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}\big(C', C_3'\big) = 0$ pour tout constituant irréductible C de $\big(\mathrm{Ind}_{P_1(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\,I \;\text{—}\; \overline{L}(-\mu)_1\big)^{\mathrm{an}}$ distinct de C_1, $\widetilde{C}_2$, C_2.
Par la preuve de l'étape 2, il suffit de considérer les constituants C de $(\mathrm{Ind}_{P_1(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\,I)^{\mathrm{an}}$ distincts de $\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(L(s_1\cdot\mu),1)$, C_1 et $\widetilde{C}_2$. Cela utilise encore le Corollaire 5.3.2, on laisse les détails au lecteur.

Étape 4 : fin de la preuve.
Soit Z le “pullback” de $C_3 \hookrightarrow (\mathrm{Ind}_{P_1(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\,\widetilde{I})^{\mathrm{an}}$ dans $(\mathrm{Ind}_{P_1(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\,I \;\text{—}\; \overline{L}(-\mu)_1 \;\text{—}\; \widetilde{I})^{\mathrm{an}}$, il suit facilement des trois étapes précédentes *et* de leur preuve, et du fait que $C_1 \;\text{—}\; \widetilde{C}_2$ est en sous-objet dans X (cf. la preuve du Lemme 4.4.1), que le quotient $Z/\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(M_2(s_1\cdot\mu),1)$ (cf. *loc. cit.* pour $\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(M_2(s_1\cdot\mu),1)$) contient en sous-objet une représentation de la forme :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=tiny] & & \widetilde{C}_2 \arrow[rd, dash, dashed] & \\ & C_1 \arrow[ru, dash] \arrow[rd, dash] & & C_3 \\ & & C_2 \arrow[ru, dash] & \\ \overline{L}(-\mu) \arrow[rru, dash] & & & \end{tikzcd} \tag{38}$$

(rappelons que $\overline{L}(-\mu) \;\text{—}\; C_2 = \mathcal{F}_{P_1}^{\mathrm{GL}_3}(L(\mu),1)$). Comme la flèche de l'énoncé est injective par le Lemme 4.4.1 et comme le but est de dimension 1, on voit que l'unique extension non scindée de $\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}\Big(\begin{smallmatrix}\widetilde{C}_2' \\ C_2'\end{smallmatrix}\!\!>\!C_1', C_3'\Big)$ est le (dual du) quotient de (38) par la sous-représentation $\overline{L}(-\mu)$. $\square$

Remarque 4.4.3. — (i) La Proposition 4.4.2 implique aussi :

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}\big(\widetilde{C}_2' \;\text{—}\; C_1', C_3' \;\text{—}\; C_2'\big) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}\big(\widetilde{C}_2' \;\text{—}\; C_1', C_2'\big)\\ &\xleftarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}\big(C_1', C_2'\big)\end{aligned}$$

en utilisant le Lemme 4.4.1 et $\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(\widetilde{C}_2', C_2') = 0$ (qui résulte facilement de (52) et (45)).

(ii) On peut en fait montrer que, dans l'unique représentation $\begin{tikzcd}[row sep=tiny] & \widetilde{C}_2 \arrow[dr, dash, dashed] & \\ C_1 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & C_3 \\ & C_2 \arrow[ur, dash] & \end{tikzcd}$ donnée par la Proposition 4.4.2, le sous-quotient $\widetilde{C}_2 — C_3$ est aussi non scindé (donc est l'unique extension du (ii) de la Proposition 4.2.1). Mais la preuve, due à Y. Ding, est un peu longue et nous n'aurons finalement pas besoin de ce résultat.

Par une preuve et des calculs strictement analogues en remplaçant I par $(\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)\cap L_1(\mathbb{Q}_p)}^{L_1(\mathbb{Q}_p)} t^{-s_1\cdot\mu} \otimes_E (|\det_2|^{-1} \otimes |\cdot|^2))^{\mathrm{an}}$, $\overline{L}(-\mu)_1$ par $\overline{L}(-\mu)_1 \otimes_E (|\det_2|^{-1} \otimes |\cdot|^2)$ et $\widetilde{I}$ par $(\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)\cap L_1(\mathbb{Q}_p)}^{L_1(\mathbb{Q}_p)} t^{-s_1\cdot\mu} \otimes_E (|\cdot|^{-2} \otimes 1 \otimes |\cdot|^2))^{\mathrm{an}}$, on obtient la proposition suivante.

Proposition 4.4.4. — *On a :*

$$\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}\left(\begin{tikzcd}[row sep=tiny] \widetilde{C}'_4 \arrow[dr, dash] & \\ & C'_3\,,C'_5 \\ C'_4 \arrow[ur, dash] & \end{tikzcd}\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}\left(C'_4, C'_5\right).$$

En particulier, il existe une unique représentation de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ de la forme $\begin{tikzcd}[row sep=tiny] & \widetilde{C}_4 \arrow[dr, dash, dashed] & \\ C_3 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & C_5 \\ & C_4 \arrow[ur, dash] & \end{tikzcd}$. Noter qu'il est très probable que l'extension $\widetilde{C}_4 - - C_5$ soit ici aussi non scindée (cf. le (ii) de la Remarque 4.4.3).

4.5. Les représentations $\Pi^j(\underline{k}, \underline{D})$, $j \in \{1,2\}$. — On construit un candidat explicite pour les représentations localement analytiques $\Pi^1(\underline{k},\underline{D})$ et $\Pi^2(\underline{k},\underline{D})$ de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ sur E.

On conserve toutes les notations des §§ 1, 4.1, 4.2, 4.3 et 4.4, on rappelle en particulier que les constituants C_1 à C_5 et $\widetilde{C}_2$, $\widetilde{C}_4$ sont définis en (30) et (31).

Corollaire 4.5.1. — *Il existe une unique représentation localement analytique* $\Pi^2(\underline{k},\underline{D})$ *de* $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ *sur* E *de la forme :*

$$\Pi^2(\underline{k},\underline{D}) \simeq \begin{tikzcd}[row sep=tiny] & \widetilde{C}_2 \arrow[dr, dash, dashed] & & \widetilde{C}_4 \arrow[dr, dash, dashed] & \\ C_1 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & C_3 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & C_5\,. \\ & C_2 \arrow[ur, dash] & & C_4 \arrow[ur, dash] & \end{tikzcd}$$

Démonstration. — On construit $\Pi^2(\underline{k},\underline{D})$ par étapes successives en “raccrochant” des constituants à chaque étape.

Étape 1. On a une suite exacte via la Proposition 4.4.4 :

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\big(\widetilde{C}_4 \text{ - - } C_5\,, C_2\big) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\big(C_3 \begin{array}{c} \diagup\ \widetilde{C}_4 \text{ - -}\diagdown \\ \diagdown\ C_4\ \diagup \end{array} C_5\,, C_2\big)$$
$$\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\big(C_3 \,\text{—}\, C_4\,, C_2\big) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\big(\widetilde{C}_4 \text{ - - } C_5\,, C_2\big).$$

Comme les premier et dernier termes sont nuls par la Proposition 4.2.2 et la Proposition 4.2.3 et le troisième a dimension 1 par la Proposition 4.3.1 et la Proposition 4.2.1, on en déduit une unique représentation de la forme $C_2 \,\text{—}\, C_3 \begin{array}{c} \diagup\ \widetilde{C}_4 \text{ - -}\diagdown \\ \diagdown\ C_4\ \diagup \end{array} C_5$.
On en déduit aussi par une preuve analogue une unique représentation de la forme $C_2 \,\text{—}\, C_3 \,\text{—}\, \widetilde{C}_4$.

Étape 2. On a une suite exacte via la toute fin de l'Étape 1 :

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\big(\widetilde{C}_4, C_1 \,\text{—}\, \widetilde{C}_2\big) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\big(C_2 \,\text{—}\, C_3 \,\text{—}\, \widetilde{C}_4\,, C_1 \,\text{—}\, \widetilde{C}_2\big)$$
$$\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\big(C_2 \,\text{—}\, C_3\,, C_1 \,\text{—}\, \widetilde{C}_2\big) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\big(\widetilde{C}_4, C_1 \,\text{—}\, \widetilde{C}_2\big).$$

Comme les premier et dernier termes sont nuls (Proposition 4.2.2 et la Proposition 4.2.3) et le troisième a dimension 1 par le (i) de la Remarque 4.4.3, on en déduit une unique représentation de la forme $C_1 \begin{array}{c} \diagup\ \widetilde{C}_2 \text{ - -}\diagdown \\ \diagdown\ C_2\ \diagup \end{array} C_3 \,\text{—}\, \widetilde{C}_4$.

Étape 3. On a une suite exacte via la fin de l'Étape 1 :

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\big(C_4 \,\text{—}\, C_5\,, C_1 \,\text{—}\, \widetilde{C}_2\big)$$
$$\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\Big(C_2 \,\text{—}\, C_3 \begin{array}{c} \diagup\ \widetilde{C}_4 \text{ - -}\diagdown \\ \diagdown\ C_4\ \diagup \end{array} C_5\,, C_1 \,\text{—}\, \widetilde{C}_2\Big)$$
$$\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\big(C_2 \,\text{—}\, C_3 \,\text{—}\, \widetilde{C}_4\,, C_1 \,\text{—}\, \widetilde{C}_2\big)$$
$$\longrightarrow \mathrm{Ext}^2_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\big(C_4 \,\text{—}\, C_5\,, C_1 \,\text{—}\, \widetilde{C}_2\big).$$

Comme les premier et dernier termes sont nuls (Proposition 4.2.2 et la Proposition 4.2.3) et le troisième a dimension 1 par l'Étape 2, on en déduit le résultat. $\square$

On définit également la représentation $\Pi^1(\underline{k}, \underline{D})$ de manière totalement symétrique en remplaçant partout s_1 par s_2, P_2 par P_1 etc. (cf. le § 4.1).

Remarque 4.5.2. — Si $L \neq \mathbb{Q}_p$ et $\sigma \in \mathcal{S}$, les représentations $\Pi^{1,\sigma}(\underline{k}_\sigma, \underline{D})$ et $\Pi^{2,\sigma}(\underline{k}_\sigma, \underline{D})$ devraient avoir exactement la même forme que dans le Corollaire 4.5.1

mais avec partout des constituants localement σ-analytiques. On suppose $L=\mathbb{Q}_p$ dans tout le § 4 car un certain nombre de résultats techniques de la théorie localement analytique ne sont pour l'instant connus que pour $L=\mathbb{Q}_p$, comme par exemple ceux de [**55**, § 6], ou le Lemme 5.1.1 et le Lemme 5.1.4 ci-dessous, ou encore [**43**, Th. 6.6].

4.6. Extensions avec la Steinberg localement algébrique. — On montre que les représentations $\Pi^j(\underline{D},\underline{k})$ du § 4.5 satisfont $\dim_E \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}(\Pi^j(\underline{k},\underline{D}),\overline{L}(\lambda)\otimes_E \mathrm{St}_3^\infty)=3$.

On conserve toutes les notations et conventions précédentes et on rappelle que χ est le caractère central des C_i.

Proposition 4.6.1. — *On a :*

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E),\chi'}\big(C_0',C'\big) & = & 0 & \text{si} \quad C\in\{C_3,C_5,\widetilde{C}_2,\widetilde{C}_4\} \\ \dim_E \mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E),\chi'}\big(C_0',C'\big) & = & 1 & \text{si} \quad C\in\{C_1,C_2,C_4\} \\ \mathrm{Ext}^2_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E),\chi'}\big(C_0',C'\big) & = & 0 & \text{si} \quad C\in\{C_2,C_3,C_4,C_5,\widetilde{C}_2,\widetilde{C}_4\}. \end{array}$$

Démonstration. — Quitte à tordre toutes les représentations par $\mathrm{nr}(\alpha^{-1})\circ\det$, on peut supposer $\alpha=1$, et donc $C_0=\overline{L}(-\mu)\otimes_E \mathrm{St}_3^\infty$. On a alors immédiatement $\dim_E \mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E),\chi'}(C_0',C_2')=\dim_E \mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E),\chi'}(C_0',C_4')=1$ et $\mathrm{Ext}^2_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E),\chi'}(C_0',C_2')=\mathrm{Ext}^2_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E),\chi'}(C_0',C_4')=0$ par [**57**, Prop. 4.7(2)] et [**48**, Th. 1] ou [**23**, Th. 1.3]. De plus $\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E),\chi'}(C_0',C_5')=0$ est démontré en (35). Les preuves des cas restants étant très similaires aux preuves des Propositions 4.2.1, 4.2.2 et 4.3.1, on se permet de ne plus donner tous les détails.

Montrons $\dim_E \mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E),\chi'}(C_0',C_1')=1$. On a par le (i) du Corollaire 5.3.2 :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ext}^1_{D(L_2(\mathbb{Q}_p),E),\chi'}\big(\overline{L}(-s_1\cdot\mu)_2'\otimes_E {\pi_{2,3}^\infty}',H^0(N_2(\mathbb{Q}_p),C_1')\big) & = & 0 \\ \mathrm{Hom}_{D(L_2(\mathbb{Q}_p),E)}\big(\overline{L}(-s_1\cdot\mu)_2'\otimes_E {\pi_{2,3}^\infty}',H^1(N_2(\mathbb{Q}_p),C_1')\big) & = & 0 \end{array}$$

d'où par (45) avec le (i) de la Remarque 5.1.3 :

$$\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E),\chi'}\big(\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\big(M_2(s_1\cdot\mu),\pi_{2,3}^\infty\big)',C_1'\big)=0.$$

Avec le Lemme 5.3.1 et [**50**, Prop. 4.9(a)] on en déduit $\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E),\chi'}(C_5',C_1')=0$ (car $\mathrm{Hom}_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(M_2(s_1s_2\cdot\mu),\pi_{2,3}^\infty)',C_1')=0$), puis également :

$$\begin{aligned} (39)\quad \mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E),\chi'}\big(\overline{L}(-\mu)'\otimes_E\big(\mathrm{Ind}_{P_2(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\pi_{2,3}^\infty\big)^{\infty\prime},C_1'\big)& \\ \xrightarrow{\sim}\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E),\chi'}\big(\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\big(M_2(\mu),\pi_{2,3}^\infty\big)',C_1'\big)& \end{aligned}$$

(car $\mathrm{Hom}_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(C_5',C_1')=0$). Le même type d'arguments montre :

$$\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E),\chi'}\big(\mathcal{F}_{P_1}^{\mathrm{GL}_3}(M_1(\mu),|\det{}_2|^{-1}\otimes|\cdot|^2)',C_1'\big)=0$$

qui implique (car $\mathrm{Hom}_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(\mathcal{F}_{P_1}^{\mathrm{GL}_3}(L(s_2\cdot\mu),|\det_2|^{-1}\otimes|\cdot|^2)',C_1')=0)$:

$$\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E),\chi'}\big(\overline{L}(-\mu)'\otimes_E(\mathrm{Ind}_{P_1(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}|\det_2|^{-1}\otimes|\cdot|^2)^{\infty\prime},C_1'\big)=0$$

puis $\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E),\chi'}(C_4',C_1')=0$ par le deuxième isomorphisme en (53). Avec le dernier isomorphisme en (53), $\mathrm{Hom}_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(C_4',C_1')=0$ et (39) on en déduit :

$$\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E),\chi'}\big(C_0',C_1'\big)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E),\chi'}\big(\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\big(M_2(\mu),\pi_{2,3}^\infty\big)',C_1'\big).$$

Il reste à vérifier que le terme de droite a dimension 1, ce qui résulte encore du (i) de la Remarque 5.1.3 et de $\mathrm{Hom}_{D(L_2(\mathbb{Q}_p),E)}(\overline{L}(-\mu)_2'\otimes_E\pi_{2,3}^{\infty}{}',H^1(N_2(\mathbb{Q}_p),C_1'))=E$ (donné par $(\mathrm{Ind}_{B_2(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}|\cdot|\otimes|\cdot|)^\infty\twoheadrightarrow\mathrm{St}_2^\infty\otimes_E|\det_2|)$.

Montrons $\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E),\chi'}(C_0',C_3')=\mathrm{Ext}^2_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E),\chi'}(C_0',C_3')=0$. Par le dernier isomorphisme en (53) il suffit de montrer $\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E),\chi'}(C_4',C_3')=0$ et $\mathrm{Ext}^i_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E),\chi'}(\overline{L}(-\mu)'\otimes_E(\mathrm{Ind}_{P_2(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\pi_{2,3}^\infty)^{\infty\prime},C_3')=0$ pour $i\in\{1,2\}$. Le premier cas découle de $\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E),\chi'}(\overline{L}(-\mu)'\otimes_E(\mathrm{Ind}_{P_1(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\mathrm{St}_2^\infty\otimes1)^{\infty\prime},C_3')=0$ (cf. quatrième isomorphisme en (53)) qui découle de $\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E),\chi'}(\mathcal{F}_{P_1}^{\mathrm{GL}_3}(M_1(\mu),\mathrm{St}_2^\infty\otimes1)',C_3')=0$ qui lui-même découle de (45) (avec le (i) de la Remarque 5.1.3) et du (ii) du Corollaire 5.3.2 (le seul cas un peu subtil étant $\mathrm{Ext}^1_{L_1(\mathbb{Q}_p),\chi'}(\overline{L}(-\mu)_1'\otimes_E(\mathrm{St}_2^{\infty\prime}\otimes1),H^0(N_1(\mathbb{Q}_p),C_3'))=0$ qui, après twist, se ramène à la quatrième assertion de la Proposition 3.1.6). Les deux derniers cas découlent (avec le Lemme 5.3.1) de $\mathrm{Ext}^i_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E),\chi'}(\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(M_2(\mu),\pi_{2,3}^\infty)',C_3')=0$, $i\in\{1,2\}$ et $\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E),\chi'}(\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(M_2(s_1\cdot\mu),\pi_{2,3}^\infty)',C_3')=0$. On applique encore dans chaque cas (45) et le (i) du Corollaire 5.3.2 (via la Remarque 5.1.3) et on constate que tous les termes intéressants de la suite spectrale sont nuls soit pour des raisons de caractère central de $L_2(\mathbb{Q}_p)$, soit par [**57**, Prop. 4.7] et :

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}&\big(\big(\mathrm{Ind}_{B_2(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}|\cdot|^{-1}\otimes|\cdot|\big)^\infty,\mathrm{St}_2^\infty\big)\\&=\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(\big(\mathrm{Ind}_{B_2(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}|\cdot|^{-1}\otimes|\cdot|\big)^\infty,\mathrm{St}_2^\infty\big)=0\end{aligned}$$

(extensions dans la catégorie des représentations lisses de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur E, le Ext^1 de droite étant égal par dualité à $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(\mathrm{St}_2^\infty,(\mathrm{Ind}_{B_2(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}1)^\infty)$ qui vaut $\mathrm{Ext}^1_{T_2(\mathbb{Q}_p)}(|\cdot|^{-1}\otimes|\cdot|,1)=0$ par adjonction pour le foncteur usuel (exact) de Jacquet, où $T_2=$ matrices diagonales de B_2).

Montrons $\mathrm{Ext}^2_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E),\chi'}(C_0',C_5')=0$. Puisque $\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E),\chi'}(C_2',C_5')=0$ (cf. Proposition 4.2.2), il suffit de montrer $\mathrm{Ext}^2_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E),\chi'}(\overline{L}(-\mu)'\otimes_E(\mathrm{Ind}_{P_1(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\pi_{1,3}^\infty)^{\infty\prime},C_5')=0$ par le cinquième isomorphisme en (53). Par le Lemme 5.3.1, il suffit de montrer :

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^2_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E),\chi'}\big(\mathcal{F}_{P_1}^{\mathrm{GL}_3}(M_1(\mu),\pi_{1,3}^\infty)',C_5'\big)&=0\\\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E),\chi'}\big(\mathcal{F}_{P_1}^{\mathrm{GL}_3}(M_1(s_2\cdot\mu),\pi_{1,3}^\infty)',C_5'\big)&=0.\end{aligned}\tag{40}$$

Les deux se vérifient à partir de (43) (cf. (i) de la Remarque 5.1.3) et du (ii) du Corollaire 5.3.2. Le seul cas un peu subtil est $\mathrm{Ext}^2_{L_1(\mathbb{Q}_p),\chi'}(\overline{L}(-\mu)'_1 \otimes_E \pi^{\infty}_{1,3}{}', H^0(N_1(\mathbb{Q}_p), C'_5)) = 0$ qui, après twist, se ramène à la cinquième assertion de la Proposition 3.1.6.

On montre $\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E),\chi'}(C'_0, \widetilde{C}'_2) = \mathrm{Ext}^2_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E),\chi'}(C'_0, \widetilde{C}'_2) = 0$ de manière analogue. On utilise d'abord le dernier isomorphisme en (53) puis des égalités analogues à (40) pour en déduire $\mathrm{Ext}^i_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E),\chi'}(\overline{L}(-\mu)' \otimes_E (\mathrm{Ind}_{P_2(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} \pi^{\infty}_{2,3})^{\infty\prime}, \widetilde{C}'_2) = 0$, $i \in \{1,2\}$, puis le deuxième isomorphisme en (53) pour en déduire de même $\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E),\chi'}(\overline{L}(-\mu)' \otimes_E (\mathrm{Ind}_{P_1(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} |\mathrm{det}_2|^{-1} \otimes |\cdot|^2)^{\infty\prime}, \widetilde{C}'_2) = 0$. Un dévissage élémentaire donne alors le résultat.

Enfin, on montre $\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E),\chi'}(C'_0, \widetilde{C}'_4) = \mathrm{Ext}^2_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E),\chi'}(C'_0, \widetilde{C}'_4) = 0$ encore de manière analogue en utilisant le cinquième isomorphisme en (53), en montrant l'analogue de (40) avec $\widetilde{C}_4$ au lieu de C_5 et en utilisant $\mathrm{Hom}_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}(\mathcal{F}_{P_1}^{\mathrm{GL}_3}(M_1(s_2s_1 \cdot \mu), \pi^{\infty}_{1,3})', \widetilde{C}'_4)$. On laisse les derniers détails au lecteur. $\square$

Corollaire 4.6.2. — *On a pour $j \in \{1,2\}$:*

$$\dim_E \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\big(\Pi^j(\underline{k}, \underline{D}), \overline{L}(\lambda) \otimes_E \Pi^{\infty}(\underline{D})\big) = 3.$$

Démonstration. — Par symétrie il suffit de montrer le cas $j = 2$. Par le Corollaire 4.5.1 on doit montrer :

$$\dim_E \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\left(C_1 \begin{array}{c} \diagup\ \widetilde{C}_2 - - \diagdown \\ \diagdown\ C_2\ \diagup \end{array} C_3 \begin{array}{c} \diagup\ \widetilde{C}_4 - - \diagdown \\ \diagdown\ C_4\ \diagup \end{array} C_5\, , C_0 \right) = 3.$$

Cela découle de la Proposition 4.6.1 et du Lemme 2.1.1 par un dévissage standard en notant que tous les $\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E)}$ qui interviennent s'identifient aux $\mathrm{Ext}^1_{D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),E),\chi'}$. $\square$

Remarque 4.6.3. — Notons $\Pi^2(\underline{k}, \underline{D})^- \subset \Pi^2(\underline{k}, \underline{D})$ le noyau de $\Pi^2(\underline{k}, \underline{D}) \twoheadrightarrow \widetilde{C}_4 - - C_5$, autrement dit $\Pi^1(\underline{k}, \underline{D})^-$ est de la forme $C_1 \begin{array}{c} \diagup\ \widetilde{C}_2 - - \diagdown \\ \diagdown\ C_2\ \diagup \end{array} C_3 — C_4$. La même preuve que celle du Corollaire 4.6.2 donne que la restriction à $\Pi^2(\underline{k}, \underline{D})^-$ induit un isomorphisme :

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\big(\Pi^2(\underline{k}, \underline{D}), \overline{L}(\lambda) \otimes_E \Pi^{\infty}(\underline{D})\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\big(\Pi^2(\underline{k}, \underline{D})^-, \overline{L}(\lambda) \otimes_E \Pi^{\infty}(\underline{D})\big).$$

On a un résultat analogue en définissant de manière symétrique $\Pi^1(\underline{k}, \underline{D})^- \subset \Pi^1(\underline{k}, \underline{D})$.

5. Calculs cohomologiques

Cette partie contient tous les résultats et calculs de cohomologie localement analytique utilisés au § 4 pour la construction et les propriétés des représentations localement analytiques $\Pi^j(\underline{k}, \underline{D})$. On suppose toujours $L = \mathbb{Q}_p$.

5.1. Préliminaires. — On rappelle les résultats utiles de [**43**] et [**57**] sur la cohomologie des $D(H,E)$-modules pour H groupe localement analytique.

Si H est un groupe p-adique localement $\mathbb{Q}_p$-analytique et M un objet de $\mathrm{Mod}_{D(H,E)}$, on note pour $i \geq 0$:

$$H^i(H,M) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{Ext}^i_{D(H,E)}\big(\mathbf{1}, M\big)$$

où $\mathbf{1}$ est le $D(H,E)$-module dual de la représentation triviale de H sur E. Soit $H' \subseteq H$ un sous-groupe p-adique localement analytique fermé invariant. Par [**55**, Prop. A.3] on a (cf. *loc. cit.* pour la notation $\widehat{\otimes}_{E,\iota}$) :

$$D(H,E) \cong D(H/H',E)\widehat{\otimes}_{E,\iota}D(H',E). \tag{41}$$

Rappelons d'abord le lemme suivant (utilisé de manière tacite dans [**57**]).

Lemme 5.1.1 ([**58**]). — *Tout $D(H,E)$-module injectif M dans la catégorie $\mathrm{Mod}_{D(H,E)}$ est acyclique pour le foncteur $\mathrm{Hom}_{D(H',E)}(\mathbf{1},*)$, i.e. est tel que $H^i(H',M) = \mathrm{Ext}^i_{D(H',E)}(\mathbf{1},M) = 0$ pour $i \geq 1$.*

Remarque 5.1.2. — L'analogue du Lemme 5.1.1 avec $L \neq \mathbb{Q}_p$ dans le cadre localement σ-analytique pour $\sigma \in \mathcal{S}$ est peut-être vrai mais n'est pas connu. C'est l'une des raisons pour lesquelles aux §§ 4 et 5 nous nous limitons à $L = \mathbb{Q}_p$.

Soit M dans $\mathrm{Mod}_{D(H,E)}$, par le Lemme 5.1.1 on peut calculer $H^i(H',M)$ en appliquant $\mathrm{Hom}_{D(H',E)}(\mathbf{1},*)$ à des résolutions de M par des $D(H,E)$-modules injectifs. On en déduit que $H^i(H',M)$ est naturellement un objet de $\mathrm{Mod}_{D(H/H',E)}$ en utilisant que $D(H,E)\otimes_{D(H',E)} E \cong D(H/H',E)$ (qui suit de (41) par le même argument que [**55**, p. 324]). De plus, toute suite exacte courte $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ dans $\mathrm{Mod}_{D(H,E)}$ donne une suite exacte longue de $D(H/H',E)$-modules :

$$\cdots \to H^i(H',M') \to H^i(H',M) \to H^i(H',M'') \to H^{i+1}(H',M) \to \cdots \tag{42}$$

On se place désormais dans la situation suivante : $H = P(\mathbb{Q}_p)$ et $H' = N_P(\mathbb{Q}_p)$ où N_P est le radical unipotent d'un sous-groupe parabolique P d'un groupe réductif connexe déployé G sur $\mathbb{Q}_p$, donc H/H' est isomorphe à $L_P(\mathbb{Q}_p)$ où L_P est un sous-groupe de Levi de P. Soit N un $D(L_P(\mathbb{Q}_p),E)$-module qui, en tant que $D(P(\mathbb{Q}_p),E)$-module (par inflation), vérifie la condition (FIN) de [**55**, § 6] (pour un choix d'un sous-groupe ouvert compact P_0 de $P(\mathbb{Q}_p)$). Par exemple, par la discussion au début de [**57**, § 4.4] on peut prendre $N = \pi'$ où π' est le dual algébrique d'une représentation π de $L_P(\mathbb{Q}_p)$ sur E de la forme $\pi = \pi^{\mathrm{alg}} \otimes_E \pi^\infty$ où π^{alg} est la restriction à $L_P(\mathbb{Q}_p) \subseteq (L_P \times_{\mathbb{Q}_p} E)(E)$ d'une représentation algébrique de dimension finie de $L_P \times_{\mathbb{Q}_p} E$ sur E

et où π^∞ est une représentation lisse de $L_P(\mathbb{Q}_p)$ sur E de longueur finie. Par ce qui précède, avec l'argument donnant [**57**, (4.29)] (basé sur la preuve de [**55**, Lem. 6.3]) et avec [**57**, (4.34)], on en déduit une suite spectrale de Grothendieck pour tout M dans $\mathrm{Mod}_{D(G(\mathbb{Q}_p),E)}$ et tout N dans $\mathrm{Mod}_{D(L_P(\mathbb{Q}_p),E)}$ vérifiant la condition (FIN) de [**55**, § 6] :

$$\mathrm{Ext}^j_{D(L_P(\mathbb{Q}_p),E)}\big(N, H^i\big(N_P(\mathbb{Q}_p), M\big)\big) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{i+j}_{D(G(\mathbb{Q}_p),E)}\big(D(G(\mathbb{Q}_p),E)\otimes_{D(P(\mathbb{Q}_p),E)} N, M\big) \tag{43}$$

d'où en particulier un isomorphisme :

$$\mathrm{Hom}_{D(L_P(\mathbb{Q}_p),E)}\big(N, H^0\big(N_P(\mathbb{Q}_p), M\big)\big) \cong \mathrm{Hom}_{D(G(\mathbb{Q}_p),E)}\big(D(G(\mathbb{Q}_p),E)\otimes_{D(P(\mathbb{Q}_p),E)} N, M\big) \tag{44}$$

ainsi qu'une suite exacte de E-espaces vectoriels :

$$\begin{aligned}0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{D(L_P(\mathbb{Q}_p),E)}\big(N, H^0\big(N_P(\mathbb{Q}_p), M\big)\big) &\\ \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{D(G(\mathbb{Q}_p),E)}\big(D(G(\mathbb{Q}_p),E)\otimes_{D(P(\mathbb{Q}_p),E)} N, M\big) &\\ \longrightarrow \mathrm{Hom}_{D(L_P(\mathbb{Q}_p),E)}\big(N, H^1\big(N_P(\mathbb{Q}_p), M\big)\big) &\\ \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_{D(L_P(\mathbb{Q}_p),E)}\big(N, H^0\big(N_P(\mathbb{Q}_p), M\big)\big).&\end{aligned} \tag{45}$$

La flèche injective de gauche en (45) est facile à décrire : partant d'une suite exacte courte $0 \to H^0(N_P(\mathbb{Q}_p), M) \to * \to N \to 0$ de $D(L_P(\mathbb{Q}_p),E)$-modules, par [**55**, Lem. 6.3(i)] on a encore une suite exacte courte de $D(G(\mathbb{Q}_p),E)$-modules en tensorisant par $D(G(\mathbb{Q}_p),E)$ au-dessus de $D(P(\mathbb{Q}_p),E)$, puis on prend le “pushforward” le long du morphisme canonique de $D(G(\mathbb{Q}_p),E)$-modules $D(G(\mathbb{Q}_p),E)\otimes_{D(P(\mathbb{Q}_p),E)} H^0(N_P(\mathbb{Q}_p), M) \to M$.

Remarque 5.1.3. — (i) Soit Z le centre de G, on a un analogue du Lemme 5.1.1, de la suite exacte longue (42), de la suite spectrale (43) et de la suite exacte (45) en remplaçant partout G, P, L_P par G/Z, P/Z, L_P/Z. Si $\chi : Z(\mathbb{Q}_p) \to E$ est un caractère localement analytique, alors par l'argument de [**57**, p.81] on en déduit un analogue de (42), (43) et (45) en remplaçant les catégories $\mathrm{Mod}_{D(G(\mathbb{Q}_p),E)}$, $\mathrm{Mod}_{D(P(\mathbb{Q}_p),E)}$ et $\mathrm{Mod}_{D(L_P(\mathbb{Q}_p),E)}$ par les sous-catégories pleines $\mathrm{Mod}_{D(G(\mathbb{Q}_p),E),\chi'}$, $\mathrm{Mod}_{D(P(\mathbb{Q}_p),E),\chi'}$ et $\mathrm{Mod}_{D(L_P(\mathbb{Q}_p),E),\chi'}$ des objets où la sous-algèbre $D(Z(\mathbb{Q}_p),E)$ agit via le caractère $\chi' : D(Z(\mathbb{Q}_p),E) \twoheadrightarrow E$ dual de χ (en particulier, si $D(Z(\mathbb{Q}_p),E)$ agit par χ' sur M alors $D(Z(\mathbb{Q}_p),E)$ agit aussi par χ' sur $H^i(N_P(\mathbb{Q}_p), M)$).
(ii) Soit Π une représentation localement analytique de $L_P(\mathbb{Q}_p)$ sur un E-espace vectoriel localement convexe de type compact tel que le dual fort Π', vu comme $D(P(\mathbb{Q}_p),E)$-module, vérifie la condition (FIN) de [**55**, § 6] (pour un choix d'un sous-groupe ouvert compact P_0 de $P(\mathbb{Q}_p)$). Alors en utilisant que le $D(G(\mathbb{Q}_p),E)$-module $D(G(\mathbb{Q}_p),E)\otimes_{D(P(\mathbb{Q}_p),E)}\Pi'$ est de présentation finie, donc coadmissible par [**54**, Cor. 3.4(v)], on en déduit que le dual fort de $(\mathrm{Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}\Pi)^{\mathrm{an}}$ s'identifie à $D(G(\mathbb{Q}_p),E)\otimes_{D(P(\mathbb{Q}_p),E)}\Pi'$ (i.e. le produit tensoriel usuel suffit).

Le lemme suivant est pratique.

Lemme 5.1.4. — *Choisissons un sous-groupe ouvert compact de $P(\mathbb{Q}_p)$ de la forme $P_0 = L_{P,0}N_{P,0}$ où $L_{P,0}$ (resp. $N_{P,0}$) est un sous-groupe ouvert compact de $L_P(\mathbb{Q})$ (resp. $N_P(\mathbb{Q}_p)$). Soit N un $D(L_P(\mathbb{Q}_p), E)$-module qui, en tant que $D(L_{P,0}, E)$-module, admet une résolution par des $D(L_{P,0}, E)$-modules libres de type fini. Alors N, en tant que $D(P_0, E)$-module (par inflation), admet une résolution par des $D(P_0, E)$-modules libres de type fini.*

Démonstration. — L'argument est similaire à celui au début de [**57**, § 4.4]. En tensorisant par $D(P_0, E)$ (au-dessus de $D(N_{P,0}, E)$) une résolution du $D(N_{P,0}, E)$-module trivial **1** par des $D(N_{P,0}, E)$-modules libres de type fini (cf. la preuve de [**43**, Th. 6.5]), l'argument de la preuve de [**55**, Lem. 6.3] montre que l'on obtient une *résolution* du $D(P_0, E)$-module $D(L_{P,0}, E)$ par des $D(P_0, E)$-modules libres de type fini. Partant maintenant d'une résolution $N_. = (N_j)_{j\geq 1}$ de N par des $D(L_{P,0}, E)$-modules libres de type fini N_j, on peut fabriquer un double complexe $(N_{i,j})_{i,j\geq 1}$ où $\cdots \to N_{i,j} \to N_{i-1,j} \to \cdots$ est une résolution de N_j par des $D(P_0, E)$-modules libres de type fini. Le complexe total donne une résolution comme recherchée. □

Notons que le Lemme 5.1.4 utilise $L = \mathbb{Q}_p$ via l'argument de [**55**, Lem. 6.3].

Soit V un E-espace vectoriel localement convexe séparé complet muni d'une action séparément continue de $D(N_P(\mathbb{Q}_p), E)$, Kohlhaase définit dans [**43**, Def. 2.5] les groupes de cohomologie localement analytiques $H^i_{\mathrm{an}}(N_P(\mathbb{Q}_p), V)$. Ce sont naturellement des E-espaces vectoriels localement convexes ([**43**, Rem. 2.10]) et on a des isomorphismes canoniques de E-espaces vectoriels $H^i_{\mathrm{an}}(N_P(\mathbb{Q}_p), V) \xrightarrow{\sim} H^i(N_P(\mathbb{Q}_p), V)$ ([**43**, Th. 4.8] et [**43**, Th. 6.5]). Soit Π une représentation localement analytique de $P(\mathbb{Q}_p)$ sur un E-espace vectoriel de type compact et Π' son dual continu (un espace de Fréchet nucléaire avec action séparément continue de $D(P(\mathbb{Q}_p), E)$, cf. [**53**, § 3]). Alors l'espace localement convexe $H^i_{\mathrm{an}}(N_P(\mathbb{Q}_p), \Pi')$ est muni de plus d'une action séparément continue de $D(L_P(\mathbb{Q}_p), E)$ (cf. [**43**, § 5] et la preuve du Lemme 5.1.5 ci-dessous), en particulier c'est un objet de $\mathrm{Mod}_{D(L_P(\mathbb{Q}_p),E)}$. On a le lemme suivant, tacitement utilisé dans [**57**], qui permet de disposer des résultats de [**43**].

Lemme 5.1.5. — *Les isomorphismes canoniques pour $i \geq 0$:*

$$H^i_{\mathrm{an}}(N_P(\mathbb{Q}_p), \Pi') \xrightarrow{\sim} H^i(N_P(\mathbb{Q}_p), \Pi')$$

sont compatibles à l'action de $D(L_P(\mathbb{Q}_p), E)$.

Démonstration. — On indique brièvement l'argument. On forme le complexe $F^{\cdot}_{\mathrm{alg}}(P(\mathbb{Q}_p), \Pi')$ comme en [**43**, (24)] mais en enlevant la topologie, par exemple on a pour $i \geq 0$:

$$F^i_{\mathrm{alg}}(P(\mathbb{Q}_p), \Pi') \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}_E\big(D(P(\mathbb{Q}_p), E), \mathrm{Hom}_E(\otimes^i_E D(P(\mathbb{Q}_p), E), \Pi')\big)$$
$$\cong \mathrm{Hom}_E\big(\otimes^{i+1}_E D(P(\mathbb{Q}_p), E), \Pi'\big).$$

Par des résultats standard le complexe $F^{\cdot}_{\mathrm{alg}}(P(\mathbb{Q}_p), \Pi')$ est une résolution de Π' par des $D(P(\mathbb{Q}_p), E)$-modules à gauche injectifs. Par le Lemme 5.1.1 les $D(L_P(\mathbb{Q}_p), E)$-modules $H^i(N_P(\mathbb{Q}_p), \Pi')$ sont donc calculés par le complexe $\mathrm{Hom}_{D(N_P(\mathbb{Q}_p),E)}(\mathbf{1}, F^{\cdot}_{\mathrm{alg}}(P(\mathbb{Q}_p),\Pi'))$. Le morphisme canonique $\otimes^{i+1}_E D(P(\mathbb{Q}_p), E) \to \widehat{\otimes}^{i+1}_{E,\iota} D(P(\mathbb{Q}_p), E)$ induit des morphismes canoniques dans $\mathrm{Mod}_{D(P(\mathbb{Q}_p),E)}$, où $F^{\cdot}(P(\mathbb{Q}_p), \Pi')$ est le complexe topologique de [**43**, § 2] :

$$F^i(P(\mathbb{Q}_p), \Pi') = \mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_E\big(\widehat{\otimes}^{i+1}_{E,\iota} D(P(\mathbb{Q}_p), E), \Pi'\big) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_E\big(\widehat{\otimes}^{i+1}_{E,\iota} D(P(\mathbb{Q}_p), E), \Pi'\big)$$
$$\to \mathrm{Hom}_E\big(\otimes^{i+1}_E D(P(\mathbb{Q}_p), E), \Pi'\big) = F^i_{\mathrm{alg}}(P(\mathbb{Q}_p), \Pi').$$

En appliquant $\mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{D(N_P(\mathbb{Q}_p),E)}(\mathbf{1}, *)$ à gauche et $\mathrm{Hom}_{D(N_P(\mathbb{Q}_p),E)}(\mathbf{1}, *)$ à droite et en notant que $\mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{D(N_P(\mathbb{Q}_p),E)}(\mathbf{1}, *) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{D(N_P(\mathbb{Q}_p),E)}(\mathbf{1}, *)$, on en déduit par [**43**, Prop. 2.16] et [**43**, Prop. 5.6(iii)] l'isomorphisme $H^i_{\mathrm{an}}(N_P(\mathbb{Q}_p), \Pi') \xrightarrow{\sim} H^i(N_P(\mathbb{Q}_p), \Pi')$ de [**43**, Th. 4.8] dont on voit qu'il commute à $D(L_P(\mathbb{Q}_p), E)$. Noter que la structure de $D(L_P(\mathbb{Q}_p), E)$-module sur $H^i_{\mathrm{an}}(N_P(\mathbb{Q}_p), \Pi')$ peut aussi s'obtenir comme en [**43**, (69)] via le complexe $\mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{D(N_P(\mathbb{Q}_p),E)}(B_{\cdot}(P(\mathbb{Q}_p), \mathbf{1}), \Pi')$ de [**43**, Def. 2.5], le fait que l'action de $D(L_P(\mathbb{Q}_p), E)$ soit la même que via $\mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{D(N_P(\mathbb{Q}_p),E)}(\mathbf{1}, F^{\cdot}(P(\mathbb{Q}_p), \Pi'))$ découlant de [**43**, (27)] (merci à Jan Kohlhaase pour cette précision). $\square$

5.2. Formulaire I. — On retranscrit ici avec les notations du présent article le formulaire cohomologique de [**57**, § 4.5.5].

On se place dans le cadre du § 4 dont on utilise les notations et on fixe $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{Z}^3$. Si $\mu_1 \leq \mu_2$ on note :

$$\begin{aligned} \overline{L}(-\mu)_1 &\stackrel{\text{déf}}{=} \big((\mathrm{Sym}^{-\mu_1+\mu_2} E^2) \otimes_E \det_2^{-\mu_2}\big) \otimes_E t_3^{-\mu_3} \\ M_1(\mu) &\stackrel{\text{déf}}{=} U(\mathfrak{gl}_3) \otimes_{U(\mathfrak{p}_1)} L(\mu)_1 \end{aligned}$$

respectivement la représentation algébrique irréductible de dimension finie de $L_1 \times_{\mathbb{Q}_p} E$ de plus haut poids $(-\mu_1, -\mu_2, -\mu_3)$ par rapport à $(\overline{B} \cap L_1) \times_{\mathbb{Q}_p} E$ et le module de Verma généralisé associé au *dual* $L(\mu)_1$ de $\overline{L}(-\mu)_1$. Si $\mu_2 \leq \mu_3$ on note de même en remplaçant L_1 par L_2 :

$$\begin{aligned} \overline{L}(-\mu)_2 &\stackrel{\text{déf}}{=} t_1^{-\mu_1} \otimes_E \big((\mathrm{Sym}^{-\mu_2+\mu_3} E^2) \otimes_E \det_2^{-\mu_3}\big) \\ M_2(\mu) &\stackrel{\text{déf}}{=} U(\mathfrak{gl}_3) \otimes_{U(\mathfrak{p}_2)} L(\mu)_2. \end{aligned}$$

On voit les représentations algébriques $\overline{L}(-\mu)_1, L(\mu)_1$ et $\overline{L}(-\mu)_2, L(\mu)_2$ comme représentations respectivement de $L_1(\mathbb{Q}_p)$ et $L_2(\mathbb{Q}_p)$. Si π^∞ est une représentation lisse de longueur finie de $L_1(\mathbb{Q}_p)$ ou $L_2(\mathbb{Q}_p)$ sur E (le contexte indiquant clairement de quel Levi il s'agit), rappelons que l'on a :

$$\begin{array}{lrcll} & \mathcal{F}_{P_1}^{\mathrm{GL}_3}\big(M_1(\mu),\pi^\infty\big) & = & \big(\mathrm{Ind}_{P_1(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\overline{L}(-\mu)_1\otimes_E\pi^\infty\big)^{\mathrm{an}} & \text{si } \ \mu_1\le\mu_2 \\ (46) & \mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\big(M_2(\mu),\pi^\infty\big) & = & \big(\mathrm{Ind}_{P_2(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\overline{L}(-\mu)_2\otimes_E\pi^\infty\big)^{\mathrm{an}} & \text{si } \ \mu_2\le\mu_3. \end{array}$$

Soit $N_1 \overset{\text{déf}}{=} \left(\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&1&0\\ *&*&1\end{smallmatrix}\right)$ (resp. $N_2 \overset{\text{déf}}{=} \left(\begin{smallmatrix}1&0&0\\ *&1&0\\ *&0&1\end{smallmatrix}\right)$) le radical unipotent de P_1 (resp. P_2). Il suit de [**57**, Cor. 4.33] et de (46) (et du Lemme 5.1.5) que chaque groupe :

$$H^i\big(N_1(\mathbb{Q}_p),\mathcal{F}_{P_j}^{\mathrm{GL}_3}\big(M_j(\mu),\pi^\infty\big)'\big) \ \text{ et } \ H^i\big(N_2(\mathbb{Q}_p),\mathcal{F}_{P_j}^{\mathrm{GL}_3}\big(M_j(\mu),\pi^\infty\big)'\big) \ \text{ pour } \ j\in\{1,2\}$$

muni de sa topologie localement convexe est un espace de Fréchet nucléaire, dont le dual fort est une représentation localement analytique respectivement de $L_1(\mathbb{Q}_p)$ et $L_2(\mathbb{Q}_p)$ sur un E-espace vectoriel de type compact notée :

$$H_i\big(N_1(\mathbb{Q}_p),\mathcal{F}_{P_j}^{\mathrm{GL}_3}\big(M_j(\mu),\pi^\infty\big)\big) \ \text{ et } \ H_i\big(N_2(\mathbb{Q}_p),\mathcal{F}_{P_j}^{\mathrm{GL}_3}\big(M_j(\mu),\pi^\infty\big)\big) \ \text{ pour } \ j\in\{1,2\}.$$

De plus tous ces groupes sont nuls si $i>2$. Notons que l'hypothèse "ρ localement algébrique *irréductible*" utilisée à plusieurs reprise dans [**57**, §§ 3, 4] peut partout être remplacée par l'hypothèse $\rho\cong\rho^{\mathrm{alg}}\otimes_E\rho^\infty$ avec ρ^{alg} algébrique de dimension finie et ρ^∞ lisse de longueur finie.

Si Π^∞ est une représentation lisse de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ sur E, on note $J_{N_j}(\Pi^\infty)$ pour $j\in\{1,2\}$ le foncteur de Jacquet usuel relativement à $N_j(\mathbb{Q}_p)$, i.e. les coinvariants de Π^∞ sous $N_j(\mathbb{Q}_p)$ (une représentation lisse de $L_j(\mathbb{Q}_p)$ sur E). Si π^∞ est une représentation lisse de $L_2(\mathbb{Q}_p)$ sur E, on note de même $J_{N\cap L_2}(\pi^\infty)$ la $T(\mathbb{Q}_p)$-représentation lisse donnée par les coinvariants de π^∞ sous le groupe unipotent $N(\mathbb{Q}_p)\cap L_2(\mathbb{Q}_p)$. Si $w\in\mathcal{S}_3$ et τ^∞ est une représentation lisse de $T(\mathbb{Q}_p)$ sur E, on note $\tau^{\infty,w}$ la représentation conjuguée $\tau^{\infty,w}(t)\overset{\text{déf}}{=}\tau^\infty(wtw^{-1})$.

On fixe maintenant $\mu=(\mu_1,\mu_2,\mu_3)=(-k_1+2,-k_2+1,-k_3)$ avec $k_1>k_2>k_3$ et π^∞ une représentation lisse de longueur finie de $L_2(\mathbb{Q}_p)$ sur E avec un caractère central (la $T(\mathbb{Q}_p)$-représentation lisse $J_{N\cap L_2}(\pi^\infty)$ est alors aussi de longueur finie). On rappelle que l'on a des suites exactes courtes respectivement $L_2(\mathbb{Q}_p)$- et $L_1(\mathbb{Q}_p)$-équivariantes (cf. [**57**, Ex. 4.11] lorsque π^∞ est une représentation de $L_1(\mathbb{Q}_p)$) :

$$\begin{array}{ll} & 0\to\big(\mathrm{Ind}_{B\cap L_2}^{L_2}|t_1^{-1}t_2|\otimes_E J_{N\cap L_2}(\pi^\infty)^{s_1}\big)^\infty\to J_{N_2}\big(\mathrm{Ind}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\pi^\infty\big)^\infty\to\pi^\infty\to 0 \\ (47) & 0\to|t_1^{-1}t_2^{-1}t_3^2|\otimes_E\pi^{\infty,s_1s_2}\to J_{N_1}\big(\mathrm{Ind}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\pi^\infty\big)^\infty\to\big(\mathrm{Ind}_{B\cap L_1}^{L_1}J_{N\cap L_2}(\pi^\infty)\big)^\infty\to 0 \end{array}$$

où π^{∞,s_1s_2} est la représentation de $L_1(\mathbb{Q}_p)$ obtenue à partir de la représentation π^∞ en "échangeant" les facteurs $\mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_p)$ et $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. On suppose de plus π^∞ telle que les deux suites exactes (47) sont scindées, i.e. on a des isomorphismes de représentations lisses respectivement de $L_2(\mathbb{Q}_p)$ et $L_1(\mathbb{Q}_p)$:

$$\begin{array}{lrcl} & J_{N_2}\big(\mathrm{Ind}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\pi^\infty\big)^\infty & \cong & \pi^\infty\oplus\big(\mathrm{Ind}_{B\cap L_2}^{L_2}|t_1^{-1}t_2|\otimes_E J_{N\cap L_2}(\pi^\infty)^{s_1}\big)^\infty \\ (48) & J_{N_1}\big(\mathrm{Ind}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\pi^\infty\big)^\infty & \cong & |t_1^{-1}t_2^{-1}t_3^2|\otimes_E\pi^{\infty,s_1s_2}\oplus\big(\mathrm{Ind}_{B\cap L_1}^{L_1}J_{N\cap L_2}(\pi^\infty)\big)^\infty. \end{array}$$

Les formules ci-dessous, tirées de [**57**, Th. 4.10] avec [**57**, (4.41)] et [**50**, Prop. 4.9(b)], et du formulaire de [**57**, § 4.5.5], explicitent certaines des $L_j(\mathbb{Q}_p)$-représentations localement analytiques $H_i(N_j(\mathbb{Q}_p), \mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(M_2(*), \pi^\infty))$ pour $j \in \{1,2\}$ et $i \in \{0,1,2\}$. Noter que le formulaire de *loc. cit.* ne traite que le cas de $\mathcal{F}_{P_1}^{\mathrm{GL}_3}(M_1(*), \pi^\infty)$, mais le cas de $\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(M_2(*), \pi^\infty)$ se démontre de manière symétrique. On écrit $\mathrm{Ind}_{P_j}^{\mathrm{GL}_3}$ et $\mathrm{Ind}_{B\cap L_j}^{L_j}$ au lieu de $\mathrm{Ind}_{P_j(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}$ et $\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)\cap L_j(\mathbb{Q}_p)}^{L_j(\mathbb{Q}_p)}$ ($j \in \{1,2\}$) pour alléger les notations.

$$\begin{aligned}
H_0\big(N_2(\mathbb{Q}_p), \mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\big(L(\mu), \pi^\infty\big)\big) &= \overline{L}(-\mu)_2 \otimes_E J_{N_2}\big(\mathrm{Ind}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\pi^\infty\big)^\infty\\
H_1\big(N_2(\mathbb{Q}_p), \mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\big(L(\mu), \pi^\infty\big)\big) &= \overline{L}(-s_1\cdot\mu)_2 \otimes_E J_{N_2}\big(\mathrm{Ind}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\pi^\infty\big)^\infty\\
H_2\big(N_2(\mathbb{Q}_p), \mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\big(L(\mu), \pi^\infty\big)\big) &= \overline{L}(-s_1s_2\cdot\mu)_2 \otimes_E J_{N_2}\big(\mathrm{Ind}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\pi^\infty\big)^\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_0\big(N_2(\mathbb{Q}_p), \mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\big(M_2(\mu), \pi^\infty\big)\big) &= \big(\overline{L}(-\mu)_2 \oplus \overline{L}(-s_1\cdot\mu)_2\big) \otimes_E \pi^\infty\\
H_1\big(N_2(\mathbb{Q}_p), \mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\big(M_2(\mu), \pi^\infty\big)\big) &= \big(\overline{L}(-s_1\cdot\mu)_2 \oplus \overline{L}(-s_1s_2\cdot\mu)_2\big) \otimes_E \pi^\infty \oplus\\
&\qquad \big(\mathrm{Ind}_{B\cap L_2}^{L_2} t^{-s_1\cdot\mu}|t_1^{-1}t_2| \otimes_E J_{N\cap L_2}(\pi^\infty)^{s_1}\big)^{\mathrm{an}}\\
H_2\big(N_2(\mathbb{Q}_p), \mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\big(M_2(\mu), \pi^\infty\big)\big) &= \overline{L}(-s_1s_2\cdot\mu)_2 \otimes_E \pi^\infty \oplus\\
&\qquad \big(\mathrm{Ind}_{B\cap L_2}^{L_2} t^{-s_1s_2\cdot\mu}|t_1^{-1}t_2| \otimes_E J_{N\cap L_2}(\pi^\infty)^{s_1}\big)^{\mathrm{an}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_0\big(N_2(\mathbb{Q}_p), \mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\big(M_2(s_1\cdot\mu), \pi^\infty\big)\big) &= \big(\overline{L}(-s_1\cdot\mu)_2 \oplus \overline{L}(-s_1s_2\cdot\mu)_2\big) \otimes_E \pi^\infty\\
H_1\big(N_2(\mathbb{Q}_p), \mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\big(M_2(s_1\cdot\mu), \pi^\infty\big)\big) &= \overline{L}(-s_1s_2\cdot\mu)_2 \otimes_E \pi^\infty \oplus\\
&\qquad \big(\mathrm{Ind}_{B\cap L_2}^{L_2} t^{-\mu}|t_1^{-1}t_2| \otimes_E J_{N\cap L_2}(\pi^\infty)^{s_1}\big)^{\mathrm{an}}\\
H_2\big(N_2(\mathbb{Q}_p), \mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\big(M_2(s_1\cdot\mu), \pi^\infty\big)\big) &= \big(\mathrm{Ind}_{B\cap L_2}^{L_2} t^{-s_1s_2s_1\cdot\mu}|t_1^{-1}t_2| \otimes_E J_{N\cap L_2}(\pi^\infty)^{s_1}\big)^{\mathrm{an}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_0\big(N_2(\mathbb{Q}_p), \mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\big(M_2(s_1s_2\cdot\mu), \pi^\infty\big)\big) &= \overline{L}(-s_1s_2\cdot\mu)_2 \otimes_E \pi^\infty\\
H_1\big(N_2(\mathbb{Q}_p), \mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\big(M_2(s_1s_2\cdot\mu), \pi^\infty\big)\big) &= \big(\mathrm{Ind}_{B\cap L_2}^{L_2} t^{-s_2\cdot\mu}|t_1^{-1}t_2| \otimes_E J_{N\cap L_2}(\pi^\infty)^{s_1}\big)^{\mathrm{an}}\\
H_2\big(N_2(\mathbb{Q}_p), \mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\big(M_2(s_1s_2\cdot\mu), \pi^\infty\big)\big) &= \big(\mathrm{Ind}_{B\cap L_2}^{L_2} t^{-s_2s_1\cdot\mu}|t_1^{-1}t_2| \otimes_E J_{N\cap L_2}(\pi^\infty)^{s_1}\big)^{\mathrm{an}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_0\big(N_1(\mathbb{Q}_p), \mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\big(L(\mu), \pi^\infty\big)\big) &= \overline{L}(-\mu)_1 \otimes_E J_{N_1}\big(\mathrm{Ind}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\pi^\infty\big)^\infty\\
H_1\big(N_1(\mathbb{Q}_p), \mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\big(L(\mu), \pi^\infty\big)\big) &= \overline{L}(-s_2\cdot\mu)_1 \otimes_E J_{N_1}\big(\mathrm{Ind}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\pi^\infty\big)^\infty\\
H_2\big(N_1(\mathbb{Q}_p), \mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\big(L(\mu), \pi^\infty\big)\big) &= \overline{L}(-s_2s_1\cdot\mu)_1 \otimes_E J_{N_1}\big(\mathrm{Ind}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\pi^\infty\big)^\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_0\big(N_1(\mathbb{Q}_p), \mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\big(M_2(\mu), \pi^\infty\big)\big) &= \big(\mathrm{Ind}_{B\cap L_1}^{L_1} t^{-\mu} \otimes_E J_{N\cap L_2}(\pi^\infty)\big)^{\mathrm{an}} \\
H_1\big(N_1(\mathbb{Q}_p), \mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\big(M_2(\mu), \pi^\infty\big)\big) &= \overline{L}(-s_2s_1\cdot\mu)_1 \otimes_E \big(\mathrm{Ind}_{B\cap L_1}^{L_1} J_{N\cap L_2}(\pi^\infty)\big)^\infty \oplus \\
&\qquad \big(\mathrm{Ind}_{B\cap L_1}^{L_1} t^{-s_2\cdot\mu} \otimes_E J_{N\cap L_2}(\pi^\infty)\big)^{\mathrm{an}} \\
H_2\big(N_1(\mathbb{Q}_p), \mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\big(M_2(\mu), \pi^\infty\big)\big) &= \overline{L}(-s_2s_1\cdot\mu)_1 \otimes_E |t_1^{-1}t_2^{-1}t_3^2| \otimes_E \pi^{\infty, s_1s_2} \oplus \\
&\qquad \overline{L}(-s_2s_1\cdot\mu)_1 \otimes_E \big(\mathrm{Ind}_{B\cap L_1}^{L_1} J_{N\cap L_2}(\pi^\infty)\big)^\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_0\big(N_1(\mathbb{Q}_p), \mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\big(M_2(s_1\cdot\mu), \pi^\infty\big)\big) &= \big(\mathrm{Ind}_{B\cap L_1}^{L_1} t^{-s_1\cdot\mu} \otimes_E J_{N\cap L_2}(\pi^\infty)\big)^{\mathrm{an}} \oplus \\
&\qquad \big(\mathrm{Ind}_{B\cap L_1}^{L_1} t^{-s_1s_2\cdot\mu} \otimes_E J_{N\cap L_2}(\pi^\infty)\big)^{\mathrm{an}} \\
H_1\big(N_1(\mathbb{Q}_p), \mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\big(M_2(s_1\cdot\mu), \pi^\infty\big)\big) &= \big(\mathrm{Ind}_{B\cap L_1}^{L_1} t^{-s_2s_1\cdot\mu} \otimes_E J_{N\cap L_2}(\pi^\infty)\big)^{\mathrm{an}} \oplus \\
&\qquad \big(\mathrm{Ind}_{B\cap L_1}^{L_1} t^{-s_1s_2\cdot\mu} \otimes_E J_{N\cap L_2}(\pi^\infty)\big)^{\mathrm{an}} \\
H_2\big(N_1(\mathbb{Q}_p), \mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\big(M_2(s_1\cdot\mu), \pi^\infty\big)\big) &= \overline{L}(-s_2\cdot\mu)_1 \otimes_E |t_1^{-1}t_2^{-1}t_3^2| \otimes_E \pi^{\infty, s_1s_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_0\big(N_1(\mathbb{Q}_p), \mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\big(M_2(s_1s_2\cdot\mu), \pi^\infty\big)\big) &= \big(\mathrm{Ind}_{B\cap L_1}^{L_1} t^{-s_1s_2\cdot\mu} \otimes_E J_{N\cap L_2}(\pi^\infty)\big)^{\mathrm{an}} \\
H_1\big(N_1(\mathbb{Q}_p), \mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\big(M_2(s_1s_2\cdot\mu), \pi^\infty\big)\big) &= \big(\mathrm{Ind}_{B\cap L_1}^{L_1} t^{-s_1s_2s_1\cdot\mu} \otimes_E J_{N\cap L_2}(\pi^\infty)\big)^{\mathrm{an}} \\
H_2\big(N_1(\mathbb{Q}_p), \mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\big(M_2(s_1s_2\cdot\mu), \pi^\infty\big)\big) &= \overline{L}(-\mu)_1 \otimes_E |t_1^{-1}t_2^{-1}t_3^2| \otimes_E \pi^{\infty, s_1s_2}
\end{aligned}$$

Corollaire 5.2.1. — *Pour $i \in \{0,1,2\}$ et $j \in \{1,2\}$, les $D(L_j(\mathbb{Q}_p), E)$-modules :*

$$\begin{aligned}
&H^i\big(N_j(\mathbb{Q}_p), \mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(L(\mu), \pi^\infty)'\big), && H^i\big(N_j(\mathbb{Q}_p), \mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(M_2(\mu), \pi^\infty)'\big), \\
&H^i\big(N_j(\mathbb{Q}_p), \mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(M_2(s_1\cdot\mu), \pi^\infty)'\big), && H^i\big(N_j(\mathbb{Q}_p), \mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(M_2(s_1s_2\cdot\mu), \pi^\infty)'\big)
\end{aligned}$$

sont coadmissibles.

Démonstration. — Cela découle du formulaire explicite ci-dessus, de [**50**, Lem. 2.4(ii)] et du fait que les représentations localement algébriques qui apparaissent sont de longueur finie, donc fortement admissibles (cf. la preuve de [**50**, Lem. 2.4(ii)] ou le début de [**57**, § 4.4]). □

5.3. Formulaire II. — On donne le calcul des $H^i(N_j(\mathbb{Q}_p), \mathcal{F}_{P_2}^G(L_2(s_1\cdot\mu), \pi^\infty)')$ pour $i \in \{0,1,2\}$, $j \in \{1,2\}$ et μ, π^∞ comme au § 5.2, ainsi que quelques autres lemmes et formules utiles.

On garde les notations du § 5.2. On commence par le lemme classique suivant (cf. par exemple [**40**, § 9.5]). On rappelle que $\mu = (-k_1+2, -k_2+1, -k_3)$ avec $k_1 > k_2 > k_3$.

Lemme 5.3.1. — *On a $M_1(s_2s_1\cdot\mu)=L(s_2s_1\cdot\mu)$, $M_2(s_1s_2\cdot\mu)=L(s_1s_2\cdot\mu)$ (i.e. les $U(\mathfrak{gl}_3)$-modules $M_1(s_2s_1\cdot\mu)$ et $M_2(s_1s_2\cdot\mu)$ sont simples) et des suites exactes courtes de $U(\mathfrak{gl}_3)$-modules :*

$$\begin{gathered}0\to L(s_2s_1\cdot\mu)\to M_1(s_2\cdot\mu)\to L(s_2\cdot\mu)\to 0\\ 0\to L(s_1s_2\cdot\mu)\to M_2(s_1\cdot\mu)\to L(s_1\cdot\mu)\to 0\\ 0\to L(s_2\cdot\mu)\to M_1(\mu)\to L(\mu)\to 0\\ 0\to L(s_1\cdot\mu)\to M_2(\mu)\to L(\mu)\to 0.\end{gathered}$$

On déduit en particulier du Lemme 5.3.1, de [**50**, Prop. 4.9(a)] et de (42) deux suites exactes longues dans $\mathrm{Mod}_{D(L_j(\mathbb{Q}_p),E)}$ pour $j\in\{1,2\}$ (où l'on écrit N_j pour $N_j(\mathbb{Q}_p)$) :

$$\begin{aligned}(49)\quad & 0\to H^0(N_j,\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(M_2(s_1s_2\cdot\mu),\pi^\infty)')\to H^0(N_j,\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(M_2(s_1\cdot\mu),\pi^\infty)')\to H^0(N_j,\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(L(s_1\cdot\mu),\pi^\infty)')\\ &\to H^1(N_j,\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(M_2(s_1s_2\cdot\mu),\pi^\infty)')\to H^1(N_j,\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(M_2(s_1\cdot\mu),\pi^\infty)')\to H^1(N_j,\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(L(s_1\cdot\mu),\pi^\infty)')\\ &\to H^2(N_j,\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(M_2(s_1s_2\cdot\mu),\pi^\infty)')\to H^2(N_j,\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(M_2(s_1\cdot\mu),\pi^\infty)')\to H^2(N_j,\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(L(s_1\cdot\mu),\pi^\infty)')\to 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(50)\quad & 0\to H^0(N_j,\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(L(s_1\cdot\mu),\pi^\infty)')\to H^0(N_j,\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(M_2(\mu),\pi^\infty)')\to H^0(N_j,\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(L(\mu),\pi^\infty)')\\ &\to H^1(N_j,\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(L(s_1\cdot\mu),\pi^\infty)')\to H^1(N_j,\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(M_2(\mu),\pi^\infty)')\to H^1(N_j,\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(L(\mu),\pi^\infty)')\\ &\to H^2(N_j,\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(L(s_1\cdot\mu),\pi^\infty)')\to H^2(N_j,\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(M_2(\mu),\pi^\infty)')\to H^2(N_j,\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(L(\mu),\pi^\infty)')\to 0.\end{aligned}$$

Corollaire 5.3.2. — *(i) On a des isomorphismes de $D(L_2(\mathbb{Q}_p),E)$-modules coadmissibles :*

$$\begin{aligned}H^0\big(N_2(\mathbb{Q}_p),\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\big(L(s_1\cdot\mu),\pi^\infty\big)'\big) &= \overline{L}(-s_1\cdot\mu)_2'\otimes_E\pi^{\infty\prime}\\ H^1\big(N_2(\mathbb{Q}_p),\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\big(L(s_1\cdot\mu),\pi^\infty\big)'\big) &= \overline{L}(-s_1s_2\cdot\mu)_2'\otimes_E\pi^{\infty\prime}\\ &\quad\oplus\overline{L}(-\mu)_2'\otimes_E\big(\mathrm{Ind}_{B\cap L_2}^{L_2}|t_1^{-1}t_2|\otimes_E J_{N\cap L_2}(\pi^\infty)^{s_1}\big)^{\infty\prime}\\ &\quad\oplus\big(\mathrm{Ind}_{B\cap L_2}^{L_2}t^{-s_2s_1\cdot\mu}|t_1^{-1}t_2|\otimes_E J_{N\cap L_2}(\pi^\infty)^{s_1}\big)^{\mathrm{an}\prime}\\ H^2\big(N_2(\mathbb{Q}_p),\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\big(L(s_1\cdot\mu),\pi^\infty\big)'\big) &= \big(\mathrm{Ind}_{B\cap L_2}^{L_2}t^{-s_1s_2s_1\cdot\mu}|t_1^{-1}t_2|\otimes_E J_{N\cap L_2}(\pi^\infty)^{s_1}\big)^{\mathrm{an}\prime}.\end{aligned}$$

(ii) On a des isomorphismes de $D(L_1(\mathbb{Q}_p),E)$-modules coadmissibles :

$$\begin{aligned}H^0\big(N_1(\mathbb{Q}_p),\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\big(L(s_1\cdot\mu),\pi^\infty\big)'\big) &= \big(\mathrm{Ind}_{B\cap L_1}^{L_1}t^{-s_1\cdot\mu}\otimes_E J_{N\cap L_2}(\pi^\infty)\big)^{\mathrm{an}\prime}\\ H^1\big(N_1(\mathbb{Q}_p),\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\big(L(s_1\cdot\mu),\pi^\infty\big)'\big) &= \overline{L}(-\mu)_1'\otimes_E(|t_1^{-1}t_2^{-1}t_3^2|\otimes_E\pi^{\infty,s_1s_2})'\\ &\quad\oplus\overline{L}(-s_2s_1\cdot\mu)_1'\otimes_E\big(\mathrm{Ind}_{B\cap L_1}^{L_1}J_{N\cap L_2}(\pi^\infty)\big)^{\infty\prime}\\ &\quad\oplus\big(\mathrm{Ind}_{B\cap L_1}^{L_1}t^{-s_1s_2\cdot\mu}\otimes_E J_{N\cap L_2}(\pi^\infty)\big)^{\mathrm{an}\prime}\\ H^2\big(N_1(\mathbb{Q}_p),\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\big(L(s_1\cdot\mu),\pi^\infty\big)'\big) &= \overline{L}(-s_2\cdot\mu)_1'\otimes_E(|t_1^{-1}t_2^{-1}t_3^2|\otimes_E\pi^{\infty,s_1s_2})'.\end{aligned}$$

Démonstration. — On note que les flèches de $D(L_j(\mathbb{Q}_p),E)$-modules dans (49) et (50) pour $i\in\{0,1,2\}$ et $j\in\{1,2\}$:

$$\begin{aligned} H^i\big(N_j(\mathbb{Q}_p),\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(M_2(s_1s_2\cdot\mu),\pi^\infty)'\big) &\longrightarrow H^i\big(N_j(\mathbb{Q}_p),\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(M_2(s_1\cdot\mu),\pi^\infty)'\big)\\ H^i\big(N_j(\mathbb{Q}_p),\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(M_2(\mu),\pi^\infty)'\big) &\longrightarrow H^i\big(N_j(\mathbb{Q}_p),\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(L(\mu),\pi^\infty)'\big)\end{aligned}$$

sont automatiquement continues pour la topologie canonique par le Corollaire 5.2.1 et ([**54**, p.155]). On obtient alors les formules de l'énoncé à partir de (49) et (50), du formulaire du § 5.2, de [**50**, § 6] et de la structure (classique) des séries principales localement analytiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Contentons-nous de donner la preuve de (i), celle de (ii) étant analogue. On utilise sans commentaire les formules du § 5.2.

La suite exacte (50) implique $H^0(N_2(\mathbb{Q}_p),\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(L(s_1\cdot\mu),\pi^\infty)')\subseteq(\overline{L}(-\mu)_2'\oplus\overline{L}(-s_1\cdot\mu)_2')\otimes_E\pi^{\infty\prime}$ et (49) implique alors que la seule possibilité est :

$$H^0\big(N_2(\mathbb{Q}_p),\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\big(L(s_1\cdot\mu),\pi^\infty\big)'\big)\cong\overline{L}(-s_1\cdot\mu)_2'\otimes_E\pi^{\infty\prime}$$

et que l'application :

$$H^1\big(N_2(\mathbb{Q}_p),\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(M_2(s_1s_2\cdot\mu),\pi^\infty)'\big)\longrightarrow H^1\big(N_2(\mathbb{Q}_p),\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(M_2(s_1\cdot\mu),\pi^\infty)'\big)$$

est injective dans $\mathrm{Mod}_{D(L_2(\mathbb{Q}_p),E)}$.

La suite exacte (49) implique $(\mathrm{Ind}_{B\cap L_2}^{L_2}t^{-s_1s_2s_1\cdot\mu}|t_1^{-1}t_2|\otimes_E J_{N\cap L_2}(\pi^\infty)^{s_1})^{\mathrm{an}\prime}\twoheadrightarrow H^2(N_2(\mathbb{Q}_p),\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(L(s_1\cdot\mu),\pi^\infty)')$ et par ailleurs (50) (avec (48)) implique une suite exacte dans $\mathrm{Mod}_{D(L_2(\mathbb{Q}_p),E)}$:

$$\begin{aligned}\overline{L}(-s_1\cdot\mu)_2'\otimes_E\big(J_{N_2}\big(\mathrm{Ind}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\pi^\infty\big)^\infty\big)'\longrightarrow H^2\big(N_2(\mathbb{Q}_p),\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\big(L(s_1\cdot\mu),\pi^\infty\big)'\big)\\ \longrightarrow\big(\mathrm{Ind}_{B\cap L_2}^{L_2}t^{-s_1s_2s_1\cdot\mu}|t_1^{-1}t_2|\otimes_E J_{N\cap L_2}(\pi^\infty)^{s_1}\big)^{\mathrm{an}\prime}\longrightarrow 0\end{aligned}$$

d'où un isomorphisme :

$$H^2\big(N_2(\mathbb{Q}_p),\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\big(L(s_1\cdot\mu),\pi^\infty\big)'\big)\cong\big(\mathrm{Ind}_{B\cap L_2}^{L_2}t^{-s_1s_2s_1\cdot\mu}|t_1^{-1}t_2|\otimes_E J_{N\cap L_2}(\pi^\infty)^{s_1}\big)^{\mathrm{an}\prime}$$

et par (49) (avec l'injection plus haut) une suite exacte dans $\mathrm{Mod}_{D(L_2(\mathbb{Q}_p),E)}$:

$$\begin{aligned}0\to H^1\big(N_2(\mathbb{Q}_p),\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(M_2(s_1s_2\cdot\mu),\pi^\infty)'\big)\to H^1\big(N_2(\mathbb{Q}_p),\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(M_2(s_1\cdot\mu),\pi^\infty)'\big)\\ \to H^1\big(N_2(\mathbb{Q}_p),\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(L(s_1\cdot\mu),\pi^\infty)'\big)\to H^2\big(N_2(\mathbb{Q}_p),\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(M_2(s_1s_2\cdot\mu),\pi^\infty)'\big)\to 0.\end{aligned}$$

On en déduit la formule de l'énoncé pour $H^1(N_2(\mathbb{Q}_p),\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(L(s_1\cdot\mu),\pi^\infty)')$ en remarquant que l'on a forcément une somme directe car les représentations de $L_2(\mathbb{Q}_p)$: $\overline{L}(-s_1s_2\cdot\mu)_2\otimes_E\pi^\infty$, $L(-\mu)_2\otimes_E(\mathrm{Ind}_{B\cap L_2}^{L_2}|t_1^{-1}t_2|\otimes_E J_{N\cap L_2}(\pi^\infty)^{s_1})^\infty$ et $(\mathrm{Ind}_{B\cap L_2}^{L_2}t^{-s_2s_1\cdot\mu}|t_1^{-1}t_2|\otimes_E J_{N\cap L_2}(\pi^\infty)^{s_1})^{\mathrm{an}}$ n'ont pas le même caractère central (regarder l'action du premier facteur $\mathbb{Q}_p^\times$ dans $L_2(\mathbb{Q}_p)=\mathbb{Q}_p^\times\times\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$). □

Le lemme ci-dessous permettra d'appliquer le Corollaire 5.3.2.

Lemme 5.3.3. — *Soit $\pi^\infty\in\{\pi_{2,1}^\infty,\pi_{2,2}^\infty,\pi_{2,3}^\infty\}$ (cf. § 4.1), alors π^∞ vérifie (48).*

Démonstration. — On peut supposer $\alpha = 1$ et on a :

$$\begin{aligned} J_{N\cap L_2}(\pi_{2,1}^\infty) &= 1\otimes|\cdot|^{-1}\otimes|\cdot| \\ J_{N\cap L_2}(\pi_{2,2}^\infty) &= |\cdot|^{-1}\otimes|\cdot|\otimes 1 \quad\oplus\quad |\cdot|^{-1}\otimes|\cdot|^{-1}\otimes|\cdot|^2 \\ J_{N\cap L_2}(\pi_{2,3}^\infty) &= |\cdot|^{-2}\otimes 1\otimes|\cdot|^2. \end{aligned}$$

On en déduit facilement que l'action du premier facteur $\mathbb{Q}_p^\times$ de $L_2(\mathbb{Q}_p) = \mathbb{Q}_p^\times \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ n'est pas la même dans les termes de gauche et de droite de la première suite exacte en (47), et de même avec le facteur $\mathbb{Q}_p^\times$ de $L_1(\mathbb{Q}_p)$ pour la deuxième. Cela implique le résultat. □

Les suites exactes (47) ont un analogue pour π^∞ représentation lisse de $L_1(\mathbb{Q}_p)$ sur E (cf. [**57**, Ex. 4.11]) et le Lemme 5.3.3 a un analogue avec $\pi^\infty \in \{\pi_{1,1}^\infty, \pi_{1,2}^\infty, \pi_{1,3}^\infty\}$ (cf. § 4.1) que l'on laisse au lecteur.

Pour $i \in \{1, 2\}$, on a également des isomorphismes de $D(L_2(\mathbb{Q}_p), E)$-modules coadmissibles qui se déduisent directement de [**57**, (4.41)], [**57**, Th. 4.10] et [**57**, (4.44)] :

$$\begin{aligned} H^0(N_2(\mathbb{Q}_p), \overline{L}(-\mu)'\otimes_E v_{P_i}^{\infty\prime}) &= \overline{L}(-\mu)_2'\otimes_E J_{N_2}(v_{P_i}^\infty)' \\ H^1(N_2(\mathbb{Q}_p), \overline{L}(-\mu)'\otimes_E v_{P_i}^{\infty\prime}) &= \overline{L}(-s_1\cdot\mu)_2'\otimes_E J_{N_2}(v_{P_i}^\infty)' \\ H^2(N_2(\mathbb{Q}_p), \overline{L}(-\mu)'\otimes_E v_{P_i}^{\infty\prime}) &= \overline{L}(-s_1s_2\cdot\mu)_2'\otimes_E J_{N_2}(v_{P_i}^\infty)' \end{aligned} \tag{51}$$

et des isomorphismes de $D(L_1(\mathbb{Q}_p), E)$-modules coadmissibles :

$$\begin{aligned} H^0(N_1(\mathbb{Q}_p), \overline{L}(-\mu)'\otimes_E v_{P_i}^{\infty\prime}) &= \overline{L}(-\mu)_1'\otimes_E J_{N_1}(v_{P_i}^\infty)' \\ H^1(N_1(\mathbb{Q}_p), \overline{L}(-\mu)'\otimes_E v_{P_i}^{\infty\prime}) &= \overline{L}(-s_2\cdot\mu)_1'\otimes_E J_{N_1}(v_{P_i}^\infty)' \\ H^2(N_1(\mathbb{Q}_p), \overline{L}(-\mu)'\otimes_E v_{P_i}^{\infty\prime}) &= \overline{L}(-s_2s_1\cdot\mu)_1'\otimes_E J_{N_1}(v_{P_i}^\infty)' \end{aligned} \tag{52}$$

où :

$$J_{N_2}(v_{P_1}^\infty) = |\cdot|^{-2}\otimes_E|\mathrm{det}_2| \ \oplus\ 1\otimes_E\mathrm{St}_2^\infty\ ,\quad J_{N_2}(v_{P_2}^\infty) = \big(\mathrm{Ind}_{B\cap L_2}^{L_2}|\cdot|^{-1}\otimes|\cdot|\otimes 1\big)^\infty$$

$$J_{N_1}(v_{P_2}^\infty) = |\mathrm{det}_2|^{-1}\otimes_E|\cdot|^2 \ \oplus\ \mathrm{St}_2^\infty\otimes_E 1\ ,\quad J_{N_1}(v_{P_1}^\infty) = \big(\mathrm{Ind}_{B\cap L_1}^{L_1} 1\otimes|\cdot|^{-1}\otimes|\cdot|\big)^\infty.$$

Terminons avec la description (dont la preuve est laissée au lecteur) de quelques induites paraboliques lisses de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$. On a des isomorphismes $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$-équivariants :

$$\begin{aligned} \big(\mathrm{Ind}_{P_2(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}|\cdot|^{-2}\otimes|\mathrm{det}_2|\big)^\infty &\cong v_{P_1}^\infty \text{ —— } 1 \\ \big(\mathrm{Ind}_{P_1(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}|\mathrm{det}_2|^{-1}\otimes|\cdot|^2\big)^\infty &\cong v_{P_2}^\infty \text{ —— } 1 \\ \big(\mathrm{Ind}_{P_2(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} 1\otimes\mathrm{St}_2^\infty\big)^\infty &\cong v_{P_1}^\infty \text{ — } \mathrm{St}_3^\infty \\ \big(\mathrm{Ind}_{P_1(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} \mathrm{St}_2^\infty\otimes 1\big)^\infty &\cong v_{P_2}^\infty \text{ — } \mathrm{St}_3^\infty \\ \big(\mathrm{Ind}_{P_1(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}(\mathrm{St}_2^\infty\otimes_E|\mathrm{det}_2|^{-1})\otimes_E|\cdot|^2\big)^\infty &\cong \mathrm{St}_3^\infty \text{ — } v_{P_1}^\infty \\ \big(\mathrm{Ind}_{P_2(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}|\cdot|^{-2}\otimes(\mathrm{St}_2^\infty\otimes_E|\mathrm{det}_2|)\big)^\infty &\cong \mathrm{St}_3^\infty \text{ — } v_{P_2}^\infty\ . \end{aligned} \tag{53}$$

6. Vers la compatibilité local-global

On précise la propriété **EXT** du § 2.3 dans un cadre global, puis pour $\Pi^\infty(\underline{D}) = \mathrm{St}_3^\infty \otimes_E (\mathrm{nr}(\alpha)\circ \det)$ et $\Pi^j(\underline{k},\underline{D})$ comme au § 4.5 on montre que les espaces de formes automorphes p-adiques contiennent des représentations de la forme

$$\Pi^\infty(\underline{D}) \begin{array}{l} \text{---}\ \Pi^1(\underline{k},\underline{D}) \\ \text{---}\ \Pi^2(\underline{k},\underline{D}) \end{array}.$$

6.1. Retour sur la propriété conjecturale EXT.

— On revient sur la propriété conjecturale **EXT** du § 2.3 dans un cadre global.

Le cadre est essentiellement le même que celui de [**5**, § 5] auquel on renvoie le lecteur pour plus de détails et de références. On fixe des plongements $\iota_\infty : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$, $\iota_p : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$, une extension totalement réelle F^+ de $\mathbb{Q}$, une extension quadratique totalement imaginaire F de F^+ et un groupe unitaire G/F^+ attaché à l'extension quadratique F/F^+ comme dans [**1**, § 6.2.2] tel que $G\times_{F^+} F \cong \mathrm{GL}_n$ ($n\geq 2$) et $G(F^+\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R})$ est un groupe compact. Si w est une place finie de F au-dessus d'une place de F^+ totalement décomposée dans F, on note $\iota_{G,w} : G(F_v^+) \xrightarrow{\sim} G(F_w) \cong \mathrm{GL}_n(F_w)$. On suppose qu'il n'y a qu'*une seule place* v_0 *de* F^+ *divisant* p et que v_0 est de plus *totalement décomposée dans* F, et on choisit une place w_0 de F au-dessus de v_0. On pourrait probablement se dispenser de la première hypothèse mais au prix de complications techniques pénibles et qui ne sont pas si fondamentales à ce stade.

Pour un sous-groupe ouvert compact $U^p \overset{\text{déf}}{=} U^{v_0}$ de $G(\mathbb{A}_{F^+}^{\infty,v_0})$ de la forme $U^p = \prod_{v\nmid v_0} U_v$ où U_v est un sous-groupe ouvert compact de $G(F_v^+)$ et pour E une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$, on considère l'espace de Banach p-adique :

$$\widehat{S}(U^p,E) \overset{\text{déf}}{=} \{f : G(F^+)\backslash G(\mathbb{A}_{F^+}^\infty)/U^p \longrightarrow E,\ f \text{ continue}\}. \tag{54}$$

L'action de $G(F_{v_0}^+)$ par translation à droite sur les fonctions f fait de $\widehat{S}(U^p,E)$ une représentation de Banach continue unitaire admissible au sens de [**56**, § 3] de boule unité les f à valeurs dans $\mathcal{O}_E$. On note $\widehat{S}(U^p,E)^{\mathbb{Q}_p\text{-alg}} \subseteq \widehat{S}(U^p,E)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}$ les sous-espaces des vecteurs respectivement localement $\mathbb{Q}_p$-algébriques et analytiques pour l'action de $G(F_{v_0}^+)$ (on note $\widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{alg}} \subseteq \widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an}}$ lorsque $F_{v_0}^+ = \mathbb{Q}_p$). En particulier $\widehat{S}(U^p,E)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}$ est une représentation localement $\mathbb{Q}_p$-analytique très fortement admissible au sens de [**33**, Def. 0.12] et $\widehat{S}(U^p,E)^{\mathbb{Q}_p\text{-alg}}$ se décrit complètement (cf. [**5**, § 5] et les références citées dans *loc. cit.*) :

$$\widehat{S}(U^p,E)^{\mathbb{Q}_p\text{-alg}} \otimes_E \overline{\mathbb{Q}_p} \cong \bigoplus_{\pi} \ (\pi_f^{v_0})^{U^p} \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}} \big(\pi_{v_0} \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}} W_p\big) \tag{55}$$

où la somme directe est sur les représentations automorphes $\pi = \pi_\infty \otimes_{\mathbb{C}} \pi_f$ de $G(\mathbb{A}_{F^+})$ sur $\mathbb{C}$ et où W_p est la représentation $\mathbb{Q}_p$-algébrique de $G(F_{v_0}^+)$ sur $\overline{\mathbb{Q}_p}$ associée à la représentation algébrique π_∞ de $G(F^+\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R})$ sur $\mathbb{C}$ via ι_∞ et ι_p (cf. [**5**, § 5] et noter que π_f est défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$ par le même argument que [**1**, § 6.2.3]). Dans (55), on a utilisé les résultats de [**41**], [**47**], [**46**] (et d'autres) qui impliquent que chaque π a multiplicité 1.

On note $\Sigma(U^p)$ l'ensemble fini des places finies v de F^+ décomposées dans F distinctes de v_0 telles que U_v n'est pas un sous-groupe ouvert compact maximal de $G(F_v^+)$, $D(U^p)$ l'ensemble des places finies de F^+ décomposées dans F distinctes de v_0 et qui ne sont pas dans $\Sigma(U^p)$ et $\mathbb{T}(U^p) \stackrel{\text{déf}}{=} E[T_w^{(j)}]$ l'algèbre polynomiale commutative engendrée par toutes les variables formelles $T_w^{(j)}$ pour $j \in \{1, \ldots, n\}$ et w une place de F au-dessus d'une place de $D(U^p)$. L'algèbre $\mathbb{T}(U^p)$ agit sur $\widehat{S}(U^p, E)$, $\widehat{S}(U^p, E)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}$ et $\widehat{S}(U^p, E)^{\mathbb{Q}_p\text{-alg}}$ en faisant opérer $T_w^{(j)}$ par la double classe :

$$\left[U_v g_v \iota_{G,w}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{n-j} & 0 \\ 0 & \varpi_w \mathbf{1}_j \end{pmatrix} g_v^{-1} U_v\right]$$

où ϖ_w est une uniformisante quelconque de F_w et $g_v \in G(F_v^+)$ est tel que $\iota_{G,w}(g_v^{-1} U_v g_v) = \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_{F_w})$. Cette action commute avec celle de $G(F_{v_0}^+)$.

Si $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \to \mathrm{GL}_n(E)$ est une représentation continue absolument irréductible non ramifiée en les places de F au-dessus des places de $D(U^p)$, on associe à ρ l'idéal maximal $\mathfrak{m}_\rho$ de $\mathbb{T}(U^p)$ de corps résiduel E engendré par les éléments $((-1)^j \mathrm{Norm}(w)^{j(j-1)/2} T_w^{(j)} - a_w^{(j)})_{j,w}$ pour $j \in \{1, \ldots, n\}$ et w place de F au-dessus d'une place de $D(U^p)$ ($\mathrm{Norm}(w)$ est le cardinal du corps résiduel de F_w et $X^n + a_w^{(1)} X^{n-1} + \cdots + a_w^{(n-1)} X + a_w^{(n)} \in E[X]$ le polynôme caractéristique de $\rho(\mathrm{Frob}_w)$ où Frob_w est un Frobenius géométrique en w). Pour $\star \in \{\widehat{S}(U^p, E)^{\mathbb{Q}_p\text{-alg}}, \widehat{S}(U^p, E)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}, \widehat{S}(U^p, E)\}$ on désigne par $\star_{\mathfrak{m}_\rho}$ le localisé pour $\mathfrak{m}_\rho$ et par $\star[\mathfrak{m}_\rho]$ le sous-espace propre. On a $\star[\mathfrak{m}_\rho] \xrightarrow{\sim} (\star_{\mathfrak{m}_\rho})[\mathfrak{m}_\rho] \subseteq \star_{\mathfrak{m}_\rho}$ et $\widehat{S}(U^p, E)^{\mathbb{Q}_p\text{-alg}}[\mathfrak{m}_\rho] \xrightarrow{\sim} \widehat{S}(U^p, E)^{\mathbb{Q}_p\text{-alg}}_{\mathfrak{m}_\rho}$.

On fixe maintenant un module de Deligne-Fontaine $\underline{D}$ pour $L = F_{w_0}$ de rang n comme au § 2.2 (il fait donc intervenir une extension galoisienne finie F'_{w_0} de F_{w_0} et on prend E suffisamment grand) et des poids de Hodge-Tate $\underline{k} = (\underline{k}_\sigma)_{\sigma: F_{w_0} \hookrightarrow E}$ avec $\underline{k}_\sigma = (k_{1,\sigma} > k_{2,\sigma} > \cdots > k_{n,\sigma})$. On suppose comme au § 2.3 que les constituants irréductibles de la représentation de $W(\overline{F}_{w_0}/F_{w_0})$ sous-jacente à $\mathrm{WD}(\underline{D})$ sont distincts deux à deux. On suppose qu'il existe U^p et ρ tels que :

(i) ρ est absolument irréductible non ramifiée aux places de F au-dessus de $D(U^p)$;

(ii) $\widehat{S}(U^p, E)^{\mathbb{Q}_p\text{-alg}}[\mathfrak{m}_\rho] \neq 0$ (donc $\rho_{w_0} \stackrel{\text{déf}}{=} \rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{F}_{w_0}/F_{w_0})}$ est potentiellement semi-stable);

(iii) ρ_{w_0} a pour poids de Hodge-Tate $\underline{k}$ et module de Deligne-Fontaine $\underline{D}$.

(Donc (ii) implique en particulier que ρ est automorphe.) On rappelle que l'on a défini au § 2.3 la représentation localement $\mathbb{Q}_p$-algébrique $\Pi^{\mathrm{alg}}(\underline{k}, \underline{D}) = (\otimes_\sigma \overline{L}(\lambda_\sigma)) \otimes_E \Pi^\infty(\underline{D})$

de $\mathrm{GL}_n(F_{w_0})$ sur E. En voyant $\widehat{S}(U^p,E)^{\mathbb{Q}_p\text{-alg}}$ comme représentation de $\mathrm{GL}_n(F_{w_0})$ via ι_{G,w_0}, il résulte alors des normalisations, de (55) et de [**14**] que l'on a pour tout U^p, ρ vérifiant (i), (ii) et (iii) :

$$\widehat{S}(U^p,E)^{\mathbb{Q}_p\text{-alg}}[\mathfrak{m}_\rho] \cong \big(\Pi^{\mathrm{alg}}(\underline{k},\underline{D})\otimes\varepsilon^{n-1}\circ\det\big)^{\oplus d(U^p,\rho)} \tag{56}$$

où $d(U^p,\rho)\geq 1$ est un entier ne dépendant que de U^p et ρ (noter que plusieurs représentations automorphes π peuvent apparaître dans $\widehat{S}(U^p,E)^{\mathbb{Q}_p\text{-alg}}[\mathfrak{m}_\rho]$ car les L-paquets locaux aux places de F^+ non décomposées ne sont en général pas des singletons).

La conjecture suivante précise la propriété conjecturale (**EXT**) du § 2.3 dont on utilise sans commentaire les notations et définitions.

Conjecture 6.1.1. — *Pour tout $j\in\{1,\dots,n-1\}$ et tout plongement $\sigma: F_{w_0}\hookrightarrow E$, il existe une représentation localement σ-analytique admissible de longueur finie $\Pi^{j,\sigma}(\underline{k}_\sigma,\underline{D})$ de $\mathrm{GL}_n(F_{w_0})$ sur E ne dépendant que de $\underline{k}_\sigma$ et de $\underline{D}$ ainsi qu'un isomorphisme de E-espace vectoriels :*

$$\mathcal{R}^{j,\sigma}:\wedge_E^j D_{F'_{w_0},\sigma}^{\mathrm{Gal}(F'_{w_0}/F_{w_0})}\xrightarrow{\ \sim\ }\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_n(F_{w_0}),\sigma}\big(\Pi^{j,\sigma}(\underline{k}_\sigma,\underline{D}),\overline{L}(\lambda_\sigma)\otimes_E\Pi^\infty(\underline{D})\big)$$

unique à composition près à gauche par un automorphisme permis de la représentation de Weil-Deligne $\wedge_E^j D_{F'_{w_0},\sigma}^{\mathrm{Gal}(F'_{w_0}/F_{w_0})}$ tels que, pour tout $U^p=\prod_{v\nmid v_0}U_v$ et tout $\rho:\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)\to\mathrm{GL}_n(E)$ vérifiant (i), (ii), (iii) ci-dessus, on a une injection $\mathrm{GL}_n(F_{w_0})$-équivariante (en voyant $\widehat{S}(U^p,E)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}$ comme représentation de $\mathrm{GL}_n(F_{w_0})$ via ι_{G,w_0}) :

$$\Bigg(\bigoplus_{\Pi^{\mathrm{alg}}(\underline{k},\underline{D})}^{j,\sigma}\Big(\big(\otimes_{\tau\neq\sigma}\overline{L}(\lambda_\tau)\big)\otimes_E\big[\!\big[\mathcal{R}^{j,\sigma}\big(\mathrm{Fil}^{\max}\big(\wedge_E^j D_{F'_{w_0},\sigma}^{\mathrm{Gal}(F'_{w_0}/F_{w_0})}\big)\big)\big]\!\big]\Big)\otimes\varepsilon^{n-1}\circ\det\Bigg)^{\oplus d(U^p,\rho)} \hookrightarrow \widehat{S}(U^p,E)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}[\mathfrak{m}_\rho] \tag{57}$$

où $d(U^p,\rho)\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ est comme en (56). De plus, si $\mathrm{WD}(\underline{D})$ est indécomposable, alors la représentation localement $\mathbb{Q}_p$-analytique de $\mathrm{GL}_n(F_{w_0})$ à gauche détermine complètement la représentation galoisienne ρ_{w_0}.

On peut expliciter la Conjecture 6.1.1 dans tous les cas particuliers abordés au § 3, mais faire le point sur les divers résultats partiels en direction de cette conjecture serait trop fastidieux. Par exemple, on peut dire qu'elle est "essentiellement" connue dans le cas $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ ([**34**], [**16**], [**17**]).

Dans le reste de l'article, on se concentre sur le cas particulier où $n=3$, $F^+=\mathbb{Q}$ et $\underline{D}$ est comme au § 4.1 : on a des candidats explicites pour $\Pi^1(\underline{k},\underline{D})$ et $\Pi^2(\underline{k},\underline{D})$ (Corollaire 4.5.1) et on sait que $\dim_E\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}(\Pi^j(\underline{k},\underline{D}),\Pi^{\mathrm{alg}}(\underline{k},\underline{D}))=3=\dim_E\wedge_E^j D$ pour $j\in\{1,2\}$ (Corollaire 4.6.2). La Conjecture 6.1.1 devient alors :

Conjecture 6.1.2. — *Supposons $n = 3$, $F^+ = \mathbb{Q}$ et $\underline{D}$ comme en (29). Pour $j \in \{1,2\}$ il existe un isomorphisme de E-espace vectoriels :*

$$\mathcal{R}^j : \wedge_E^j D \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\big(\Pi^j(\underline{k},\underline{D}), \Pi^{\mathrm{alg}}(\underline{k},\underline{D})\big)$$

unique à scalaire non nul près tel que, pour tout $U^p = \prod_{v\nmid v_0} U_v$ et tout $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \to \mathrm{GL}_3(E)$ vérifiant (i), (ii), (iii) ci-dessus, on a une injection $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$-équivariante (en voyant $\widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an}}$ comme représentation de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ via ι_{G,w_0}) :

$$\Big(\Big(\big[\!\big[\mathcal{R}^1(\mathrm{Fil}^{\max} D)\big]\!\big] \oplus_{\Pi^{\mathrm{alg}}(\underline{k},\underline{D})} \big[\!\big[\mathcal{R}^2(\mathrm{Fil}^{\max} \wedge_E^2 D)\big]\!\big]\Big) \otimes \varepsilon^2 \circ \det\Big)^{\oplus d(U^p,\rho)} \hookrightarrow \widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho] \tag{58}$$

où $d(U^p,\rho) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ est comme en (56).

Remarque 6.1.3. — Lorsque $n = 3$, rappelons que tous les résultats de théorie automorphe classique (multiplicité 1, changement de base à $\mathrm{GL}_3(F)$, représentations galoisiennes associées, etc.) sont démontrés dans [**51**].

Dans le cas de la Conjecture 6.1.2, on vérifie facilement que la somme amalgamée :

$$\big[\!\big[\mathcal{R}^1\big(\mathrm{Fil}^{\max} D\big)\big]\!\big] \oplus_{\Pi^{\mathrm{alg}}(\underline{k},\underline{D})} \big[\!\big[\mathcal{R}^2\big(\mathrm{Fil}^{\max} \wedge_E^2 D\big)\big]\!\big] \;\cong\; \Pi^{\mathrm{alg}}(\underline{k},\underline{D}) \begin{smallmatrix} \diagup \!\!-\!\!-\; \Pi^1(\underline{k},\underline{D}) \\ \diagdown \!\!-\!\!-\; \Pi^2(\underline{k},\underline{D}) \end{smallmatrix}$$

détermine les deux représentations $[\![\mathcal{R}^1(\mathrm{Fil}^{\max} D)]\!]$ et $[\![\mathcal{R}^2(\mathrm{Fil}^{\max} \wedge_E^2 D)]\!]$. Pour $j \in \{1,2\}$ connaître $[\![\mathcal{R}^j(\mathrm{Fil}^{\max} \wedge_E^j D)]\!]$ est alors équivalent à connaître la droite $\mathcal{R}^j(\mathrm{Fil}^{\max} \wedge_E^j D)$ dans $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}(\Pi^j(\underline{k},\underline{D}), \Pi^{\mathrm{alg}}(\underline{k},\underline{D}))$ car les endomorphismes de $\Pi^j(\underline{k},\underline{D})$ et $\Pi^{\mathrm{alg}}(\underline{k},\underline{D})$ sont scalaires. Comme $\mathcal{R}^j$ est ici défini à scalaire près, c'est encore équivalent à connaître les droites $\mathrm{Fil}^{-k_3} D$ et $\mathrm{Fil}^{-k_2} D \wedge \mathrm{Fil}^{-k_3} D$ dans respectivement D et $\wedge_E^2 D$ (cf. (8)), ce qui est équivalent à connaître les sous-espaces $\mathrm{Fil}^{-k_3} D \subset \mathrm{Fil}^{-k_2} D$ de D. Finalement, on voit donc que l'énoncé 6.1.2 *implique* que la $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$-représentation $[\![\mathcal{R}^1(\mathrm{Fil}^{\max} D)]\!] \oplus_{\Pi^{\mathrm{alg}}(\underline{k},\underline{D})} [\![\mathcal{R}^2(\mathrm{Fil}^{\max} \wedge_E^2 D)]\!]$ *détermine complètement* la $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$-représentation ρ_{w_0}.

Remarque 6.1.4. — (i) Proposer un candidat précis (à scalaire non nul près) pour l'isomorphisme $\mathcal{R}^j$ dans la Conjecture 6.1.2 est par contre plus délicat car un tel isomorphisme dépend probablement de normalisations que je ne connais pas pour l'instant (pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, cf. par exemple le signe $-$ en (25)). On peut quand même conjecturer que $\mathcal{R}^1 : D \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}(\Pi^1(\underline{k},\underline{D}), \Pi^{\mathrm{alg}}(\underline{k},\underline{D}))$ doit vérifier (avec les notations du § 4.1) :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^1(Ee_1 \oplus Ee_0) &= \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\Big(C_2 - C_3 \begin{smallmatrix} \diagup\, \widetilde{C}_4 \,\diagdown \\ \diagdown\, C_4 \,\diagup \end{smallmatrix} C_5\, , \Pi^{\mathrm{alg}}(\underline{k},\underline{D})\Big) \\ \mathcal{R}^1(Ee_0) &= \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\big(C_4 - C_5\, , \Pi^{\mathrm{alg}}(\underline{k},\underline{D})\big) \end{aligned} \tag{59}$$

via les injections canoniques :

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\big(C_4 - C_5\,,\Pi^{\mathrm{alg}}(\underline{k},\underline{D})\big) \hookrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\Bigg(\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=tiny] & & \widetilde{C}_4 \arrow[dr, dashed, no head] & \\ C_2 \arrow[r, no head] & C_3 \arrow[ur, no head] \arrow[dr, no head] & & C_5 \\ & & C_4 \arrow[ur, no head] & \end{tikzcd}, \Pi^{\mathrm{alg}}(\underline{k},\underline{D})\Bigg)$$
$$\hookrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\big(\Pi^1(\underline{k},\underline{D}),\Pi^{\mathrm{alg}}(\underline{k},\underline{D})\big)$$

(noter que les deux sous-espaces de gauche ont bien respectivement dimension 1 et 2 par la même preuve que pour le Corollaire 4.6.2) et de manière symétrique pour $\mathcal{R}^2 : \wedge^2_E D \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}(\Pi^2(\underline{k},\underline{D}),\Pi^{\mathrm{alg}}(\underline{k},\underline{D}))$:

$$(60)\quad \begin{aligned} \mathcal{R}^2(Ee_2\wedge e_0 \oplus Ee_1\wedge e_0) &= \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\Bigg(\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=tiny] & & \widetilde{C}_4 \arrow[dr, dashed, no head] & \\ C_2 \arrow[r, no head] & C_3 \arrow[ur, no head] \arrow[dr, no head] & & C_5 \\ & & C_4 \arrow[ur, no head] & \end{tikzcd}, \Pi^{\mathrm{alg}}(\underline{k},\underline{D})\Bigg) \\ \mathcal{R}^2(Ee_1\wedge e_0) &= \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\big(C_4 - C_5\,,\Pi^{\mathrm{alg}}(\underline{k},\underline{D})\big). \end{aligned}$$

(ii) Pour $\mathcal{R}^j$ vérifiant (59) et (60), la Conjecture 6.1.2 implique l'existence de constituants compagnons qui sont aussi prédits par [**5**, Conj. 5.3]. Toute filtration faiblement admissible de poids de Hodge-Tate (k_1,k_2,k_3) sur un $\underline{D}$ comme en (29) est de l'une des trois formes suivantes où $(\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'')\in E^3$ et $(a,b)\in E\times E^\times$:

$$(1)\ \begin{cases} \mathrm{Fil}^{-k_2}D = \mathrm{Fil}^{-k_3}D + E(e_1+\mathcal{L}e_0) \\ \mathrm{Fil}^{-k_3}D = E(e_2+\mathcal{L}'e_1+\mathcal{L}''e_0) \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} \mathrm{Fil}^{-k_2}D = \mathrm{Fil}^{-k_3}D + E(e_2+ae_0) \\ \mathrm{Fil}^{-k_3}D = E(e_1+be_0) \end{cases}$$

$$(3)\ \begin{cases} \mathrm{Fil}^{-k_2}D = \mathrm{Fil}^{-k_3}D + Ee_0 \\ \mathrm{Fil}^{-k_3}D = E(e_2+be_1+ae_0) \end{cases}$$

(avec $\mathrm{Fil}^{-k_1}=D$), la forme (2) n'arrivant que si $k_1+k_3\geq 2k_2+3$ et la forme (3) que si $k_1+k_3\leq 2k_2-1$ ((2) et (3) ne peuvent par exemple arriver en poids de Hodge-Tate $(2,1,0)$). Dans le cas (1), on dit que la filtration de Hodge est *non critique*. Dans les cas (2) et (3), un petit calcul explicite (cf. [**4**, (6.4)] où le drapeau identité en [**4**, (6.3)] est ici $Ee_0\subset Ee_0\oplus Ee_1\subset Ee_0\oplus Ee_1\oplus Ee_2$) montre que [**5**, Conj. 5.3] prévoit en socle de $\widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho]$ (en plus de $\Pi^{\mathrm{alg}}(\underline{k},\underline{D})\otimes\varepsilon^2\circ\det$) le constituant $\mathcal{F}_{P_1}^{\mathrm{GL}_3}(L(s_2\cdot\mu),\pi^\infty_{1,1})\otimes\varepsilon^2\circ\det$ dans le cas (2), $\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(L(s_1\cdot\mu),\pi^\infty_{2,1})\otimes\varepsilon^2\circ\det$ dans le cas (3) (avec les notations du § 4.1), c'est-à-dire $C_1\otimes\varepsilon^2\circ\det$ pour $j=1$ dans le cas (2), $C_1\otimes\varepsilon^2\circ\det$ pour $j=2$ dans le cas (3). Or, dans le cas (2) on a par (59) :

$$[\![\mathcal{R}^1(\mathrm{Fil}^{\max}D)]\!] \cong \begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=tiny] & \widetilde{C}_2 \arrow[dr, dashed, no head] & & \widetilde{C}_4 \arrow[dr, dashed, no head] & \\ C_1 \arrow[ur, no head] \arrow[dr, no head] & & C_3 \arrow[ur, no head] \arrow[dr, no head] & & C_5 \\ & C_2 \arrow[ur, no head] & & C_4 \arrow[ur, no head] & \\ C_0 \arrow[ur, no head] & & & & \end{tikzcd}$$

et de même pour $[\![\mathcal{R}^2(\mathrm{Fil}^{\max}\wedge^2_E D)]\!]$ dans le cas (3) par (60) (et un calcul de filtration), ce qui fait bien apparaître (conjecturalement) ce constituant compagnon en socle.

(iii) Lorsque le socle de la somme amalgamée en (57) est irréductible (donc isomorphe à $\Pi^{\mathrm{alg}}(\underline{k},\underline{D})$), par exemple dans le cas de la Conjecture 6.1.2 lorsque la filtration de Hodge est non critique au sens de (ii) (cf. (59) et (60)), on vérifie facilement que l'injection (57) est *équivalente* à ce que la restriction à $\Pi^{\mathrm{alg}}(\underline{k},\underline{D})$ induise un isomorphisme (où l'on omet le twist par $\varepsilon^{n-1}\circ\det$) :

$$\text{(61)}\quad \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_n(F_{w_0})}\Big(\bigoplus_{\Pi^{\mathrm{alg}}(\underline{k},\underline{D})}^{j,\sigma}\Big(\big(\otimes_{\tau\neq\sigma}\overline{L}(\lambda_\tau)\big)\otimes_E [\![\mathcal{R}^{j,\sigma}\big(\mathrm{Fil}^{\max}\big(\wedge_E^j D_{F'_{w_0},\sigma}^{\mathrm{Gal}(F'_{w_0}/F_{w_0})}\big)\big)]\!]\Big),$$

$$\widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho]\Big)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_n(F_{w_0})}\big(\Pi^{\mathrm{alg}}(\underline{k},\underline{D}),\widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho]\big).$$

6.2. Le théorème principal local-global pour $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$**.** — On énonce le théorème de compatibilité local-global de cet article et on en commence la preuve.

On conserve les notations du § 6.1. Le théorème principal est une version faible de la Conjecture 6.1.2 sous la forme (61).

Théorème 6.2.1. — *Supposons $n=3$, $F^+=\mathbb{Q}$ et $\underline{D}$ comme en (29). Soit $U^p=\prod_{\ell\nmid p}U_\ell$ et $\rho:\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)\to\mathrm{GL}_3(E)$ tels que :*
(i) ρ est absolument irréductible non ramifiée aux places de F au-dessus de $D(U^p)$;
(ii) $\widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{alg}}[\mathfrak{m}_\rho]\neq 0$;
(iii) ρ_{w_0} a pour poids de Hodge-Tate $\underline{k}$ et module de Deligne-Fontaine $\underline{D}$;
(iv) la filtration sur $\underline{D}$ associée à ρ_{w_0} est non critique (cf. (ii) de la Remarque 6.1.4);
(v) une seule représentation automorphe π de $G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ contribue à $\widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{alg}}[\mathfrak{m}_\rho]$.
Alors il existe une unique représentation de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ de la forme $\Pi^{\mathrm{alg}}(\underline{k},\underline{D})\begin{smallmatrix}\diagup\ \Pi^1(\underline{k},\underline{D})\\ \diagdown\ \Pi^2(\underline{k},\underline{D})\end{smallmatrix}$ *de socle* $\Pi^{\mathrm{alg}}(\underline{k},\underline{D})=\overline{L}(\lambda)\otimes_E\mathrm{St}_3^\infty\otimes(\mathrm{nr}(\alpha)\circ\det)$ *telle que :*

$$\text{(62)}\quad \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\Big(\Pi^{\mathrm{alg}}(\underline{k},\underline{D})\begin{smallmatrix}\diagup\ \Pi^1(\underline{k},\underline{D})\\ \diagdown\ \Pi^2(\underline{k},\underline{D})\end{smallmatrix}\otimes\varepsilon^2\circ\det,\widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho]\Big)$$

$$\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\big(\Pi^{\mathrm{alg}}(\underline{k},\underline{D})\otimes\varepsilon^2\circ\det,\widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho]\big).$$

Remarque 6.2.2. — (i) L'hypothèse (iv) dans l'énoncé du Théorème 6.2.1 signifie qu'il n'y a pas de constituant compagnon, et c'est pour ça que la somme amalgamée en (62) est de socle irréductible (cf. les (ii) et (iii) de la Remarque 6.1.4, cette hypothèse est par exemple automatiquement satisfaite si $\underline{k}=(2,1,0)$). Il est bien possible que l'on puisse se dispenser de cette hypothèse, au prix d'efforts techniques supplémentaires auxquels l'auteur a renoncé.
(ii) L'hypothèse (v) dans l'énoncé du Théorème 6.2.1 est équivalente au fait que le L-paquet global correspondant à ρ contient une unique représentation automorphe (tempérée) π de $G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ ayant des invariants sous U^p. Cela arrive si et seulement si les L-paquets locaux aux places ℓ non décomposées dans F contiennent une unique représentation π_ℓ de $G(\mathbb{Q}_\ell)$ telle que $\pi_\ell^{U_\ell}\neq 0$. C'est le cas par exemple lorsque U_ℓ est maximal hyperspécial pour ℓ inerte dans F et le L-paquet local en ℓ ramifié dans

F est la représentation de Steinberg de $G(\mathbb{Q}_\ell)$ à torsion près (cf. [**51**, § 12.2]). En l'absence de cette condition (v), il devrait quand même être possible, en raffinant la preuve qui suit, de montrer que $\widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho]$ contient des représentations de la forme $\Pi^{\mathrm{alg}}(\underline{k},\underline{D}) \begin{smallmatrix} \diagup\!\!- \Pi^1(\underline{k},\underline{D}) \\ \diagdown\!\!- \Pi^2(\underline{k},\underline{D}) \end{smallmatrix}$. Mais à cause des contributions des diverses π, la représentation σ dans (63) ci-dessous n'est plus irréductible, et j'ignore alors comment montrer que ces représentations sont toutes isomorphes.
(iii) Rappelons que l'isomorphisme (62) est équivalent à une injection $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$-équivariante $\Big(\Pi^{\mathrm{alg}}(\underline{k},\underline{D}) \begin{smallmatrix} \diagup\!\!- \Pi^1(\underline{k},\underline{D}) \\ \diagdown\!\!- \Pi^2(\underline{k},\underline{D}) \end{smallmatrix} \otimes \varepsilon^2\circ\det\Big)^{\oplus d(U^p,\rho)} \hookrightarrow \widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho]$, cf. le (iii) de la Remarque 6.1.4.

Le reste de l'article est consacré à la preuve du Théorème 6.2.1. On fixe $U^p = \prod_{\ell\nmid p} U_\ell$ et ρ comme dans l'énoncé du Théorème 6.2.1 et on utilise sans commentaire les notations du § 4. On pose $\mathbb{A}_{\Sigma(U^p)} \overset{\text{déf}}{=} \prod_{\ell\in\Sigma(U^p)}\mathbb{Q}_\ell$, $U_{\Sigma(U^p)} \overset{\text{déf}}{=} \prod_{\ell\in\Sigma(U^p)} U_\ell$ et $H_{\Sigma(U^p)} \overset{\text{déf}}{=} E[U_{\Sigma(U^p)}\backslash G(\mathbb{A}_{\Sigma(U^p)})/U_{\Sigma(U^p)}]$ (algèbre de Hecke munie du produit de convolution). L'algèbre $H_{\Sigma(U^p)}$ agit naturellement sur $\widehat{S}(U^p,E)$, $\widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an}}$, $\widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{alg}}$, et (55), (56) et la condition (v) dans l'énoncé du Théorème 6.2.1 impliquent que l'on a un isomorphisme $H_{\Sigma(U^p)}\times\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$-équivariant :

$$\widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{alg}}[\mathfrak{m}_\rho] \cong \sigma\otimes_E \big(\Pi^{\mathrm{alg}}(\underline{k},\underline{D})\otimes\varepsilon^2\circ\det\big) \tag{63}$$

où σ est une représentation absolument irréductible de dimension finie de $H_{\Sigma(U^p)}$ sur E. On rappelle que U^p est dit *suffisamment petit* s'il existe ℓ tel que U_ℓ n'a pas d'élément non trivial d'ordre fini.

Étape 1 : Il suffit de montrer le Théorème 6.2.1 pour U^p suffisamment petit.
Preuve : Soit $\ell'\neq p$ un premier totalement décomposé dans F tel que $U_{\ell'}$ est maximal, $U'_{\ell'}\subset U_{\ell'}$ un sous-groupe ouvert distingué suffisamment petit pour qu'il n'ait pas d'élément non trivial d'ordre fini et $U'^p \overset{\text{déf}}{=} U'_{\ell'}\prod_{\ell\nmid p\ell'}U_\ell$. On a un isomorphisme $G(\mathbb{Q}_p)$-équivariant $\widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an}} \xrightarrow{\sim} (\widehat{S}(U'^p,E)^{\mathrm{an}})^{U^p/U'^p} \cong (\widehat{S}(U'^p,E)^{\mathrm{an}})^{U_{\ell'}/U'_{\ell'}}$ compatible à l'action de $\mathbb{T}(U'^p)$. Comme U'^p est suffisamment petit, on a un isomorphisme (62) avec U'^p au lieu de U^p qui est de plus clairement compatible à l'action de U^p (noter que l'hypothèse (v) dans le Théorème 6.2.1 est bien encore satisfaite avec U'^p puisque l'on n'a modifié U^p qu'en une place où le groupe G est GL_n, donc où le L-paquet local est un singleton). En prenant les invariants sous U^p, on en déduit un isomorphisme :

$$\begin{aligned} &\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\Big(\Pi^{\mathrm{alg}}(\underline{k},\underline{D}) \begin{smallmatrix} \diagup\!\!- \Pi^1(\underline{k},\underline{D}) \\ \diagdown\!\!- \Pi^2(\underline{k},\underline{D}) \end{smallmatrix} \otimes\varepsilon^2\circ\det, \widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho^{U'^p}]\Big) \\ &\qquad\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\big(\Pi^{\mathrm{alg}}(\underline{k},\underline{D})\otimes\varepsilon^2\circ\det, \widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho^{U'^p}]\big). \end{aligned} \tag{64}$$

où l'on a noté $\mathfrak{m}_\rho^{U'^p}$ l'idéal maximal de $\mathbb{T}(U'^p)$ associé à ρ. Il suffit de montrer que l'on peut remplacer $\mathfrak{m}_\rho^{U'^p}$ par $\mathfrak{m}_\rho$. Comme $\mathbb{T}(U^p)=\mathbb{T}(U'^p)[T_w^{(1)},\dots,T_w^{(n)},T_{w'}^{(1)},\dots,T_{w'}^{(n)}]$ où w,w' sont les deux places de F au-dessus de ℓ', il suffit de montrer que $T_w^{(j)}$ agit sur (64) par $(-1)^j\mathrm{Norm}(w)^{-j(j-1)/2}a_w^{(j)}$ pour $j\in\{1,\dots,n\}$ et de même avec w'. Comme l'isomorphisme (64) commute à l'action de $\mathbb{T}(U^p)$, il suffit de le montrer sur le terme de droite. Comme :

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\big(\Pi^{\mathrm{alg}}(\underline{k},\underline{D})\otimes\varepsilon^2\circ\det,\widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{alg}}[\mathfrak{m}_\rho^{U'^p}]\big)\\&\qquad\qquad\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\big(\Pi^{\mathrm{alg}}(\underline{k},\underline{D})\otimes\varepsilon^2\circ\det,\widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho^{U'^p}]\big)\end{aligned}$$

il suffit de montrer que $\widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{alg}}[\mathfrak{m}_\rho]\xrightarrow{\sim}\widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{alg}}[\mathfrak{m}_\rho^{U'^p}]$. Cela découle de (55) pour U'^p et de la compatibilité local-global en ℓ' ([**13**]).

Étape 2 : Il suffit de montrer que, pour $j\in\{1,2\}$, il existe une unique représentation $\Pi^{\mathrm{alg}}(\underline{k},\underline{D})$ — $\Pi^j(\underline{k},\underline{D})$ de socle $\Pi^{\mathrm{alg}}(\underline{k},\underline{D})$ telle que :

$$\begin{aligned}(65)\quad&\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\big(\Pi^{\mathrm{alg}}(\underline{k},\underline{D})-\Pi^j(\underline{k},\underline{D})\ \otimes\varepsilon^2\circ\det,\widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho]\big)\\&\qquad\qquad\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\big(\Pi^{\mathrm{alg}}(\underline{k},\underline{D})\otimes\varepsilon^2\circ\det,\widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho]\big).\end{aligned}$$

Preuve : On laisse au lecteur l'exercice de vérifier que si les deux représentations $\Pi^{\mathrm{alg}}(\underline{k},\underline{D})$ — $\Pi^j(\underline{k},\underline{D})$ pour $j\in\{1,2\}$ ont pour socle $\Pi^{\mathrm{alg}}(\underline{k},\underline{D})$, alors leur somme amalgamée a encore pour socle $\Pi^{\mathrm{alg}}(\underline{k},\underline{D})$, et que l'énoncé ci-dessus implique l'unicité de la représentation du Théorème 6.2.1. Montrons l'existence. On a un diagramme commutatif de suite exactes (où l'on omet le twist par $\varepsilon^2\circ\det$ et où l'on note Hom pour $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}$, Π^{alg} pour $\Pi^{\mathrm{alg}}(\underline{k},\underline{D})$, Π^j pour $\Pi^j(\underline{k},\underline{D})$ et $\widehat{S}[\rho]$ pour $\widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho]$) :

$$\begin{array}{ccccccc}0\to\mathrm{Hom}\Big(\Pi^{\mathrm{alg}}\begin{smallmatrix}\diagup\ \Pi^1\\ \diagdown\ \Pi^2\end{smallmatrix},\widehat{S}[\rho]\Big)&\to&\mathrm{Hom}\left(\begin{matrix}\Pi^{\mathrm{alg}}-\Pi^1\\ \oplus\\ \Pi^{\mathrm{alg}}-\Pi^2\end{matrix},\widehat{S}[\rho]\right)&\to&\mathrm{Hom}\big(\Pi^{\mathrm{alg}},\widehat{S}[\rho]\big)&&\\ \downarrow&&\downarrow&&\|&&\\ 0\to\quad\mathrm{Hom}\big(\Pi^{\mathrm{alg}},\widehat{S}[\rho]\big)&\to&\mathrm{Hom}\big(\Pi^{\mathrm{alg}}\oplus\Pi^{\mathrm{alg}},\widehat{S}[\rho]\big)&\to&\mathrm{Hom}\big(\Pi^{\mathrm{alg}},\widehat{S}[\rho]\big)&\to&0\end{array}$$

où les deux flèches verticales de gauche sont la restriction à Π^{alg} (de chaque facteur direct pour celle du milieu) et où la suite exacte du bas provient de $0\to\Pi^{\mathrm{alg}}\to\Pi^{\mathrm{alg}}\oplus\Pi^{\mathrm{alg}}\to\Pi^{\mathrm{alg}}\to 0$, $v\mapsto v\oplus -v$, $v_1\oplus v_2\mapsto v_1+v_2$. Comme les deux flèches verticales de droite sont des isomorphismes, une chasse au diagramme triviale montre qu'il en est de même pour celle tout à gauche.

On se limite dans la suite à montrer (65) pour $j=2$ (et U^p suffisamment petit), la preuve pour $j=1$ étant symétrique. On rappelle que $C_0=\Pi^{\mathrm{alg}}(\underline{k},\underline{D})=\overline{L}(\lambda)\otimes_E\mathrm{St}_3^\infty\otimes(\mathrm{nr}(\alpha)\circ\det)$ et que les constituants C_i sont définis au § 4.1.

Étape 3 : On montre l'unicité d'une représentation vérifiant (65) (pour $j = 2$). Il découle de (56) et des deux derniers isomorphismes en (53) :

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\big(C_0 — C_2 \otimes \varepsilon^2 \circ \det, \widehat{S}(U^p, E)^{\mathrm{alg}}[\mathfrak{m}_\rho]\big) = 0\\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\big(C_0 — C_4 \otimes \varepsilon^2 \circ \det, \widehat{S}(U^p, E)^{\mathrm{alg}}[\mathfrak{m}_\rho]\big) = 0\end{aligned} \tag{66}$$

et des résultats du § 4 par des dévissages standard :

$$\begin{aligned}\dim_E \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\Big(C_i, C_0 — \cdots \begin{smallmatrix}\nearrow \widetilde{C}_{i-1}\\ \searrow C_{i-1}\end{smallmatrix}\Big) &= 1 \text{ si } i \in \{3,5\}\\ \dim_E \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\big(\widetilde{C}_i, C_0 — \cdots — C_{i-1}\big) &= 1 \text{ si } i \in \{2,4\}\\ \dim_E \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\big(C_i, C_0 — \cdots — C_{i-1}\big) &= 2 \text{ si } i \in \{2,4\}.\end{aligned} \tag{67}$$

Supposons qu'il existe deux représentations Π et Π' de la forme $C_0 — \cdots — C_5$ satisfaisant (65). Notons $\Pi_1 \subseteq \Pi$, $\Pi'_1 \subseteq \Pi'$ (resp. Π_2, Π'_2) les deux sous-représentations respectives de la forme $C_0 - C_1$ (resp. $C_0 - C_1 - C_2$). Utilisant (65), considérons des injections $\Pi \otimes \varepsilon^2 \circ \det \hookrightarrow \widehat{S}(U^p, E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho]$ et $\Pi' \otimes \varepsilon^2 \circ \det \hookrightarrow \widehat{S}(U^p, E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho]$ qui ont même restriction à $C_0 \otimes \varepsilon^2 \circ \det$. On en déduit un morphisme canonique pour $i \in \{1, 2\}$:

$$\psi_i : (\Pi_i \oplus_{C_0} \Pi'_i) \otimes \varepsilon^2 \circ \det \longrightarrow \widehat{S}(U^p, E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho].$$

Comme $\Pi_1 \oplus_{C_0} \Pi'_1 \cong \Pi_1 \oplus_{C_0} \Pi_1 \cong C_1 \oplus \Pi_1$ (par la Proposition 4.2.1) et $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}(C_1 \otimes \varepsilon^2 \circ \det, \widehat{S}(U^p, E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho]) = 0$ (sinon cela contredit la Proposition 6.3.4 ci-dessous, cf. la fin de la preuve de l'Étape 2 au § 6.4), on en déduit que ψ_2 se factorise en un morphisme :

$$\overline{\psi}_2 : (\Pi_2 \oplus_{\Pi_1 \cong \Pi'_1} \Pi'_2) \otimes \varepsilon^2 \circ \det \longrightarrow \widehat{S}(U^p, E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho].$$

Supposons $\Pi_2 \ncong \Pi'_2$, alors la représentation $\Pi_2 \oplus_{\Pi_1 \cong \Pi'_1} \Pi'_2$ est indécomposable de socle C_0 et $\overline{\psi}_2$ est injectif. De plus, le cas $i = 2$ en (67) implique que l'on a une injection $C_0 — C_2 \hookrightarrow \Pi_2 \oplus_{\Pi_1 \cong \Pi'_1} \Pi'_2$ (car on a amalgamé les deux "directions" du Ext^1). Mais cela contredit la première nullité en (66), et donc on a $\Pi_2 \cong \Pi'_2$. En utilisant (67), on rajoute de même un par un les autres constituants pour obtenir finalement $\Pi \simeq \Pi'$.

Étape 4 : Il suffit de montrer qu'il *existe* une représentation $C_0 — \cdots — C_5$ telle que :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\big(C_0 — \cdots — C_5 \otimes \varepsilon^2 \circ \det, \widehat{S}(U^p, E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho]\big) \neq 0. \tag{68}$$

Preuve : Par [**4**, Cor. 3.4] et la Proposition 6.3.4 (en tenant compte de [**5**, Rem. 6.7]), on déduit facilement que la flèche (65) de restriction à $C_0 \otimes \varepsilon^2 \circ \det$ est injective. Comme (65) est par ailleurs $H_{\Sigma(U^p)}$-équivariante ($H_{\Sigma(U^p)}$ agissant sur $\widehat{S}(U^p, E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho]$ des deux côtés), par (63) et l'irréductibilité de σ on voit qu'il suffit de montrer (68).

Pour montrer (68), on va avoir besoin de quelques résultats techniques, que l'on présente dans le paragraphe qui suit (et dans l'appendice).

6.3. Deux propositions. — Ce paragraphe est consacré à la preuve de deux propositions (sans surprise) relatives à $\widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an}}$ (Proposition 6.3.3 et Proposition 6.3.4).

On conserve toutes les notations de l'article et on voit $\widehat{S}(U^p,E)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}$ comme représentation de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ via ι_{G,w_0}.

Si H est un groupe p-adique analytique compact (sur $\mathbb{Z}_p$), on note $\mathcal{C}^{\mathrm{an}}(H,E)$ le E-espace vectoriel de type compact des fonctions localement analytiques sur H avec action à gauche de H par translation à droite sur les fonctions.

Lemme 6.3.1. — *Soit $U^p=\prod_{\ell\nmid p}U_\ell$ un sous-groupe ouvert compact suffisamment petit de $G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^\infty)$, alors on a un isomorphisme $G(\mathbb{Z}_p)$-équivariant $\widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an}}\cong\mathcal{C}^{\mathrm{an}}(G(\mathbb{Z}_p),E)^{\oplus r}$ pour un entier $r\geq 1$.*

Démonstration. — Cela découle de la preuve de [**18**, Lem. 3.3.1]. □

On rappelle que $\overline{N}\subset\mathrm{GL}_n$ est le groupe algébrique des matrices unipotentes supérieures et on note $\overline{N}(\mathbb{Z}_p)$ le sous-groupe de $\overline{N}(\mathbb{Q}_p)$ des matrices unipotentes supérieures à valeurs dans $\mathbb{Z}_p$. Soit Π une représentation localement analytique de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ sur E. On rappelle aussi que $\Pi^{\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}$ est naturellement muni d'une action de Hecke par le monoïde $T(\mathbb{Q}_p)^+\stackrel{\text{déf}}{=}\{t\in T(\mathbb{Q}_p),t\overline{N}(\mathbb{Z}_p)t^{-1}\subseteq\overline{N}(\mathbb{Z}_p)\}$ donnée par $(v\in\Pi^{\overline{N}(\mathbb{Z}_p)},t\in T(\mathbb{Q}_p)^+)$:

$$\pi_t v\stackrel{\text{déf}}{=}\sum_{\overline{n}\in\overline{N}(\mathbb{Z}_p)/t\overline{N}(\mathbb{Z}_p)t^{-1}}(\overline{n}t)v. \tag{69}$$

Exemple 6.3.2. — Si $n=3$ on a des injections $T(\mathbb{Q}_p)^+$-équivariantes $1\hookrightarrow(\mathrm{St}_3^\infty)^{\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}$, $|\cdot|^{-1}\otimes|\cdot|\otimes 1\oplus|\cdot|^{-1}\otimes|\cdot|^{-1}\otimes|\cdot|^2\hookrightarrow(v_{P_1}^\infty)^{\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}$ et $1\otimes|\cdot|^{-1}\otimes|\cdot|\oplus|\cdot|^{-2}\otimes|\cdot|\otimes|\cdot|\hookrightarrow(v_{P_2}^\infty)^{\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}$. Plus précisément le terme de gauche coïncide avec le sous-espace de droite sur lequel l'action de $T(\mathbb{Q}_p)^+$ s'étend à $T(\mathbb{Q}_p)$, car ce sous-espace n'est autre que le foncteur de Jacquet $J_{\overline{N}(\mathbb{Q}_p)}$ usuel (convenablement tordu) par [**32**, Prop. 4.3.4].

On note $\overline{\mathfrak{b}}$ (resp. $\overline{\mathfrak{n}}$, resp. $\mathfrak{t}$) la E-algèbre de Lie de $\overline{B}\times_{\mathbb{Q}_p}E$ (resp. $\overline{N}\times_{\mathbb{Q}_p}E$, resp. $T\times_{\mathbb{Q}_p}E$). Le sous-E-espace vectoriel $\Pi[\overline{\mathfrak{n}}=0]$ des éléments de Π annulés par $\overline{\mathfrak{n}}$ est stable par l'action de $\overline{B}(\mathbb{Q}_p)$, donc par celle de $\overline{\mathfrak{b}}$, et par l'action (lisse) de $\overline{N}(\mathbb{Q}_p)$. Le sous-$E$-espace vectoriel $\Pi^{\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}\subseteq\Pi[\overline{\mathfrak{n}}=0]$ est stable par $\overline{B}(\mathbb{Z}_p)$, donc par $\mathfrak{t}$, et la projection canonique $\Pi[\overline{\mathfrak{n}}=0]\twoheadrightarrow\Pi^{\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}=\Pi[\overline{\mathfrak{n}}=0]^{\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}$ commute aux actions de $\mathfrak{t}$. Si $\eta:U(\mathfrak{t})\to E$ est un caractère, on note $\Pi^{\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}[\mathfrak{t}=\eta]$ (resp. $\Pi[\overline{\mathfrak{n}}=0][\mathfrak{t}=\eta]$) le sous-espace de $\Pi^{\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}$ (resp. $\Pi[\overline{\mathfrak{n}}=0]$) où $U(\overline{\mathfrak{b}})$ agit par η via $U(\overline{\mathfrak{b}})\twoheadrightarrow U(\mathfrak{t})$. On a $\Pi^{\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}[\mathfrak{t}=\eta]=\Pi[\overline{\mathfrak{n}}=0][\mathfrak{t}=\eta]^{\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}$ qui est stable par $T(\mathbb{Q}_p)^+$ dans $\Pi^{\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}$ pour l'action de Hecke (69) de $T(\mathbb{Q}_p)^+$ (pour tout cela, voir le début de la preuve de [**7**, Th. 5.5]).

La proposition qui suit est due à Emerton.

Proposition 6.3.3. — *Soit* $U^p = \prod_{\ell \nmid p} U_\ell$ *un sous-groupe ouvert compact suffisamment petit de* $G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^\infty)$, $0 \to \widehat{S}(U^p, E)^{\mathrm{an}} \to \Pi \to \Pi_1 \to 0$ *une suite exacte de représentations localement analytiques admissibles de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ *sur* E, $\chi : T(\mathbb{Q}_p) \to E$ *un caractère localement analytique et* $\eta : U(\mathfrak{t}) \to E$ *le caractère dérivé. Alors on a une suite exacte courte* $T(\mathbb{Q}_p)^+$*-équivariante :*

$$0 \longrightarrow (\widehat{S}(U^p, E)^{\mathrm{an}})^{\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}[\mathfrak{t} = \eta] \longrightarrow \Pi^{\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}[\mathfrak{t} = \eta] \longrightarrow \Pi_1^{\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}[\mathfrak{t} = \eta] \longrightarrow 0.$$

De plus, les sous-espaces propres généralisés $(\widehat{S}(U^p, E)^{\mathrm{an}})^{\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}[\mathfrak{t} = \eta]_\chi$, $\Pi^{\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}[\mathfrak{t} = \eta]_\chi$, $\Pi_1^{\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}[\mathfrak{t} = \eta]_\chi$ *pour le caractère* χ *de* $T(\mathbb{Q}_p)^+$ *sont des* E*-espaces vectoriels de dimension finie et on a une suite exacte courte :*

$$0 \longrightarrow (\widehat{S}(U^p, E)^{\mathrm{an}})^{\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}[\mathfrak{t} = \eta]_\chi \longrightarrow \Pi^{\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}[\mathfrak{t} = \eta]_\chi \longrightarrow \Pi_1^{\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}[\mathfrak{t} = \eta]_\chi \longrightarrow 0.$$

En particulier si $\mathrm{Hom}_{T(\mathbb{Q}_p)^+}(\chi, \Pi_1^{\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}) \neq 0$ *alors* $\mathrm{Hom}_{T(\mathbb{Q}_p)^+}(\chi, \Pi^{\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}) \neq 0$.

Démonstration. — La dernière partie de l'énoncé découle de la première suite exacte, cf. [**10**, Prop. 4.1]. On montre ici la surjectivité de la flèche $\Pi^{\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}[\mathfrak{t} = \eta] \to \Pi_1^{\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}[\mathfrak{t} = \eta]$. Comme prendre les invariants sous le groupe compact $\overline{N}(\mathbb{Z}_p)$ est un foncteur exact sur la catégorie des représentations lisses de $\overline{N}(\mathbb{Q}_p)$ sur E, il suffit de montrer la surjectivité de $\Pi[\overline{\mathfrak{n}} = 0][\mathfrak{t} = \eta] \to \Pi_1[\overline{\mathfrak{n}} = 0][\mathfrak{t} = \eta]$. En notant par $V \otimes (-\eta)$ l'action de $\overline{\mathfrak{b}}$ tordue par $-\eta$ sur un $\overline{\mathfrak{b}}$-module V (i.e. $\overline{b} \cdot v = \overline{b}v - \eta(\overline{b})v$ où $\overline{b} \cdot v$ est l'action tordue), il suffit de montrer que $H^1(\overline{\mathfrak{b}}, \widehat{S}(U^p, E)^{\mathrm{an}} \otimes (-\eta)) = 0$ où $H^i(\overline{\mathfrak{b}}, \star)$ désigne les groupes de cohomologie d'algèbre de Lie usuels (voir par exemple [**55**, § 3]).

L'isomorphisme $\mathcal{C}^{\mathrm{an}}(\overline{B}(\mathbb{Z}_p), E) \otimes \chi^{-1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^{\mathrm{an}}(\overline{B}(\mathbb{Z}_p), E)$, $f \mapsto (b \mapsto \chi^{-1}(b) f(b))$ est $\overline{B}(\mathbb{Z}_p)$-équivariant et on a un isomorphisme $\overline{B}(\mathbb{Z}_p)$-équivariant par [**43**, Rem. 5.4] :

$$\mathcal{C}^{\mathrm{an}}(G(\mathbb{Z}_p), E) \cong \mathcal{C}^{\mathrm{an}}(\overline{B}(\mathbb{Z}_p), E) \widehat{\otimes}_{E,\pi} \mathcal{C}^{\mathrm{an}}(G(\mathbb{Z}_p)/\overline{B}(\mathbb{Z}_p), E) \tag{70}$$

où l'action de $\overline{B}(\mathbb{Z}_p)$ est triviale sur le facteur de droite et où $\widehat{\otimes}_{E,\pi}$ est le séparé complété du produit tensoriel avec topologie projective. Avec le Lemme 6.3.1, on en déduit un isomorphisme $\overline{B}(\mathbb{Z}_p)$-équivariant :

$$\widehat{S}(U^p, E)^{\mathrm{an}} \otimes \chi^{-1} \cong \mathcal{C}^{\mathrm{an}}(G(\mathbb{Z}_p), E)^{\oplus r}. \tag{71}$$

Comme le $\overline{\mathfrak{b}}$-module sous-jacent à $\widehat{S}(U^p, E)^{\mathrm{an}} \otimes \chi^{-1}$ est $\widehat{S}(U^p, E)^{\mathrm{an}} \otimes (-\eta)$, par (71) il suffit de montrer $H^1(\overline{\mathfrak{b}}, \mathcal{C}^{\mathrm{an}}(G(\mathbb{Z}_p), E)) = 0$. Par la preuve de [**55**, Prop. 3.1] le complexe :

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Hom}_E\Big(\bigwedge_E^i \overline{\mathfrak{b}}, \mathcal{C}^{\mathrm{an}}\big(\overline{B}(\mathbb{Z}_p), E\big)\Big) \longrightarrow \mathrm{Hom}_E\Big(\bigwedge_E^{i+1} \overline{\mathfrak{b}}, \mathcal{C}^{\mathrm{an}}\big(\overline{B}(\mathbb{Z}_p), E\big)\Big) \longrightarrow \cdots$$

calculant la cohomologie $H^i(\overline{\mathfrak{b}},\mathcal{C}^{\rm an}(\overline{B}(\mathbb{Z}_p),E))$ est exact avec morphismes de transition stricts (cf. la fin de la preuve de [**55**, Prop. 3.1]). Par (70) et l'argument de la preuve de [**57**, Cor. 4.14] (utilisant [**57**, Lem. 4.13]) on déduit que le complexe :

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Hom}_E\Big(\bigwedge_E^{i}\overline{\mathfrak{b}},\mathcal{C}^{\rm an}\big(G(\mathbb{Z}_p),E\big)\Big)\longrightarrow \mathrm{Hom}_E\Big(\bigwedge_E^{i+1}\overline{\mathfrak{b}},\mathcal{C}^{\rm an}\big(G(\mathbb{Z}_p),E\big)\Big)\longrightarrow\cdots$$

est encore exact. En particulier $H^i(\overline{\mathfrak{b}},\mathcal{C}^{\rm an}(G(\mathbb{Z}_p),E))=0$ pour $i\geq 1$. $\square$

On passe maintenant à la seconde proposition. On fixe U^p et ρ comme dans l'énoncé du Théorème 6.2.1 (l'hypothèse (v) dans le Théorème 6.2.1 n'est en fait pas nécessaire ici).

Proposition 6.3.4. — *Pour $\chi:T(\mathbb{Q}_p)\to E$ caractère localement analytique, on a :*

$$\mathrm{Hom}_{T(\mathbb{Q}_p)^+}\big(\chi(\varepsilon^2\circ\det),\widehat{S}(U^p,E)^{\rm an}[\mathfrak{m}_\rho]^{\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}\big)\neq 0$$

si et seulement si $\chi=t^\lambda\mathrm{nr}(\alpha)\circ\det$.

Démonstration. — Par [**2**, Prop. 1.3.2], le (φ,Γ)-module $D_{\rm rig}(\rho_{w_0})$ a une unique triangulation dont les gradués successifs ont pour caractère de $T(\mathbb{Q}_p)$ associé $t^{-\mu}(\varepsilon^2\otimes\varepsilon\otimes 1)(t)(\mathrm{nr}(\alpha)\circ\det)(t)$ (rappelons que $\mu=-\lambda$). Le même argument que dans la preuve de [**5**, Prop. 8.1(i)] donne alors qu'un χ tel que $\mathrm{Hom}_{T(\mathbb{Q}_p)^+}(\chi(\varepsilon^2\circ\det),\widehat{S}(U^p,E)^{\rm an}[\mathfrak{m}_\rho]^{\overline{N}(\mathbb{Z}_p)})\neq 0$ est de la forme $t\mapsto t^{-w\cdot\mu}(\mathrm{nr}(\alpha)\circ\det)(t)$ pour une permutation w de $\mathcal{S}_3$. Comme la filtration de Hodge sur $\underline{D}$ associée à ρ_{w_0} est non critique par hypothèse (cf. le (ii) de la Remarque 6.1.4), le même argument que dans la preuve de [**5**, Prop. 9.2] donne ensuite que la permutation w doit être triviale car, avec les notations de *loc. cit.*, on a $w_{w_0}^{\rm alg}(w_{w_0})=1$. $\square$

6.4. Fin de la preuve du théorème principal. — On montre (68), ce qui termine la preuve du Théorème 6.2.1.

On conserve toutes les notations des §§ 6.1 à 6.3 et on suppose U^p suffisamment petit. On suppose aussi $\alpha=1$ pour alléger les notations (l'argument pour $\alpha\neq 1$ étant strictement le même). La stratégie de la preuve qui suit est analogue à celle de [**6**, Prop. 5.5.4].

Étape 1.
On fixe une injection $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$-équivariante $j_0: C_0\otimes\varepsilon^2\circ\det\hookrightarrow\widehat{S}(U^p,E)^{\rm an}[\mathfrak{m}_\rho]$ et on considère la somme amalgamée avec l'unique représentation $C_0 - C_1$:

$$\mathcal{S}\overset{\text{déf}}{=}\widehat{S}(U^p,E)^{\rm an}\bigoplus_{j_0,C_0\otimes\varepsilon^2\circ\det} C_0 - C_1\otimes\varepsilon^2\circ\det$$

où $\mathbb{T}(U^p)$ agit sur $\mathcal{S}$ en agissant sur le terme de droite via $\mathbb{T}(U^p) \twoheadrightarrow \mathbb{T}(U^p)/\mathfrak{m}_\rho \cong E$. On a donc des suites exactes $\mathbb{T}(U^p) \times \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$-équivariante :

$$\begin{gathered} 0 \longrightarrow \widehat{S}(U^p, E)^{\mathrm{an}} \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow C_1 \otimes \varepsilon^2 \circ \det \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow \widehat{S}(U^p, E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho] \longrightarrow \mathcal{S}[\mathfrak{m}_\rho] \longrightarrow C_1 \otimes \varepsilon^2 \circ \det \longrightarrow 0. \end{gathered} \tag{72}$$

En utilisant :

$$\mathcal{F}_B^{\mathrm{GL}_3}(L(s_1 \cdot \mu), 1) \cong \mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\big(L(s_1 \cdot \mu), \mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{P_2(\mathbb{Q}_p)} 1\big) \twoheadrightarrow \mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}\big(L(s_1 \cdot \mu), 1 \otimes_E \mathrm{St}_2^\infty\big) = C_1$$

et en appliquant l'adjonction [**5**, Th. 4.3] avec $P = B(\mathbb{Q}_p)$, $W = s_1 \cdot \mu$, $\pi_P = 1$ et $\Pi = C_1$ (rappelons que C_1 est très fortement admissible, étant contenu dans une série principale localement analytique cf. [**33**, Prop. 2.1.2]), on obtient $\mathrm{Hom}_{T(\mathbb{Q}_p)^+}(t^{-s_1 \cdot \mu}, C_1^{\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}) \neq 0$. Par la Proposition 6.3.3 on a une suite exacte courte $\mathbb{T}(U^p) \times T(\mathbb{Q}_p)^+$-équivariante de E-espaces vectoriels de dimension finie :

$$0 \longrightarrow \big(\widehat{S}(U^p, E)^{\mathrm{an}}\big)^{\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}[\mathfrak{t}{=}\eta]_{t^{-s_1 \cdot \mu}(\varepsilon^2 \circ \det)} \longrightarrow \mathcal{S}^{\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}[\mathfrak{t}{=}\eta]_{t^{-s_1 \cdot \mu}(\varepsilon^2 \circ \det)} \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

où on note $\eta : U(\mathfrak{t}) \to E$ le caractère dérivé de $t^{-s_1 \cdot \mu}(\varepsilon^2 \circ \det)$. On en déduit $(\mathcal{S}^{\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}[\mathfrak{t} = \eta]_{t^{-s_1 \cdot \mu}(\varepsilon^2 \circ \det)})_{\mathfrak{m}_\rho} \neq 0$ et donc $(\mathcal{S}^{\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}[\mathfrak{t} = \eta]_{t^{-s_1 \cdot \mu}(\varepsilon^2 \circ \det)})[\mathfrak{m}_\rho] = \mathcal{S}[\mathfrak{m}_\rho]^{\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}[\mathfrak{t} = \eta]_{t^{-s_1 \cdot \mu}(\varepsilon^2 \circ \det)} \neq 0$, d'où :

$$\mathrm{Hom}_{T(\mathbb{Q}_p)^+}\big(t^{-s_1 \cdot \mu}(\varepsilon^2 \circ \det), \mathcal{S}[\mathfrak{m}_\rho]^{\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}\big) \neq 0. \tag{73}$$

Comme j'ignore si la représentation admissible $\mathcal{S}[\mathfrak{m}_\rho]$ est très fortement admissible ([**33**, Def. 0.12], elle le serait si les représentations très fortement admissibles étaient stables par extension), on ne peut appliquer directement à (73) l'adjonction de [**5**, Th. 4.3]. On s'en tire en revenant aux étapes intermédiaires de la preuve de cette adjonction et en utilisant le Théorème 7.1.1 de l'appendice.

On munit l'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\overline{N}(\mathbb{Q}_p))$ des fonctions localement constantes à support compact $f : \overline{N}(\mathbb{Q}_p) \to E$ d'une action à gauche de $\overline{B}(\mathbb{Q}_p)$ comme suit : $\overline{N}(\mathbb{Q}_p)$ agit par translation à droite et $T(\mathbb{Q}_p)$ agit par $(tf)(\overline{n}) = f(t^{-1}\overline{n}t)$. On munit le module de Verma $U(\mathfrak{gl}_3) \otimes_{U(\overline{\mathfrak{b}})} (-s_1 \cdot \mu)$ de l'unique action à gauche algébrique de $\overline{B}(\mathbb{Q}_p)$ qui intègre l'action à gauche de $U(\overline{\mathfrak{b}}) \subset U(\mathfrak{gl}_3)$ (cf. l'argument de la preuve de [**50**, Lem. 3.2]). Alors il suit de (successivement) [**5**, (25)], [**5**, (26)], [**5**, (24)] et du deuxième isomorphisme de la preuve de [**5**, Th. 4.3] (qui n'est pas numéroté) que l'on a un isomorphisme :

$$\begin{aligned} &\mathrm{Hom}_{T(\mathbb{Q}_p)^+}\big(t^{-s_1 \cdot \mu}(\varepsilon^2 \circ \det), \mathcal{S}[\mathfrak{m}_\rho]^{\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}\big) \\ &\quad\cong \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{gl}_3, \overline{B}(\mathbb{Q}_p))}\big((U(\mathfrak{gl}_3) \otimes_{U(\overline{\mathfrak{b}})} (-s_1 \cdot \mu)) \otimes_E \mathcal{C}_c^\infty(\overline{N}(\mathbb{Q}_p)), \mathcal{S}[\mathfrak{m}_\rho] \otimes \varepsilon^{-2} \circ \det\big) \end{aligned} \tag{74}$$

où la notation à droite signifie les morphismes E-linéaires qui commutent à la fois à $\mathfrak{gl}_3$ et $\overline{B}(\mathbb{Q}_p)$ (cela n'utilise, via [**32**, Th. 3.5.6] et sa preuve, que le fait que $\mathcal{S}[\mathfrak{m}_\rho]$ est une représentation localement analytique de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ sur un espace de type compact). Montrons que tout morphisme non nul $(\mathfrak{gl}_3, \overline{B}(\mathbb{Q}_p))$-équivariant :

$$\big(U(\mathfrak{gl}_3) \otimes_{U(\overline{\mathfrak{b}})} (-s_1 \cdot \mu)\big) \otimes_E \mathcal{C}_c^\infty(\overline{N}(\mathbb{Q}_p)) \longrightarrow \mathcal{S}[\mathfrak{m}_\rho] \otimes \varepsilon^{-2} \circ \det$$

se factorise par le quotient $\overline{L}(-s_1\cdot\mu)\otimes_E \mathcal{C}_c^\infty(\overline{N}(\mathbb{Q}_p))$ de $(U(\mathfrak{gl}_3)\otimes_{U(\overline{\mathfrak{b}})}(-s_1\cdot\mu))\otimes_E \mathcal{C}_c^\infty(\overline{N}(\mathbb{Q}_p))$ où, pour $w\in\mathcal{S}_n$, $\overline{L}(-w\cdot\mu)$ est l'unique objet simple de la catégorie $\mathcal{O}_{\mathrm{alg}}^{\overline{\mathfrak{b}}}$ de plus haut poids $-w\cdot\mu$ (cf. § 4.1 pour $w\cdot\mu$ et rappelons que $\overline{B}\subset \mathrm{GL}_3$ est le Borel supérieur). Par [**40**, §§ 5.1, 5.2], il suffit de montrer :

$$\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{gl}_3,\overline{B}(\mathbb{Q}_p))}\big(\overline{L}(-w\cdot\mu)\otimes_E \mathcal{C}_c^\infty(\overline{N}(\mathbb{Q}_p)),\mathcal{S}[\mathfrak{m}_\rho]\otimes\varepsilon^{-2}\circ\det\big)=0 \tag{75}$$

pour $w\geq s_1$, $w\neq s_1$. Soit v^+ un vecteur de plus haut poids de $\overline{L}(-w\cdot\mu)$ et $\mathbf{1}_{\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}\in \mathcal{C}_c^\infty(\overline{N}(\mathbb{Q}_p))$ la fonction caractéristique de $\overline{N}(\mathbb{Z}_p)$, la $(\mathfrak{gl}_3,\overline{B}(\mathbb{Q}_p))$-représentation $\overline{L}(-w\cdot\mu)\otimes_E \mathcal{C}_c^\infty(\overline{N}(\mathbb{Q}_p))$ est engendrée par la sous-$\overline{B}(\mathbb{Q}_p)$-représentation localement algébrique $Ev^+\otimes \mathcal{C}_c^\infty(\overline{N}(\mathbb{Q}_p))$, elle même engendrée par $v^+\otimes\mathbf{1}_{\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}$. De plus on a une injection $T(\mathbb{Q}_p)^+$-équivariante $E(v^+\otimes\mathbf{1}_{\overline{N}(\mathbb{Z}_p)})\hookrightarrow (Ev^+\otimes\mathcal{C}_c^\infty(\overline{N}(\mathbb{Q}_p)))^{\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}$ où $T(\mathbb{Q}_p)^+$ agit à gauche par le caractère $t\mapsto t^{-w\cdot\mu}$ et à droite par l'action de Hecke (69) (cf. [**32**, (3.5.4)]). Un morphisme $(\mathfrak{gl}_3,\overline{B}(\mathbb{Q}_p))$-équivariant non nul $\overline{L}(-w\cdot\mu)\otimes_E\mathcal{C}_c^\infty(\overline{N}(\mathbb{Q}_p))\longrightarrow\mathcal{S}[\mathfrak{m}_\rho]\otimes\varepsilon^{-2}\circ\det$ donne donc une injection $T(\mathbb{Q}_p)^+$-équivariante $t^{-w\cdot\mu}(\varepsilon^2\circ\det)\hookrightarrow\mathcal{S}[\mathfrak{m}_\rho]^{\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}$ dont l'image si $w\neq s_1$ tombe forcément dans $\widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho]^{\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}$ par (72) et $\mathrm{Hom}_{T(\mathbb{Q}_p)^+}(t^{-w\cdot\mu},C_1^{\overline{N}(\mathbb{Z}_p)})=0$ si $w\neq s_1$ (pour cette dernière égalité appliquer l'adjonction [**5**, Th. 4.3] comme au début). Cela contredit la Proposition 6.3.4, et on a donc (75).

Par (73), (74) et (75), on obtient donc un morphisme $(\mathfrak{gl}_3,\overline{B}(\mathbb{Q}_p))$-équivariant non nul $\overline{L}(-s_1\cdot\mu)\otimes_E\mathcal{C}_c^\infty(\overline{N}(\mathbb{Q}_p))\longrightarrow\mathcal{S}[\mathfrak{m}_\rho]\otimes\varepsilon^{-2}\circ\det$. Avec les notations de [**33**, § 2] (cf. p. ex. [**33**, § 2.7]) et par la preuve de [**5**, Prop. 4.2] et de [**33**, Cor. 4.3.3] avec $X=V=\mathcal{F}_B^{\mathrm{GL}_3}(L(s_1\cdot\mu),1)$, on a l'égalité :

$$\overline{L}(-s_1\cdot\mu)\otimes_E\mathcal{C}_c^\infty(\overline{N}(\mathbb{Q}_p))\cong\mathcal{F}_B^{\mathrm{GL}_3}(L(s_1\cdot\mu),1)^{\mathrm{lp}}(\overline{N}(\mathbb{Q}_p)),$$

d'où finalement un morphisme $(\mathfrak{gl}_3,\overline{B}(\mathbb{Q}_p))$-équivariant :

$$\psi_1:\mathcal{F}_B^{\mathrm{GL}_3}(L(s_1\cdot\mu),1)^{\mathrm{lp}}(\overline{N}(\mathbb{Q}_p))\longrightarrow\mathcal{S}[\mathfrak{m}_\rho]\otimes\varepsilon^{-2}\circ\det \tag{76}$$

dont la composée avec la surjection $\mathcal{S}[\mathfrak{m}_\rho]\otimes\varepsilon^{-2}\circ\det\twoheadrightarrow C_1$ est nécessairement le morphisme composé :

$$\mathcal{F}_B^{\mathrm{GL}_3}(L(s_1\cdot\mu),1)^{\mathrm{lp}}(\overline{N}(\mathbb{Q}_p))\hookrightarrow\mathcal{F}_B^{\mathrm{GL}_3}(L(s_1\cdot\mu),1)\twoheadrightarrow C_1 \tag{77}$$

(par la Proposition 6.3.4). Soit $C_0 - \mathcal{F}_B^{\mathrm{GL}_3}(L(s_1\cdot\mu),1)$ le "pullback" de $C_0 - C_1$ le long de $\mathcal{F}_B^{\mathrm{GL}_3}(L(s_1\cdot\mu),1)\twoheadrightarrow C_1$ et $C_0-\mathcal{F}_B^{\mathrm{GL}_3}(L(s_1\cdot\mu),1)^{\mathrm{lp}}(\overline{N}(\mathbb{Q}_p))$ le "pullback" de $C_0-\mathcal{F}_B^{\mathrm{GL}_3}(L(s_1\cdot\mu),1)$ le long de $\mathcal{F}_B^{\mathrm{GL}_3}(L(s_1\cdot\mu),1)^{\mathrm{lp}}(\overline{N}(\mathbb{Q}_p))\hookrightarrow\mathcal{F}_B^{\mathrm{GL}_3}(L(s_1\cdot\mu),1)$. Par la définition de $\mathcal{S}$ on a un morphisme composé $C_0-\mathcal{F}_B^{\mathrm{GL}_3}(L(s_1\cdot\mu),1)\twoheadrightarrow C_0-C_1\hookrightarrow\mathcal{S}[\mathfrak{m}_\rho]\otimes\varepsilon^{-2}\circ\det$ qui est j_0 en restriction à C_0 et qui par restriction donne un morphisme :

$$\psi_2: C_0-\mathcal{F}_B^{\mathrm{GL}_3}(L(s_1\cdot\mu),1)^{\mathrm{lp}}(\overline{N}(\mathbb{Q}_p))\longrightarrow\mathcal{S}[\mathfrak{m}_\rho]\otimes\varepsilon^{-2}\circ\det \tag{78}$$

dont la composée avec $\mathcal{S}[\mathfrak{m}_\rho]\otimes\varepsilon^{-2}\circ\det\twoheadrightarrow C_1$ est :

$$C_0 — \mathcal{F}_B^{\mathrm{GL}_3}(L(s_1\cdot\mu),1)^{\mathrm{lp}}(\overline{N}(\mathbb{Q}_p)) \overset{s}{\twoheadrightarrow} \mathcal{F}_B^{\mathrm{GL}_3}(L(s_1\cdot\mu),1)^{\mathrm{lp}}(\overline{N}(\mathbb{Q}_p)) \xrightarrow{(77)} C_1$$

où s est la surjection canonique. On voit donc que l'on a un morphisme non nul $(\mathfrak{gl}_3,\overline{B}(\mathbb{Q}_p))$-équivariant continu en restriction à C_0 :

$$\psi_2-\psi_1\circ s : C_0 — \mathcal{F}_B^{\mathrm{GL}_3}(L(s_1\cdot\mu),1)^{\mathrm{lp}}(\overline{N}(\mathbb{Q}_p)) \longrightarrow \widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho]\otimes\varepsilon^{-2}\circ\det. \tag{79}$$

Par le Théorème 7.1.1 appliqué avec $\Pi = C_0$ et $X = \mathcal{F}_B^{\mathrm{GL}_3}(L(s_1\cdot\mu),1)$ (qui est bien local et polynomialement engendré en degré borné dans la série principale $(\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} t^{-s_1\cdot\mu})^{\mathrm{an}}$ par la preuve de [**5**, Prop. 4.2]), le morphisme (79) s'étend de manière unique en un morphisme $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$-équivariant continu non nul $C_0 — \mathcal{F}_B^{\mathrm{GL}_3}(L(s_1\cdot\mu),1) \longrightarrow \widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho]\otimes\varepsilon^{-2}\circ\det$. Il reste à voir que ce morphisme est nul en restriction à $\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(L(s_1\cdot\mu),1)=\ker(\mathcal{F}_B^{\mathrm{GL}_3}(L(s_1\cdot\mu),1)\twoheadrightarrow C_1)$, mais si tel n'est pas le cas on a un morphisme non nul $\mathcal{F}_{P_2}^{\mathrm{GL}_3}(L(s_1\cdot\mu),1)\otimes\varepsilon^2\circ\det\longrightarrow \widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho]$ qui implique :

$$\mathrm{Hom}_{T(\mathbb{Q}_p)^+}\big(t^{-s_1\cdot\mu}(1\otimes|\cdot|^{-1}\otimes|\cdot|)\varepsilon^2\circ\det, \widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho]^{\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}\big)\neq 0$$

par l'adjonction [**5**, Th. 4.3], ce qui contredit la Proposition 6.3.4. Cela montre l'existence d'une injection $C_0 — C_1\otimes\varepsilon^2\circ\det\hookrightarrow\widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho]$.

Étape 2.
Fixons une injection $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$-équivariante $j_1 : C_0 — C_1 \otimes\varepsilon^2\circ\det\hookrightarrow\widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho]$ ainsi qu'une représentation $C_0 — C_1 — C_2$ arbitraires et considérons comme dans l'Étape 1 la somme amalgamée :

$$\mathcal{S} \overset{\text{déf}}{=} \widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an}} \bigoplus_{j_1,\, C_0 — C_1\otimes\varepsilon^2\circ\det} C_0 — C_1 — C_2\otimes\varepsilon^2\circ\det. \tag{80}$$

On a encore des suites exactes $\mathbb{T}(U^p)\times\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$-équivariante :

$$\begin{gathered} 0\longrightarrow\widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an}}\longrightarrow\mathcal{S}\longrightarrow C_2\otimes\varepsilon^2\circ\det\longrightarrow 0\\ 0\longrightarrow\widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho]\longrightarrow\mathcal{S}[\mathfrak{m}_\rho]\longrightarrow C_2\otimes\varepsilon^2\circ\det\longrightarrow 0. \end{gathered} \tag{81}$$

et, par la Proposition 6.3.3 et l'Exemple 6.3.2 (complété par [**32**, Prop. 4.3.6]), une suite exacte courte $\mathbb{T}(U^p)\times T(\mathbb{Q}_p)^+$-équivariante de E-espaces vectoriels de dimension finie :

$$0\longrightarrow\big(\widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an}}\big)^{\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}[\mathfrak{t}=\eta]_{\chi(\varepsilon^2\circ\det)}\longrightarrow\mathcal{S}^{\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}[\mathfrak{t}=\eta]_{\chi(\varepsilon^2\circ\det)}\longrightarrow E\longrightarrow 0$$

pour $\chi\in\{t^{-\mu}(|\cdot|^{-1}\otimes|\cdot|\otimes 1),\ t^{-\mu}(|\cdot|^{-1}\otimes|\cdot|^{-1}\otimes|\cdot|^2)\}$ (et η le caractère dérivé de $t^{-\mu}(\varepsilon^2\circ\det)$). On en déduit $(\mathcal{S}^{\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}[\mathfrak{t}=\eta]_{\chi(\varepsilon^2\circ\det)})_{\mathfrak{m}_\rho}\neq 0$ et donc $(\mathcal{S}^{\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}[\mathfrak{t}=\eta]_{\chi(\varepsilon^2\circ\det)})[\mathfrak{m}_\rho]=\mathcal{S}[\mathfrak{m}_\rho]^{\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}[\mathfrak{t}=\eta]_{\chi(\varepsilon^2\circ\det)}\neq 0$, d'où :

$$\mathrm{Hom}_{T(\mathbb{Q}_p)^+}\big(\chi(\varepsilon^2\circ\det),\mathcal{S}[\mathfrak{m}_\rho]^{\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}\big)\neq 0,\ \ t^\mu\chi\in\{|\cdot|^{-1}\otimes|\cdot|\otimes 1,|\cdot|^{-1}\otimes|\cdot|^{-1}\otimes|\cdot|^2\}. \tag{82}$$

Soit l'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\overline{N}(\mathbb{Q}_p),\chi)$ des fonctions localement constantes à support compact $f:\overline{N}(\mathbb{Q}_p)\to E$ avec la même action à gauche de $\overline{B}(\mathbb{Q}_p)$ que dans l'Étape 1 sauf que $T(\mathbb{Q}_p)$ agit maintenant par $(tf)(\overline{n})=\chi(t)f(t^{-1}\overline{n}t)$. Par le même argument que dans l'Étape 1 on obtient pour χ comme en (82) un isomorphisme :

$$\begin{aligned}(83)\quad &\mathrm{Hom}_{T(\mathbb{Q}_p)^+}\big(\chi(\varepsilon^2\circ\det),\mathcal{S}[\mathfrak{m}_\rho]^{\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}\big)\\ &\cong \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{gl}_3,\overline{B}(\mathbb{Q}_p))}\big((U(\mathfrak{gl}_3)\otimes_{U(\overline{\mathfrak{b}})}-\mu)\otimes_E\mathcal{C}_c^\infty(\overline{N}(\mathbb{Q}_p),\chi),\mathcal{S}[\mathfrak{m}_\rho]\otimes\varepsilon^{-2}\circ\det\big).\end{aligned}$$

La même preuve que dans l'Étape 1 utilisant la Proposition 6.3.4 montre que tout morphisme non nul $(\mathfrak{gl}_3,\overline{B}(\mathbb{Q}_p))$-équivariant :

$$(U(\mathfrak{gl}_3)\otimes_{U(\overline{\mathfrak{b}})}-\mu)\otimes_E\mathcal{C}_c^\infty(\overline{N}(\mathbb{Q}_p),\chi)\longrightarrow\mathcal{S}[\mathfrak{m}_\rho]\otimes\varepsilon^{-2}\circ\det$$

se factorise par le quotient $\overline{L}(-\mu)\otimes_E\mathcal{C}_c^\infty(\overline{N}(\mathbb{Q}_p),\chi)$ de $(U(\mathfrak{gl}_3)\otimes_{U(\overline{\mathfrak{b}})}\mu)\otimes_E\mathcal{C}_c^\infty(\overline{N}(\mathbb{Q}_p),\chi)$. Par (82) et (83) on obtient donc un morphisme $(\mathfrak{gl}_3,\overline{B}(\mathbb{Q}_p))$-équivariant non nul $\overline{L}(-\mu)\otimes_E\mathcal{C}_c^\infty(\overline{N}(\mathbb{Q}_p),\chi)\to\mathcal{S}[\mathfrak{m}_\rho]\otimes\varepsilon^{-2}\circ\det$. Mais on a :

$$\overline{L}(-\mu)\otimes_E\mathcal{C}_c^\infty(\overline{N}(\mathbb{Q}_p),\chi)=\big(\overline{L}(-\mu)\otimes_E(\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\chi)^\infty\big)(\overline{N}(\mathbb{Q}_p))$$

et on en déduit avec [**33**, Th. 4.1.5] un morphisme non nul $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$-équivariant :

$$\overline{L}(-\mu)\otimes_E(\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\chi)^\infty\longrightarrow\mathcal{S}[\mathfrak{m}_\rho]\otimes\varepsilon^{-2}\circ\det \tag{84}$$

qui, composé avec la surjection $\mathcal{S}[\mathfrak{m}_\rho]\otimes\varepsilon^{-2}\circ\det\twoheadrightarrow C_2$, est nécessairement (Proposition 6.3.4) la surjection canonique $\overline{L}(-\mu)\otimes_E(\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\chi)^\infty\twoheadrightarrow C_2$ (noter que $(\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\chi)^\infty$ est la même représentation pour les deux χ en (82)). Comme aucun des constituants $\overline{L}(-\mu)$ et C_4 de $\overline{L}(-\mu)\otimes_E(\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\chi)^\infty$ n'apparaissent en sous-objet de $\mathcal{S}[\mathfrak{m}_\rho]\otimes\varepsilon^{-2}\circ\det$ (utiliser (81) et (63)), le morphisme (84) se factorise en un morphisme :

$$C_0 - C_2\ \longrightarrow\mathcal{S}[\mathfrak{m}_\rho]\otimes\varepsilon^{-2}\circ\det. \tag{85}$$

Par définition de $\mathcal{S}$, l'injection $j_1\otimes\varepsilon^{-2}\circ\det$ s'étend en une injection :

$$C_0 - C_1 - C_2\ \hookrightarrow\mathcal{S}[\mathfrak{m}_\rho]\otimes\varepsilon^{-2}\circ\det. \tag{86}$$

Comme (85) et (86) restent tous les deux non nuls après composition avec $\mathcal{S}[\mathfrak{m}_\rho]\otimes\varepsilon^{-2}\circ\det\twoheadrightarrow C_2$, on en déduit avec (81) un morphisme $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$-équivariant non nul (où la représentation de gauche est le produit fibré au-dessus de C_2) :

$$\begin{matrix} C_0 - C_1 \searrow & \\ & C_2\ \otimes\varepsilon^2\circ\det\longrightarrow\widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho] \\ C_0 \nearrow & \end{matrix} \tag{87}$$

qui est j_1 en restriction à $C_0 - C_1\ \otimes\varepsilon^2\circ\det$. Montrons que (87) se factorise par un quotient de la forme $C_0 - C_1 - C_2$ (mais pas nécessairement le même que la représentation arbitrairement fixée au début). Par (87), [**4**, Cor. 3.4], la Proposition 6.3.4 et (63), la restriction à $C_0 \oplus C_0$ induit une injection non nulle $H_{\Sigma(U^p)}$-équivariante :

$$
\text{(88)} \quad \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\left(\begin{array}{c} C_0 - C_1 \diagdown \\ \qquad\qquad C_2 \\ C_0 \diagup \end{array} \otimes \varepsilon^2 \circ \det, \widehat{S}(U^p, E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho]\right) \\
\hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}\left(C_0 \otimes \varepsilon^2 \circ \det, \widehat{S}(U^p, E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho]\right)^{\oplus 2} \cong \sigma \oplus \sigma.
$$

Si (88) est un isomorphisme, alors en particulier il existe f non nul dans le membre de gauche dont l'image à droite est dans $0 \oplus \sigma$ (i.e. qui est nul sur la copie de C_0 du haut), donc qui se factorise en un morphisme non nul $\begin{array}{c} C_1 \diagdown \\ \qquad C_2 \\ C_0 \diagup \end{array} \otimes \varepsilon^2 \circ \det \to \widehat{S}(U^p, E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho]$, qui lui même se factorise en un morphisme injectif $C_0 - C_2 \ \otimes \varepsilon^2 \circ \det \hookrightarrow \widehat{S}(U^p, E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho]$ puisque $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}(C_1 \otimes \varepsilon^2 \circ \det, \widehat{S}(U^p, E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho]) = 0$ (car $\mathrm{Hom}_{T(\mathbb{Q}_p)^+}(t^{-s_1 \cdot \mu}(\varepsilon^2 \circ \det), \widehat{S}(U^p, E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho]^{\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}) = 0$ par la Proposition 6.3.4). Cela contredit (63) puisque $C_0 - C_2$ est localement algébrique. Donc (88) est une injection stricte, et le membre de gauche est isomorphe à σ. Par le Lemme de Schur il existe $(\alpha, \beta) \in E^2$ avec $\alpha \neq 0$ (par le raisonnement précédent) tel que (88) s'identifie à $\sigma \hookrightarrow \sigma \oplus \sigma$, $v \mapsto \alpha v + \beta v$. En particulier tout f non nul dans le membre de gauche envoie $\beta x \oplus (-\alpha)x \in C_0 \oplus C_0$ sur 0 dans $\widehat{S}(U^p, E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho]$, donc induit encore un morphisme non nul $C_0 - C_1 - C_2 \ \otimes \varepsilon^2 \circ \det \longrightarrow \widehat{S}(U^p, E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho]$. On a donc montré l'existence d'une injection $C_0 - C_1 - C_2 \otimes \varepsilon^2 \circ \det \hookrightarrow \widehat{S}(U^p, E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho]$.

Étape 3.
On continue en rajoutant constituant par constituant. On fixe une représentation de la forme $C_0 - C_1 \begin{array}{l} \diagup C_2 \\ \diagdown \widetilde{C}_2 \end{array}$ où la sous-représentation $\Pi \overset{\text{déf}}{=} C_0 - C_1 - C_2$ s'injecte dans $\widehat{S}(U^p, E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho] \otimes \varepsilon^{-2} \circ \det$ par l'Étape 2 (noter qu'à Π fixé une telle représentation est unique par (67)). Par un argument similaire à celui de l'Étape 1 avec $t^{-s_2 s_1 \cdot \mu}$ au lieu de $t^{-s_1 \cdot \mu}$ on montre qu'elle s'injecte encore dans $\widehat{S}(U^p, E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho] \otimes \varepsilon^{-2} \circ \det$. Puis on rajoute C_3 et ainsi de suite jusqu'à obtenir (68). Noter que l'argument pour rajouter C_4 est similaire à celui de l'Étape 2 pour rajouter C_2.

Remarque 6.4.1. — La méthode de Ding utilisant la triangulation globale ([**42**]) a récemment permis de déterminer exactement la sous-représentation $C_0 - C_1 - C_2$ dans (68), cf. [**28**].

7. Appendice

On démontre une variante d'un résultat de [**33**, § 4] (dans un cadre plus restreint que celui de *loc. cit.*). On utilise ici la plupart du temps les notations de [**33**].

7.1. Préliminaires. — On fixe un groupe algébrique réductif connexe déployé G sur L, un tore maximal déployé M et un couple de sous-groupes de Borel opposés B, $\overline{B}$ contenant M. On note N, $\overline{N}$ les radicaux unipotents de (respectivement) B et $\overline{B}$. On fixe un "bon" sous-groupe ouvert compact analytique N_0 de $N(L)$ au sens de [**32**, § 4.1] ou de [**35**, § 5.2], un plongement $\sigma : L \hookrightarrow E$ et on note $\mathfrak{g}_\sigma$ l'algèbre de Lie de $G \times_{L,\sigma} E$ comme au § 2.1. On fixe aussi un caractère localement σ-analytique $\chi : M(L) \to E^\times$ et un sous-espace $G(L)$-invariant fermé $X \hookrightarrow (\mathrm{Ind}_{\overline{B}(L)}^{G(L)} \chi)^{\sigma\text{-an}}$ qui est local au sens de [**33**, Def. 2.4.1] et polynomialement engendré en degré borné au sens de [**33**, Def. 2.7.15]. On note $M(L)^+ \overset{\text{déf}}{=} \{z \in M(L), zN_0z^{-1} \subseteq N_0\}$, $B(L)^+ = M(L)^+N_0$ le sous-monoïde de $B(L)$ engendré par N_0 et $M(L)^+$ et on définit les sous-$(\mathfrak{g}_\sigma, B(L)^+)$-représentations $X^{\mathrm{lp}}(N_0) \subseteq X(N_0)$ de $(\mathrm{Ind}_{B(L)}^{G(L)} \chi)^{\sigma\text{-an}}$ comme dans (respectivement) [**33**, Def. 2.7.5] et [**33**, Def. 2.4.2(i)]. Rappelons qu'une représentation localement σ-analytique admissible de $G(L)$ sur E est dite très fortement admissible si elle admet une injection continue E-linéaire $G(L)$-équivariante dans une représentation continue admissible de $G(L)$ sur un E-espace de Banach p-adique (cf. [**33**, Def. 0.12]).

L'objectif de cet appendice est de modifier les arguments de [**33**, §§ 3, 4] pour démontrer le résultat suivant.

Théorème 7.1.1. — *Soit Π une représentation localement σ-analytique admissible de $G(L)$ sur E, $\Pi — X$ une extension localement σ-analytique et $\Pi — X^{\mathrm{lp}}(N_0)$ son "pullback" le long de $X^{\mathrm{lp}}(N_0) \hookrightarrow X$. Soit V une représentation localement σ-analytique très fortement admissible de $G(L)$ sur E. Alors tout morphisme E-linéaire $(\mathfrak{g}_\sigma, B(L)^+)$-équivariant continu en restriction à Π :*

$$\Pi — X^{\mathrm{lp}}(N_0) \longrightarrow V$$

s'étend de manière unique en un morphisme continu E-linéaire $G(L)$-équivariant :

$$\Pi — X \longrightarrow V.$$

On commence par des préliminaires.

On fixe $z_0 \in M(L)^+$ de la forme $z_0 = \alpha(p)$ où $\alpha : \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \to T$ est tel que $\langle \alpha, \beta \rangle > 0$ pour toute racine β du Borel B. On définit une suite décroissante de "bons" sous-groupes ouverts compacts analytiques $\{H_i\}_{i \geq 0}$ de $G(L)$ comme dans [**32**, § 4.1] ou [**33**, § 2.2], en particulier vérifiant les propriétés suivantes : $N_0 = H_0 \cap N(L)$, pour tout $i \geq 0$ H_i est normal dans H_0, pour tout $i \geq 0$ le produit induit un isomorphisme

$\overline{N}_i M_i N_i \xrightarrow{\sim} H_i$, et on a pour tout $i \geq 0$ les inclusions :

$$N_{i+1} \subseteq z_0 N_i z_0^{-1} \subseteq N_i \qquad \overline{N}_{i+1} \subseteq z_0^{-1}\overline{N}_i z_0 \subsetneq \overline{N}_i$$

où $N_i \overset{\text{déf}}{=} H_i \cap N(L)$ (pour $i \geq 1$) et $\overline{N}_i \overset{\text{déf}}{=} H_i \cap \overline{N}(L)$, $M_i \overset{\text{déf}}{=} H_i \cap M(L)$ (pour $i \geq 0$). On en déduit en particulier que N_i est normal dans N_0, que $H_{i+1} \subseteq z_0 H_i z_0^{-1}$ et que $N_i \subseteq z_0^i N_0 z_0^{-i}$ (attention que l'on ne peut prendre $N_i = z_0^i N_0 z_0^{-i}$ contrairement à ce qui est écrit dans [**33**, § 2.2] car $z_0^i N_0 z_0^{-i}$ n'est en général pas normal dans N_0, mais les inclusions précédentes suffisent pour tout ce qui est dans [**33**]). On fixe $i_\chi \geq 0$ tel que le caractère χ est M_i-analytique pour $i \geq i_\chi$.

Remarque 7.1.2. — Pour alléger, on se permet dans tout l'appendice d'identifier les groupes rigides analytiques avec leur groupe des L-points (au sens strict, il faudrait noter $H_i = \mathbb{H}_i(L)$, $N_i = \mathbb{N}_i(L)$ etc. et distinguer H_i de $\mathbb{H}_i$ comme dans [**33**] et [**35**]).

On note $\mathcal{E} \overset{\text{déf}}{=} \Pi — X$ l'extension du Théorème 7.1.1 et $\mathcal{E}_0^{\text{lp}} \subseteq \mathcal{E}_0$ les deux "pull-back" $\Pi — X^{\text{lp}}(N_0) \subseteq \Pi — X(N_0)$ (des sous-$(\mathfrak{g}_\sigma, B(L)^+)$-représentations). On a des isomorphismes topologiques $\mathcal{E} = \varinjlim_i \mathcal{E}_{H_i\text{-an}}$, $\Pi = \varinjlim_i \Pi_{H_i\text{-an}}$, $X = \varinjlim_i X_{H_i\text{-an}}$ (pour la topologie de la limite inductive à droite) où $*_{H_i\text{-an}}$ (pour $* \in \{\Pi, \mathcal{E}, X\}$) est le sous-espace de Banach (p-adique) des vecteurs H_i-*analytiques* (pour le plongement σ) et où l'injection continue $*_{H_i\text{-an}} \subsetneq *_{H_{i+1}\text{-an}}$ est compacte (cf. [**35**, Def. 3.3.13], [**35**, Prop. 6.1.2] et la preuve de [**35**, Prop. 6.1.3]). Noter que par [**35**, Lem. 3.5.1] $*_{H_i\text{-an}}$ est stable par l'action de H_0 et que l'action de z_0 induit une injection continue $*_{H_i\text{-an}} \xrightarrow{\sim} *_{z_0 H_i z_0^{-1}\text{-an}} \hookrightarrow *_{H_{i+1}\text{-an}}$ (par [**35**, Lem. 3.5.1] et $H_{i+1} \subseteq z_0 H_i z_0^{-1}$).

Pour tout $i \geq 0$ la surjection $\mathcal{E} \twoheadrightarrow X$ induit un morphisme continu H_0-équivariant d'espaces de Banach $\mathcal{E}_{H_i\text{-an}} \to X_{H_i\text{-an}}$ et on note $\mathcal{E}_{H_{i+1}\text{-an}} \times_{X_{H_{i+1}\text{-an}}} X_{H_i\text{-an}}$ l'espace de Banach produit fibré, i.e. le noyau de $\mathcal{E}_{H_{i+1}\text{-an}} \oplus X_{H_i\text{-an}} \longrightarrow X_{H_{i+1}\text{-an}}$. On a des inclusions $\mathcal{E}_{H_i\text{-an}} \subseteq \mathcal{E}_{H_{i+1}\text{-an}} \times_{X_{H_{i+1}\text{-an}}} X_{H_i\text{-an}} \subseteq \mathcal{E}_{H_{i+1}\text{-an}}$ et un isomorphisme d'espaces de type compacts $\mathcal{E} \cong \varinjlim_i (\mathcal{E}_{H_{i+1}\text{-an}} \times_{X_{H_{i+1}\text{-an}}} X_{H_i\text{-an}})$.

Lemme 7.1.3. — *Pour tout $i \geq 0$, on a une suite exacte courte H_0-équivariante d'espaces de Banach sur E :*

$$0 \longrightarrow \Pi_{H_{i+1}\text{-an}} \longrightarrow \mathcal{E}_{H_{i+1}\text{-an}} \times_{X_{H_{i+1}\text{-an}}} X_{H_i\text{-an}} \longrightarrow X_{H_i\text{-an}} \longrightarrow 0.$$

Démonstration. — Il est clair que les applications sont H_0-équivariantes et continues. Par le théorème de l'image ouverte ([**52**, Prop. 8.6]), il suffit de montrer l'exactitude comme E-espaces vectoriels. La suite est exacte à gauche et par [**35**, Prop. 3.3.23] on a $\Pi_{H_{i+1}\text{-an}} \cong \Pi \cap \mathcal{E}_{H_{i+1}\text{-an}}$ (intersection dans $\mathcal{E}$), donc elle est aussi exacte au milieu. Définissons H_i^0 comme dans [**35**, § 5.2] à partir de H_i (via la Remarque 7.1.2), on a $H_{i+1} \subseteq H_i^0 \subseteq H_i$ et donc des inclusions pour $* \in \{\mathcal{E}, X\}$:

$$*_{H_i\text{-an}} \subseteq *_{H_i^0\text{-an}} \subseteq *_{H_{i+1}\text{-an}} \tag{89}$$

où $*_{H_i^0\text{-an}}$ est défini dans [**35**, Def. 3.4.1]. Par [**33**, Cor. A.13] l'application $\mathcal{E}_{H_i^0\text{-an}} \to X_{H_i^0\text{-an}}$ est surjective, on en déduit avec (89) que l'image de $\mathcal{E}_{H_{i+1}\text{-an}}$ dans $X_{H_{i+1}\text{-an}}$ contient $X_{H_i^0\text{-an}}$, et donc $X_{H_i\text{-an}}$. Cela entraîne la surjectivité de droite. $\square$

On munit le E-espace vectoriel $\mathcal{C}^{\sigma\text{-an}}(N_0, E)$ des fonctions localement σ-analytiques sur N_0 de l'action de $B(L)^+ = M(L)^+N_0$ donnée par :

$$(zn_0f)(n_0') \stackrel{\text{déf}}{=} \chi(z)f(z^{-1}n_0'zn_0) \tag{90}$$

où $f(z^{-1}n_0'zn_0) \stackrel{\text{déf}}{=} 0$ si $z^{-1}n_0'zn_0 \notin N_0$. On a un isomorphisme N_0-équivariant de E-espaces vectoriels :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}^{\sigma\text{-an}}(N_0, E) &\cong \varinjlim_i \big(\oplus_{n_0\in N_0/N_i} \mathcal{C}^{\sigma\text{-rig}}(N_in_0^{-1}, E)\big)\\ &\cong \varinjlim_i \big(\oplus_{n_0\in N_0/N_i} n_0\mathcal{C}^{\sigma\text{-rig}}(N_i, E)\big)\end{aligned} \tag{91}$$

où $\mathcal{C}^{\sigma\text{-rig}}(N_in_0^{-1}, E) \cong n_0\mathcal{C}^{\sigma\text{-rig}}(N_i, E) \subseteq \mathcal{C}^{\sigma\text{-an}}(N_0, E)$ est le sous-espace de Banach des fonctions σ-analytiques sur $N_in_0^{-1}$ (pour la norme sup rigide analytique). Cela permet de munir $\mathcal{C}^{\sigma\text{-an}}(N_0, E)$ d'une topologie d'espace localement convexe de type compact. En voyant les fonctions $f \in \mathcal{C}^{\sigma\text{-an}}(N_0, E)$ comme fonctions de $(\mathrm{Ind}_{\overline{B}(L)}^{G(L)} \chi)^{\sigma\text{-an}}$ à support dans $\overline{B}(L)N_0 = \overline{B}(L)H_0$, on a une injection $B(L)^+$-équivariante :

$$\mathcal{C}^{\sigma\text{-an}}(N_0, E) \hookrightarrow \big(\mathrm{Ind}_{\overline{B}(L)}^{G(L)} \chi\big)^{\sigma\text{-an}} \tag{92}$$

qui est d'image fermée et stable par H_0 ([**33**, Lem. 2.3.3] et [**33**, Lem. 2.3.5(ii)]).

Lemme 7.1.4. — *Pour $i \geq i_\chi$ on a un isomorphisme d'espaces de Banach :*

$$\bigoplus_{n_0\in N_0/N_i} n_0\mathcal{C}^{\sigma\text{-rig}}(N_i, E) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^{\sigma\text{-an}}(N_0, E) \cap \big(\mathrm{Ind}_{\overline{B}(L)}^{G(L)} \chi\big)^{\sigma\text{-an}}_{H_i\text{-an}},$$

l'intersection à droite étant dans $(\mathrm{Ind}_{\overline{B}(L)}^{G(L)} \chi)^{\sigma\text{-an}}$.

Démonstration. — Pour $i \geq i_\chi$ le caractère χ est M_i-analytique et (92) induit une injection continue $\mathcal{C}^{\sigma\text{-rig}}(N_i, E) \hookrightarrow (\mathrm{Ind}_{\overline{B}(L)}^{G(L)} \chi)^{\sigma\text{-an}}_{H_i\text{-an}}$ par la preuve de [**33**, Prop. 2.3.10]. Comme $n_0H_in_0^{-1} = H_i$, on a par [**35**, Lem. 3.5.1] et (91) une injection continue :

$$\bigoplus_{n_0\in N_0/N_i} n_0\mathcal{C}^{\sigma\text{-rig}}(N_i, E) \hookrightarrow \mathcal{C}^{\sigma\text{-an}}(N_0, E) \cap \big(\mathrm{Ind}_{\overline{B}(L)}^{G(L)} \chi\big)^{\sigma\text{-an}}_{H_i\text{-an}}. \tag{93}$$

L'inclusion $(\mathrm{Ind}_{\overline{B}(L)}^{G(L)} \chi)^{\sigma\text{-an}}_{H_i\text{-an}} \subseteq (\mathrm{Ind}_{\overline{B}(L)}^{G(L)} \chi)^{\sigma\text{-an}}_{N_i\text{-an}}$ et [**35**, Prop. 3.3.23] entraînent :

$$\mathcal{C}^{\sigma\text{-an}}(N_0, E) \cap (\mathrm{Ind}_{\overline{B}(L)}^{G(L)} \chi)^{\sigma\text{-an}}_{H_i\text{-an}} \subseteq \mathcal{C}^{\sigma\text{-an}}(N_0, E)_{N_i\text{-an}} \cong \bigoplus_{n_0\in N_0/N_i} n_0\mathcal{C}^{\sigma\text{-an}}(N_i, E)_{N_i\text{-an}}$$

d'où on déduit que (93) est une bijection par [**35**, Cor. 3.3.26]. On conclut par le théorème de l'image ouverte. $\square$

Le Lemme 7.1.4 montre en particulier que la topologie de type compact donnée par (91) est aussi induite par celle de $(\mathrm{Ind}_{\overline{B}(L)}^{G(L)}\chi)^{\sigma\text{-an}}$, et que $\oplus_{n_0\in N_0/N_i} n_0\mathcal{C}^{\sigma\text{-rig}}(N_i,E)$ est stable par H_0 dans $(\mathrm{Ind}_{\overline{B}(L)}^{G(L)}\chi)^{\sigma\text{-an}}$ pour $i\geq i_\chi$ (car H_0 préserve $\mathcal{C}^{\sigma\text{-an}}(N_0,E)$ et $(\mathrm{Ind}_{\overline{B}(L)}^{G(L)}\chi)^{\sigma\text{-an}}_{H_i\text{-an}}$).

Comme $N_i\subseteq z_0^iN_0z_0^{-i}\subseteq N_0$, on a aussi pour tout $i\geq 0$ une injection continue N_0-équivariante entre Banach p-adiques :

$$\bigoplus_{n_0\in N_0/z_0^iN_0z_0^{-i}} n_0\mathcal{C}^{\sigma\text{-rig}}(z_0^iN_0z_0^{-i},E)\hookrightarrow \bigoplus_{n_0\in N_0/N_i} n_0\mathcal{C}^{\sigma\text{-rig}}(N_i,E)$$

ainsi qu'un isomorphisme topologique N_0-équivariant analogue à (91) en remplaçant N_i par $z_0^iN_0z_0^{-i}$. De plus pour $i,j\geq 0$ l'action (90) de z_0^j induit des isomorphismes d'espaces de Banach $\mathcal{C}^{\sigma\text{-rig}}(z_0^iN_0z_0^{-i},E)\xrightarrow{\sim} z_0^j\mathcal{C}^{\sigma\text{-rig}}(z_0^iN_0z_0^{-i},E)\cong \mathcal{C}^{\sigma\text{-rig}}(z_0^{i+j}N_0z_0^{-i-j},E)$. On définit pour $i\geq 0$ les espaces de Banach suivants (les intersections étant dans $(\mathrm{Ind}_{\overline{B}(L)}^{G(L)}\chi)^{\sigma\text{-an}}$) :

$$\begin{aligned}\widetilde{T}_i &\overset{\text{déf}}{=} X\cap \bigoplus_{n_0\in N_0/N_i} n_0\mathcal{C}^{\sigma\text{-rig}}(N_i,E)\\ T_i &\overset{\text{déf}}{=} X\cap \bigoplus_{n_0\in N_0/z_0^iN_0z_0^{-i}} n_0\mathcal{C}^{\sigma\text{-rig}}(z_0^iN_0z_0^{-i},E)\\ &= X\cap \bigoplus_{n_0\in N_0/z_0^iN_0z_0^{-i}} n_0z_0^i\mathcal{C}^{\sigma\text{-rig}}(N_0,E).\end{aligned}\tag{94}$$

Ils sont stables par N_0 dans $(\mathrm{Ind}_{\overline{B}(L)}^{G(L)}\chi)^{\sigma\text{-an}}$. De plus pour $i\geq i_\chi$ on a $\widetilde{T}_i\cong X(N_0)\cap \big(\mathrm{Ind}_{\overline{B}(L)}^{G(L)}\chi\big)^{\sigma\text{-an}}_{H_i\text{-an}}$ par le Lemme 7.1.4 et $\widetilde{T}_i$ est en fait stable par H_0. On a des injections continues N_0-équivariantes $T_i\hookrightarrow\widetilde{T}_i$, des inclusions compactes $\widetilde{T}_i\subsetneq\widetilde{T}_{i+1}$, $T_i\subsetneq T_{i+1}$ et des isomorphismes d'espaces de type compact :

$$\varinjlim_i T_i\xrightarrow{\sim}\varinjlim_i\widetilde{T}_i\xrightarrow{\sim} X(N_0).\tag{95}$$

On définit pour $i\geq i_\chi$ les espaces de Banach p-adiques :

$$\widetilde{\mathcal{F}}_i\overset{\text{déf}}{=}\mathcal{E}_{H_{i+1}\text{-an}}\times_{X_{H_{i+1}\text{-an}}}\widetilde{T}_i\overset{\text{déf}}{=}\ker(\mathcal{E}_{H_{i+1}\text{-an}}\oplus\widetilde{T}_i\to X_{H_{i+1}\text{-an}})\subseteq\mathcal{E}_{H_{i+1}\text{-an}}\times_{X_{H_{i+1}\text{-an}}}X_{H_i\text{-an}}$$

et de même $\mathcal{F}_i\overset{\text{déf}}{=}\mathcal{E}_{H_{i+1}\text{-an}}\times_{X_{H_{i+1}\text{-an}}}T_i$. Ils sont munis d'une action continue de N_0 ($\widetilde{\mathcal{F}}_i$ étant de plus stable par H_0) et on a des injections continues $\mathcal{F}_i\hookrightarrow\widetilde{\mathcal{F}}_i$, des inclusions continues compactes $\widetilde{\mathcal{F}}_i\subsetneq\widetilde{\mathcal{F}}_{i+1}$, $\mathcal{F}_i\subsetneq\mathcal{F}_{i+1}$ et, par le Lemme 7.1.3 (et le théorème de l'image ouverte), des suites exactes courtes d'espaces de Banach $0\to\Pi_{H_{i+1}\text{-an}}\to\widetilde{\mathcal{F}}_i\to\widetilde{T}_i\to 0$ et $0\to\Pi_{H_{i+1}\text{-an}}\to\mathcal{F}_i\to T_i\to 0$ (tout étant N_0-équivariant).

Lemme 7.1.5. — *On a des isomorphismes d'espaces de type compacts* $\varinjlim_i \mathcal{F}_i \xrightarrow{\sim} \varinjlim_i \widetilde{\mathcal{F}}_i \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_0$ *où* $\mathcal{E}_0$ *est muni de la topologie induite par celle de* $\mathcal{E}$.

Démonstration. — La topologie induite sur $\mathcal{E}_0$ est celle de la limite inductive :

$$\varinjlim_i \big(\mathcal{E}_0 \cap (\mathcal{E}_{H_{i+1}\text{-an}} \times_{X_{H_{i+1}\text{-an}}} X_{H_i\text{-an}})\big) \cong \varinjlim_i \widetilde{\mathcal{F}}_i$$

où l'isomorphisme résulte de [**35**, Prop. 3.3.23] et du Lemme 7.1.4 (avec (94)). Par (95) on a une bijection continue $\varinjlim_i \mathcal{F}_i \xrightarrow{\sim} \varinjlim_i \widetilde{\mathcal{F}}_i$ qui est un isomorphisme d'espaces de type compact (par exemple par [**35**, Th. 1.1.17]). □

7.2. Preuve du Théorème 7.1.1. — On démontre le Théorème 7.1.1. On conserve les notations du § 7.1.

On montre d'abord que tout morphisme E-linéaire continu $(\mathfrak{g}_\sigma, B(L)^+)$-équivariant $f_0 : \mathcal{E}_0 \longrightarrow V$ s'étend de manière unique en un morphisme E-linéaire continu $G(L)$-équivariant $f : \mathcal{E} \longrightarrow V$. L'unicité vient du fait que $X(N_0)$ engendre X sous $G(L)$, et donc $\mathcal{E}_0$ engendre $\mathcal{E}$ sous $G(L)$. On montre l'existence. Quitte à remplacer $\mathcal{E}_0$ et $\mathcal{E}$ par leur quotient par $\ker(f_0|_\Pi)$, on peut supposer $f_0|_\Pi$ injectif. Soit $s : \mathcal{E} \twoheadrightarrow X$, $s_0 \overset{\text{déf}}{=} s|_{\mathcal{E}_0} : \mathcal{E}_0 \twoheadrightarrow X(N_0)$ et $\overline{f}_0 : \mathcal{E}_0/\Pi \cong X(N_0) \longrightarrow V/f_0(\Pi)$, l'application continue $f_0 \times s_0$ induit par [**35**, Th. 1.1.17] un isomorphisme topologique $(\mathfrak{g}_\sigma, B(L)^+)$-équivariant :

$$\mathcal{E}_0 \xrightarrow{\sim} V \times_{V/f_0(\Pi), \overline{f}_0} X(N_0). \tag{96}$$

Par [**33**, (4.2.4)] et [**33**, Th. 4.1.5], $\overline{f}_0$ s'étend de manière unique en une application continue $G(L)$-équivariante $\overline{f} : X \longrightarrow V/f_0(\Pi)$. Soit $\mathcal{E}' \overset{\text{déf}}{=} V \times_{V/f_0(\Pi), \overline{f}} X$, c'est une extension de Π par X dont le "pullback" le long de $X(N_0) \hookrightarrow X$ s'identifie à $\mathcal{E}_0$ par (96). De plus le morphisme $\mathcal{E}' \longrightarrow V$ (projection sur la composante V) prolonge f_0. Il suffit donc de montrer que l'on a un isomorphisme $G(L)$-équivariant $\mathcal{E}' \cong \mathcal{E}$ induisant l'identité sur le sous-espace commun $\mathcal{E}_0$. Les sommes amalgamées $\mathcal{E}_0 \oplus_\Pi \mathcal{E}_0 \subseteq \mathcal{E} \oplus_\Pi \mathcal{E}'$ sont encore des espaces de type compact ([**53**, Prop. 1.2]) et on a une suite exacte courte topologique $(\mathfrak{g}_\sigma, B(L)^+)$-équivariante d'espaces de type compact :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X(N_0) & \longrightarrow & \mathcal{E}_0 \oplus_\Pi \mathcal{E}_0 & \longrightarrow & \mathcal{E}_0 & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \overline{(\varepsilon_0, \varepsilon_0')} & \longmapsto & \varepsilon_0 + \varepsilon_0' & & \end{array}$$

(utiliser [**35**, Th. 1.1.17] et le fait que le noyau s'identifie à $X(N_0)$ par l'application continue $\overline{(\varepsilon_0, -\varepsilon_0)} \mapsto \overline{\varepsilon_0}$). Par [**33**, (4.2.4)] et [**33**, Th. 4.1.5], l'injection $X(N_0) \hookrightarrow \mathcal{E}_0 \oplus_\Pi \mathcal{E}_0 \subseteq \mathcal{E} \oplus_\Pi \mathcal{E}'$ s'étend de manière unique en une injection continue $G(L)$-équivariante $X \hookrightarrow \mathcal{E} \oplus_\Pi \mathcal{E}'$ dont la composée avec la surjection canonique $\mathcal{E} \oplus_\Pi \mathcal{E}' \twoheadrightarrow X \oplus X$ est le plongement $X \hookrightarrow X \oplus X, x \mapsto (x, -x)$ (par unicité et car il en est de même avec $X(N_0)$). Il est alors formel d'en d'éduire que les applications composées :

$$\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E} \oplus_\Pi \mathcal{E}' \twoheadrightarrow (\mathcal{E} \oplus_\Pi \mathcal{E}')/X \quad \text{et} \quad \mathcal{E}' \hookrightarrow \mathcal{E} \oplus_\Pi \mathcal{E}' \twoheadrightarrow (\mathcal{E} \oplus_\Pi \mathcal{E}')/X$$

sont des isomorphismes topologiques $G(L)$-équivariants (la catégorie des représentations localement analytiques admissibles de $G(L)$ sur E étant abélienne, il n'y a plus besoin de se préoccuper des topologies). En particulier on a un isomorphisme $\mathcal{E}' \cong \mathcal{E}$ comme recherché. Il suffit donc de montrer :

Proposition 7.2.1. — *Soit* Π *une représentation localement* σ*-analytique admissible de* $G(L)$ *sur* E, $\mathcal{E} = \Pi - X$ *une extension localement* σ*-analytique et* $\mathcal{E}_0$ *(resp.* $\mathcal{E}_0^{\mathrm{lp}}$*) son "pullback" le long de* $X^{\mathrm{lp}}(N_0) \hookrightarrow X$ *(resp.* $X(N_0) \hookrightarrow X$*). Soit* V *une représentation localement* σ*-analytique très fortement admissible de* $G(L)$ *sur* E*. Alors tout morphisme* $(\mathfrak{g}_\sigma, B(L)^+)$*-équivariant* $f_0^{\mathrm{lp}} : \mathcal{E}_0^{\mathrm{lp}} \to V$ *continu en restriction à* Π *s'étend de manière unique en un morphisme* $(\mathfrak{g}_\sigma, B(L)^+)$*-équivariant continu* $f_0 : \mathcal{E}_0 \to V$*.*

Par hypothèse, on a une injection continue $G(L)$-équivariante $V \hookrightarrow W$ où W est un $G(L)$-Banach admissible sur E. Par l'argument de la preuve de [**33**, Cor. 4.3.3], il suffit de montrer la Proposition 7.2.1 en remplaçant V par les vecteurs localement σ-analytiques $W^{\sigma\text{-an}}$ de W.

Pour $i \geq i_\chi$ soit $\widetilde{Y}_i \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{E}_0^{\mathrm{lp}} \cap \widetilde{\mathcal{F}}_i$. Alors $\widetilde{Y}_i$ est un sous-E-espace vectoriel de $\widetilde{\mathcal{F}}_i$ stable par $\mathfrak{g}_\sigma$ (car $\widetilde{\mathcal{F}}_i$ est stable par H_0), et on a une suite exacte courte $\mathfrak{g}_\sigma$-équivariante $0 \to \Pi_{H_{i+1}\text{-an}} \to \widetilde{Y}_i \to X^{\mathrm{lp}}(N_0) \cap \widetilde{T}_i \to 0$. De plus $\widetilde{Y}_i$ est dense dans $\widetilde{\mathcal{F}}_i$ (utiliser que l'image dans $\widetilde{T}_i$ de l'adhérence de $\widetilde{Y}_i$ dans $\widetilde{\mathcal{F}}_i$ est fermée dans $\widetilde{T}_i$ et contient $X^{\mathrm{lp}}(N_0) \cap \widetilde{T}_i$ qui est dense, cf. preuve de [**33**, Cor. 4.2.18]) et, comme dans *loc. cit.*, peut être engendré sous $\mathfrak{g}_\sigma$ par un sous-espace de Banach fermé de $\widetilde{\mathcal{F}}_i$. Comme l'action de $\mathfrak{g}_\sigma$ sur $\widetilde{\mathcal{F}}_i$ est localement intégrable au sens de [**33**, Def. 1.2.16] (par [**33**, Prop. 1.2.18] car provenant d'une action localement analytique de H_0), on peut comme à la fin de la preuve de [**33**, Cor. 4.2.18] appliquer [**33**, Prop. 1.2.23] avec $W_i = \widetilde{\mathcal{F}}_i$ et $Y = \mathcal{E}_0^{\mathrm{lp}}$ et en déduire qu'il suffit de montrer la Proposition 7.2.1 en remplaçant $W^{\sigma\text{-an}}$ par W.

Par [**33**, Lem. 3.1.13] on a des isomorphismes N_0-équivariants d'espaces de Banach $\oplus_{n_0 \in N_0/z_0^i N_0 z_0^{-i}} n_0 z_0^i T_0 \xrightarrow{\sim} T_i$ qui induisent des isomorphismes N_0-équivariants :

$$\bigoplus_{n_0 \in N_0/z_0^{i-i_\chi} N_0 z_0^{i_\chi - i}} n_0 z_0^{i-i_\chi} T_{i_\chi} \xrightarrow{\sim} T_i \qquad i \geq i_\chi. \tag{97}$$

Pour $i \geq i_\chi$ on note σ_i la surjection $\mathcal{F}_i \twoheadrightarrow T_i$ et on fixe un ensemble de représentants $\mathcal{N}_i \subseteq N_0$ de $N_0/z_0^{i-i_\chi} N_0 z_0^{i_\chi - i}$ tel que $z_0 \mathcal{N}_i z_0^{-1} \subseteq \mathcal{N}_{i+1}$. Par [**52**, Prop. 10.5] on fixe une section continue $\tau_{i_\chi} : T_{i_\chi} \hookrightarrow \mathcal{F}_{i_\chi}$ de la surjection σ_{i_χ} et on définit pour $i \geq i_\chi$:

$$\begin{array}{rcl} \tau_i \ : \ T_i \overset{(97)}{\cong} \displaystyle\bigoplus_{n_0 \in \mathcal{N}_i} n_0 z_0^{i-i_\chi} T_{i_\chi} & \hookrightarrow & \mathcal{F}_i \\ n_0 z_0^{i-i_\chi} t & \longmapsto & n_0 z_0^{i-i_\chi} \tau_{i_\chi}(t). \end{array} \tag{98}$$

Soit $z = n_0 z_0^{i-i_\chi}$ ($n_0 \in \mathcal{N}_i$), en utilisant $H_i \subseteq zH_{i_\chi}z^{-1}$, [**35**, Lem. 3.5.1] et (97), on voit que l'action de z sur Π et $\mathcal{E}$ induit un diagramme commutatif où toutes les flèches verticales sont injectives et continues :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Pi_{H_{i_\chi+1}\text{-an}} & \longrightarrow & \mathcal{F}_{i_\chi} & \xrightarrow{\sigma_{i_\chi}} & T_{i_\chi} & \longrightarrow & 0 \\ & & z\downarrow & & \downarrow z & & \downarrow z & & \\ 0 & \longrightarrow & \Pi_{H_{i+1}\text{-an}} & \longrightarrow & \mathcal{F}_i & \xrightarrow{\sigma_i} & T_i & \longrightarrow & 0. \end{array} \tag{99}$$

Lemme 7.2.2. — *L'application τ_i est une section continue de la surjection σ_i.*

Démonstration. — C'est une section de σ_i par (99). Sa continuité résulte de l'isomorphisme d'espaces de Banach $n_0 z_0^{i-i_\chi} T_{i_\chi} \cong T_{i_\chi}$, de la continuité de τ_{i_χ} puis de la continuité de $n_0 z_0^{i-i_\chi} : \mathcal{F}_{i_\chi} \hookrightarrow \mathcal{F}_i$. □

Pour $i \geq i_\chi$ on note $\delta_i : \mathcal{F}_i \twoheadrightarrow \Pi_{H_{i+1}\text{-an}}$, $f \mapsto f - \tau_i(\sigma_i(f))$. C'est une surjection continue par le Lemme 7.2.2 et on a une bijection continue (donc un isomorphisme topologique) $\delta_i \oplus \sigma_i : \mathcal{F}_i \xrightarrow{\sim} \Pi_{H_{i+1}\text{-an}} \oplus T_i$, ou alternativement $\Pi_{H_{i+1}\text{-an}} \oplus \tau_i(T_i) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_i$.

Lemme 7.2.3. — *Pour $i \geq i_\chi$ l'action de z_0 sur Π et $\mathcal{E}$ induit des diagrammes commutatifs où toutes les applications sont continues :*

$$\begin{array}{ccc} T_i & \xrightarrow{\tau_i} & \mathcal{F}_i \\ z_0\downarrow & & \downarrow z_0 \\ T_{i+1} & \xrightarrow{\tau_{i+1}} & \mathcal{F}_{i+1}. \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{F}_i & \xrightarrow{\delta_i} & \Pi_{H_{i+1}\text{-an}} \\ z_0\downarrow & & \downarrow z_0 \\ \mathcal{F}_{i+1} & \xrightarrow{\delta_{i+1}} & \Pi_{H_{i+2}\text{-an}}. \end{array}$$

Démonstration. — Il suffit de montrer la première commutation. On a par (98) :

$$\begin{aligned} \tau_{i+1}\big(z_0(n_0 z_0^{i-i_\chi} t)\big) = \tau_{i+1}\big((z_0 n_0 z_0^{-1}) z_0^{i+1-i_\chi} t\big) &= (z_0 n_0 z_0^{-1}) z_0^{i+1-i_\chi} \tau_{i_\chi}(t) \\ &= z_0(n_0 z_0^{i-i_\chi} \tau_{i_\chi}(t)) = z_0 \tau_i(n_0 z_0^{i-i_\chi} t) \end{aligned}$$

où la deuxième égalité résulte de (98) appliqué en $i+1$ (avec $z_0 n_0 z_0^{-1} \in \mathcal{N}_{i+1}$) et la dernière de (98) appliqué en i. □

Par contre en général $\delta_i(nv) \neq n\delta_i(v)$ si $n \in N_0$, $v \in \mathcal{F}_i$.

Lemme 7.2.4. — *Soit V une représentation continue de $G(L)$ sur un E-espace vectoriel localement convexe $V = \varinjlim_i V_i$ (avec topologie limite inductive) pour une suite d'espaces de Banach $\{V_i, \|\cdot\|_{V_i}\}_{i\geq 0}$ et d'applications de transition injectives continues $V_i \hookrightarrow V_{i+1}$. On suppose que l'action de $z_0 \in G(L)$ sur V induit des injections continues $z_0 : V_i \hookrightarrow V_{i+1}$, $i \geq 0$. Alors on peut multiplier les normes $\|\cdot\|_{V_i}$ par des réels > 0 pour qu'elles vérifient $\|v_i\|_{V_{i+1}} \leq \|v_i\|_{V_i}$ et $\|z_0 v_i\|_{V_{i+1}} \leq \|v_i\|_{V_i}$ $\forall\ i \geq 0$, $\forall\ v_i \in V_i$.*

Démonstration. — Comme les injections $V_i \hookrightarrow V_{i+1}$ sont continues, on a des réels $C_i > 0$ tels que $\|v_i\|_{V_{i+1}} \leq C_i \|v_i\|_{V_i}$ pour $i \geq 0$ et $v_i \in V_i$. Soit $\|\cdot\|'_{V_i} \overset{\text{déf}}{=} (\prod_{0\leq j\leq i} C_j)^{-1} \|\cdot\|_{V_i}$, alors $\|v_i\|'_{V_{i+1}} \leq \|v_i\|'_{V_i}$ pour $i \geq 0$ et $v_i \in V_i$. On pose $\|\cdot\|''_{V_0} \overset{\text{déf}}{=} \|\cdot\|'_{V_0}$ et on va modifier successivement $\|\cdot\|'_{V_i}$ pour $i > 0$ croissant de sorte que les autres conditions soient vérifiées. Comme $z_0 : V_0 \to V_1$ est continu, il existe $D_0 > 0$ tel que $\|z_0v_0\|'_{V_1} \leq D_0\|v_0\|''_{V_0}$ pour $v_0 \in V_0$. Si $D_0 \leq 1$, on pose $\|\cdot\|''_{V_1} \overset{\text{déf}}{=} \|\cdot\|'_{V_1}$. Si $D_0 > 1$, on pose $\|\cdot\|''_{V_1} \overset{\text{déf}}{=} D_0^{-1}\|\cdot\|'_{V_1}$ et on remplace $\|\cdot\|'_{V_i}$ par $D_0^{-1}\|\cdot\|'_{V_i}$ pour tout $i \geq 2$. On a alors $\|z_0v_0\|''_{V_1} \leq \|v_0\|''_{V_0}$, $\|v_0\|''_{V_1} \leq \|v_0\|''_{V_0}$ pour $v_0 \in V_0$, et $\|v_i\|'_{V_{i+1}} \leq \|v_i\|'_{V_i}$ pour $i \geq 1$ et $v_i \in V_i$ (si $D_0 > 1$, alors $D_0^{-1} < 1$ donc $\|v_0\|''_{V_1} \leq \|v_0\|'_{V_1} \leq \|v_0\|''_0$ et les autres inégalités sont inchangées). On recommence au cran d'après. Par continuité de $z_0 : V_1 \to V_2$, on a $D_1 > 0$ tel que $\|z_0v_1\|'_{V_2} \leq D_1\|v_1\|''_{V_1}$ pour $v_1 \in V_1$ (pour la "nouvelle" norme $\|\cdot\|'_{V_2}$). Si $D_1 \leq 1$, on pose $\|\cdot\|''_{V_2} \overset{\text{déf}}{=} \|\cdot\|'_{V_2}$, sinon on pose $\|\cdot\|''_{V_2} \overset{\text{déf}}{=} D_1^{-1}\|\cdot\|'_{V_2}$ et on remplace $\|\cdot\|'_{V_i}$ par $D_1^{-1}\|\cdot\|'_{V_i}$ pour tout $i \geq 3$. On a $\|z_0v_1\|''_{V_2} \leq \|v_1\|''_{V_1}$, $\|v_1\|''_{V_2} \leq \|v_1\|''_{V_1}$ pour $v_1 \in V_1$, et $\|v_i\|'_{V_{i+1}} \leq \|v_i\|'_{V_i}$ pour $i \geq 2$, $v_i \in V_i$. Puis on continue en modifiant $\|\cdot\|'_{V_3}$ etc. On obtient à la fin des $\|\cdot\|''_{V_i}$ vérifiant les conditions demandées pour $i \geq 0$. $\square$

Pour tout $i \geq 0$, on note $\|\cdot\|_{T_i}$ la norme induite par la norme (cf. (94)) :

$$\mathrm{Max}\big(\|\cdot\|_{\mathcal{C}^{\sigma\text{-rig}}(z_0^iN_0z_0^{-i}n_0^{-1},E)},\ n_0 \in N_0/z_0^iN_0z_0^{-i}\big)$$

où $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^{\sigma\text{-rig}}(z_0^iN_0z_0^{-i}n_0^{-1},E)}$ est la norme sup rigide analytique sur $\mathcal{C}^{\sigma\text{-rig}}(z_0^iN_0z_0^{-i}n_0^{-1},E)$ (cf. [**33**, § 3.1]). Pour $n_0 \in N_0$ et $v \in T_i$ on a $\|n_0v\|_{T_i} = \|v\|_{T_i}$, $\|v\|_{T_{i+1}} \leq \|v\|_{T_i}$ (par [**33**, Lem. 3.2.1]) et $\|z_0v\|_{T_{i+1}} = |\chi(z_0)|\|v\|_{T_i}$ (par la preuve de [**33**, Lem. 3.2.2]). Pour tout $i \geq 0$, on choisit des normes H_0-invariantes $\|\cdot\|_{\Pi_{H_i\text{-an}}}$ sur les espaces de Banach $\Pi_{H_i\text{-an}}$ (H_0 est compact). Par le Lemme 7.2.4, on peut les supposer de plus telles que $\|v\|_{\Pi_{H_{i+1}\text{-an}}} \leq \|v\|_{\Pi_{H_i\text{-an}}}$ et $\|z_0v\|_{\Pi_{H_{i+1}\text{-an}}} \leq \|v\|_{\Pi_{H_i\text{-an}}}$ pour $i \geq 0$ et $v \in \Pi_{H_i\text{-an}}$. Pour $i \geq i_\chi$ on munit $\mathcal{F}_i \cong \Pi_{H_{i+1}\text{-an}} \oplus \tau_i(T_i)$ de la norme :

$$\|x+y\|_{\mathcal{F}_i} \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Max}\big(\|x\|_{\Pi_{H_{i+1}\text{-an}}}, \|\sigma_i(y)\|_{T_i}\big) \qquad (x,y) \in \Pi_{H_{i+1}\text{-an}} \times \tau_i(T_i).$$

Pour $d \geq 0$ et $i \geq 0$, on définit les sous-espaces de Banach $S_i^d \subseteq T_i$ et $S_i^{\perp,d} \subseteq T_i$ comme dans [**33**, § 4.2] de sorte que l'on a un scindage $S_i^d \oplus S_i^{\perp,d} \xrightarrow{\sim} T_i$ (en fait S_i^d est de dimension finie sur E). Pour tout $d, i \geq 0$, le sous-espace S_i^d est stable par N_0 et l'inclusion $T_i \subseteq T_{i+1}$ comme l'action de $z_0 : T_i \to T_{i+1}$ respectent les S_i^d. Pour $i \geq i_\chi$ on définit $\mathcal{F}_i^d \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{F}_i \times_{T_i} S_i^d \subseteq \mathcal{F}_i$. C'est un sous-espace fermé de $\mathcal{F}_i$ stable par N_0 et on a $\mathcal{F}_i^d \subseteq \mathcal{F}_{i+1}^d$, $z_0 : \mathcal{F}_i^d \to \mathcal{F}_{i+1}^d$. De plus on a $\cup_{i,d}\mathcal{F}_i^d = \mathcal{E}_0^{\mathrm{lp}} \subseteq \cup_{i\geq i_\chi}\mathcal{F}_i = \mathcal{E}_0$.

Soit $f_0^{\mathrm{lp}} : \mathcal{E}_0^{\mathrm{lp}} \longrightarrow W$ un morphisme $(\mathfrak{g}_\sigma, B(L)^+)$-équivariant continu en restriction à Π. Par restriction on a pour $i \geq i_\chi$ des morphismes encore notés $f_0^d : \mathcal{F}_i^d \longrightarrow W$ qui commutent aux actions de N_0 et de z_0. On fixe une norme N_0-invariante sur W (définissant sa topologie) et on note $v \longmapsto s(v) \overset{\text{déf}}{=} \|f_0^{\mathrm{lp}}(v)\|_W$ la semi-norme N_0-invariante induite sur $\cup_{i\geq i_\chi}\mathcal{F}_i^d$.

Lemme 7.2.5. — *Il existe $A, C > 0$ tels que, pour tout $i \geq i_\chi$, tout $n \in N_0$ et tout $v \in \tau_i(T_i)$, on a $s(\delta_i(nv)) \leq AC^{i-i_\chi}\|\sigma_i(v)\|_{T_i}$.*

Démonstration. — Il suffit de traiter le cas $v = n_0 z_0^{i-i_\chi}\tau_{i_\chi}(t) \in \tau_i(T_i)$ pour $n_0 \in \mathcal{N}_i$. Comme N_0 est un groupe compact agissant continument sur $\mathcal{F}_{i_\chi}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{F}_{i_\chi}}$ est équivalente à une norme invariante sous N_0 et il existe $B > 0$ tel que pour $n \in N_0$ et $v \in \mathcal{F}_{i_\chi}$:

$$\|nv\|_{\mathcal{F}_{i_\chi}} = \mathrm{Max}\big(\|\delta_{i_\chi}(nv)\|_{\Pi_{H_{i_\chi+1}\text{-an}}}, \|\sigma_{i_\chi}(nv)\|_{T_{i_\chi}}\big) \leq B\|v\|_{\mathcal{F}_{i_\chi}}.$$

Supposons d'abord $v \in \tau_{i_\chi}(T_{i_\chi}) \subseteq \mathcal{F}_{i_\chi}$, alors on a :

$$\|\delta_{i_\chi}(nv)\|_{\Pi_{H_{i_\chi+1}\text{-an}}} \leq B\|\sigma_{i_\chi}(nv)\|_{T_{i_\chi}} = B\|\sigma_{i_\chi}(v)\|_{T_{i_\chi}}. \tag{100}$$

L'application $f_0^d : \Pi_{H_{i_\chi+1}\text{-an}} \subseteq \mathcal{F}_i^d \longrightarrow W$ étant continue, il existe $B' > 0$ tel que $s(w) \leq B'\|w\|_{\Pi_{H_{i_\chi+1}\text{-an}}}$ pour $w \in \Pi_{H_{i_\chi+1}\text{-an}}$. On a donc avec (100) :

$$s(\delta_{i_\chi}(nv)) \leq B'\|\delta_{i_\chi}(nv)\|_{\Pi_{H_{i_\chi+1}\text{-an}}} \leq BB'\|\sigma_{i_\chi}(v)\|_{T_{i_\chi}}. \tag{101}$$

Supposons $v = n_0 z_0^{i-i_\chi}\tau_{i_\chi}(t) \in \tau_i(T_i)$ ($n_0 \in \mathcal{N}_i$). On a $nn_0 = n_0' z_0^{i-i_\chi} n_0'' z_0^{-(i-i_\chi)}$ pour $n_0' \in \mathcal{N}_i$, $n_0'' \in N_0$ donc :

$$nv = n_0' z_0^{i-i_\chi} n_0''\tau_{i_\chi}(t) = n_0' z_0^{i-i_\chi}\delta_{i_\chi}(n_0''\tau_{i_\chi}(t)) + n_0' z_0^{i-i_\chi}\tau_{i_\chi}(n_0'' t)$$

d'où $\delta_i(nv) = n_0' z_0^{i-i_\chi}\delta_{i_\chi}(n_0''\tau_{i_\chi}(t))$. Soit $D > 0$ tel que $\|z_0 w\|_W \leq D\|w\|_W$ pour $w \in W$ (D existe car z_0 agit continument sur W). On a avec (101) :

$$\begin{aligned} s\big(\delta_i(nv)\big) = s\big(z_0^{i-i_\chi}\delta_{i_\chi}(n_0''\tau_{i_\chi}(t))\big) \leq D^{i-i_\chi} s\big(\delta_{i_\chi}(n_0''\tau_{i_\chi}(t)\big) &\leq D^{i-i_\chi} BB'\|n_0'' t\|_{T_{i_\chi}} \\ &= BB'(D|\chi(z_0^{-1})|)^{i-i_\chi}\|n_0 z_0^{i-i_\chi} t\|_{T_i} \end{aligned}$$

d'où le résultat en posant $A \overset{\text{déf}}{=} BB'$ et $C \overset{\text{déf}}{=} D|\chi(z_0^{-1})|$. □

Lemme 7.2.6. — *Il existe $A', C' > 0$ tel que, pour tout $i \geq i_\chi$ et tout $v \in \tau_i(T_i)$ on a $s(\delta_{i+1}(v)) \leq A' C'^{i-i_\chi}\|\sigma_i(v)\|_{T_i}$.*

Démonstration. — L'application $f_0^d \circ \delta_{i_\chi+1} : \tau_{i_\chi}(T_{i_\chi}) \longrightarrow \Pi_{H_{i_\chi+2}\text{-an}} \longrightarrow W$ étant continue, il existe $F > 0$ tel que $s(\delta_{i_\chi+1}(w)) \leq F\|\sigma_{i_\chi}(w)\|_{T_{i_\chi}}$ pour tout $w \in \tau_{i_\chi}(T_{i_\chi})$. Il suffit de traiter le cas $v = n_0 z_0^{i-i_\chi}\tau_{i_\chi}(t) \in \tau_i(T_i)$ ($n_0 \in \mathcal{N}_i$). On a :

$$\begin{aligned} v &= n_0 z_0^{i-i_\chi}\big(\delta_{i_\chi+1}(\tau_{i_\chi}(t)) + \tau_{i_\chi+1}(t)\big) \\ &= n_0 z_0^{i-i_\chi}\delta_{i_\chi+1}(\tau_{i_\chi}(t)) + \delta_{i+1}\big(n_0 z_0^{i-i_\chi}\tau_{i_\chi+1}(t)\big) + \tau_{i+1}(n_0 z_0^{i-i_\chi} t) \end{aligned}$$

d'où $\delta_{i+1}(v) = n_0 z_0^{i-i_\chi}\delta_{i_\chi+1}(\tau_{i_\chi}(t)) + \delta_{i+1}(n_0 z_0^{i-i_\chi}\tau_{i_\chi+1}(t))$. Par le Lemme 7.2.5 appliqué à $s(\delta_{i+1}(n_0(z_0^{i-i_\chi}\tau_{i_\chi+1}(t))))$ (en notant que $z_0^{i-i_\chi}\tau_{i_\chi+1}(t) \in \tau_{i+1}(T_{i+1})$ par le Lemme 7.2.3) et avec D comme dans la preuve de *loc. cit.* on a :

$$\begin{aligned} s(\delta_{i+1}(v)) &\leq \mathrm{Max}\big(s(n_0 z_0^{i-i_\chi}\delta_{i_\chi+1}(\tau_{i_\chi}(t))), s(\delta_{i+1}(n_0(z_0^{i-i_\chi}\tau_{i_\chi+1}(t))))\big) \\ &\leq \mathrm{Max}\big(FD^{i-i_\chi}\|t\|_{T_{i_\chi}}, AC^{i+1-i_\chi}\|z_0^{i-i_\chi} t\|_{T_{i+1}}\big) \\ &\leq \mathrm{Max}\big(F(D|\chi(z_0^{-1})|)^{i-i_\chi}\|z_0^{i-i_\chi} t\|_{T_i}, (AC)C^{i-i_\chi}\|z_0^{i-i_\chi} t\|_{T_i}\big) \\ &\leq A' C'^{i-i_\chi}\|\sigma_i(v)\|_{T_i} \end{aligned}$$

en posant $A' \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{Max}(F, AC)$ et $C' \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{Max}(D|\chi(z_0^{-1})|, C)$. □

Lemme 7.2.7. — *Il existe $A'', C'' > 0$ tel que, pour tout $i \geq i_\chi$ et tout $v \in \tau_i(S_i^d)$ on a $s(v) \leq A''C''^{i-i_\chi}\|\sigma_i(v)\|_{T_i}$.*

Démonstration. — La preuve est la même que celle de [**33**, Lem. 3.2.3]. □

Théorème 7.2.8. — *Si d est suffisamment grand, alors la semi-norme s sur $\cup_{i\geq i_\chi}\mathcal{F}_i^d$ s'étend de manière unique en une seminorme continue sur $\cup_{i\geq i_\chi}\mathcal{F}_i = \mathcal{E}_0$.*

Démonstration. — L'argument est celui de la preuve de [**33**, Prop. 3.2.6] *mutatis mutandis.* On donne en détails le point délicat (nécessitant les lemmes qui précèdent), laissant le lecteur vérifier que le reste de la preuve s'étend sans problème. Pour tout $i \geq i_\chi$, on note π_i (resp. $\pi_i^\perp$) la projection $\mathcal{F}_i \twoheadrightarrow \mathcal{F}_i^d$ (resp. $\mathcal{F}_i \twoheadrightarrow S_i^{\perp,d}$), en rappelant que $\mathcal{F}_i = \Pi_{H_{i+1}\text{-an}} \oplus \tau_i(T_i) = \Pi_{H_{i+1}\text{-an}} \oplus \tau_i(S_i^d) \oplus \tau_i(S_i^{\perp,d}) = \mathcal{F}_i^d \oplus \tau_i(S_i^{\perp,d})$. Soit $i \geq i_\chi$ et $f \in \mathcal{F}_i$, il s'agit de montrer que la suite réelle $s(\pi_{i'}(f))$ converge quand $i' \to +\infty$ (on définit alors $s(f)$ comme cette limite). Comme $\pi_{i'}(f) = f$ ($i' \geq i$) si $f \in \mathcal{F}_i^d$, il suffit de traiter le cas $f \in \tau_i(T_i)$ (et même $f \in \tau_i(S_i^{\perp,d})$) et il suffit de montrer que $s(\pi_{i'+1}(f) - \pi_{i'}(f)) \to 0$ quand $i' \to +\infty$ (s est ultramétrique). On a dans $\mathcal{F}_{i'+1}$:

$$\begin{aligned}
(102) \qquad \pi_{i'+1}(f) - \pi_{i'}(f) &= \pi_{i'}^\perp(f) - \pi_{i'+1}^\perp(f) \\
&= \delta_{i'+1}(\pi_{i'}^\perp(f)) + \tau_{i'+1}\big(\sigma_{i'+1}(\pi_{i'}^\perp(f) - \pi_{i'+1}^\perp(f))\big) \\
&= \delta_{i'+1}(\pi_{i'}^\perp(f)) + \tau_{i'+1}\big(\sigma_{i'+1}(\pi_{i'+1}(f) - \pi_{i'}(f))\big).
\end{aligned}$$

Soit $A \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{Max}(A', A''C'')$ et $C \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{Max}(C', C'')$ avec (A', C') (resp. (A'', C'')) comme dans le Lemme 7.2.6 (resp. 7.2.7), on a :

$$\begin{aligned}
s\big(\pi_{i'+1}(f) - \pi_{i'}(f)\big) &\leq \mathrm{Max}\Big(s\big(\delta_{i'+1}(\pi_{i'}^\perp(f))\big), s\big(\tau_{i'+1}\big(\sigma_{i'+1}(\pi_{i'+1}(f) - \pi_{i'}(f))\big)\big)\Big) \\
&\leq AC^{i'-i_\chi}\mathrm{Max}\Big(\|\sigma_{i'}(\pi_{i'}^\perp(f))\|_{T_{i'}}, \|\sigma_{i'+1}(\pi_{i'+1}(f) - \pi_{i'}(f))\|_{T_{i'+1}}\Big) \\
&= AC^{i'-i_\chi}\mathrm{Max}\Big(\|\sigma_{i'}(\pi_{i'}^\perp(f))\|_{T_{i'}}, \|\sigma_{i'+1}(\pi_{i'}^\perp(f) - \pi_{i'+1}^\perp(f))\|_{T_{i'+1}}\Big) \\
&\leq AC^{i'-i_\chi}\mathrm{Max}\Big(\|\sigma_{i'}(\pi_{i'}^\perp(f))\|_{T_{i'}}, \|\sigma_{i'+1}(\pi_{i'+1}^\perp(f))\|_{T_{i'+1}}\Big) \\
&\leq AC^{i'-i_\chi}\epsilon^{i'-i}\mathrm{Max}(1,\epsilon)\|\sigma_i(f)\|_{T_i} \\
&\leq AC^{i-i_\chi}(\epsilon C)^{i'-i}\mathrm{Max}(1,\epsilon)\|f\|_{\mathcal{F}_i}.
\end{aligned}$$

où $\epsilon = |p|^{d+1}$ et où les (in)égalités résultent dans l'ordre de : (102) + inégalité triangulaire, Lemme 7.2.6 (en i') + Lemme 7.2.7 (en $i'+1$), (102), inégalité triangulaire + $\|\cdot\|_{T_{i'+1}} \leq \|\cdot\|_{T_{i'}}$, fin de la preuve de [**33**, Lem. 4.2.14], définition de $\|\cdot\|_{\mathcal{F}_i}$. Si d est suffisamment grand, alors $\epsilon C < 1$ et on a bien $\lim_{i'\to+\infty} s(\pi_{i'+1}(f) - \pi_{i'}(f)) = 0$. □

La fin de l'argument (pour la preuve de la Proposition 7.2.1 avec W au lieu de V) est totalement similaire à la fin de [**33**, § 3.2]. Comme dans la preuve de [**33**, Prop. 3.2.6], on a que $\mathcal{E}_0^{\mathrm{lp}}$ (en fait $\cup_{i\geq i_\chi}\mathcal{F}_i^d$) est dense dans $\mathcal{E}_0$ pour la topologie définie par la semi-norme s (étendue par le Théorème 7.2.8). Par [**52**, Lem. 7.3], le morphisme $f_0^{\mathrm{lp}}:\mathcal{E}_0^{\mathrm{lp}}\to W$ s'étend alors de manière unique en un morphisme continu $f_0:\mathcal{E}_0\to W$ pour la topologie définie par s, f_0 étant de plus $(\mathfrak{g}_\sigma, B(L)^+)$-équivariant par unicité (et $(\mathfrak{g}_\sigma, B(L)^+)$-équivariance de f_0^{lp}). Comme s est continue, l'identité $\mathcal{E}_0\xrightarrow{\mathrm{Id}}\mathcal{E}_0$ est continue avec à gauche la topologie de type compact de $\mathcal{E}_0$ et à droite celle définie par s. On en déduit que f_0 est bien continu pour la topologie de type compact de $\mathcal{E}_0$.

Références

[1] Bellaïche J., Chenevier G., *Families of Galois representations and Selmer groups*, Astérisque 324, 2009.

[2] Benois D., *A generalization of Greenberg's $\mathcal{L}$-invariant*, Amer. J. Math. 133, 2011, 1573-1632.

[3] Breuil C., *Série spéciale p-adique et cohomologie étale complétée*, Astérisque 331, 2010, 65-115.

[4] Breuil C., *Vers le socle localement analytique I*, Ann. Institut Fourier 66, 2016, 633-685.

[5] Breuil C., *Vers le socle localement analytique II*, Math. Annalen 361, 2015, 741-785.

[6] Breuil C., Emerton M. *Représentations ordinaires de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *et compatibilité local-global*, Astérisque 331, 2010, 255-315.

[7] Breuil C., Hellmann E., Schraen B., *Smoothness and classicality on eigenvarieties*, Invent. Math. 209, 2017, 197-274.

[8] Breuil C., Hellmann E., Schraen B., *A local model for the trianguline variety and applications*, prépublication 2017.

[9] Breuil C., Herzig F., *Ordinary representations of $G(\mathbb{Q}_p)$ and fundamental algebraic representations*, Duke Math. J. 164, 2015, 1271-1352.

[10] Breuil C., Herzig F., *Towards the finite slope part for* GL_n, prépublication 2018.

[11] Breuil C., Mézard A., *Multiplicités modulaires et représentations de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ *et de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ *en $\ell=p$*, Duke Math. J. 115, 2002, 205-298.

[12] Breuil C., Schneider P., *First steps towards p-adic Langlands funtoriality*, J. Reine Angew. Math. 610, 2007, 149-180.

[13] Caraiani A., *Local-global compatibility and the action of monodromy on nearby cycles*, Duke Math. J. 161, 2012, 2311-2413.

[14] Caraiani A., *Monodromy and local-global compatibility for $\ell=p$*, Algebra and Number Theory 8, 2014, 1597-1646.

[15] Caraiani A., Emerton M., Gee T., Geraghty D., Paškūnas V., Shin S. W., *Patching and the p-adic local Langlands correspondence*, Cambridge J. Math. 4, 2016, 197-287.

[16] Chojecki P., Sorensen C., *Weak local-global compatibility in the p-adic Langlands program for $U(2)$*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 137, 2017, 101-133.

[17] Chojecki P., Sorensen C., *Strong local-global compatibility in the p-adic Langlands program for $U(2)$*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 137, 2017, 135-153.

[18] Clozel L., Harris M., Taylor R., *Automorphy for some ℓ-adic lifts of automorphic mod ℓ Galois representations*, Pub. Math. I.H.É.S. 108, 2008, 1-181.

[19] Colmez P., *La série principale unitaire de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, Astérisque 330, 2010, 213-262.

[20] Colmez P., *Représentations de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *et* (φ,Γ)*-modules*, Astérisque 330, 2010, 281-509.

[21] Colmez P., *Correspondance de Langlands locale p-adique et changement de poids*, à paraître à J. Eur. Math. Soc.

[22] Colmez P., Dospinescu G., *Complétés universels de représentations de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, Algebra and Number Theory 8, 2014, 1447-1519.

[23] Dat J.-F., *Espaces symétriques de Drinfeld et correspondance de Langlands locale*, Ann. Scient. É. N. S. 39, 2006, 1-74.

[24] Deligne P., *Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions* L, Lecture Notes in Math. 349, 1973, 501-595.

[25] Ding Y., *Companion points and locally analytic socle for* $\mathrm{GL}_2(L)$, prépublication 2016.

[26] Ding Y., $\mathcal{L}$*-invariants and local-global compatibility for the group* GL_2/F, Forum of Math. Sigma 4, 2016.

[27] Ding Y., $\mathcal{L}$*-invariants, partially de Rham families, and local-global compatibility*, Ann. Institut Fourier 67, 2017, 1457-1519.

[28] Ding Y., *Simple* $\mathcal{L}$*-invariants for* GL_n, prépublication 2017.

[29] Dospinescu G., lettre à l'auteur, 14 janvier 2016.

[30] Dospinescu G., Le Bras A.-C., *Revêtements du demi-plan de Drinfeld et correspondance de Langlands p-adique*, à paraître à Annals of Math.

[31] Emerton M., *On the interpolation of systems of eigenvalues attached to automorphic Hecke eigenforms*, Invent. Math. 164, 2006, 1-84.

[32] Emerton M., *Jacquet modules of locally analytic representations of p-adic reductive groups I. Constructions and first properties*, Ann. Scient. É. N. S. 39, 2006, 775-839.

[33] Emerton M., *Jacquet modules of locally analytic representations of p-adic reductive groups II. The relation to parabolic induction*, à paraître à J. Inst. Math. Jussieu.

[34] Emerton M., *Local-global compatibility in the p-adic Langlands programme for* $\mathrm{GL}_{2/\mathbf{Q}}$, prépublication 2011.

[35] Emerton M., *Locally analytic vectors in representations of locally analytic p-adic groups*, Memoirs Amer. Math. Soc. 248, 2017.

[36] Fontaine J.-M., *Représentations* ℓ*-adiques potentiellement semi-stables*, Astérisque 223, 1994, 321-347.

[37] Fontaine J.-M., *Représentations p-adiques semi-stables*, Astérisque 223, 1994, 113-184.

[38] Harris M., Taylor R., *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Ann. Math. Studies 151, Princeton Univ. Press, 2001.

[39] Henniart G., *Une preuve simple des conjectures de Langlands pour* GL_n *sur un corps p-adique*, Invent. Math. 139, 2000, 439-455.

[40] Humphreys J., *Representations of Semisimple Lie Algebras in the BGG Category* $\mathcal{O}$, Graduate Studies in Math. 94, 2008.

[41] Kaletha T., Minguez A., Shin S. W., White P. J., *Endoscopic classification of representations: inner forms of unitary groups*, prépublication 2014.

[42] Kedlaya K., Pottharst J., Xiao L., *Cohomology of arithmetic families of* (φ,Γ)*-modules*, J. Amer. Math. Soc. 27, 2014, 1043-1115.

[43] Kohlhaase J., *The cohomology of locally analytic representations*, J. Reine Angew. Math. 651, 2011, 187-240.

[44] Liu R., *Locally analytic vectors of some crystabelian representations of* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, Compositio Math. 148, 2012, 28-64.

[45] Liu R., Bingyong X., Zhang Y., *Locally analytic vectors of unitary principal series of* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, Ann. Scient. É.N.S. 45, 2012, 167-190.

[46] Moeglin C., Waldspurger J.-L., *Stabilisation de la formule des traces tordues vol. 1 & 2*, Progress in Maths. 316 & 317, Birkhäuser, 2016.

[47] Mok C. P., *Endoscopic classification of representations of quasi-split unitary groups*, Memoirs Amer. Math. Soc. 235, 2015.

[48] Orlik S., *On extensions of generalized Steinberg representations*, J. of Algebra 293, 2005, 611-630.

[49] Orlik S., Schraen B., *The Jordan-Hölder series of the locally analytic Steinberg representation*, Documenta Math. 19, 2014, 647-671.

[50] Orlik S., Strauch M., *On Jordan-Hölder series of some locally analytic representations*, J. Amer. Math. Soc. 28, 2015, 99-157.

[51] Rogawski J., *Automorphic representations of unitary groups in three variables*, Ann. Math. Studies 123, Princeton Univ. Press, 1990.

[52] Schneider P., *Nonarchimedean Functional Analysis*, Springer Monographs in Math., 2002.

[53] Schneider P., Teitelbaum J., *Locally analytic distributions and p-adic representation theory, with applications to GL_2*, J. Amer. Math. Soc. 15, 2001, 443-468.

[54] Schneider P., Teitelbaum J., *Algebras of p-adic distributions and admissible representations*, Invent. Math. 153, 2003, 145-196.

[55] Schneider P., Teitelbaum J., *Duality for admissible locally analytic representations*, Repres. Theory 9, 2005, 297-326.

[56] Schneider P., Teitelbaum J., *Banach space representations and Iwasawa theory*, Israel J. Math. 127, 2002, 359-380.

[57] Schraen B., *Représentations localement analytiques de* $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$, Ann. Scient. É. N. S. 44, 2011, 43-145.

[58] Schraen B., *Complément à* [**57**], http://schraen.perso.math.cnrs.fr/, 2015.

[59] Schraen B., *Représentations p-adiques de* $\mathrm{GL}_2(L)$ *et catégories dérivées*, Israel J. Math. 176, 2010, 307-361.

C. Breuil, Institut de Mathématique d'Orsay, C.N.R.S. et Université Paris-Sud, Université Paris-Saclay, F-91405 Orsay, France • *E-mail :* `christophe.breuil@math.u-psud.fr`