

---

# SUR QUELQUES REPRÉSENTATIONS MODULAIRES ET $p$ -ADIQUES DE $GL_2(\mathbf{Q}_p)$ II

*par*

Christophe Breuil

---

**Résumé.** — Nous conjecturons que la réduction modulo  $p$  des représentations cristallines irréductibles de dimension 2 sur  $\mathbf{Q}_p$  de  $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$  peut être prédite par la réduction modulo  $p$  de représentations  $p$ -adiques localement algébriques de  $GL_2(\mathbf{Q}_p)$ . Nous explicitons quelques calculs de telles réductions confirmant cette conjecture. Cela suggère un lien arithmétique non trivial entre les deux types de représentations.

## Table des matières

1. Introduction .....	1
2. Notations et formules .....	5
2.1. Notations .....	5
2.2. Formulaire .....	7
3. Définitions et conjectures .....	9
3.1. Définition des représentations $V_{k,a_p,\chi}$ .....	9
3.2. Définition des représentations $\Pi_{k,a_p,\chi}$ .....	11
3.3. Conjectures .....	13
4. Existence de réseaux .....	16
4.1. Préparation .....	16
4.2. Démonstration du théorème 4.1.1 .....	16
5. Réduction modulo $p$ .....	19
5.1. Premiers calculs .....	19
5.2. Lemmes de descente .....	21
5.3. Réduction modulo $p$ .....	23
6. Quelques vérifications .....	27
6.1. Cas particuliers .....	27
6.2. Exemples numériques .....	28
Références .....	32

## 1. Introduction

Une question naturelle, évoquée par exemple dans [3] mais soulevée aussi indépendamment par plusieurs mathématiciens, est de savoir s’il existe un analogue  $p$ -adique continu de la correspondance de Langlands locale classique pour  $\mathrm{GL}_n$  sur un corps archimédien. Si  $F$  est, disons, une extension finie de  $\mathbf{Q}_p$ , peut-on relier de façon “naturelle” (i.e. arithmétique ou géométrique) les, ou certaines, représentations  $p$ -adiques *continues* de dimension  $n$  du groupe de Weil de  $F$  avec les, ou certaines, représentations  $p$ -adiques *continues* de  $\mathrm{GL}_n(F)$  ?

Dans cet article, presque entièrement calculatoire faute de théorie pour l’instant (à ma connaissance), nous explorons dans l’optique ci-dessus le cas particulier où  $F = \mathbf{Q}_p$ ,  $n = 2$  et où les représentations galoisiennes considérées sont les représentations cristallines irréductibles de dimension 2 sur  $\overline{\mathbf{Q}}_p$  de  $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ . Les résultats bruts des calculs et les extrapolations que l’on peut en tirer vont clairement dans le sens d’une telle correspondance, au moins dans le cas considéré, et m’ont paru suffisamment intéressants pour justifier à eux seuls une publication.

Soit  $k \geq 2$  un entier,  $a_p$  un élément de  $\overline{\mathbf{Z}}_p$  de valuation strictement positive et  $\chi : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p) \rightarrow \overline{\mathbf{Z}}_p^\times$  le produit d’un caractère non ramifié par une puissance entière du caractère cyclotomique. Nous commençons par rappeler la construction ([5]), à partir de ces données, des représentations cristallines mentionnées plus haut (nous les notons  $V_{k,a_p,\chi}$ ). Puis nous définissons, avec les mêmes données, des représentations  $p$ -adiques naturelles  $\Pi_{k,a_p,\chi}$  de  $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ . Ces représentations sont simplement le produit tensoriel de la représentation algébrique  $\mathrm{Sym}^{k-2}\overline{\mathbf{Q}}_p^2$  par une induite parabolique non ramifiée qui, la plupart du temps, est associée via la correspondance locale classique “de Hecke” pour  $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$  à la représentation de Weil issue de  $V_{k,a_p,\chi}$  par le processus de Fontaine (voir e.g. [3]).

En vertu de notre problématique, la question est de savoir si  $\Pi_{k,a_p,\chi}$  est la “bonne” représentation associée à  $V_{k,a_p,\chi}$ , ou en tout cas si elle en est une bonne approximation. Plusieurs approches sont possibles pour essayer de répondre. Cet article explore l’une d’entre elles : comme les représentations irréductibles de  $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$  sur  $\overline{\mathbf{F}}_p$  sont toutes connues ([1],[2]), nous comparons la réduction modulo  $p$  de  $\Pi_{k,a_p,\chi}$  avec la réduction modulo  $p$  de  $V_{k,a_p,\chi}$  (plus précisément, nous comparons les semi-simplifiées modulo l’idéal maximal de  $\overline{\mathbf{Z}}_p$ ). L’idée étant que si la correspondance  $\Pi_{k,a_p,\chi} \leftrightarrow V_{k,a_p,\chi}$  a véritablement un sens arithmétique, elle doit “passer” à la réduction modulo  $p$ .

Rappelons d'abord quelques résultats de [1] et [2]. Considérons les représentations suivantes de  $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$  sur  $\overline{\mathbf{F}}_p$  (cf. §2.1 pour des définitions précises) :

$$\pi(r, \lambda, \eta) = \left[ \left( \mathrm{ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)\mathbf{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)} \mathrm{Sym}^r \overline{\mathbf{F}}_p^2 \right) / (T - \lambda) \right] \otimes (\eta \circ \det)$$

où  $r \in \{0, \dots, p-1\}$ ,  $\lambda \in \overline{\mathbf{F}}_p$  et  $\eta : \mathbf{Q}_p^\times \rightarrow \overline{\mathbf{F}}_p^\times$  est un caractère lisse. Dans [1] et [2] il est démontré que les  $\pi(r, \lambda, \eta)$  sont toujours irréductibles sauf lorsque  $(r, \lambda) \in \{(0, \pm 1), (p-1, \pm 1)\}$  où elles sont de longueur 2. Les  $\pi(r, \lambda, \eta)$  irréductibles et les sous-quotients des  $\pi(r, \lambda, \eta)$  réductibles épuisent les représentations lisses irréductibles avec caractère central de  $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$  sur  $\overline{\mathbf{F}}_p$  (cf. [1]). Soit  $\omega$  le caractère cyclotomique modulo  $p$  (vu comme caractère de  $\mathbf{Q}_p^\times$  via le corps de classes normalisé en envoyant les Frobenius géométriques sur les uniformisantes),  $\omega_2$  le caractère fondamental de niveau 2 et, pour  $s \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$  et  $p+1 \nmid s$ ,  $\mathrm{ind}(\omega_2^s)$  l'unique représentation irréductible de  $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$  sur  $\overline{\mathbf{F}}_p$  de déterminant  $\omega^s$  et dont la restriction à l'inertie est  $\omega_2^s \oplus \omega_2^{ps}$ . Dans [2], nous avons relié les représentations  $\pi(r, \lambda, \eta)$  aux représentations semi-simples de  $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$  de dimension 2 sur  $\overline{\mathbf{F}}_p$  de la façon suivante :

**Définition 1.1** ([2]). — *Pour  $r \in \{0, \dots, p-1\}$ ,  $\lambda \in \overline{\mathbf{F}}_p$  et  $\eta : \mathbf{Q}_p^\times \rightarrow \overline{\mathbf{F}}_p^\times$  un caractère lisse, on définit la “correspondance” :*

(i) si  $\lambda = 0$  :

$$\pi(r, 0, \eta) \longleftrightarrow (\mathrm{ind}(\omega_2^{r+1})) \otimes \eta$$

(ii) si  $\lambda \neq 0$  :

$$\pi(r, \lambda, \eta)^{ss} \oplus \pi([p-3-r], \lambda^{-1}, \omega^{r+1}\eta)^{ss} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \mathrm{nr}(\lambda^{-1})\omega^{r+1} & 0 \\ 0 & \mathrm{nr}(\lambda) \end{pmatrix} \otimes \eta$$

où  $\mathrm{nr}(x)$  est le caractère non ramifié qui envoie le Frobenius arithmétique sur  $x$ , “ss” signifie “semi-simplifiée” et  $[p-3-r]$  est l'unique entier dans  $\{0, \dots, p-2\}$  congru à  $p-3-r$  modulo  $p-1$ .

Revenons au contenu de cet article. Quitte à tordre, on se ramène à  $\chi = 1$  et on note  $V_{k,a_p} = V_{k,a_p,1}$  et  $\Pi_{k,a_p} = \Pi_{k,a_p,1}$ . En reformulant  $\Pi_{k,a_p}$  comme induite compacte, on en définit un sous- $\overline{\mathbf{Z}}_p[\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)]$ -module de type fini naturel  $\Theta_{k,a_p}$  qui l'engendre sur  $\overline{\mathbf{Q}}_p$ . On conjecture que  $\Theta_{k,a_p}$  est un  $\overline{\mathbf{Z}}_p$ -réseau, i.e. qu'il ne contient pas de  $\overline{\mathbf{Q}}_p$ -droite. La conjecture principale de l'article est alors que la réduction modulo  $p$  de  $\Theta_{k,a_p}$  correspond à la réduction modulo  $p$  d'un réseau de  $V_{k,a_p}$  (après semi-simplification) par la correspondance 1.1 (rappelons que “modulo  $p$ ” signifie modulo l'idéal maximal de  $\overline{\mathbf{Z}}_p$ ). Autrement dit (cf. conjecture 3.3.5) :

**Conjecture 1.2.** — *La semi-simplifiée modulo  $p$  de  $\Pi_{k,a_p}$  est associée à la semi-simplifiée modulo  $p$  de  $V_{k,a_p}$  par la correspondance en 1.1.*

La conjecture 1.2 contient plusieurs énoncés qui semblent non triviaux : le fait que  $\Theta_{k,a_p}$  ne contient pas de  $\overline{\mathbf{Q}}_p$ -droite, le fait que sa réduction est de longueur finie et a l'une des formes particulières de la définition 1.1, etc.

Passons aux résultats en direction de cette conjecture, qui sont très partiels.

**Théorème 1.3.** — *Supposons  $k \leq 2p$  et  $k \neq 4$  si  $p = 2$ , alors  $\Theta_{k,a_p}$  est libre sur  $\overline{\mathbf{Z}}_p$  et sa réduction modulo  $p$  est un  $\overline{\mathbf{F}}_p[\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)]$ -module de longueur finie.*

Notons  $\overline{\Pi}_{k,a_p}$  la semi-simplifiée de la réduction modulo  $p$  de  $\Theta_{k,a_p}$ .

**Théorème 1.4.** — *(i) Supposons  $k \leq p + 1$ , alors  $\overline{\Pi}_{k,a_p} = \pi(k - 2, 0, 1)$ .*

*(ii) Supposons  $k = p + 2$  et  $p \neq 2$ , alors :*

- si  $\mathrm{val}(a_p) < 1$ ,  $\overline{\Pi}_{k,a_p} = \pi(p - 2, 0, \omega) \simeq \pi(1, 0, 1)$
- si  $\mathrm{val}(a_p) \geq 1$ ,  $\overline{\Pi}_{k,a_p} = \pi(p - 2, \lambda, \omega)^{ss} \oplus \pi(p - 2, \lambda^{-1}, \omega)^{ss}$  où  $\lambda^2 - \frac{\overline{a_p}}{p}\lambda + 1 = 0$ .

*(iii) Supposons  $p + 3 \leq k \leq 2p$ , alors :*

- si  $\mathrm{val}(a_p) < 1$ ,  $\overline{\Pi}_{k,a_p} = \pi(2p - k, 0, \omega^{k-1-p}) \simeq \pi(k - 1 - p, 0, 1)$
- si  $\mathrm{val}(a_p) = 1$ ,  $\overline{\Pi}_{k,a_p} = \pi(k - 3 - p, \lambda, \omega)^{ss} \oplus \pi(2p - k, \lambda^{-1}, \omega^{k-1-p})^{ss}$  où  $\lambda = \frac{\overline{(k-1)a_p}}{p}$
- si  $\mathrm{val}(a_p) > 1$ ,  $\overline{\Pi}_{k,a_p} = \pi(k - 3 - p, 0, \omega)$ .

Pour des raisons purement techniques, je ne suis pas arrivé à traiter complètement le cas  $p = 2$ ,  $k = 4$  et l'ai donc exclus des énoncés. Il ne fait aucun doute que les deux théorèmes restent valables dans ce cas. Je me suis limité à  $k \leq 2p$  à cause de la multiplication probable des cas à considérer (dépendant de  $\mathrm{val}(a_p)$ ) lorsque  $k$  grandit. Un peu plus de courage permettrait sûrement de traiter d'autres cas.

Notons  $\overline{V}_{k,a_p}$  la semi-simplifiée modulo  $p$  de  $V_{k,a_p}$ . Combiné avec la conjecture 1.2, le théorème 1.4 entraîne la conjecture “explicite” suivante :

**Conjecture 1.5.** — *(i) Supposons  $k \leq p + 1$ , alors  $\overline{V}_{k,a_p} = \mathrm{ind}(\omega_2^{k-1})$ .*

*(ii) Supposons  $k = p + 2$ , alors :*

- si  $\mathrm{val}(a_p) < 1$ ,  $\overline{V}_{p+2,a_p} = \mathrm{ind}(\omega_2^2)$
- si  $\mathrm{val}(a_p) \geq 1$ ,  $\overline{V}_{p+2,a_p} = \begin{pmatrix} \mathrm{nr}(\lambda^{-1})\omega & 0 \\ 0 & \mathrm{nr}(\lambda)\omega \end{pmatrix}$  où  $\lambda^2 - \frac{\overline{a_p}}{p}\lambda + 1 = 0$  dans  $\overline{\mathbf{F}}_p$ .

*(iii) Supposons  $p + 3 \leq k \leq 2p$ , alors :*

- si  $\mathrm{val}(a_p) < 1$ ,  $\overline{V}_{k,a_p} = \mathrm{ind}(\omega_2^{k-p})$
- si  $\mathrm{val}(a_p) = 1$ ,  $\overline{V}_{k,a_p} = \begin{pmatrix} \mathrm{nr}(\lambda^{-1})\omega^{k-2} & 0 \\ 0 & \mathrm{nr}(\lambda)\omega \end{pmatrix}$  où  $\lambda = \frac{\overline{(k-1)a_p}}{p} \in \overline{\mathbf{F}}_p^\times$
- si  $\mathrm{val}(a_p) > 1$ ,  $\overline{V}_{k,a_p} = \mathrm{ind}(\omega_2^{k-1})$ .

Côté Galois, on ne connaît  $\overline{V}_{k,a_p}$  que dans peu de cas : si  $k \leq p$ , la théorie de Fontaine-Laffaille donne  $\mathrm{ind}(\omega_2^{k-1})$  et si  $a_p = 0$ ,  $V_{k,a_p}$  s'exprime comme une induite dont la réduction (à vue) est  $\mathrm{ind}(\omega_2^{k-1})$  si  $p+1 \nmid k-1$  et  $\mathrm{nr}(\sqrt{-1})\omega^{\frac{k-1}{p+1}} \oplus \mathrm{nr}(\sqrt{-1})\omega^{\frac{k-1}{p+1}}$  sinon. En comparant avec 1.4, on en déduit :

**Corollaire 1.6.** — *Les conjectures 1.2 et 1.5 sont vraies si  $k \leq p$  ou si  $a_p = 0$  et  $k \leq 2p$  (avec  $k \neq 4$  si  $p = 2$ ).*

Notons que le (i) de 1.5 pour  $k = p + 1$  a été démontré lorsque  $V_{p+1, a_p}$  provient d’une forme modulaire de poids  $p+1$  et de niveau premier à  $p$  ([7]). Pour  $p+1 \leq k$ , la théorie de Fontaine-Laffaille n’est plus disponible et le calcul de  $\overline{V}_{k, a_p}$ , même “à la main”, n’est pas connu en général. On en est réduit à tester la conjecture 1.5 (donc la conjecture 1.2) sur ordinateur. Les formes modulaires non ordinaires en  $p$  et de niveau premier à  $p$  fournissent de nombreux exemples de représentations cristallines  $V_{k, a_p}$  et, par la théorie des congruences entre formes modulaires, William Stein et David Savitt ont pu “vérifier” sur ordinateur la validité de la conjecture 1.5 dans plusieurs centaines de cas. En fin d’article, nous donnons quelques exemples explicites issus de leur programme.

Voici le plan de l’article. On commence par quelques préliminaires au §2. Au §3, on définit les représentations  $V_{k, a_p}$  (§3.1) et  $\Pi_{k, a_p}$  (§3.2), on énonce les conjectures sur  $\Theta_{k, a_p}$  et  $\Theta_{k, a_p} \otimes \overline{\mathbf{F}}_p$  et on montre que le cas  $k \leq p + 1$  est facile (§3.3). Au §4, on démontre la première partie du théorème 1.3, ce qui revient à montrer que si  $(T - a_p)(f)$  est entier, alors  $f$  n’est peut-être pas entier mais a au moins ses dénominateurs bornés (§4.1), ce qu’on vérifie “à la main” au §4.2 dans les cas considérés. Au §5, on démontre la deuxième partie du théorème 1.3 ainsi que le théorème 1.4. On commence par trouver une représentation évidente de  $GL_2(\mathbf{Q}_p)$  sur  $\overline{\mathbf{F}}_p$  dont  $\Theta_{k, a_p} \otimes \overline{\mathbf{F}}_p$  est un quotient (§5.1). Il s’agit alors de calculer le noyau de la surjection vers  $\Theta_{k, a_p} \otimes \overline{\mathbf{F}}_p$ . On trouve assez facilement des éléments dans ce noyau (ce sont les divers éléments  $f$  considérés au §5.3). Pour montrer que ces éléments engendrent exactement le noyau (i.e. que le noyau n’est pas plus gros), on a besoin, lorsque  $\Theta_{k, a_p} \otimes \overline{\mathbf{F}}_p$  est réductible, de lemmes de “descente” sur l’arbre de Bruhat-Tits établis au §5.2. Le calcul complet de  $\Theta_{k, a_p} \otimes \overline{\mathbf{F}}_p$  est alors explicité au §5.3. On termine au §6 en testant la conjecture 1.5 comme expliqué précédemment.

L’auteur remercie chaleureusement William Stein et David Savitt pour lui avoir rapidement fourni de nombreux exemples confirmant la conjecture principale de cet article ainsi que pour leur disponibilité sans faille. Il remercie également Alain Genestier pour de nombreuses discussions. En guise de conclusion, il éprouve le besoin de s’excuser pour les preuves assez techniques de cet article (mais qui ont au moins l’avantage d’être élémentaires). Il espère l’existence de preuves conceptuelles et générales qui rendront un jour les calculs de cet article complètement ou partiellement inutiles.

## 2. Notations et formules

### 2.1. Notations. —

2.1.1. On fixe  $\overline{\mathbf{Q}}_p$  une clôture algébrique de  $\mathbf{Q}_p$  d'anneau d'entiers  $\overline{\mathbf{Z}}_p$  de corps résiduel  $\overline{\mathbf{F}}_p$ . On note  $\text{val}$  la valuation sur  $\overline{\mathbf{Q}}_p$  telle que  $\text{val}(p) = 1$  et  $|\cdot|$  la norme  $p$ -adique  $|x| = \frac{1}{p^{\text{val}(x)}}$ . On normalise l'isomorphisme de la théorie du corps de classes local en envoyant les uniformisantes sur les Frobenius géométriques. On note  $\varepsilon$  le caractère cyclotomique  $p$ -adique et  $\omega$  sa réduction modulo  $p$  vus aussi comme caractère de  $\mathbf{Q}_p^\times$ . En particulier,  $\varepsilon(p) = 1$  (cf. [2], §4.2) et  $\varepsilon|_{\mathbf{Z}_p^\times} : \mathbf{Z}_p^\times \rightarrow \mathbf{Z}_p^\times$  est l'identité. On note  $\omega_2$  le caractère fondamental de niveau 2 de Serre. Pour  $s \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ ,  $(s, p+1) = 1$ , on note  $\text{ind}(\omega_2^s)$  l'unique représentation irréductible de dimension 2 de  $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$  sur  $\overline{\mathbf{F}}_p$  de déterminant  $\omega^s$  et dont la restriction à l'inertie est  $\omega_2^s \oplus \omega_2^{ps}$ . On note  $\mu_\lambda$  le caractère non ramifié de  $\mathbf{Q}_p^\times$  (resp. du groupe de Weil de  $\mathbf{Q}_p$ ) qui envoie  $p$  (resp. les Frobenius géométriques) sur  $\lambda$ . Enfin, “modulo  $p$ ” signifie “modulo l'idéal maximal de  $\overline{\mathbf{Z}}_p$ ”.

2.1.2. On reprend les notations de [2] :  $G = \text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ ,  $K = \text{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ ,  $Z = \mathbf{Q}_p^\times \hookrightarrow G$ ,  $B$  est le sous-groupe de  $G$  des matrices triangulaires supérieures,  $I(1) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ pc & d \end{pmatrix} \in K, a \equiv d \equiv 1 \pmod{p} \right\}$ ,  $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$ ,  $\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix}$  et, si  $\lambda \in \mathbf{Z}_p$ ,  $w_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$ . On pose  $I_0 = \{0\}$  et, si  $m \in \mathbf{Z}_{>0}$ ,  $I_m = \{[\lambda_0] + p[\lambda_1] + \cdots + p^{m-1}[\lambda_{m-1}], \lambda_i \in \mathbf{F}_p\} \subset \mathbf{Z}_p$  où  $[\cdot]$  désigne le représentant multiplicatif. Pour  $m \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$  et  $\lambda \in I_m$ , on note  $g_{m,\lambda}^0 = \begin{pmatrix} p^m & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $g_{m,\lambda}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p\lambda & p^{m+1} \end{pmatrix}$ . On a  $\beta g_{m,\lambda}^0 = g_{m,\lambda}^1 w_0$  et :

$$(1) \quad G = \left( \coprod_{m,\lambda} KZ(g_{m,\lambda}^0)^{-1} \right) \coprod \left( \coprod_{m,\lambda} KZ(g_{m,\lambda}^1)^{-1} \right).$$

2.1.3. On identifie sans commentaire les représentations avec leur espace sous-jacent. Soit  $R$  un anneau commutatif et  $\sigma$  une représentation  $R$ -linéaire de  $KZ$  sur un  $R$ -module. On note  $\text{ind}_{KZ}^G \sigma$  le  $R$ -module des fonctions  $f$  de  $G$  dans  $\sigma$  à support compact modulo  $Z$  telles que  $f(\kappa g) = \sigma(\kappa)(f(g))$  ( $g \in G$ ,  $\kappa \in KZ$ ) muni de l'action à gauche de  $G$  :  $(g \cdot f)(g') = f(g'g)$ . Pour  $g \in G$  et  $v \in \sigma$  on note  $[g, v]$  l'élément suivant de  $\text{ind}_{KZ}^G \sigma$  à support dans  $KZg^{-1}$  :

$$\begin{aligned} [g, v](g') &= \sigma(g'g)(v) & \text{si } g' \in KZg^{-1} \\ [g, v](g') &= 0 & \text{si } g' \notin KZg^{-1}. \end{aligned}$$

On a  $g \cdot [g', v] = [gg', v]$  et  $[g\kappa, v] = [g, \sigma(\kappa)(v)]$  si  $\kappa \in KZ$ . Par (1), tout élément de  $\text{ind}_{KZ}^G \sigma$  s'écrit de façon unique comme une somme finie  $\sum_{m,\lambda} [g_{m,\lambda}^0, v_\lambda^m] + \sum_{m,\lambda} [g_{m,\lambda}^1, w_\lambda^m]$  où  $v_\lambda^m, w_\lambda^m \in \sigma$ . Pour  $n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ , on note  $S_n(R)$  le sous- $R$ -module de  $\text{ind}_{KZ}^G \sigma$  des fonctions à support dans  $\left( \coprod_{\lambda \in I_n} KZ(g_{n,\lambda}^0)^{-1} \right) \coprod \left( \coprod_{\lambda \in I_n} KZ(g_{n,\lambda}^1)^{-1} \right)$ , c'est-à-dire telles que les  $v_\lambda^m$  et  $w_\lambda^m$  sont nuls dès que  $m \neq n$ , et  $B_n(R)$  le sous- $R$ -module somme des  $S_m$  pour  $m \leq n$ .

2.1.4. On suppose maintenant que  $R$  est une  $\mathbf{Z}_p$ -algèbre (commutative). Pour  $k \in \mathbf{Z}_{\geq 2}$ , on définit la représentation  $\underline{\text{Sym}}^{k-2}R^2$  de  $KZ$  comme suit : restreinte à  $K$ , c'est la représentation  $\text{Sym}^{k-2}R^2$  où  $K$  agit via son action naturelle sur  $R^2$  et on envoie  $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \in Z$  sur l'identité. On identifie  $\underline{\text{Sym}}^{k-2}R^2$  avec le  $R$ -module

$\bigoplus_{i=0}^{k-2} Rx^{r-i}y^i$  des polynômes homogènes de degré  $k-2$  en  $x$  et  $y$  à coefficients dans  $R$  avec l'action à gauche de  $K$  donnée explicitement par :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} x^{k-2-i}y^i = (ax + cy)^{k-2-i}(bx + dy)^i \quad \forall i.$$

Si  $v \in \underline{\text{Sym}}^{k-2}R^2$  et  $\kappa \in KZ$ , on note simplement  $\kappa \cdot v$  l'action de  $\kappa$  sur  $v$ .

**Lemme 2.1.4.1.** — *Il existe une unique fonction  $\psi : G \rightarrow \text{End}_R(\underline{\text{Sym}}^{k-2}R^2)$  à support dans  $KZ\alpha^{-1}KZ$  telle que  $\psi(\kappa_1\alpha^{-1}\kappa_2) = \kappa_1 \circ \psi(\alpha^{-1}) \circ \kappa_2$  pour  $\kappa_1, \kappa_2 \in KZ$  et telle que, dans la base  $(x^{k-2}, x^{k-3}y, \dots, y^{k-2})$  :*

$$\psi(\alpha^{-1}) = \begin{pmatrix} p^{k-2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p^{k-3} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Démonstration.* — L'unicité est claire. Pour l'existence, on peut supposer  $R = \mathbf{Z}_p$  puisque  $\psi(\alpha^{-1}) \in M_2(\mathbf{Z}_p)$ . Il faut vérifier que, si  $\kappa_1\alpha^{-1}\kappa_2 = \alpha^{-1}$  dans  $G$ , alors  $\psi(\kappa_1\alpha^{-1}\kappa_2) = \psi(\alpha^{-1})$ . Comme  $\underline{\text{Sym}}^{k-2}\mathbf{Z}_p^2 \hookrightarrow \underline{\text{Sym}}^{k-2}\overline{\mathbf{Q}}_p^2$ , on peut vérifier cette égalité sur  $\overline{\mathbf{Q}}_p$ . Mais  $\underline{\text{Sym}}^{k-2}\overline{\mathbf{Q}}_p^2 = (\text{Sym}^{k-2}\overline{\mathbf{Q}}_p^2) \otimes |\det|^{\frac{k-2}{2}}$  est naturellement une représentation de  $G$  via son action naturelle sur  $\overline{\mathbf{Q}}_p^2$  (en choisissant une racine carrée de  $p$  dans  $\overline{\mathbf{Q}}_p$  si  $k$  est impair). Comme  $\kappa_1 \circ \alpha^{-1} \circ \kappa_2 = \alpha^{-1}$  et comme  $\alpha^{-1} \in G$  agit par la matrice  $p^{-\frac{k-2}{2}}\psi(\alpha^{-1})$ , on a  $\kappa_1 \circ (p^{-\frac{k-2}{2}}\psi(\alpha^{-1})) \circ \kappa_2 = p^{-\frac{k-2}{2}}\psi(\alpha^{-1})$  d'où  $\kappa_1 \circ \psi(\alpha^{-1}) \circ \kappa_2 = \psi(\kappa_1\alpha^{-1}\kappa_2) = \psi(\alpha^{-1})$ .  $\square$

Il est bien connu qu'il existe une bijection entre  $\text{End}_G(\text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2}R^2)$  et les fonctions  $\varphi : G \rightarrow \text{End}_R(\underline{\text{Sym}}^{k-2}R^2)$  à support compact modulo le centre telles que  $\varphi(\kappa_1 g \kappa_2) = \kappa_1 \circ \varphi(g) \circ \kappa_2$  pour  $\kappa_1, \kappa_2 \in KZ$  et  $g \in G$  (voir e.g. [1], §2.2). A  $\psi$  est donc en particulier associé un opérateur  $T \in \text{End}_G(\text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2}R^2)$ . De manière explicite, on a (cf. [1]) :

$$T([g, v]) = \sum_{g'KZ \in G/KZ} [gg', \psi(g'^{-1})(v)].$$

Nous explicitons cette formule dans le paragraphe qui suit.

**Remarque 2.1.4.2.** — Si  $R$  est une  $\mathbf{Q}_p$ -algèbre, l'action de  $KZ$  sur  $\text{Sym}^{k-2}R^2$  s'étend en une action de  $G$  et on a  $\text{Sym}^{k-2}R^2 \otimes \text{ind}_{KZ}^G 1 \simeq \text{ind}_{KZ}^G \overline{\text{Sym}^{k-2}R^2}$  et  $\text{End}_G(\text{ind}_{KZ}^G 1) \simeq \text{End}_G(\overline{\text{Sym}^{k-2}R^2} \otimes \text{ind}_{KZ}^G 1)$  (voir par exemple la preuve de la proposition 3.2.1). L'opérateur  $T \in \text{End}_G(\text{ind}_{KZ}^G \overline{\text{Sym}^{k-2}R^2}) = \text{End}_G(\overline{\text{Sym}^{k-2}R^2} \otimes \text{ind}_{KZ}^G 1)$  n'est autre qu'un générateur de l'algèbre de Hecke  $\text{End}_G(\text{ind}_{KZ}^G 1)$ .

**2.2. Formulaire.** — On fixe  $R$  une  $\mathbf{Z}_p$ -algèbre commutative. Pour  $0 \leq m \leq n$ , on note  $[ ]_m : I_n \rightarrow I_m$  les applications “troncatures” qui envoient  $\sum_{i=0}^{n-1} p^i [\lambda_i]$  sur  $\sum_{i=0}^{m-1} p^i [\lambda_i]$  si  $m \geq 1$  et sur 0 si  $m = 0$ . Si  $\lambda \in I_n$  et  $\lambda' \in I_{n'}$ , alors  $\lambda + p^n \lambda' \in I_{n+n'}$ .

**Lemme 2.2.1 ([2]).** — Soit  $n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ ,  $\mu \in I_n$  et  $v \in \overline{\text{Sym}^{k-2}R^2}$ , on a :

$$T([g_{n,\mu}^0, v]) = T^+([g_{n,\mu}^0, v]) + T^-([g_{n,\mu}^0, v])$$

où :

$$(2) \quad T^+([g_{n,\mu}^0, v]) = \sum_{\lambda \in I_1} [g_{n+1, \mu + p^n \lambda}^0, (w_0 \circ \psi(\alpha^{-1}) \circ w_\lambda)(v)]$$

$$(3) \quad T^-([g_{n,\mu}^0, v]) = [g_{n-1, [\mu]_{n-1}}^0, (w_0 w_{\frac{[\mu]_{n-1} - \mu}{p^{n-1}}} \circ \psi(\alpha^{-1})) (v)] \text{ si } n \geq 1$$

$$= [\alpha, \psi(\alpha^{-1})(v)] \text{ si } n = 0.$$

**Lemme 2.2.2.** — Soit  $v = \sum_{i=0}^{k-2} c_i x^{k-2-i} y^i \in \overline{\text{Sym}^{k-2}R^2}$  et  $\lambda \in \mathbf{Z}_p$  :

$$(4) \quad (w_0 \circ \psi(\alpha^{-1}) \circ w_\lambda)(v) = \sum_{j=0}^{k-2} \left( p^j \sum_{i=j}^{k-2} c_i \binom{i}{j} (-\lambda)^{i-j} \right) x^{k-2-j} y^j$$

$$(5) \quad (w_0 w_\lambda \circ \psi(\alpha^{-1}))(v) = \sum_{j=0}^{k-2} \left( \sum_{i=j}^{k-2} p^{k-2-i} \binom{i}{j} c_i (-\lambda)^{i-j} \right) x^{k-2-j} y^j$$

$$(6) \quad \psi(\alpha^{-1})(v) = \sum_{j=0}^{k-2} p^{k-2-j} c_j x^{k-2-j} y^j.$$

*Démonstration.* — Calcul élémentaire. □

En posant :

$$T^+([g_{n,\mu}^1, w]) = \beta \cdot T^+([g_{n,\mu}^0, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot w]) \text{ et } T^-([g_{n,\mu}^1, w]) = \beta \cdot T^-([g_{n,\mu}^0, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot w]),$$

on a des formules analogues avec  $g_{n,\mu}^1$  (cf. [2]). Noter que si  $p = 0$  dans  $R$ , ces formules se simplifient grandement :

$$(7) \quad (w_0 \circ \psi(\alpha^{-1}) \circ w_\lambda)(v) = \left( \sum_{i=0}^{k-2} c_i (-\lambda)^i \right) x^{k-2}$$

$$(8) \quad (w_0 w_\lambda \circ \psi(\alpha^{-1}))(v) = \sum_{j=0}^{k-2} \binom{k-2}{j} c_{k-2} (-\lambda)^{k-2-j} x^{k-2-j} y^j.$$

Pour  $f = \sum_{m,\lambda} [g_{m,\lambda}^0, v_\lambda^m] + \sum_{m,\lambda} [g_{m,\lambda}^1, w_\lambda^m]$ , posons  $T^+(f) = \sum_{m,\lambda} T^+([g_{m,\lambda}^0, v_\lambda^m]) + \sum_{m,\lambda} T^+([g_{m,\lambda}^1, w_\lambda^m])$  et de même avec  $T^-$ . Des lemmes 2.2.1 et 2.2.2, on déduit :

**Corollaire 2.2.3.** — Soit  $m \in \mathbf{Z}_{>0}$ ,  $a_p \in R$  et, pour tout  $\mu \in I_m$  (resp.  $\mu \in I_{m-1}$ , resp.  $\mu \in I_{m+1}$ ),  $v_\mu^m = \sum_{i=0}^{k-2} c_{i,\mu}^m x^{k-2-i} y^i$  (resp.  $v_\mu^{m-1} = \sum_{i=0}^{k-2} c_{i,\mu}^{m-1} x^{k-2-i} y^i$ , resp.  $v_\mu^{m+1} = \sum_{i=0}^{k-2} c_{i,\mu}^{m+1} x^{k-2-i} y^i$ ) des éléments de  $\underline{\text{Sym}}^{k-2} R^2$ . On note :

$$\begin{aligned} f_m &= \sum_{\mu \in I_m} [g_{m,\mu}^0, v_\mu^m] \\ f_{m-1} &= \sum_{\mu \in I_{m-1}} [g_{m-1,\mu}^0, v_\mu^{m-1}] \\ f_{m+1} &= \sum_{\mu \in I_{m+1}} [g_{m+1,\mu}^0, v_\mu^{m+1}]. \end{aligned}$$

Alors :

$$T^-(f_{m+1}) + T^+(f_{m-1}) - a_p f_m = \sum_{\mu \in I_m} \left[ g_{m,\mu}^0, \sum_{j=0}^{k-2} C_{j,\mu}^m x^{k-2-j} y^j \right]$$

où :

$$C_{j,\mu}^m = \sum_{i=j}^{k-2} p^{k-2-i} \binom{i}{j} \sum_{\lambda \in \mathbf{F}_p} c_{i,\mu+p^m[\lambda]}^{m+1} [\lambda]^{i-j} + p^j \sum_{i=j}^{k-2} c_{i,|\mu|_{m-1}}^{m-1} \binom{i}{j} \left( \frac{|\mu|_{m-1} - \mu}{p^{m-1}} \right)^{i-j} - a_p c_{j,\mu}^m.$$

### 3. Définitions et conjectures

**3.1. Définition des représentations  $V_{k,a_p,\chi}$ .** — Soit  $k \in \mathbf{Z}_{\geq 2}$  et  $a_p$  un élément de l'idéal maximal de  $\overline{\mathbf{Z}}_p$ . A ces données, on associe le *module filtré faiblement admissible*  $D_{k,a_p}$  suivant :  $D_{k,a_p}$  est un  $\overline{\mathbf{Q}}_p$ -espace vectoriel de dimension 2 de base  $(e_1, e_2)$  muni d'un automorphisme  $\overline{\mathbf{Q}}_p$ -linéaire  $\varphi : D \rightarrow D$  tel que :

$$\begin{aligned} \varphi(e_1) &= p^{k-1} e_2 \\ \varphi(e_2) &= -e_1 + a_p e_2 \end{aligned}$$

et d'une filtration décroissante par des sous- $\overline{\mathbf{Q}}_p$ -espaces vectoriels  $(\text{Fil}^i D)_{i \in \mathbf{Z}}$  telle que :

$$\begin{aligned} \text{Fil}^i D &= D & \text{si} & \quad i \leq 0 \\ \text{Fil}^i D &= \overline{\mathbf{Q}}_p e_1 & \text{si} & \quad 1 \leq i \leq k-1 \\ \text{Fil}^i D &= 0 & \text{si} & \quad i \geq k. \end{aligned}$$

On définit alors :

$$V_{k,a_p} = \text{Hom}_{\varphi, \text{Fil}}(D_{k,a_p}, B_{\text{cris}})$$

qui est l'espace des applications  $\mathbf{Q}_p$ -linéaires de  $D_{k,a_p}$  dans l'anneau des périodes  $B_{\text{cris}}$  qui commutent à  $\varphi$  et préservent la filtration (rappelons que  $B_{\text{cris}}$  est muni d'un  $\varphi$  et d'une filtration décroissante  $(\text{Fil}^i B_{\text{cris}})_{i \in \mathbf{Z}}$ ). C'est naturellement un  $\overline{\mathbf{Q}}_p$ -espace vectoriel en posant  $(\lambda \cdot f)(x) = f(\lambda x)$  pour  $\lambda \in \overline{\mathbf{Q}}_p$ ,  $f \in V_{k,a_p}$  et  $x \in D_{k,a_p}$ . On définit une action continue  $\overline{\mathbf{Q}}_p$ -linéaire de  $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$  sur  $V_{k,a_p}$  en posant  $(\gamma \cdot f)(x) = \gamma \cdot f(x)$  pour  $\gamma \in \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ ,  $f \in V_{k,a_p}$  et  $x \in D_{k,a_p}$  (rappelons que  $B_{\text{cris}}$  est muni d'une action continue de  $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$  qui commute aux autres structures). Un corollaire facile du résultat principal de [5] est la :

**Proposition 3.1.1.** — *Soit  $k \in \mathbf{Z}_{\geq 2}$ ,  $a_p \in \overline{\mathbf{Z}}_p$  tel que  $\text{val}(a_p) > 0$  et  $\chi : \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p) \rightarrow \overline{\mathbf{Z}}_p^\times$  un caractère cristallin, c'est-à-dire le produit d'un caractère non ramifié par une puissance entière du caractère cyclotomique. Alors les représentations  $V_{k,a_p,\chi} = V_{k,a_p} \otimes \chi$  épuisent les représentations cristallines irréductibles de  $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$  de dimension 2 sur  $\overline{\mathbf{Q}}_p$  et les seuls isomorphismes entre elles sont  $V_{k,a_p,\chi\mu^{-1}} \simeq V_{k,-a_p,\chi}$ .*

*Démonstration.* — Par [5], les  $V_{k,a_p,\chi}$  sont bien cristallines irréductibles de dimension 2. Toute représentation cristalline irréductible de dimension 2 de  $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$  est la tordue par une unique puissance de  $\varepsilon$  d'une représentation cristalline à poids de Hodge-Tate  $(0, k-1)$  avec  $k \in \mathbf{Z}_{\geq 2}$ . Si  $\chi$  est non ramifié, alors  $V_{k,a_p,\chi}$  est à poids de Hodge-Tate  $(0, k-1)$  et son module filtré associé  $D_{k,a_p,\chi} = \overline{\mathbf{Q}}_p e_1 \oplus \overline{\mathbf{Q}}_p e_2$  a la même filtration que  $D_{k,a_p}$  mais pour Frobenius  $\varphi(e_1) = p^{k-1} \chi(p^{-1})^2 e_2$ ,  $\varphi(e_2) = -e_1 + a_p \chi(p^{-1}) e_2$ . Par [3], §3.1, on voit qu'on obtient ainsi toutes les représentations cristallines irréductibles de dimension 2 à poids de Hodge-Tate  $(0, k-1)$ , donc, après torsion, toutes les représentations cherchées. Si  $V_{k,a_p,\chi} \simeq V_{k',a'_p,\chi'}$ , leurs poids de Hodge-Tate sont les mêmes ce qui entraîne  $k = k'$  et  $\chi' \chi^{-1}$  non ramifié. Quitte à tordre, on est ramené à  $\chi, \chi'$  non ramifiés et on a alors  $D_{k,a_p,\chi} \simeq D_{k,a'_p,\chi'}$ . Par [3], §3.1, cela entraîne  $\chi(p^{-1})^2 = \chi'(p^{-1})^2$  et  $a_p \chi(p^{-1}) = a'_p \chi'(p^{-1})$  d'où le résultat.  $\square$

Notons que le déterminant de  $V_{k,a_p,\chi}$  est  $\varepsilon^{k-1} \chi^2$ . On peut se demander s'il existe un moyen de décrire *directement* les représentations  $V_{k,a_p}$  sans passer par les modules filtrés. J'ignore la réponse à cette question sauf lorsque  $a_p = 0$  :

**Proposition 3.1.2.** — *Soit  $\mathbf{Q}_{p^2}$  l'extension quadratique non ramifiée de  $\mathbf{Q}_p$  dans  $\overline{\mathbf{Q}}_p$ ,  $\mathbf{Z}_{p^2}$  son anneau d'entiers,  $\varepsilon_2 : \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_{p^2}) \rightarrow \overline{\mathbf{Q}}_p^\times$  l'un des deux caractères continus tels que, via l'injection  $\mathbf{Q}_{p^2}^\times \hookrightarrow \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_{p^2})^{\text{ab}}$ ,  $\varepsilon_2|_{\mathbf{Z}_{p^2}^\times}$  est l'un des deux plongements naturels  $\mathbf{Z}_{p^2}^\times \hookrightarrow \overline{\mathbf{Q}}_p^\times$  et  $\varepsilon_2(p) = 1$ , et soit  $\sqrt{-1}$  une racine*

carrée quelconque de  $-1$  dans  $\overline{\mathbf{Q}}_p$ . Alors pour tout  $k \geq 2$  :

$$V_{k,0} \simeq \left( \text{ind}_{\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_{p^2})}^{\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)} \varepsilon_2^{k-1} \right) \otimes \mu_{\sqrt{-1}}.$$

*Démonstration.* — Il est clair que l’induite est irréductible, ne dépend pas des choix et que son déterminant, vu la formule du déterminant d’une induite, est exactement  $\varepsilon^{k-1}$ . Comme elle est isomorphe à sa tordue par  $\mu_{-1}$ , si elle est cristalline elle est forcément de la forme  $V_{k',0} \otimes \varepsilon^i$  par la proposition 3.1.1 où  $k' \in \mathbf{Z}_{\geq 2}$  et  $2i = k - 1 - k'$ . Comme une représentation est cristalline si et seulement si sa restriction à l’inertie l’est, il suffit de montrer que  $\varepsilon_2^{k-1} : \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_{p^2}) \rightarrow \mathbf{Q}_{p^2}^\times \hookrightarrow GL_2(\mathbf{Q}_p)$  est une représentation cristalline à poids de Hodge-Tate  $(0, k-1)$  (les poids de Hodge-Tate de l’induite seront alors aussi  $(0, k-1)$ ). Par produit tensoriel, il suffit de montrer que  $\varepsilon_2$  est cristalline à poids de Hodge-Tate  $(0, 1)$ . Ceci découle de [4], Th. I.2.1, où il est en particulier démontré que  $\varepsilon_2$  est à isogénie près le module de Tate d’un groupe formel de Lubin-Tate sur  $\mathbf{Z}_{p^2}$ , donc d’un groupe  $p$ -divisible sur  $\text{Spec}(\mathbf{Z}_{p^2})$ .  $\square$

A  $V_{k,a_p}$ , on associe enfin la représentation non ramifiée du groupe de Weil qui envoie le Frobenius arithmétique sur le semi-simplifié de  $\varphi$ , i.e. sur la matrice  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$  où  $\lambda_1 \lambda_2 = p^{k-1}$  et  $\lambda_1 + \lambda_2 = a_p$ .

**3.2. Définition des représentations  $\Pi_{k,a_p,\chi}$ .** — On conserve les notations du paragraphe précédent. Pour associer une représentation  $p$ -adique de  $G$  à  $V_{k,a_p,\chi}$ , une première idée est de tensoriser la représentation  $\text{Sym}^{k-2} \overline{\mathbf{Q}}_p^2 \otimes (\chi \circ \det)$  avec l’induite parabolique correspondant à la représentation non ramifiée du groupe de Weil précédente par la correspondance de “Hecke” (au sens de [6]). Une deuxième idée est de fabriquer une représentation  $p$ -adique faisant intervenir  $k$  et sur laquelle  $a_p$  est la “valeur propre de  $T_p$ ”. Par exemple :

$$(9) \quad \Pi_{k,a_p,\chi} = \frac{\text{ind}_{KZ}^G \text{Sym}^{k-2} \overline{\mathbf{Q}}_p^2}{(T - a_p)(\text{ind}_{KZ}^G \text{Sym}^{k-2} \overline{\mathbf{Q}}_p^2)} \otimes (\chi \circ \det)$$

où  $T$  est l’opérateur construit au §2.1.4 (notons au passage que  $T - a_p$  est injectif sur  $\text{ind}_{KZ}^G \text{Sym}^{k-2} \overline{\mathbf{Q}}_p^2$ ). Ces deux idées essentiellement coïncident :

**Proposition 3.2.1.** — Soit  $k \in \mathbf{Z}_{\geq 2}$ ,  $a_p \in \overline{\mathbf{Z}}_p$  tel que  $\text{val}(a_p) > 0$  et  $\chi : \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p) \rightarrow \overline{\mathbf{Z}}_p^\times$  un caractère cristallin (cf. proposition 3.1.1) vu comme caractère de  $\mathbf{Q}_p^\times \subset \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ .

(i) Si  $a_p \notin \{\pm(p^{k/2} + p^{k/2-1})\}$ ,  $\Pi_{k,a_p,\chi}$  est (algébriquement) irréductible et :

$$\Pi_{k,a_p,\chi} \simeq \text{Sym}^{k-2} \overline{\mathbf{Q}}_p^2 \otimes \left[ \text{ind}_B^G (\mu_{\lambda_1^{-1}} \otimes \mu_{p\lambda_2^{-1}}) \right] \otimes (\chi \circ \det)$$

où  $\lambda_1 \lambda_2 = p^{k-1}$ ,  $\lambda_1 + \lambda_2 = a_p$  et l'induite parabolique est l'induite lisse classique.  
(ii) Si  $a_p \in \{\pm(p^{k/2} + p^{k/2-1})\}$ , on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow \text{Sym}^{k-2} \overline{\mathbf{Q}}_p^2 \otimes \text{St} \otimes (\chi \mu_\delta \circ \text{dét}) \rightarrow \Pi_{k, a_p, \chi} \rightarrow \text{Sym}^{k-2} \overline{\mathbf{Q}}_p^2 \otimes (\chi \mu_\delta \circ \text{dét}) \rightarrow 0$$

où  $\delta = \frac{p+1}{a_p}$  et St est la représentation de Steinberg usuelle de  $G$  (sur  $\overline{\mathbf{Q}}_p$ ).

(iii) Les seuls entrelacements entre les représentations  $\Pi_{k, a_p, \chi}$  sont  $\Pi_{k, a_p, \chi \mu_{-1}} \simeq \Pi_{k, -a_p, \chi}$ .

*Démonstration.* — Soit  $\lambda \in \overline{\mathbf{Q}}_p^\times$ ,  $a = \lambda + p\lambda^{-1}$  et  $\chi_a : \overline{\mathbf{Q}}_p[T] \rightarrow \overline{\mathbf{Q}}_p$  le morphisme de  $\overline{\mathbf{Q}}_p$ -algèbres qui envoie  $T$  sur  $a$ . Notons que  $\text{ind}_{KZ}^G 1 \otimes_{\overline{\mathbf{Q}}_p[T], \chi_a} \overline{\mathbf{Q}}_p \simeq \frac{\text{ind}_{KZ}^G 1}{(T-a)(\text{ind}_{KZ}^G 1)}$  où  $T$  est l'opérateur du §2.1.4 avec  $k = 2$ . Il est bien connu (voir e.g. [12] ou [10]) que, si  $a \notin \{\pm(p+1)\}$ , on a :

$$\frac{\text{ind}_{KZ}^G 1}{(T-a)(\text{ind}_{KZ}^G 1)} \xrightarrow{\sim} \text{ind}_B^G(\mu_{\lambda^{-1}} \otimes \mu_\lambda)$$

et que, si  $a \in \{\pm(p+1)\}$ , on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow \text{St} \otimes (\mu_\varepsilon \circ \text{dét}) \rightarrow \frac{\text{ind}_{KZ}^G 1}{(T-a)(\text{ind}_{KZ}^G 1)} \rightarrow \mu_\varepsilon \circ \text{dét} \rightarrow 0$$

où  $\varepsilon = \frac{p+1}{a} = \pm 1$ . Par ailleurs, quitte à choisir une racine carrée de  $p$  dans  $\overline{\mathbf{Q}}_p$  si  $k$  est impair, on a un isomorphisme  $G$ -équivariant :

$$\begin{aligned} \underline{\text{Sym}}^{k-2} \overline{\mathbf{Q}}_p^2 \otimes \text{ind}_{KZ}^G 1 &\xrightarrow{\sim} \text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2} \overline{\mathbf{Q}}_p^2 \\ v \otimes f &\mapsto (g \mapsto f(g)(g \cdot v)) \end{aligned}$$

qui commute aux opérateurs  $\text{Id} \otimes p^{\frac{k}{2}-1} T$  à gauche et  $T$  à droite. On en déduit :

$$\Pi_{k, a_p, \chi} \simeq \underline{\text{Sym}}^{k-2} \overline{\mathbf{Q}}_p^2 \otimes \frac{\text{ind}_{KZ}^G 1}{(T - p^{-\frac{k}{2}+1} a_p)} \otimes (\chi \circ \text{dét}).$$

Comme  $\lambda_2 = p^{k-1} \lambda_1^{-1}$ , on a  $p^{-\frac{k}{2}+1} a_p = p^{-\frac{k}{2}+1} \lambda_1 + p(p^{-\frac{k}{2}+1} \lambda_1)^{-1}$ .

Dans le cas (i), on en déduit par ce qui précède :

$$\frac{\text{ind}_{KZ}^G 1}{(T - p^{-\frac{k}{2}+1} a_p)} \simeq \text{ind}_B^G(\mu_{p^{\frac{k}{2}-1} \lambda_1^{-1}} \otimes \mu_{p^{-\frac{k}{2}+1} \lambda_1}) = \text{ind}_B^G(\mu_{p^{\frac{k}{2}-1} \lambda_1^{-1}} \otimes \mu_{p^{\frac{k}{2}} \lambda_2^{-1}})$$

d'où on obtient l'isomorphisme de (i) en prenant en compte le caractère  $|\text{dét}|^{\frac{k}{2}-1}$ . Le cas (ii) s'obtient de même. Pour l'irréductibilité dans (i) et dans les composantes de (ii), voir [11], Prop. 3.4. Pour (iii), considérons un isomorphisme  $G$ -équivariant  $\iota : \Pi_{k, a_p, \chi} \xrightarrow{\sim} \Pi_{k', a'_p, \chi'}$ . On peut supposer les deux représentations irréductibles, sinon le résultat est facile, et on définit  $(\lambda_1, \lambda_2), (\lambda'_1, \lambda'_2)$  comme au (i). Soit  $v \in \text{ind}_B^G(\mu_{\lambda_1^{-1}} \otimes \mu_{p\lambda_2^{-1}})$  invariant par  $K$ , alors  $\iota(\text{Sym}^{k-2} \overline{\mathbf{Q}}_p^2 \otimes \overline{\mathbf{Q}}_p v \otimes (\chi \circ \text{dét}))$  est une sous-représentation irréductible de  $K$  dans  $\Pi_{k', a'_p, \chi'}$  nécessairement de la forme  $\text{Sym}^{k'-2} \overline{\mathbf{Q}}_p^2 \otimes \sigma' \otimes (\chi' \circ \text{dét})$  avec  $\sigma' \subset \text{ind}_B^G(\mu_{\lambda'_1^{-1}} \otimes \mu_{p\lambda'_2^{-1}})$  représentation

irréductible lisse de  $K$ . Quitte à restreindre à un sous-groupe ouvert de  $K$ , on peut supposer que  $\sigma'$  est une somme de copies de la représentation triviale. Comme  $\iota(\mathrm{Sym}^{k-2}\overline{\mathbf{Q}}_p^2 \otimes \overline{\mathbf{Q}}_p v \otimes (\chi \circ \det))$  restreinte à ce sous-groupe reste irréductible,  $\sigma'$  doit être de dimension 1 d'où  $k = k'$ . L'action du caractère central entraîne alors  $\chi^2 = \chi'^2$  d'où  $\chi = \chi'$  ou  $\chi = \chi'\mu_{-1}$ . Quitte à changer  $\lambda'_i$  en  $-\lambda'_i$  ( $i = 1, 2$ ), i.e.  $a'_p$  en  $-a'_p$ , on est ramené à  $\chi = \chi'$  et on peut oublier ces caractères. En utilisant que la seule droite de  $\mathrm{Sym}^{k-2}\overline{\mathbf{Q}}_p^2$  stabilisé par un sous-groupe ouvert de  $B$  est  $\overline{\mathbf{Q}}_p x^{k-2}$ , on obtient facilement :

$$\iota(\overline{\mathbf{Q}}_p x^{k-2} \otimes \mathrm{ind}_B^G(\mu_{\lambda_1^{-1}} \otimes \mu_{p\lambda_2^{-1}})) \subset \overline{\mathbf{Q}}_p x^{k-2} \otimes \mathrm{ind}_B^G(\mu_{\lambda_1^{-1}} \otimes \mu_{p\lambda_2^{-1}}).$$

Soit  $\iota : \mathrm{ind}_B^G(\mu_{\lambda_1^{-1}} \otimes \mu_{p\lambda_2^{-1}}) \rightarrow \mathrm{ind}_B^G(\mu_{\lambda_1^{-1}} \otimes \mu_{p\lambda_2^{-1}})$  l'unique application telle que  $\iota(x^{k-2} \otimes v) = x^{k-2} \otimes \iota(v)$ . Pour  $v \in \mathrm{ind}_B^G(\mu_{\lambda_1^{-1}} \otimes \mu_{p\lambda_2^{-1}})$ , soit  $U_v \subset K$  un sous-groupe ouvert qui fixe  $v, \iota(v)$ . Pour  $j \in \{0, \dots, k-2\}$ , soit  $u_j \in \mathbf{Q}_p[U_v]$  tel que  $u_j \cdot x^{k-2} = x^{k-2-j} y^j$ . On calcule :

$$\begin{aligned} \iota(x^{k-2-j} y^j \otimes v) &= \iota(u_j \cdot x^{k-2} \otimes v) = \iota(u_j \cdot (x^{k-2} \otimes v)) = u_j \cdot \iota(x^{k-2} \otimes v) \\ &= u_j \cdot (x^{k-2} \otimes \iota(v)) = u_j \cdot x^{k-2} \otimes \iota(v) = x^{k-2-j} y^j \otimes \iota(v). \end{aligned}$$

On en déduit pour tout  $g \in G$  :

$$\begin{aligned} g \cdot \iota(x^{k-2} \otimes v) &= g \cdot (x^{k-2} \otimes \iota(v)) = g \cdot x^{k-2} \otimes g \cdot \iota(v) \\ g \cdot \iota(x^{k-2} \otimes v) &= \iota(g \cdot (x^{k-2} \otimes v)) = \iota(g \cdot x^{k-2} \otimes g \cdot v) = g \cdot x^{k-2} \otimes \iota(g \cdot v) \end{aligned}$$

d'où  $g \cdot \iota(v) = \iota(g \cdot v)$  et  $\iota$  est un entrelacement entre les deux séries principales. Cela entraîne  $\lambda'_i = \lambda_i$  ou  $(\lambda'_1 = \lambda_2, \lambda'_2 = \lambda_1)$ , soit dans les deux cas  $a_p = a'_p$ .  $\square$

Notons que le caractère central de  $\Pi_{k, a_p, \chi}$  est  $\varepsilon^{k-2} \chi^2$ .

**Remarque 3.2.2.** — Le lecteur à qui les torsions par un caractère cristallin  $\chi$  dans les propositions 3.1.1 et 3.2.1 sembleraient artificielles pourra se rassurer comme suit. Soit  $V$  une représentation cristalline irréductible de  $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$  de dimension 2 sur  $\overline{\mathbf{Q}}_p$  et  $D$  son module filtré associé (de telle sorte que  $V \simeq \mathrm{Hom}_{\varphi, \mathrm{Fil}}(D, B_{\mathrm{cris}})$ ). Alors  $V$  a pour poids de Hodge-Tate deux entiers distincts  $(k_1, k_2)$  avec  $k_1 < k_2$ . Notons  $\mathrm{Alg}(V)$  la représentation algébrique de  $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$  de plus haut poids  $(k_1, k_2 - 1)$  et  $\mathrm{Lisse}(V)$  la représentation lisse irréductible de  $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$  correspondant, par la correspondance de Hecke, à la représentation de Weil non ramifiée envoyant le Frobenius arithmétique sur le semi-simplifié de  $\varphi$  (le Frobenius sur  $D$ ). Alors on vérifie facilement que la représentation considérée au (i) de la proposition 3.2.1 est  $\mathrm{Alg}(V) \otimes \mathrm{Lisse}(V)$ .

Comme la représentation  $\mathrm{Sym}^{k-2}\overline{\mathbf{Q}}_p^2$ , même à torsion près par un caractère, ne possède pas de  $\overline{\mathbf{Z}}_p$ -réseau stable par  $G$ , il n'est pas aisé de voir sur les formulations de la proposition 3.2.1 si  $\Pi_{k, a_p, \chi}$  contient ou non un réseau (voir ci-dessous la définition précise). De fait, nous n'utilisons pas cette proposition dans la suite, mais seulement la formulation (9). Lorsque  $\chi = 1$ , on écrit  $\Pi_{k, a_p}$  au lieu de  $\Pi_{k, a_p, 1}$ .

**3.3. Conjectures.** — On suppose dorénavant  $\chi = 1$  et on conserve les notations des deux paragraphes précédents.

On appelle *réseau* de  $\Pi_{k,a_p}$  tout sous- $\overline{\mathbf{Z}}_p$ -module de  $\Pi_{k,a_p}$  qui engendre  $\Pi_{k,a_p}$  sur  $\overline{\mathbf{Q}}_p$ , qui est stable par  $G$  et qui ne contient pas de  $\overline{\mathbf{Q}}_p$ -droite. Cette dernière propriété est équivalente à être libre sur  $\overline{\mathbf{Z}}_p$ . En effet, quitte à remplacer  $\overline{\mathbf{Z}}_p$  par l'anneau des entiers  $\mathcal{O}_E$  d'une extension finie  $E$  de  $\mathbf{Q}_p$  contenant  $a_p$  puis à étendre les scalaires à  $\overline{\mathbf{Z}}_p$ , on peut supposer que l'anneau des coefficients est  $\mathcal{O}_E$ , i.e. est local, principal et complet. Comme  $\Pi_{k,a_p}$  est un  $E$ -espace vectoriel de dimension dénombrable (car  $\text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2} E^2$  l'est), on peut alors utiliser la propriété C.5 de [13].

Pour  $k \in \mathbf{Z}_{\geq 2}$  et  $a_p \in \overline{\mathbf{Z}}_p$  de valuation strictement positive, on définit :

$$\Theta_{k,a_p} = \text{Image} \left( \text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2} \overline{\mathbf{Z}}_p^2 \longrightarrow \frac{\text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2} \overline{\mathbf{Q}}_p^2}{(T - a_p)} = \Pi_{k,a_p} \right).$$

C'est un sous- $\overline{\mathbf{Z}}_p[G]$ -module de type fini de  $\Pi_{k,a_p}$  qui l'engendre sur  $\overline{\mathbf{Q}}_p$ .

**Conjecture 3.3.1.** — (i) Le  $\overline{\mathbf{Z}}_p$ -module  $\Theta_{k,a_p}$  ne contient pas de  $\overline{\mathbf{Q}}_p$ -droite.  
(ii) Le  $\overline{\mathbf{F}}_p[G]$ -module  $\Theta_{k,a_p} \otimes_{\overline{\mathbf{Z}}_p} \overline{\mathbf{F}}_p$  est de longueur finie.

En particulier  $\Theta_{k,a_p}$  devrait donc toujours être un réseau de  $\Pi_{k,a_p}$ .

**Théorème 3.3.2.** — Supposons  $k \leq 2p$  et  $p \neq 2$  si  $k = 4$ , alors la conjecture 3.3.1 est vraie.

Nous verrons la démonstration de ce théorème dans la suite de l'article. Notons qu'on a, par définition, une surjection :

$$\frac{\text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2} \overline{\mathbf{Z}}_p^2}{(T - a_p)(\text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2} \overline{\mathbf{Z}}_p^2)} \twoheadrightarrow \Theta_{k,a_p}$$

mais qui n'est pas en général un isomorphisme :

**Proposition 3.3.3.** — On a :

$(T - a_p)(\text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2} \overline{\mathbf{Z}}_p^2) \subset (T - a_p)(\text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2} \overline{\mathbf{Q}}_p^2) \cap \text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2} \overline{\mathbf{Z}}_p^2$ ,  
cette inclusion étant une égalité si et seulement si  $k \leq p + 1$ .

*Démonstration.* — L'inclusion est claire. Soit  $f \in \text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2} \overline{\mathbf{Q}}_p^2$  tel que  $T(f) - a_p f \in \text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2} \overline{\mathbf{Z}}_p^2$ ,  $n$  le plus petit entier tel que  $f \in B_n(\overline{\mathbf{Q}}_p)$  et écrivons  $f = \sum_{m=0}^n f_m$  où  $f_m \in S_m(\overline{\mathbf{Q}}_p)$ . L'hypothèse sur  $f$  entraîne  $T^+(f_n) \in \text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2} \overline{\mathbf{Z}}_p^2$ . Montrons que cela implique  $f_n \in \text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2} \overline{\mathbf{Z}}_p^2$ . Il suffit de le montrer pour  $f_n$  de la forme  $[g_{n,\mu}^0, v]$ , car, en appliquant  $\beta$ , on le déduit pour  $f_n$  de la forme  $[g_{n,\mu}^1, w]$ ,

puis pour n'importe quel  $f_n$  par linéarité puisque les supports des  $T^+([g_{n,\mu}^0, v])$  et des  $T^+([g_{n,\mu}^1, w])$  sont tous disjoints. La formule (2) donne :

$$T^+([g_{n,\mu}^0, v]) \in \text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2} \overline{\mathbf{Z}}_p^2 \iff (w_0 \circ \psi(\alpha^{-1}) \circ w_\lambda)(v) \in \underline{\text{Sym}}^{k-2} \overline{\mathbf{Z}}_p^2 \quad \forall \lambda \in I_1$$

c'est-à-dire par la formule (4), en notant  $v = \sum_{i=0}^{k-2} c_i x^{k-2-i} y^i$  :

$$p^j \sum_{i=j}^{k-2} c_i \binom{i}{j} (-[\lambda])^{i-j} \in \overline{\mathbf{Z}}_p \quad 0 \leq j \leq k-2, \quad \lambda \in \mathbf{F}_p.$$

Pour  $j = 0$ , on a en particulier :

$$\sum_{i=0}^{k-2} c_i (-[\lambda])^i \in \overline{\mathbf{Z}}_p \quad \forall \lambda \in \mathbf{F}_p$$

ce qui entraîne  $c_i \in \overline{\mathbf{Z}}_p$  pour tout  $i \in \{0, \dots, k-2\}$ , i.e.  $v \in \underline{\text{Sym}}^{k-2} \overline{\mathbf{Z}}_p^2$ , dès que  $k-2 \leq p-1$ . Cela montre  $f_n \in \text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2} \overline{\mathbf{Z}}_p^2$  si  $k \leq p+1$ . En remplaçant  $f$  par  $f - f_n$  (pour  $k \leq p+1$ ), on est ramené au cran  $n-1$  et une récurrence immédiate donne  $f \in \text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2} \overline{\mathbf{Z}}_p^2$ , d'où l'égalité de l'inclusion lorsque  $k \leq p+1$ . Supposons maintenant  $k > p+1$ . Pour  $k = p+2$ , on renvoie à la remarque 5.3.1.3. Pour  $k \geq p+3$ , soit  $v = \delta^{-1}(x^{k-3}y + (-1)^p x^{k-2-p}y^p) \in \underline{\text{Sym}}^{k-2} \overline{\mathbf{Q}}_p^2$  où  $\delta$  est celui des éléments  $p, a_p$  qui a la plus petite valuation. Un calcul facile (avec les lemmes 2.2.1 et 2.2.2) montre que  $T([\text{Id}, v]) - a_p[\text{Id}, v] \in \text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2} \overline{\mathbf{Z}}_p^2$  et il est clair que ce n'est pas le cas de  $[\text{Id}, v]$  puisque  $\text{val}(\delta^{-1}) < 0$ .  $\square$

Lorsque les (i) et (ii) de la conjecture 3.3.1 sont vérifiés (c'est-à-dire conjecturalement toujours), on note  $\overline{\Pi}_{k,a_p}$  la semi-simplifiée de  $\Theta_{k,a_p} \otimes_{\overline{\mathbf{Z}}_p} \overline{\mathbf{F}}_p$ , qui ne dépend alors pas du réseau *de type fini* sur  $\overline{\mathbf{Z}}_p[G]$  choisi (d'où sa notation) :

**Lemme 3.3.4.** — *Supposons que  $\Theta_{k,a_p}$  est un réseau et que  $\Theta_{k,a_p} \otimes_{\overline{\mathbf{Z}}_p} \overline{\mathbf{F}}_p$  est une représentation de longueur finie. Soit  $\Theta$  un réseau de  $\Pi_{k,a_p}$  de type fini sur  $\overline{\mathbf{Z}}_p[G]$ , alors  $\Theta \otimes_{\overline{\mathbf{Z}}_p} \overline{\mathbf{F}}_p$  est de longueur finie, de semi-simplifiée isomorphe à  $\overline{\Pi}_{k,a_p}$ .*

*Démonstration.* — L'hypothèse de finitude entraîne qu'on peut toujours se ramener à des coefficients finis sur  $\mathbf{Q}_p$  et que  $\Theta$  et  $\Theta_{k,a_p}$  sont commensurables. La preuve de Brauer-Nesbitt s'étend alors sans problème : voir par exemple [13], §I.9.6.  $\square$

J'ignore si tous les réseaux de  $\Pi_{k,a_p}$  sont automatiquement de type fini sur  $\overline{\mathbf{Z}}_p[G]$ . C'est vrai si  $\overline{\Pi}_{k,a_p}$  est irréductible. On note de même  $\overline{V}_{k,a_p}$  la semi-simplifiée modulo  $p$  de la représentation  $V_{k,a_p}$  du §3.1. C'est la semi-simplifiée de  $T \otimes_{\overline{\mathbf{Z}}_p} \overline{\mathbf{F}}_p$  où  $T \subset V_{k,a_p}$  est un  $\overline{\mathbf{Z}}_p$ -réseau stable par Galois quelconque.

**Conjecture 3.3.5.** — (i) Il existe  $r \in \{0, \dots, p-1\}$  et  $\eta: \mathbf{Q}_p^\times \rightarrow \overline{\mathbf{F}}_p$  lisse tels que ou bien  $\overline{\Pi}_{k,a_p} \simeq \pi(r, 0, \eta)$  ou bien  $\overline{\Pi}_{k,a_p} \simeq \pi(r, \lambda, \eta)^{ss} \oplus \pi([p-3-r], \lambda^{-1}, \omega^{r+1}\eta)^{ss}$  pour un  $\lambda \in \overline{\mathbf{F}}_p^\times$  (avec les notations de 1.1 dans l'introduction).

(ii) Dans le premier cas, on a  $\overline{V}_{k,a_p} \simeq (\text{ind}(\omega_2^{r+1})) \otimes \eta$  et dans le deuxième  $\overline{V}_{k,a_p} \simeq \begin{pmatrix} \omega^{r+1}\mu_\lambda & 0 \\ 0 & \mu_{\lambda^{-1}} \end{pmatrix} \otimes \eta$ .

Notons que le (i) de cette conjecture précise le (ii) de la conjecture 3.3.1.

**Théorème 3.3.6.** — Supposons  $k \leq 2p$  et  $p \neq 2$  si  $k = 4$ , alors le (i) de la conjecture 3.3.5 est vrai.

La démonstration occupe le §5.3. Nous verrons quelques cas particuliers et exemples numériques pour le (ii) de la conjecture 3.3.5 dans le §6.

#### 4. Existence de réseaux

On démontre le (i) de la conjecture 3.3.1 pour  $k \leq 2p$  et  $k \neq 4$  si  $p = 2$ .

**4.1. Préparation.** — Pour  $n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ , rappelons que  $B_n(\overline{\mathbf{Q}}_p)$  désigne le sous- $\overline{\mathbf{Q}}_p$ -espace vectoriel de  $\text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2} \overline{\mathbf{Q}}_p^2$  des fonctions à support dans les classes  $KZ(g_{m,\mu}^0)^{-1}$  et  $KZ(g_{m,\lambda}^1)^{-1}$  pour  $m \leq n$  et  $\mu, \lambda \in I_m$ .

**Théorème 4.1.1.** — Soit  $k \in \{2, \dots, 2p\}$  et  $k \neq 4$  si  $p = 2$ ,  $a_p \in \overline{\mathbf{Z}}_p$  tel que  $\text{val}(a_p) > 0$  et  $N \in \mathbf{Z}_{>0}$ . Il existe une constante  $c \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$  dépendant seulement de  $N$ ,  $k$  et  $a_p$  telle que pour tout  $n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$  et tout  $f \in \text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2} \overline{\mathbf{Q}}_p^2$  :

$$(T - a_p)(f) \in B_N(\overline{\mathbf{Q}}_p) + p^n \text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2} \overline{\mathbf{Z}}_p^2 \Rightarrow f \in B_{N-1}(\overline{\mathbf{Q}}_p) + p^{n-c} \text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2} \overline{\mathbf{Z}}_p^2.$$

Ce théorème sera démontré dans le paragraphe suivant. Il est encore vrai pour  $\text{val}(a_p) = 0$  mais nous ne traitons pas ce cas. Il est aussi sûrement vrai sans restriction sur  $k$ . Un corollaire facile en est le :

**Corollaire 4.1.2.** — Pour  $k \leq 2p$  et  $k \neq 4$  si  $p = 2$ ,  $\Theta_{k,a_p}$  est un  $\overline{\mathbf{Z}}_p$ -module libre, i.e. ne contient pas de  $\overline{\mathbf{Q}}_p$ -droite.

*Démonstration.* — On peut remplacer  $\overline{\mathbf{Z}}_p$  par l'anneau des entiers  $\mathcal{O}_E$  d'une extension finie  $E$  de  $\mathbf{Q}_p$  dans  $\overline{\mathbf{Q}}_p$  contenant  $a_p$  et il suffit de montrer que  $\Theta_{k,a_p}$  ne contient pas de  $E$ -droite. Cela revient à montrer que si  $f \in \text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2} \mathcal{O}_E^2$  est tel qu'il existe des  $f_n \in \text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2} E^2$  vérifiant :

$$f - (T(f_n) - a_p f_n) \in p^n \text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2} \mathcal{O}_E^2 \quad \forall n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$$

alors  $f \in (T - a_p)(\text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2} E^2)$ . Soit  $N \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$  tel que  $f \in B_N(E)$ , on a donc  $(T - a_p)(f_n) \in B_N(E) + p^n \text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2} \mathcal{O}_E^2$ , d'où  $f_n = g_n + p^{n-c} h_n$  avec  $g_n \in B_{N-1}(E)$  et  $h_n \in \text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2} \mathcal{O}_E^2$  par le théorème 4.1.1 (encore valable avec  $\mathcal{O}_E$  au lieu de  $\overline{\mathbf{Z}}_p$  bien entendu). Ainsi :

$$f \in (T - a_p)(B_{N-1}(E)) + p^{n-c} \text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2} \mathcal{O}_E^2 \quad \forall n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}.$$

Comme  $(T - a_p)(B_{N-1}(E))$  est un  $E$ -espace vectoriel complet pour la topologie  $p$ -adique car de dimension finie, on en déduit  $f \in (T - a_p)(B_{N-1}(E))$ .  $\square$

## 4.2. Démonstration du théorème 4.1.1. —

4.2.1. Notons que si  $k \leq p + 1$ , alors le théorème 4.1.1 est vrai et  $c = 0$  convient. Cela découle du fait que si  $f \in S_m(\overline{\mathbf{Q}}_p) \subset \text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2} \overline{\mathbf{Q}}_p^2$  ( $m \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ ) et si  $T^+(f) \in p^n \text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2} \overline{\mathbf{Z}}_p^2$  ( $n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ ), alors  $f \in p^n \text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2} \overline{\mathbf{Z}}_p^2$ . La preuve est la même que celle de la proposition 3.3.3. Dans la suite, on suppose  $p + 2 \leq k \leq 2p$ . Nous avons été amené à distinguer plusieurs cas, que nous présentons du plus simple au plus compliqué. L'auteur n'est pas arrivé à trouver une preuve simple valable dans tous les cas.

Supposons d'abord  $\text{val}(a_p) \geq 1$  et soit  $N, n$  et  $f$  comme dans l'énoncé 4.1.1. On peut supposer  $f = \sum_{m=0}^M f_m$  où  $f_m = \sum_{\mu \in I_m} [g_{m,\mu}^0, v_\mu^m] + \sum_{\mu \in I_m} [g_{m,\mu}^1, w_\mu^m] \in S_{N+m}(\overline{\mathbf{Q}}_p)$  et convenir que  $f_m = 0$  si  $m > M$ . On a les équations :

$$T^-(f_{m+1}) + T^+(f_{m-1}) - a_p f_m \in p^n \text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2} \overline{\mathbf{Z}}_p^2 \quad 1 \leq m \leq M + 1.$$

Supposons  $f_{m+1}, f_m \in p^{n-1} \text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2} \overline{\mathbf{Z}}_p^2$ , nous allons montrer qu'alors  $f_{m-1} \in p^{n-1} \text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2} \overline{\mathbf{Z}}_p^2$ . Pour tout  $m$  et tout  $\mu \in I_m$ , écrivons  $v_\mu^m = \sum_{i=0}^{k-2} c_{i,\mu}^m x^{k-2-i} y^i$ . Avec les notations du corollaire 2.2.3, on a  $C_{j,\mu}^m \in p^n \overline{\mathbf{Z}}_p$  pour tout  $j \in \{0, \dots, k-2\}$  et tout  $\mu \in I_m$ . Si  $k = p + 2$ , les formules du corollaire 2.2.3 pour  $C_{0,\mu}^m$  et  $C_{1,\mu}^m$  entraînent (sachant que  $a_p f_m \in p^n \text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2} \overline{\mathbf{Z}}_p^2$  puisque  $\text{val}(a_p) \geq 1$ ) :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k-2} c_{i,[\mu]_{m-1}}^{m-1} (-[\lambda])^i &\in p^{n-1} \overline{\mathbf{Z}}_p & \forall \lambda \in \mathbf{F}_p \\ \sum_{i=1}^{k-2} i c_{i,[\mu]_{m-1}}^{m-1} (-[\lambda])^{i-1} &\in p^{n-1} \overline{\mathbf{Z}}_p & \forall \lambda \in \mathbf{F}_p \end{aligned}$$

ce qui implique  $c_{i,[\mu]_{m-1}}^{m-1} \in p^{n-1} \overline{\mathbf{Z}}_p$  pour tout  $i$ . Si  $p + 3 \leq k \leq 2p$ , les formules pour  $C_{0,\mu}^m$  et  $C_{1,\mu}^m$  entraînent  $c_{i,[\mu]_{m-1}}^{m-1} \in p^{n-2} \overline{\mathbf{Z}}_p$  et la formule pour  $C_{p,\mu}^m$  donne alors  $\sum_{\lambda \in \mathbf{F}_p} c_{k-2,\mu+p^m[\lambda]}^{m+1} [\lambda]^{k-2-p} = \sum_{\lambda \in \mathbf{F}_p} c_{k-2,\mu+p^m[\lambda]}^{m+1} [\lambda]^{k-3} \in p^n \overline{\mathbf{Z}}_p$  pour tout  $\mu \in I_m$  ( $\binom{k-2}{p} \in \mathbf{Z}_p^\times$ ). En revenant à  $C_{1,\mu}^m$ , on a donc en fait  $\sum_{i=1}^{k-2} i c_{i,[\mu]_{m-1}}^{m-1} (-[\lambda])^{i-1} \in p^{n-1} \overline{\mathbf{Z}}_p$  pour tout  $\lambda \in \mathbf{F}_p$  d'où (avec  $C_{0,\mu}^m$ )  $c_{i,[\mu]_{m-1}}^{m-1} \in p^{n-1} \overline{\mathbf{Z}}_p$  pour tout  $i$ . On déduit de cela  $v_\mu^{m-1} \in p^{n-1} \underline{\text{Sym}}^{k-2} \overline{\mathbf{Z}}_p^2$  et, par le même raisonnement,  $w_\mu^{m-1} \in$

$p^{n-1}\underline{\text{Sym}}^{k-2}\overline{\mathbf{Z}}_p^2$  pour tout  $\mu \in I_{m-1}$  d'où finalement  $f_{m-1} \in p^{n-1}\text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2}\overline{\mathbf{Z}}_p^2$ . Par récurrence on a donc  $f \in p^{n-1}\text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2}\overline{\mathbf{Z}}_p^2 : c = 1$  convient dans ce cas.

**Remarque 4.2.1.1.** — La démonstration ci-dessus marche encore pour  $p = 2$  et  $k = p + 2$  : on a donc en fait un tout petit peu plus que les énoncés 4.1.1 et 4.1.2 puisqu'on peut rajouter le cas  $p = 2, k = 4$  et  $\text{val}(a_p) \geq 1$ .

4.2.2. Supposons maintenant  $0 < \text{val}(a_p) < 1$ . Dans ce cas, la récurrence est plus délicate. Supposons d'abord  $p + 3 \leq k \leq 2p$ . Avec les notations du cas précédent, considérons l'hypothèse de récurrence (où on oublie les indices en  $\mu$ ) :

$$\begin{aligned} c_0^{m+1}, c_{k-2}^{m+1} &\in \frac{p^n}{a_p} \overline{\mathbf{Z}}_p, & c_1^{m+1} + c_p^{m+1} &\in \frac{p^n}{a_p} \overline{\mathbf{Z}}_p, & c_i^{m+1} &\in \frac{p^{n-1}}{a_p} \overline{\mathbf{Z}}_p & \forall i \\ c_0^m, c_{k-2}^m &\in \frac{p^n}{a_p} \overline{\mathbf{Z}}_p, & c_1^m + c_p^m &\in \frac{p^n}{a_p} \overline{\mathbf{Z}}_p, & c_i^m &\in \frac{p^{n-1}}{a_p} \overline{\mathbf{Z}}_p & \forall i. \end{aligned}$$

De cette hypothèse, on déduit comme précédemment (sachant que  $a_p c_0^m \in p^n \overline{\mathbf{Z}}_p$  et  $a_p c_1^m \in p^{n-1} \overline{\mathbf{Z}}_p$ ) :

$$(10) \quad \sum_{i=0}^{k-2} c_{i, [\mu]_{m-1}}^{m-1} (-[\lambda])^i \in \frac{p^n}{a_p} \overline{\mathbf{Z}}_p \quad \forall \lambda \in \mathbf{F}_p$$

$$(11) \quad \sum_{i=1}^{k-2} i c_{i, [\mu]_{m-1}}^{m-1} (-[\lambda])^{i-1} \in p^{n-2} \overline{\mathbf{Z}}_p \quad \forall \lambda \in \mathbf{F}_p$$

ce qui entraîne en particulier  $c_0^{m-1} \in \frac{p^n}{a_p} \overline{\mathbf{Z}}_p, c_1^{m-1} + c_p^{m-1} \in \frac{p^n}{a_p} \overline{\mathbf{Z}}_p, c_{k-1-p}^{m-1} + c_{k-2}^{m-1} \in \frac{p^n}{a_p} \overline{\mathbf{Z}}_p$  et  $c_i^{m-1} \in p^{n-2} \overline{\mathbf{Z}}_p$  pour tout  $i$ . De l'équation  $C_{p, \mu}^m \in p^n \overline{\mathbf{Z}}_p$ , on déduit :

$$p^p \sum_{i=p}^{k-2} \binom{i}{p} c_{i, [\mu]_{m-1}}^{m-1} \left( \frac{[\mu]_{m-1} - \mu}{p^{m-1}} \right)^{i-p} - a_p c_{p, \mu}^m \in \frac{p^n}{a_p} \overline{\mathbf{Z}}_p \quad \forall \mu \in I_m$$

d'où  $a_p c_p^m \in \frac{p^n}{a_p} \overline{\mathbf{Z}}_p$  et donc  $a_p c_1^m \in \frac{p^n}{a_p} \overline{\mathbf{Z}}_p$ . Avec l'équation  $C_{1, \mu}^m \in p^n \overline{\mathbf{Z}}_p$ , on en déduit :

$$p \sum_{i=1}^{k-2} i c_{i, [\mu]_{m-1}}^{m-1} (-[\lambda])^{i-1} \in \frac{p^n}{a_p} \overline{\mathbf{Z}}_p \quad \forall \lambda \in \mathbf{F}_p$$

puis, avec (10),  $c_i^{m-1} \in \frac{p^{n-1}}{a_p} \overline{\mathbf{Z}}_p \forall i$ . Il reste à montrer  $c_{k-2}^{m-1} \in \frac{p^n}{a_p} \overline{\mathbf{Z}}_p$ . Le même raisonnement avec  $T^-(f_m) + T^+(f_{m-2}) - a_p f_{m-1} \in p^n \text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2}\overline{\mathbf{Z}}_p^2$  (en supposant  $m \geq 2$ ) fournit :

$$c_0^{m-2} \in \frac{p^n}{a_p} \overline{\mathbf{Z}}_p, c_1^{m-2} + c_p^{m-2} \in \frac{p^n}{a_p} \overline{\mathbf{Z}}_p, c_i^{m-2} \in \frac{p^{n-1}}{a_p} \overline{\mathbf{Z}}_p \quad \forall i.$$

Comme  $p \mid \binom{k-2}{k-1-p}, p \mid \binom{k-3}{k-1-p}$  et  $p^{k-1-p} c_i^{m-2} \in p^n \overline{\mathbf{Z}}_p \forall i$  (on utilise ici  $k > p + 2$ ), l'équation  $C_{k-1-p, [\mu]_{m-1}}^{m-1} \in p^n \overline{\mathbf{Z}}_p$  entraîne  $-a_p c_{k-1-p}^{m-1} \in p^n \overline{\mathbf{Z}}_p$ . D'où  $c_{k-2}^{m-1} \in \frac{p^n}{a_p} \overline{\mathbf{Z}}_p$  puisque  $c_{k-1-p}^{m-1} + c_{k-2}^{m-1} \in \frac{p^n}{a_p} \overline{\mathbf{Z}}_p$ . Par récurrence et le même raisonnement avec la partie à support dans les classes  $KZ(g_{m, \mu}^1)^{-1}$ , on obtient finalement  $f_m \in \frac{p^{n-1}}{a_p} \text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2}\overline{\mathbf{Z}}_p^2$  pour  $m \geq 0 : c = 1 + \text{val}(a_p)$  convient.

4.2.3. Supposons enfin  $0 < \text{val}(a_p) < 1$ ,  $k = p + 2$  et  $p \neq 2$ . On considère l'hypothèse de récurrence :

$$c_i^{m+1} \in \frac{p^n}{a_p} \overline{\mathbf{Z}}_p \quad i \notin \{1, p\}, \quad c_1^{m+1} + c_p^{m+1} \in \frac{p^n}{a_p} \overline{\mathbf{Z}}_p, \quad c_i^{m+1} \in \frac{p^{n-1}}{a_p} \overline{\mathbf{Z}}_p \quad \forall i$$

$$\sum_{\lambda \in \mathbf{F}_p} c_{p, \mu + p^m[\lambda]}^{m+1} \in \frac{p^n}{a_p} \overline{\mathbf{Z}}_p \quad \sum_{\lambda \in \mathbf{F}_p} c_{p, \mu + p^m[\lambda]}^{m+1}[\lambda] \in \frac{p^n}{a_p} \overline{\mathbf{Z}}_p$$

(resp. avec  $c_p^m$ ). Le début de la preuve reste valable et donne :

$$c_i^{m-1} \in \frac{p^n}{a_p} \overline{\mathbf{Z}}_p \quad i \notin \{1, p\}, \quad c_1^{m-1} + c_p^{m-1} \in \frac{p^n}{a_p} \overline{\mathbf{Z}}_p, \quad c_i^{m-1} \in \frac{p^{n-1}}{a_p} \overline{\mathbf{Z}}_p \quad \forall i$$

et de même avec  $c_i^{m-2}$  (si  $m \geq 2$ ). Pour amorcer la récurrence, il suffit de montrer :

$$\sum_{\lambda \in \mathbf{F}_p} c_{1, \mu + p^{m-2}[\lambda]}^{m-1} \in \frac{p^n}{a_p} \overline{\mathbf{Z}}_p \quad \text{et} \quad \sum_{\lambda \in \mathbf{F}_p} c_{1, \mu + p^{m-2}[\lambda]}^{m-1}[\lambda] \in \frac{p^n}{a_p} \overline{\mathbf{Z}}_p \quad \forall \mu \in I_{m-2}.$$

De  $C_{1, \mu}^m \in p^n \overline{\mathbf{Z}}_p \quad \forall \mu \in I_m$  et  $C_{1, \mu}^{m-1} \in p^n \overline{\mathbf{Z}}_p \quad \forall \mu \in I_{m-1}$ , on déduit pour  $p \neq 2$  :

$$(12) \quad p \sum_{\lambda \in \mathbf{F}_p} c_{1, \mu + p^m[\lambda]}^{m+1}[\lambda]^{p-1} + p c_{1, [\mu]_{m-1}}^{m-1} - a_p c_{1, \mu}^m \in p^n \overline{\mathbf{Z}}_p \quad \forall \mu \in I_m$$

$$(13) \quad p \sum_{\lambda \in \mathbf{F}_p} c_{1, \mu + p^{m-1}[\lambda]}^m[\lambda]^{p-1} + p c_{1, [\mu]_{m-2}}^{m-2} - a_p c_{1, \mu}^{m-1} \in p^n \overline{\mathbf{Z}}_p \quad \forall \mu \in I_{m-1}.$$

Supposons (par récurrence) qu'on ait  $U_{m+1} \in \overline{\mathbf{Z}}_p^\times$  tel que :

$$(14) \quad p c_{1, [\mu]_m}^m - a_p U_{m+1} c_{1, \mu}^{m+1} \in p^n \overline{\mathbf{Z}}_p \quad \forall \mu \in I_{m+1}$$

avec  $U_{m+1}$  ne dépendant que de  $m$  et  $a_p$  (ceci est bien vérifié pour  $m = M$  et  $m = M - 1$ ). De (14), on déduit (puisque  $\sum_{\lambda \in \mathbf{F}_p} [\lambda]^{p-1} = p - 1$ ) :

$$p(p-1) c_{1, [\mu]_m}^m - a_p U_{m+1} \sum_{\lambda \in \mathbf{F}_p} c_{1, [\mu]_m + p^m[\lambda]}^{m+1}[\lambda]^{p-1} \in p^n \overline{\mathbf{Z}}_p$$

qui, combiné avec (12), donne  $p c_{1, [\mu]_{m-1}}^{m-1} - a_p \left(1 - \frac{p^2(p-1)}{a_p^2 U_{m+1}}\right) c_{1, \mu}^m \in p^n \overline{\mathbf{Z}}_p \quad \forall \mu \in I_m$ .

Cette dernière équation est encore de la forme (14) en posant  $U_m = 1 - \frac{p^2(p-1)}{a_p^2 U_{m+1}} \in \overline{\mathbf{Z}}_p^\times$ . En la combinant avec (13), on obtient de même  $U_{m-1} \in \overline{\mathbf{Z}}_p^\times$  tel que :

$$p c_{1, [\mu]_{m-2}}^{m-2} - a_p U_{m-1} c_{1, \mu}^{m-1} \in p^n \overline{\mathbf{Z}}_p \quad \forall \mu \in I_{m-1}$$

ce qui entraîne (puisque  $\sum_{\lambda \in \mathbf{F}_p} 1 = p$  et  $\sum_{\lambda \in \mathbf{F}_p} [\lambda] = 0$  pour  $p \neq 2$ ) :

$$p^2 c_{1, [\mu]_{m-2}}^{m-2} - a_p U_{m-1} \sum_{\lambda \in \mathbf{F}_p} c_{1, [\mu]_{m-2} + p^{m-2}[\lambda]}^{m-1} \in p^n \overline{\mathbf{Z}}_p$$

$$0 - a_p U_{m-1} \sum_{\lambda \in \mathbf{F}_p} c_{1, [\mu]_{m-2} + p^{m-2}[\lambda]}^{m-1}[\lambda] \in p^n \overline{\mathbf{Z}}_p$$

d'où le résultat car  $p^2 c_{1, \mu}^{m-2} \in p^n \overline{\mathbf{Z}}_p$ . La récurrence peut se poursuivre et on achève la preuve comme avant.

**Remarque 4.2.3.1.** — J'ignore comment traiter ce cas lorsque  $p = 2$ .

## 5. Réduction modulo $p$

On démontre le théorème 3.3.6, en fait sa version plus précise 1.4 de l'introduction.

**5.1. Premiers calculs.** — Pour  $k \in \mathbf{Z}_{\geq 2}$ , on note  $\sigma_{k-2}$  la représentation  $\underline{\text{Sym}}^{k-2} \overline{\mathbf{F}}_p^2$  de  $KZ$  considérée au §2. Pour  $k \in \{2, \dots, p+1\}$ , on sait (voir [1] par exemple) que  $\sigma_{k-2}$  est irréductible. Par la proposition 3.3.3, on a par ailleurs pour  $k \leq p+1$  :

$$\Theta_{k,a_p} \simeq \frac{\text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2} \overline{\mathbf{Z}}_p^2}{(T - a_p)(\text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2} \overline{\mathbf{Z}}_p^2)}.$$

Comme  $\text{val}(a_p) > 0$ , on en déduit :

**Corollaire 5.1.1.** — *Pour  $k \leq p+1$ , on a  $\Theta_{k,a_p} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \overline{\mathbf{F}}_p \simeq \frac{\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{k-2}}{(T)}$ .*

Dorénavant, nous supposons  $p+2 \leq k \leq 2p$ . Pour  $k > p+1$ , les représentations  $\sigma_{k-2}$  ne sont plus irréductibles. Rappelons le lemme élémentaire suivant :

**Lemme 5.1.2.** — *Soit  $\sigma$  une représentation lisse de  $KZ$  sur  $\overline{\mathbf{F}}_p$ . Si  $\sigma^{I(1)}$  est de dimension 1 et engendre  $\sigma$ , alors  $\sigma$  est irréductible.*

*Démonstration.* — Si  $\sigma' \subset \sigma$ , on a  $0 \neq \sigma'^{I(1)} \subset \sigma^{I(1)}$  d'où  $\sigma'^{I(1)} = \sigma^{I(1)}$  et  $\sigma' = \sigma$ .  $\square$

**Lemme 5.1.3.** — *Soit  $k \in \{p+2, \dots, 2p\}$ .*

(i) *Si  $k = p+2$ , on a une suite exacte de représentations de  $KZ$  :*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \sigma_1 & \longrightarrow & \sigma_p & \longrightarrow & \sigma_{p-2} \otimes (\omega \circ \det) & \longrightarrow & 0 \\ & & (x, y) & \longmapsto & (x^p, y^p) & & & & \\ & & & & x^{p-i} y^i & \longmapsto & (-1)^{i-1} \binom{p-2}{i-1} x^{p-1-i} y^{i-1} & & i \neq 0, p. \end{array}$$

(ii) *Si  $p+3 \leq k \leq 2p$ , on a une suite exacte de représentations de  $KZ$  :*

$$0 \longrightarrow \sigma_{k-3-p} \otimes (\omega \circ \det) \oplus \sigma_{k-1-p} \longrightarrow \sigma_{k-2} \longrightarrow \sigma_{2p-k} \otimes (\omega^{k-1-p} \circ \det) \longrightarrow 0$$

avec, en termes des variables  $x$  et  $y$  :

$$\begin{aligned} - x^{k-2-i} y^i \in \sigma_{k-2} &\mapsto (-1)^{k-i} \binom{2p-k}{p+1-k+i} x^{p-1-i} y^{p-k+1+i} \text{ si } k-1-p \leq i \leq p-1 \text{ et} \\ &x^{k-2-i} y^i \mapsto 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

$$- x^{k-3-p-i} y^i \in \sigma_{k-3-p} \otimes (\omega \circ \det) \mapsto x^{k-3-i} y^{1+i} - x^{k-2-p-i} y^{p+i} \text{ si } 0 \leq i \leq k-3-p$$

$$- x^{k-1-p-i} y^i \in \sigma_{k-1-p} \mapsto \frac{1}{\binom{k-1-p}{i}} \left( \binom{k-2}{i} x^{k-2-i} y^i + \binom{k-2}{p-1+i} x^{k-1-p-i} y^{p+1+i} \right) \text{ si } 0 \leq i \leq k-1-p.$$

*Démonstration.* — Pour  $p + 2 \leq k \leq 2p$ , le sous- $\overline{\mathbf{F}}_p$ -espace vectoriel  $\sigma$  de  $\sigma_{k-2}$  engendré par  $(x^{k-2}, x^{k-3}y, \dots, x^p y^{k-2-p}, x^{k-2-p}y^p, \dots, xy^{k-3}, y^{k-2})$  est stable par  $KZ$  (car, si  $p \leq j \leq 2p - 2$ ,  $\binom{j}{i} \equiv 0 \pmod{p}$  pour  $j + 1 - p \leq i \leq p - 1$ ). Un calcul montre que  $(\sigma_{k-2}/\sigma)^{I(1)}$  est de dimension 1 sur  $\overline{\mathbf{F}}_p$  engendré par l'image de  $x^{p-1}y^{k-1-p}$  et que  $\sigma_{k-2}/\sigma$  est engendré sur  $\overline{\mathbf{F}}_p[KZ]$  par l'image de  $x^{p-1}y^{k-1-p}$ . Donc  $\sigma_{k-2}/\sigma$  est irréductible par le lemme 5.1.2 et, pour des raisons de dimension et de caractère central, doit être isomorphe à  $\sigma_{2p-k} \otimes (\omega^{k-1-p} \circ \det)$ . Comme les matrices diagonales laissent stables  $\overline{\mathbf{F}}_p x^{k-2-i}y^i$  pour tout  $i$ , il existe un scalaire  $c(k, i) \in \overline{\mathbf{F}}_p$  tel que  $x^{k-2-i}y^i \mapsto c(k, i)x^{p-1-i}y^{p-k+1+i}$  pour  $k - 1 - p \leq i \leq p - 1$  (ne pas oublier la torsion par  $\omega^{k-1-p}$ !). En normalisant  $c(k, k-1-p) = 1$  et en faisant agir  $K$  sur  $x^{p-1}y^{k-1-p}$ , un calcul donne  $c(k, i) = (-1)^{k-i} \binom{2p-k}{p+1-k+i}$ . Pour  $k > p + 2$ , en développant  $\kappa \cdot (x^{k-3}y - x^{k-2-p}y^p)$  pour  $\kappa \in K$ , on voit que la sous-représentation engendrée par  $x^{k-3}y - x^{k-2-p}y^p$  est exactement  $(x^{k-2-i}y^i - x^{k-1-p-i}y^{p-1+i}, 1 \leq i \leq k-2-p)$ . Comme  $x^{k-3}y - x^{k-2-p}y^p$  y est, à scalaire près, le seul vecteur invariant sous  $I(1)$  (on vérifie cela par un calcul simple), elle est irréductible par 5.1.2 et doit être isomorphe à  $\sigma_{k-3-p} \otimes (\omega \circ \det)$  vu sa dimension et son caractère central. Comme précédemment, en calculant l'action de  $K$  sur  $x^{k-3}y - x^{k-2-p}y^p$ , on obtient l'isomorphisme explicite de l'énoncé en termes de  $x, y$ . Pour  $k > p + 2$ , en développant  $\kappa \cdot x^{k-2}$  pour  $\kappa \in K$ , on voit que la sous-représentation engendrée par  $x^{k-2}$  est exactement  $(\binom{k-2}{i}x^{k-2-i}y^i + \binom{k-2}{p-1+i}x^{k-1-p-i}y^{p-1+i}, 0 \leq i \leq k-1-p)$ . Comme  $\binom{k-2}{i} + \binom{k-2}{p-1+i} \equiv \binom{k-1-p}{i} \in \mathbf{Z}_p^\times$  pour  $0 \leq i \leq k-1-p$ , elle est d'intersection nulle avec la précédente. On vérifie de manière analogue par un calcul et le lemme 5.1.2 qu'elle est irréductible et isomorphe à  $\sigma_{k-1-p}$  comme dans l'énoncé.  $\square$

Rappelons qu'on a une surjection  $\frac{\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{k-2}}{T(\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{k-2})} \twoheadrightarrow \Theta_{k, a_p} \otimes_{\overline{\mathbf{Z}}_p} \overline{\mathbf{F}}_p$  pour tout  $k \geq 2$ .

**Corollaire 5.1.4.** — Soit  $k \in \{p + 2, \dots, 2p\}$ .

(i) Si  $k = p + 2$ , on a un isomorphisme de représentations de  $G$  :

$$\frac{\text{ind}_{KZ}^G \sigma_p}{T(\text{ind}_{KZ}^G \sigma_p)} \xrightarrow{\sim} (\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{p-2}) \otimes \omega \circ \det.$$

(ii) Si  $p + 3 \leq k \leq 2p$ , on a une suite exacte de représentations de  $G$  :

$$0 \rightarrow (\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{k-3-p}) \otimes \omega \circ \det \rightarrow \frac{\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{k-2}}{T(\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{k-2})} \rightarrow (\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{2p-k}) \otimes \omega^{k-1-p} \circ \det \rightarrow 0.$$

*Démonstration.* — Par le lemme 5.1.3, on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow (\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{k-3-p}) \otimes \omega \circ \det \oplus \text{ind}_{KZ}^G \sigma_{k-1-p} \rightarrow \text{ind}_{KZ}^G \sigma_{k-2} \rightarrow (\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{2p-k}) \otimes \omega^{k-1-p} \circ \det \rightarrow 0$$

en convenant que  $(\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{k-3-p}) \otimes \omega \circ \det = 0$  si  $k = p + 2$ . Soit  $v = \sum_{i=0}^{k-2} c_i x^{k-2-i} y^i \in \sigma_{k-2}$ , les formules (7) et (8) avec les lemmes 2.2.1 et 5.1.3 donnent  $T([\text{Id}, v]) \in \text{ind}_{KZ}^G \sigma_{k-1-p}$ . Comme c'est vrai pour tout  $v$ , on a  $T(\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{k-2}) \subset \text{ind}_{KZ}^G \sigma_{k-1-p}$ .

Considérons  $v = x^{p-1}y^{k-1-p} - y^{k-2}$ , le même calcul donne  $T([\text{Id}, v]) = [\alpha, -y^{k-2}]$ . Or, dans  $\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{k-2}$ ,  $[\alpha, -y^{k-2}]$  engendre  $\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{k-1-p}$  car  $y^{k-2}$  engendre  $\sigma_{k-1-p}$  (voir la preuve du lemme 5.1.3). Donc  $\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{k-1-p}$  disparaît dans le quotient. Ceci achève la preuve.  $\square$

**5.2. Lemmes de descente.** — Les trois lemmes de ce paragraphe seront utilisés pour calculer  $\Theta_{k,a_p} \otimes_{\overline{\mathbf{Z}}_p} \overline{\mathbf{F}}_p$  lorsque  $\text{val}(a_p) \geq 1$ .

**Lemme 5.2.1.** — *Supposons  $k = p + 2$  et  $\text{val}(a_p) \geq 1$ . Soit  $n \in \mathbf{Z}_{>0}$  et  $f \in B_n(\overline{\mathbf{Q}}_p)$  tel que :*

(i)  $(T - a_p)(f) \in \text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^p \overline{\mathbf{Z}}_p^2$

(ii) *l'image de  $(T - a_p)(f)$  dans  $(\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{p-2}) \otimes \omega \circ \text{dét}$  tombe dans  $B_n(\overline{\mathbf{F}}_p)$ .*

*Alors il existe  $h \in B_{n-1}(\overline{\mathbf{Q}}_p)$  tel que :*

(i)  $(T - a_p)(h) \in \text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^p \overline{\mathbf{Z}}_p^2$

(ii)  $(T - a_p)(h)$  et  $(T - a_p)(f)$  ont même image dans  $(\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{p-2}) \otimes \omega \circ \text{dét}$ .

*Démonstration.* — On écrit  $f = \sum_{m=0}^n (f_m^0 + f_m^1)$  avec  $f_m^0 = \sum_{\mu \in I_m} [g_{m,\mu}^0, v_\mu^m]$ ,  $f_m^1 = \sum_{\mu \in I_m} [g_{m,\mu}^1, w_\mu^m]$  et on remarque que  $v_\mu^m, w_\mu^m \in p^{-1} \underline{\text{Sym}}^p \overline{\mathbf{Z}}_p^2$  pour tout  $m, \mu$  par le raisonnement du §4.2.1. Notons  $v_\mu^m = \sum_{i=0}^p c_{i,\mu}^m x^{p-i} y^i$ . De  $T^+(f_n^0) \in \text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^p \overline{\mathbf{Z}}_p^2$ , on tire  $c_{i,\mu}^n \in \overline{\mathbf{Z}}_p$  si  $i \notin \{1, p\}$  et  $c_{1,\mu}^n + c_{p,\mu}^n \in \overline{\mathbf{Z}}_p$ . De  $T^+(f_n^0) \in B_{n+1}(\overline{\mathbf{Z}}_p) \mapsto 0$  dans  $\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{p-2}$ , on tire  $\text{val}(c_{1,\mu}^n) > -1$ , donc  $\text{val}(c_{p,\mu}^n) > -1$  et  $a_p f_n^0 \mapsto 0$  dans  $\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{p-2}$ . Supposons d'abord  $n > 1$ . Pour tout  $\mu \in I_{n-2}$ , soit  $(\delta_{i,\mu}^{n-2})_{0 \leq i \leq p-1}$  l'unique  $p$ -uplet de  $\overline{\mathbf{Q}}_p^p$  tel que :

$$\sum_{i=0}^{p-1} \delta_{i,\mu}^{n-2} (-[\lambda])^i = \sum_{\nu \in \mathbf{F}_p} c_{p,\mu+p^{n-2}[\lambda]+p^{n-1}[\nu]}^n [\nu]^p.$$

Noter que  $\text{val}(\delta_{i,\mu}^{n-2}) > -1$  pour tout  $i$ . Posons :

$$\tilde{f}_{n-2}^0 = f_{n-2}^0 + \sum_{\mu \in I_{n-2}} [g_{n-2,\mu}^0, \sum_{i=0}^{p-1} \delta_{i,\mu}^{n-2} x^{p-i} y^i].$$

On a  $a_p \tilde{f}_{n-2}^0 - a_p f_{n-2}^0 \mapsto 0$  dans  $\text{ind}_{KZ}^G \sigma_p$  et de  $T^-(f_n^0) + T^+(f_{n-2}^0) \in \text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^p \overline{\mathbf{Z}}_p^2$ , on déduit  $T^+(\tilde{f}_{n-2}^0) \in \text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^p \overline{\mathbf{Z}}_p^2$  (les  $\delta_{i,\mu}^{n-2}$  sont fabriqués pour ça). De  $p \mid \binom{p}{j}$  pour  $1 \leq j \leq p-1$ , on déduit  $T^-(f_n^0) + T^+(f_{n-2}^0) - T^+(\tilde{f}_{n-2}^0) \mapsto 0$  dans  $\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{p-2}$  par le corollaire 2.2.3. On vérifie aussi que  $T^-(f_{n-2}^0) - T^-(\tilde{f}_{n-2}^0) \in \text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^p \overline{\mathbf{Z}}_p^2$  et  $T^-(f_{n-2}^0) - T^-(\tilde{f}_{n-2}^0) \mapsto 0$  dans  $\text{ind}_{KZ}^G \sigma_p$ . Par le même raisonnement appliqué à  $\beta f$ , on modifie  $f_{n-2}^1$  en  $\tilde{f}_{n-2}^1$ . Alors  $h = f - (f_n^0 + f_n^1) + (\tilde{f}_{n-2}^0 - f_{n-2}^0) + (\tilde{f}_{n-2}^1 - f_{n-2}^1) \in B_{n-1}(\overline{\mathbf{Q}}_p)$  convient. Pour  $n = 1$ , on modifie le terme  $f_0^0 = [\alpha, w]$  en posant  $\tilde{f}_0^0 = [\alpha, w + \delta(x^p - xy^{p-1})]$  où  $\delta = \sum_{\nu \in \mathbf{F}_p} c_{p, [\nu]}^1 [\nu]^p$ . Alors  $T^+(\tilde{f}_0^0) - T^+(f_0^0) \in$

$\text{Ker}(\text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^p \overline{\mathbf{Z}}_p^2 \rightarrow \text{ind}_{KZ}^G \sigma_p)$ ,  $T^-(\tilde{f}_1^1) \in \text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^p \overline{\mathbf{Z}}_p^2$  ( $\delta$  est fabriqué pour ça) et  $T^-(f_1^0) + T^-(f_0^1) - T^-(\tilde{f}_1^1) \mapsto 0$  dans  $\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{p-2}$ . On supprime  $f_1^0$  comme on a supprimé  $f_n^0$ , puis de même avec  $f_1^1$  en corrigeant  $f_0^0 = [\text{Id}, v]$ .  $\square$

**Lemme 5.2.2.** — *Supposons  $p + 3 \leq k \leq 2p$  et  $\text{val}(a_p) = 1$ . Soit  $n \in \mathbf{Z}_{>0}$  et  $f \in B_n(\overline{\mathbf{Q}}_p)$  tel que :*

(i)  $(T - a_p)(f) \in \text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2} \overline{\mathbf{Z}}_p^2$   
 (ii) l'image de  $(T - a_p)(f)$  dans  $(\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{2p-k}) \otimes \omega^{k-1-p} \circ \text{dét}$  tombe dans  $B_{n-1}(\overline{\mathbf{F}}_p)$ .  
 Alors il existe  $h \in B_{n-1}(\overline{\mathbf{Q}}_p)$  tel que :

(i)  $(T - a_p)(h) \in \text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2} \overline{\mathbf{Z}}_p^2$   
 (ii)  $(T - a_p)(h)$  et  $(T - a_p)(f)$  ont même image dans  $(\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{2p-k}) \otimes \omega^{k-1-p} \circ \text{dét}$ .

*Démonstration.* — Noter qu'on demande ici que l'image de  $(T - a_p)(f)$  tombe dans  $B_{n-1}(\overline{\mathbf{F}}_p)$  et pas seulement  $B_n(\overline{\mathbf{F}}_p)$  comme au lemme précédent. On garde les notations de la preuve précédente. On a encore  $c_{i,\mu}^m \in p^{-1} \overline{\mathbf{Z}}_p$  pour tout  $i, m, \mu$  (§4.2.1). En particulier,  $T^+(f_n^0)$  et  $T^+(f_{n-1}^0)$  ont une image nulle dans  $\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{2p-k}$ . Par hypothèse, l'image de  $a_p f_n \in S_n(\overline{\mathbf{Z}}_p)$  y est donc aussi nulle, i.e. les éléments  $c_{k-1-p,\mu}^n, \dots, c_{p-1,\mu}^n$  pour  $\mu \in I_n$  ont une valuation  $> -1$ . De  $T^+(f_n^0) \in \text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2} \overline{\mathbf{Z}}_p^2$ , on tire  $c_{i,\mu}^n \in \overline{\mathbf{Z}}_p$  si  $i \notin \{1, \dots, k-1-p, p, \dots, k-2\}$  et  $c_{i,\mu}^n + c_{i+p-1,\mu}^n \in \overline{\mathbf{Z}}_p$  si  $i \in \{1, \dots, k-1-p\}$ . Donc  $c_{k-2,\mu}^n = (c_{k-1-p,\mu}^n + c_{k-2,\mu}^n) - c_{k-1-p,\mu}^n$  est aussi de valuation  $> -1$ . Supposons d'abord  $n > 1$  et, pour  $\mu \in I_{n-2}$ , soit  $(\delta_{i,\mu}^{n-2})_{0 \leq i \leq p-1} \in \overline{\mathbf{Q}}_p^p$  tel que :

$$\sum_{i=0}^{p-1} \delta_{i,\mu}^{n-2} (-[\lambda])^i = \sum_{\nu \in \mathbf{F}_p} c_{k-2,\mu+p^{n-2}[\lambda]+p^{n-1}[\nu]}^n [\nu]^{k-2}$$

Posons  $\tilde{f}_{n-2}^0 = f_{n-2}^0 + \sum_{\mu \in I_{n-2}} [g_{n-2,\mu}^0, \sum_{i=0}^{p-1} \delta_{i,\mu}^{n-2} x^{k-2-i} y^i]$ . En utilisant  $p \mid \binom{k-2}{j}$  et  $p^2 \mid p \binom{k-3}{j}$  lorsque  $k-1-p \leq j \leq p-1$ , on vérifie avec le corollaire 2.2.3 que  $T^-(f_n^0) + T^+(f_{n-2}^0)$  et  $T^+(\tilde{f}_{n-2}^0)$  ont même image dans  $\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{2p-k}$ , ainsi que les autres propriétés de la preuve précédente. On achève comme précédemment.  $\square$

**Lemme 5.2.3.** — *Supposons  $p + 3 \leq k \leq 2p$  et  $\text{val}(a_p) = 1$ . Soit  $n \in \mathbf{Z}_{>1}$  et  $f \in B_n(\overline{\mathbf{Q}}_p)$  tel que :*

(i)  $(T - a_p)(f) \in \text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2} \overline{\mathbf{Z}}_p^2$   
 (ii) l'image de  $(T - a_p)(f)$  dans  $\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{k-2}$  tombe dans  $B_{n-2}(\overline{\mathbf{F}}_p)$ .  
 Alors il existe  $h \in B_{n-1}(\overline{\mathbf{Q}}_p)$  tel que :

(i)  $(T - a_p)(h) \in \text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2} \overline{\mathbf{Z}}_p^2$   
 (ii)  $(T - a_p)(h)$  et  $(T - a_p)(f)$  ont même image dans  $\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{k-2}$ .

*Démonstration.* — Reprenons les notations de la preuve précédente et surlignons les images dans  $\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{k-2}$ . De  $\overline{T^+(f_n^0)} = 0$ , on tire  $\text{val}(c_{i,\mu}^n) > -1$  pour tout  $i$ .

En particulier  $\overline{a_p f_n^0} = 0$  et donc, par hypothèse,  $\overline{T^+(f_{n-1}^0)} = 0$  d'où  $\overline{a_p f_{n-1}^0} = 0$  encore et  $\overline{T^-(f_n^0) + T^+(f_{n-2}^0)} = 0$  par hypothèse. On modifie  $f_{n-2}^0$  en  $\tilde{f}_{n-2}^0$  exactement comme dans la preuve précédente. Il est clair qu'on a  $\overline{a_p f_{n-2}^0} = \overline{a_p \tilde{f}_{n-2}^0}$  et  $\overline{T^-(f_{n-2}^0) - T^-(\tilde{f}_{n-2}^0)} = 0$ . Montrons que  $\overline{T^+(\tilde{f}_{n-2}^0)} = 0$ . Les seules coordonnées qui peut-être ne sont pas nulles sont  $\sum_{i=1}^{k-2} \overline{ipc_{i,\mu}^{n-2}(-\lambda)^{i-1}} = \sum_{i=1}^{k-2} \overline{ipc_{i,\mu}^{n-2}(-\lambda)^{i-1}}$  ( $\mu \in I_{n-2}$ ,  $\lambda \in \mathbf{F}_p$  et avec des notations évidentes). De  $\overline{T^-(f_n^0) + T^+(f_{n-2}^0)} = 0$ , on tire pour tout  $\mu, \lambda$  :

$$\begin{aligned} (k-2) \overline{\sum_{\nu \in \mathbf{F}_p} c_{k-2, \mu + p^{n-2}[\lambda] + p^{n-1}[\nu]}^n [\nu]^{k-3}} + \sum_{i=1}^{k-2} \overline{ipc_{i,\mu}^{n-2}(-\lambda)^{i-1}} &= 0 \\ \binom{k-2}{p} \overline{\sum_{\nu \in \mathbf{F}_p} c_{k-2, \mu + p^{n-2}[\lambda] + p^{n-1}[\nu]}^n [\nu]^{k-2-p}} &= 0 \end{aligned}$$

comme  $[\nu]^{k-3} = [\nu]^{k-2-p} \forall \nu \in \mathbf{F}_p$  car  $k > p + 2$  et comme  $\binom{k-2}{p} \in \mathbf{Z}_p^\times$ , on a bien  $\sum_{i=1}^{k-2} \overline{ipc_{i,\mu}^{n-2}(-\lambda)^{i-1}} = 0$ . On modifie alors  $f$  comme avant.  $\square$

**5.3. Réduction modulo  $p$ .** — On détermine  $\Theta_{k,a_p} \otimes_{\overline{\mathbf{Z}}_p} \overline{\mathbf{F}}_p$  pour  $p+2 \leq k \leq 2p$  et  $p \neq 2$ .

*5.3.1.* On commence par le cas  $\text{val}(a_p) < 1$ . Supposons d'abord  $p+3 \leq k \leq 2p$  et considérons  $f = [\text{Id}, a_p^{-1}(x^{k-3}y - x^{k-2-p}y^p)]$ . On a  $T(f) \in pa_p^{-1}(\text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2} \overline{\mathbf{Z}}_p^2)$  par les lemmes 2.2.1 et 2.2.2. La réduction  $\text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2} \overline{\mathbf{Z}}_p^2 \rightarrow \text{ind}_{KZ}^G \sigma_{k-2}$  envoie  $T(f) - a_p f$  sur  $-\overline{a_p f} = [\text{Id}, -x^{k-3}y + x^{k-2-p}y^p]$  qui est l'image de  $[\text{Id}, -x^{k-3-p}] \in (\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{k-3-p}) \otimes \omega \circ \det$  par l'application du lemme 5.1.3. Comme  $[\text{Id}, x^{k-3-p}]$  engendre  $\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{k-3-p}$  et devient nul dans  $\Theta_{k,a_p} \otimes_{\overline{\mathbf{Z}}_p} \overline{\mathbf{F}}_p$ , on voit par le corollaire 5.1.4 que  $\Theta_{k,a_p} \otimes_{\overline{\mathbf{Z}}_p} \overline{\mathbf{F}}_p$  est, pour  $p+2 \leq k \leq 2p$  et  $\text{val}(a_p) < 1$ , un quotient de  $(\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{2p-k}) \otimes \omega^{k-1-p} \circ \det$  (pour  $k = p+2$ , c'est l'énoncé 5.1.4 (i)).

Pour  $p+2 \leq k \leq 2p$ , considérons  $f = f_0 + f_2$  avec :

$$\begin{aligned} f_2 &= \sum_{\lambda \in \mathbf{F}_p} [g_{2,p[\lambda]}^0, v_\lambda] \\ f_0 &= [\text{Id}, a_p^{-1}(p-1)(x^{k-2} - x^{k-1-p}y^{p-1})] \end{aligned}$$

où  $v_\lambda = a_p^{-1}[\lambda]^{2p-k}(x^{p-1}y^{k-1-p} - y^{k-2})$ . Par les formules (2), (4), (3) et (6), on a  $T^-(f_0) \in pa_p^{-1}(\text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2} \overline{\mathbf{Z}}_p^2)$  et  $T^+([g_{2,p[\lambda]}^0, v_\lambda]) \in pa_p^{-1}(\text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2} \overline{\mathbf{Z}}_p^2)$  pour tout  $\lambda$ . Par le corollaire 2.2.3, on a  $T^-(f_2) + T^+(f_0) \in pa_p^{-1}(\text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2} \overline{\mathbf{Z}}_p^2)$  (noter pour cela que  $p \mid \sum_{\lambda \in \mathbf{F}_p} [\lambda]^i$  si  $i = 0$  ou si  $p-1 \nmid i$ ,  $\sum_{\lambda \in \mathbf{F}_p} [\lambda]^i = p-1$  si  $i \neq 0$  et si  $p-1 \mid i$ , et  $p \mid \binom{k-2}{p-1}$ ). Par la réduction  $\text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2} \overline{\mathbf{Z}}_p^2 \rightarrow \text{ind}_{KZ}^G \sigma_{k-2}$  :

$$T(f) - a_p f \mapsto -\overline{a_p f} = -\sum_{\lambda \in \mathbf{F}_p} [g_{2,p[\lambda]}^0, \lambda^{2p-k}(x^{p-1}y^{k-1-p} - y^{k-2})] + [\text{Id}, x^{k-2} - x^{k-1-p}y^{p-1}]$$

et par la surjection  $\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{k-2} \rightarrow (\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{2p-k}) \otimes \omega^{k-1-p} \circ \text{dét}$  du corollaire 5.1.4 :

$$-\overline{a_p f} \mapsto -\sum_{\lambda \in \mathbf{F}_p} [g_{2,p[\lambda]}^0, \lambda^{2p-k} x^{2p-k}] + (-1)^{k-p} [\text{Id}, y^{2p-k}] = -T([g_{1,0}^0, (-1)^{2p-k} y^{2p-k}])$$

(cf. le lemme 2.2.1 et les formules (7) et (8)). Comme  $[g_{1,0}^0, y^{2p-k}]$  engendre  $\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{2p-k}$  et comme  $T(f) - a_p f \mapsto 0$  dans  $\Theta_{k,a_p} \otimes_{\overline{\mathbf{Z}}_p} \overline{\mathbf{F}}_p$ , on voit que ce dernier est un quotient non nul (car  $\Theta_{k,a_p}$  est libre) de  $\frac{\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{2p-k}}{(T)} \otimes \omega^{k-1-p} \circ \text{dét}$ . Mais cette représentation est irréductible ([2]), donc on a montré :

**Proposition 5.3.1.1.** — *Pour  $p+2 \leq k \leq 2p$  et  $\text{val}(a_p) < 1$  (et  $k \neq 4$  si  $p=2$ ), on a  $\Theta_{k,a_p} \otimes_{\overline{\mathbf{Z}}_p} \overline{\mathbf{F}}_p \simeq \frac{\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{2p-k}}{(T)} \otimes \omega^{k-1-p} \circ \text{dét}$ .*

**Remarque 5.3.1.2.** — Tout ceci resterait valable pour  $p=2$  et  $k=4$  si l'on savait que  $\Theta_{4,a_2}$  est libre sur  $\overline{\mathbf{Z}}_2$  (sinon  $\Theta_{4,a_2} \otimes_{\overline{\mathbf{Z}}_2} \overline{\mathbf{F}}_2$  peut être nul).

**Remarque 5.3.1.3.** — Supposons  $k=p+2$  et remplaçons  $a_p^{-1}$  par  $\delta^{-1}$  dans l'expression de  $f$  où  $\delta$  est celui des éléments  $p, a_p$  qui a la plus petite valuation. Alors  $T(f) - a_p f \in \text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^p \overline{\mathbf{Z}}_p^2$  mais  $f \notin \text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^p \overline{\mathbf{Z}}_p^2$  (cf. proposition 3.3.3).

5.3.2. Supposons  $\text{val}(a_p) > 1$  et  $p+3 \leq k \leq 2p$ . Considérons  $f = f_0 + f_2$  avec :

$$\begin{aligned} f_2 &= \sum_{\lambda \in \mathbf{F}_p} [g_{2,p[\lambda]}^0, p^{-1}[\lambda]^{2p-k} (x^{p-1} y^{k-1-p} - y^{k-2})] \\ f_0 &= [\text{Id}, p^{-1}(p-1)(x^{k-2} - x^{k-1-p} y^{p-1})]. \end{aligned}$$

Avec le corollaire 2.2.3, on vérifie que l'on a  $T^-(f_0) \in p(\text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2} \overline{\mathbf{Z}}_p^2)$ ,  $T^+(f_2) \in p(\text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2} \overline{\mathbf{Z}}_p^2) + \sum_{\mu \in I_3} [g_{3,\mu}^0, \overline{\mathbf{Z}}_p x^{k-3} y]$  et :

$$T^-(f_2) + T^+(f_0) + \binom{k-2}{p-1} \frac{p-1}{p} [g_{1,0}^0, x^{k-1-p} y^{p-1}] \in p(\text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2} \overline{\mathbf{Z}}_p^2) + \sum_{\mu \in I_1} [g_{1,\mu}^0, \overline{\mathbf{Z}}_p x^{k-3} y + \overline{\mathbf{Z}}_p y^{k-2}]$$

(le terme en  $y^{k-2}$  de droite est inutile si  $k < 2p$ ). Comme  $(x^{k-3} y, y^{k-2}) \in \sigma_{k-2}^2 \mapsto 0 \in \sigma_{2p-k}$  par le lemme 5.1.3 (rappelons que  $k \geq p+3$ ) et comme  $a_p f \mapsto 0 \in \text{ind}_{KZ}^G \sigma_{k-2}$  car  $\text{val}(a_p) > 1$ , on a :

$$T(f) - a_p f \mapsto (-1)^{k-p} \frac{\binom{k-2}{p-1}}{p} [g_{1,0}^0, y^{2p-k}] = \frac{1}{k-1} [g_{1,0}^0, (-1)^{2p-k} y^{2p-k}] \in \text{ind}_{KZ}^G \sigma_{2p-k}.$$

Mais  $[g_{1,0}^0, y^{2p-k}]$  engendre  $\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{2p-k}$ , donc, par le corollaire 5.1.4,  $\Theta_{k,a_p} \otimes_{\overline{\mathbf{Z}}_p} \overline{\mathbf{F}}_p$  est un quotient de  $(\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{k-3-p}) \otimes \omega \circ \text{dét}$  pour  $p+3 \leq k \leq 2p$  et  $\text{val}(a_p) > 1$ .

Considérons  $f = [\text{Id}, p^{-1}(x^{k-3} y - x^{k-2-p} y^p)]$ . Par la surjection sur  $\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{k-2}$ , on a  $a_p f \mapsto 0$ ,  $T^+(f) \mapsto \sum_{\mu \in I_1} [g_{1,\mu}^0, x^{k-3} y]$ ,  $T^-(f) \mapsto 0$  si  $k > p+3$  et  $T^-(f) \mapsto -[\alpha, x y^p]$  si  $k = p+3$ . Par le lemme 5.1.3 et le corollaire 5.1.4, l'image de  $T(f) - a_p f$  (ou de  $T(f)$ ) dans  $(\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{k-2})/(T)$  tombe donc dans  $(\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{k-3-p}) \otimes \omega \circ \text{dét}$  et vaut  $\frac{1}{k-1} \sum_{\mu \in I_1} [g_{1,\mu}^0, x^{k-3-p}]$  si  $k > p+3$  et  $\frac{1}{2} \sum_{\mu \in I_1} [g_{1,\mu}^0, 1] + \frac{1}{2} [\alpha, 1]$  si  $k = p+3$ , c'est-à-dire dans tous les cas  $\frac{1}{k-1} T([\text{Id}, x^{k-3-p}])$ . Cela veut dire que  $\Theta_{k,a_p} \otimes_{\overline{\mathbf{Z}}_p} \overline{\mathbf{F}}_p$

est un quotient non nul de  $\frac{\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{k-3-p}}{(T)} \otimes \omega \circ \det$ . Comme cette représentation est irréductible ([2]), on a finalement :

**Proposition 5.3.2.1.** — *Pour  $p+3 \leq k \leq 2p$  et  $\text{val}(a_p) > 1$ , on a  $\Theta_{k,a_p} \otimes_{\bar{\mathbf{Z}}_p} \bar{\mathbf{F}}_p \simeq \frac{\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{k-3-p}}{(T)} \otimes \omega \circ \det$ .*

5.3.3. Supposons  $\text{val}(a_p) \geq 1$ ,  $k = p+2$  et  $p \neq 2$  (le cas  $p = 2$  marcherait mais nécessiterait plus de calculs, et nous l'avons de toute manière exclus des énoncés). Considérons  $f = \sum_{\mu \in I_1} [g_{1,\mu}^0, p^{-1}(x^{p-1}y - y^p)]$  et notons  $\overline{T^+(f)}$  et  $\overline{T^-(f)}$  l'image de  $T^+(f)$  et  $T^-(f)$  dans  $\text{ind}_{KZ}^G \sigma_p$ . Un calcul donne (corollaire 2.2.3) :

$$\begin{aligned} \overline{T^+(f)} &= \sum_{\mu \in I_1} \sum_{\lambda \in \mathbf{F}_p} [g_{2,\mu+p[\lambda]}^0, x^{p-1}y] \\ \overline{T^-(f)} &= \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} \sum_{\lambda \in \mathbf{F}_p} (-p^{-1}[\lambda]^{p-j}) [\text{Id}, x^{p-j}y^j] \\ &= [\text{Id}, x^{p-1}y - y^p] \end{aligned}$$

donc l'image de  $T(f) - a_p f$  dans  $(\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{p-2}) \otimes \omega \circ \det$  vaut :

$$\sum_{\mu \in I_2} [g_{2,\mu}^0, x^{p-2}] - \frac{\overline{a_p}}{p} \sum_{\mu \in I_1} [g_{1,\mu}^0, x^{p-2}] + [\text{Id}, x^{p-2}] = (T^2 - \frac{\overline{a_p}}{p}T + 1)([\text{Id}, x^{p-2}]).$$

Pour  $\text{val}(a_p) \geq 1$ ,  $\Theta_{p+2,a_p} \otimes_{\bar{\mathbf{Z}}_p} \bar{\mathbf{F}}_p$  est donc un quotient non nul de  $\frac{\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{p-2}}{(T^2 - \frac{\overline{a_p}}{p}T + 1)} \otimes \omega \circ \det$ . Vu les résultats de [1], un tel quotient ne peut être que de la forme  $\frac{\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{p-2}}{(T-\lambda)} \otimes \omega \circ \det$  où  $\lambda^2 - \frac{\overline{a_p}}{p}\lambda + 1 = 0$  dans  $\bar{\mathbf{F}}_p$ . Si tel est le cas, alors il existe  $f \in \text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^p \bar{\mathbf{Q}}_p^2$  tel que (i)  $(T - a_p)(f) \in \text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^p \bar{\mathbf{Z}}_p^2$  et (ii)  $(T - a_p)(f) \mapsto (T - \lambda)([\text{Id}, x^{p-2}]) \in B_1(\bar{\mathbf{F}}_p) \subset \text{ind}_{KZ}^G \sigma_{p-2}$ . Par le lemme 5.2.1 et une récurrence évidente, on peut prendre  $f$  dans  $B_0(\bar{\mathbf{Q}}_p)$ , i.e.  $f = [\text{Id}, v] + [\alpha, w]$  avec  $v, w \in p^{-1} \underline{\text{Sym}}^p \bar{\mathbf{Z}}_p^2$ . Donc  $a_p f \in \text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^p \bar{\mathbf{Z}}_p^2$  et  $T(f) \in \text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^p \bar{\mathbf{Z}}_p^2$  i.e.  $T([\text{Id}, v]) \in \text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^p \bar{\mathbf{Z}}_p^2$  et  $T([\alpha, w]) \in \text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^p \bar{\mathbf{Z}}_p^2$  (les supports étant disjoints). Des formules (4) et (6), on tire  $v \in \underline{\text{Sym}}^p \bar{\mathbf{Z}}_p^2$  et de même  $w \in \underline{\text{Sym}}^p \bar{\mathbf{Z}}_p^2$ . Mais alors l'image de  $(T - a_p)(f)$  dans  $\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{p-2}$  est nulle et ne peut valoir  $(T - \lambda)([\text{Id}, x^{p-2}])$ . Donc un tel  $f$  n'existe pas et :

**Proposition 5.3.3.1.** — *Pour  $k = p+2$ ,  $\text{val}(a_p) \geq 1$  et  $p \neq 2$ , on a :*

$$\Theta_{p+2,a_p} \otimes_{\bar{\mathbf{Z}}_p} \bar{\mathbf{F}}_p \simeq \frac{\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{p-2}}{(T^2 - \frac{\overline{a_p}}{p}T + 1)} \otimes \omega \circ \det.$$

**Remarque 5.3.3.2.** — Ce résultat est encore valable pour  $p = 2$ .

5.3.4. Reste le cas  $\text{val}(a_p) = 1$  et  $p+3 \leq k \leq 2p$ . Considérons  $f = f_0 + f_2$  comme au §5.3.2. On a vu que  $T(f) \mapsto \frac{1}{k-1} [g_{1,0}^0, (-1)^{2p-k} y^{2p-k}] \in \text{ind}_{KZ}^G \sigma_{2p-k}$  et le même calcul qu'au §5.3.1 donne  $-a_p f \mapsto -\frac{\overline{a_p}}{p} T([g_{1,0}^0, (-1)^{2p-k} y^{2p-k}]) \in \text{ind}_{KZ}^G \sigma_{2p-k}$ . Donc l'image de  $\Theta_{k,a_p} \otimes_{\bar{\mathbf{Z}}_p} \bar{\mathbf{F}}_p$  dans  $(\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{2p-k}) \otimes \omega^{k-1-p} \circ \det$  est un quotient

de  $\frac{\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{2p-k}}{(T-\lambda^{-1})} \otimes \omega^{k-1-p} \circ \text{dét}$  où  $\lambda = \frac{\overline{(k-1)a_p}}{p} \in \overline{\mathbf{F}}_p^\times$ . Si c'est un vrai quotient, alors il est soit nul, soit de dimension 1 si  $k = 2p$  et  $\lambda = \pm 1$  (voir [1]). Dans ces deux cas, il existe  $f \in \text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2} \overline{\mathbf{Q}}_p^2$  tel que (i)  $(T - a_p)(f) \in \text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2} \overline{\mathbf{Z}}_p^2$  et (ii) l'image de  $(T - a_p)(f)$  dans  $\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{2p-k}$  est non nulle et tombe dans  $B_0(\overline{\mathbf{F}}_p)$ . Par le lemme 5.2.2 et une récurrence, on peut prendre  $f = [\text{Id}, v] + [\alpha, w]$  avec  $v, w \in p^{-1} \underline{\text{Sym}}^{k-2} \overline{\mathbf{Z}}_p^2$ . On a comme avant  $T([\text{Id}, v]), T([\alpha, w]) \in \text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2} \overline{\mathbf{Z}}_p^2$ . Si  $v = \sum_{i=0}^{k-2} c_i x^{k-2-i} y^i$ , cela entraîne en particulier  $c_i \in \overline{\mathbf{Z}}_p$  pour  $i \in \{k-1-p, \dots, p-1\}$  et  $i = k-2$ . On en déduit  $(T - a_p)([\text{Id}, v]) \mapsto 0 \in \text{ind}_{KZ}^G \sigma_{2p-k}$  et de même  $(T - a_p)([\alpha, w]) \mapsto 0 \in \text{ind}_{KZ}^G \sigma_{2p-k}$  ce qui est une contradiction. Donc l'image de  $\Theta_{k,a_p} \otimes_{\overline{\mathbf{Z}}_p} \overline{\mathbf{F}}_p$  dans  $(\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{2p-k}) \otimes \omega^{k-1-p} \circ \text{dét}$  est exactement  $\frac{\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{2p-k}}{(T-\lambda^{-1})} \otimes \omega^{k-1-p} \circ \text{dét}$ .

Considérons  $f = [\text{Id}, p^{-1}(x^{k-3}y - x^{k-2-p}y^p)]$ . On a vu au §5.3.2 que  $T(f) \mapsto \frac{1}{k-1} T([\text{Id}, x^{k-3-p}]) \in \text{ind}_{KZ}^G \sigma_{k-p-3}$  et le même calcul qu'au §5.3.1 donne  $-a_p f \mapsto -\frac{a_p}{p} [\text{Id}, x^{k-3-p}] \in \text{ind}_{KZ}^G \sigma_{k-3-p}$ . Donc  $\Theta_{k,a_p} \otimes_{\overline{\mathbf{Z}}_p} \overline{\mathbf{F}}_p$  contient un quotient de  $\frac{\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{k-3-p}}{(T-\lambda)} \otimes \omega \circ \text{dét}$  avec  $\lambda$  comme précédemment. Si c'est un vrai quotient, il est soit nul, soit de dimension 1 si  $k = p+3$  et  $\lambda = \pm 1$  ([1]). Dans les deux cas, il existe  $f \in \text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2} \overline{\mathbf{Q}}_p^2$  tel que (i)  $(T - a_p)(f) \in \text{ind}_{KZ}^G \underline{\text{Sym}}^{k-2} \overline{\mathbf{Z}}_p^2$  et (ii) l'image de  $(T - a_p)(f)$  dans  $\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{k-2}$  est non nulle et tombe dans  $B_0(\overline{\mathbf{F}}_p) \cap \text{ind}_{KZ}^G \sigma_{k-3-p}$ . Par le lemme 5.2.3, on peut prendre  $f = f_0 + f_1$  avec  $f_i = f_i^0 + f_i^1 \in S_i(\overline{\mathbf{F}}_p)$  ( $i = 0, 1$ ). Avec les notations de la preuve de 5.2.3, on a  $\overline{T^+(f_1)} = 0$  par hypothèse d'où, comme dans *loc.cit.*,  $\overline{a_p f_1} = 0$ . Donc  $\overline{T^+(f_0)} = 0$  d'où encore  $\overline{a_p f_0} = 0$ . Je dis qu'on a aussi  $\overline{T^-(f_1)} + \overline{T^-(f_0)} = 0$ . Par symétrie, il suffit de montrer  $\overline{T^-(f_1^0)} + \overline{T^-(f_0^1)} = 0$ . Comme  $\overline{T^-(f_1^0)} + \overline{T^-(f_0^1)}$  est dans l'image de  $\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{k-3-p}$  (par hypothèse), les coordonnées des termes en  $x^{k-2-j}y^j$  sont nulles pour  $j = 0$ ,  $j = k-2$  et  $k-1-p \leq j \leq p-1$  (cf. lemme 5.1.3). Soit  $j \in \{1, \dots, k-2-p\}$ , la somme des coordonnées de  $x^{k-2-j}y^j$  et  $x^{k-1-p-j}y^{p-1+j}$  doit être nulle par 5.1.3. Cela entraîne (avec  $\overline{p f_0^1} = \overline{p f_1^0} = 0$ ) :

$$\overline{\binom{k-2}{j} + \binom{k-2}{p-1+j}} \sum_{\nu \in \mathbf{F}_p} c_{k-2, [\nu]}^1 [\nu]^{k-2-j} = \overline{\binom{k-1-p}{j}} \sum_{\nu \in \mathbf{F}_p} c_{k-2, [\nu]}^1 [\nu]^{k-2-j} = 0$$

pour  $1 \leq j \leq k-2-p$ , d'où on déduit la nullité des coordonnées restantes. Les hypothèses entraînent finalement  $\overline{(T - a_p)(f)} = 0$  ce qui est impossible. On a donc prouvé :

**Proposition 5.3.4.1.** — *Pour  $p+3 \leq k \leq 2p$  et  $\text{val}(a_p) = 1$ , on a une suite exacte :*

$$0 \rightarrow \frac{\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{k-3-p}}{(T-\lambda)} \otimes \omega \circ \text{dét} \rightarrow \Theta_{k,a_p} \otimes_{\overline{\mathbf{Z}}_p} \overline{\mathbf{F}}_p \rightarrow \frac{\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{2p-k}}{(T-\lambda^{-1})} \otimes \omega^{k-1-p} \circ \text{dét} \rightarrow 0$$

où  $\lambda = \frac{\overline{(k-1)a_p}}{p} \in \overline{\mathbf{F}}_p^\times$ .

## 6. Quelques vérifications

Nous vérifions quelques cas de la conjecture 3.3.5.

**6.1. Cas particuliers.** — Rappelons (voir introduction) que la conjecture 3.3.5 avec le théorème 1.4 entraîne la conjecture très explicite suivante :

**Conjecture 6.1.1.** — (i) Supposons  $k \leq p + 1$ , alors  $\bar{V}_{k,a_p} = \text{ind}(\omega_2^{k-1})$ .

(ii) Supposons  $k = p + 2$ , alors :

– si  $\text{val}(a_p) < 1$ ,  $\bar{V}_{p+2,a_p} = \text{ind}(\omega_2^2)$

– si  $\text{val}(a_p) \geq 1$ ,  $\bar{V}_{p+2,a_p} = \begin{pmatrix} \omega\mu_\lambda & 0 \\ 0 & \omega\mu_{\lambda-1} \end{pmatrix}$  où  $\lambda^2 - \frac{a_p}{p}\lambda + 1 = 0$  dans  $\bar{\mathbf{F}}_p$ .

(iii) Supposons  $p + 3 \leq k \leq 2p$ , alors :

– si  $\text{val}(a_p) < 1$ ,  $\bar{V}_{k,a_p} = \text{ind}(\omega_2^{k-p})$

– si  $\text{val}(a_p) = 1$ ,  $\bar{V}_{k,a_p} = \begin{pmatrix} \omega^{k-2}\mu_\lambda & 0 \\ 0 & \omega\mu_{\lambda-1} \end{pmatrix}$  où  $\lambda = \frac{(k-1)a_p}{p} \in \bar{\mathbf{F}}_p^\times$

– si  $\text{val}(a_p) > 1$ ,  $\bar{V}_{k,a_p} = \text{ind}(\omega_2^{k-1})$ .

Examinons déjà les cas où  $\bar{V}_{k,a_p}$  est connu :

**Proposition 6.1.2.** — (i) Si  $k \leq p$ ,  $\bar{V}_{k,a_p} = \text{ind}(\omega_2^{k-1})$ .

(ii) Si  $a_p = 0$  et  $p + 1 \nmid k - 1$ ,  $\bar{V}_{k,0} = \text{ind}(\omega_2^{k-1})$ .

(iii) Si  $a_p = 0$  et  $p + 1 \mid k - 1$ ,  $\bar{V}_{k,0} = \begin{pmatrix} \mu_{\sqrt{-1}} & 0 \\ 0 & \mu_{-\sqrt{-1}} \end{pmatrix} \otimes \omega^{\frac{k-1}{p+1}}$ .

*Démonstration.* — Pour  $k \leq p$ , cela découle de [8], §5 (voir aussi [3], §4.1) et, pour  $a_p = 0$ , de la proposition 3.1.2, sachant que la réduction modulo  $p$  de  $\varepsilon_2$  restreinte à l'inertie est le caractère fondamental  $\omega_2$  et que  $\omega_2^{p+1}$  est la restriction de  $\omega$  à l'inertie.  $\square$

La conjecture 6.1.1 est donc vraie si  $k \leq p$  ou si  $a_p = 0$ .

**Corollaire 6.1.3.** — La conjecture 3.3.5 est vraie si  $k \leq p$  ou bien si  $k \leq 2p$  et  $a_p = 0$  (avec  $p \neq 2$  si  $k \neq 4$ ).

**Remarque 6.1.4.** — Il est clair que les (ii) et (iii) de la proposition 6.1.2 devraient être encore vrais pour  $a_p$  suffisamment proche de 0 ( $p$ -adiquement).

**6.2. Exemples numériques.** — Fixons des plongements  $\overline{\mathbf{Q}} \hookrightarrow \mathbf{C}$  et  $\overline{\mathbf{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbf{Q}_p}$ . Soit  $N \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$  et  $f$  une forme modulaire parabolique normalisée sur  $\Gamma_1(N)$  de poids  $k(f) \geq 2$  et de caractère  $\chi$ . On suppose  $(p, N) = 1$ ,  $f$  nouvelle forme vecteur propre des opérateurs de Hecke  $T_\ell$  pour  $\ell \nmid N$  et  $f$  non ordinaire en  $p$ . Cette dernière condition signifie  $\text{val}(a_p(f)) > 0$  où  $a_p(f)$  est tel que  $T_p(f) = a_p(f)f$  (et  $a_p(f)$  est vu dans  $\overline{\mathbf{Q}_p}$  via les plongements choisis).

Soit  $V_f : \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \rightarrow GL_2(\overline{\mathbf{Q}_p})$  la représentation  $p$ -adique associée à  $f$ . Rappelons le théorème classique (voir e.g. [3], §4.3 pour des références précises) :

**Théorème 6.2.1.** — *Avec les notations précédentes, on a :*

$$V_f|_{\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)} \simeq V_{k(f), a_p(f)\chi(p)^{1/2}, \chi^{1/2}}$$

où  $\chi^{1/2}$  est un caractère non ramifié de  $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$  de carré  $\chi|_{\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)}$ . En particulier, si  $f$  est une forme sur  $\Gamma_0(N)$ , on a  $V_f|_{\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)} \simeq V_{k(f), a_p(f)}$ .

Il est tentant de se restreindre au calcul des  $\overline{V}_{k, a_p}$  pour  $V_{k, a_p} \simeq V_{k(f), a_p(f)}$ . En dehors des exemples numériques ci-après, le seul cas nouveau, à ma connaissance, par rapport au §6.1 est :

**Théorème 6.2.2** ([7]). — *Avec les notations précédentes, supposons  $f$  de poids  $k = p + 1$ , alors  $\overline{V}_{p+1, a_p(f)\chi(p)^{1/2}} \simeq \text{ind}(\omega_2)$ . En particulier, les conjectures 6.1.1 et 3.3.5 sont vraies dans ce cas.*

On donne maintenant plusieurs exemples de valeurs de  $k$  et  $a_p$  provenant de formes propres de caractère trivial et de niveau premier à  $p$  pour lesquels on constate que la conjecture 6.1.1 (donc la conjecture 3.3.5) est vérifiée. Ces exemples sont extraits du gros fichier [9], gracieusement créé par D. Savitt et W. Stein pour l’auteur, et que le lecteur intéressé pourra consulter pour de plus amples détails sur les formes modulaires fournissant les valeurs  $(k, a_p)$  ci-dessous ou pour (beaucoup) d’autres exemples explicites. Disons deux mots sur la méthode. Les formes  $f$  précédentes (supposées de caractère trivial pour simplifier) sont toutes congrues modulo  $p$ , à une torsion “cyclotomique” près, à des formes propres (non nécessairement paraboliques) pour le même groupe de congruence mais de poids compris entre 2 et  $p + 1$ . Deux formes propres  $f$  et  $g$  sont dites congrues modulo  $p$  si, pour tout  $\ell \nmid pN$ ,  $\overline{a_\ell(f)} = \overline{a_\ell(g)}$  dans  $\overline{\mathbf{F}_p}$ . En particulier, par le théorème de Čebotarev et le théorème 6.2.1, cela entraîne  $\overline{V}_{k(f), a_p(f)} \simeq (\overline{V}_g|_{\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)})^{\text{ss}} \otimes \omega^i$  pour un certain  $i \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$  (avec des notations évidentes). Or, rappelons qu’on connaît  $(\overline{V}_g|_{\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)})^{\text{ss}}$  quand  $2 \leq k(g) \leq p + 1$  :

**Théorème 6.2.3** (Deligne, Serre, Fontaine, Edixhoven [7])

*Avec les notations précédentes,  $(\overline{V}_g|_{\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)})^{\text{ss}} \simeq \omega^{k(g)-1} \mu_{a_p(g)}^{-1} \oplus \mu_{a_p(g)}^{-1}$  si  $g$  est ordinaire en  $p$  et  $(\overline{V}_g|_{\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)})^{\text{ss}} \simeq \text{ind}(\omega_2^{k(g)-1})$  sinon.*

Partant de  $f$ , l'ordinateur trouve  $g$  et  $i$ , d'où  $\overline{V}_{k(f),a_p(f)}$  par le théorème 6.2.3.

### Exemples pour $p = 3$

- $p = 3$ ,  $k = 6$ ,  $a_p$  est une racine de  $x^2 - 3^2x - 64 \cdot 3 = 0$  (donc  $\text{val}(a_p) = 1/2 < 1$ ). Il existe  $f$  de poids 6 sur  $\Gamma_0(26)$  telle que  $a_3(f) = a_p$  et il existe  $g$  de poids 2 sur  $\Gamma_0(26)$  non ordinaire en 3 telle que :

$$\overline{V}_{k,a_p} = \overline{V}_{6,a_3(f)} \simeq (\overline{V}_g|_{\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_3/\mathbf{Q}_3)})^{\text{ss}} \simeq \text{ind}(\omega_2) \simeq \text{ind}(\omega_2^3).$$

- $p = 3$ ,  $k = 6$ ,  $a_p = 3(1 - a)$  où  $a$  est une racine de  $x^2 - x - 16 = 0$  (donc  $\text{val}(a_p) = 1$ ). Il existe  $f$  de poids 6 sur  $\Gamma_0(35)$  telle que  $a_3(f) = a_p$  et il existe  $g$  de poids 2 sur  $\Gamma_0(35)$  ordinaire en 3 telle que  $\overline{a_3(g)} = \overline{a} - 1$  et :

$$\overline{V}_{k,a_p} = \overline{V}_{6,a_3(f)} \simeq (\overline{V}_g|_{\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_3/\mathbf{Q}_3)})^{\text{ss}} \otimes \omega \simeq \begin{pmatrix} \omega^4 \mu_{a_3(g)} & 0 \\ 0 & \omega \mu_{a_3(g)}^{-1} \end{pmatrix}.$$

On a bien  $\overline{a_3(g)} = \overline{a} - 1 = (6 - 1) \frac{\overline{a_3(f)}}{3}$  dans  $\overline{\mathbf{F}}_3$ .

- $p = 3$ ,  $k = 6$ ,  $a_p = -2 \cdot 3^2$  (donc  $\text{val}(a_p) = 2 > 1$ ). Il existe  $f$  de poids 6 sur  $\Gamma_0(17)$  telle que  $a_3(f) = a_p$  et il existe  $g$  de poids 2 sur  $\Gamma_0(17)$  non ordinaire en 3 telle que :

$$\overline{V}_{k,a_p} = \overline{V}_{6,a_3(f)} \simeq (\overline{V}_g|_{\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_3/\mathbf{Q}_3)})^{\text{ss}} \otimes \omega \simeq \text{ind}(\omega_2^5).$$

### Exemples pour $p = 5$

- $p = 5$ ,  $k = 8$ ,  $a_p$  est une racine de  $x^2 - 72 \cdot 5 = 0$  (donc  $\text{val}(a_p) = 1/2 < 1$ ). Il existe  $f$  de poids 8 sur  $\Gamma_0(9)$  telle que  $a_5(f) = a_p$  et il existe  $g$  de poids 4 sur  $\Gamma_0(9)$  non ordinaire en 5 telle que :

$$\overline{V}_{k,a_p} = \overline{V}_{8,a_5(f)} \simeq (\overline{V}_g|_{\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_5/\mathbf{Q}_5)})^{\text{ss}} \otimes \omega^2 \simeq \text{ind}(\omega_2^3).$$

- $p = 5$ ,  $k = 10$ ,  $a_p = 36 \cdot 5^2 - 14 \cdot 5a$  où  $a$  est une racine de  $x^2 - 9x - 568 = 0$  (donc  $\text{val}(a_p) = 1$ ). Il existe  $f$  de poids 10 sur  $\Gamma_0(21)$  telle que  $a_5(f) = a_p$  et il existe  $g$  de poids 4 sur  $\Gamma_0(21)$  ordinaire en 5 telle que  $\overline{a_5(g)} = -\overline{a}$  et :

$$\overline{V}_{k,a_p} = \overline{V}_{10,a_5(f)} \simeq (\overline{V}_g|_{\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_5/\mathbf{Q}_5)})^{\text{ss}} \otimes \omega \simeq \begin{pmatrix} \omega^8 \mu_{a_5(g)} & 0 \\ 0 & \omega \mu_{a_5(g)}^{-1} \end{pmatrix}.$$

On a bien  $\overline{a_5(g)} = -\overline{a} = (10 - 1) \frac{\overline{a_5(f)}}{5}$  dans  $\overline{\mathbf{F}}_5$ .

- $p = 5$ ,  $k = 8$ ,  $a_p = -16 \cdot 5^2$  (donc  $\text{val}(a_p) = 2 > 1$ ). Il existe  $f$  de poids 8 sur  $\Gamma_0(14)$  telle que  $a_5(f) = a_p$  et il existe  $g$  de poids 2 sur  $\Gamma_0(14)$  non ordinaire en 5 telle que :

$$\overline{V}_{k,a_p} = \overline{V}_{8,a_5(f)} \simeq (\overline{V}_g|_{\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_5/\mathbf{Q}_5)})^{\text{ss}} \otimes \omega \simeq \text{ind}(\omega_2^7).$$

**Exemples pour  $p = 11$** 

- $p = 11$ ,  $k = 14$ ,  $a_p = 727757 \cdot 11 + 177a$  où  $a$  est une racine de  $x^2 - 238 \cdot 11x - 2461573 \cdot 11 = 0$  (donc  $\text{val}(a_p) = 1/2 < 1$ ). Il existe  $f$  de poids 14 sur  $\Gamma_0(8)$  telle que  $a_{11}(f) = a_p$  et il existe  $g$  de poids 4 sur  $\Gamma_0(8)$  non ordinaire en 11 telle que :

$$\bar{V}_{k,a_p} = \bar{V}_{14,a_{11}(f)} \simeq (\bar{V}_g|_{\text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}_{11}/\mathbf{Q}_{11})})^{\text{ss}} \simeq \text{ind}(\omega_2^3).$$

- $p = 11$ ,  $k = 20$ ,  $a_p = 574606812 \cdot 11$  (donc  $\text{val}(a_p) = 1$ ). Il existe  $f$  de poids 20 sur  $\Gamma_0(2)$  telle que  $a_{11}(f) = a_p$  et il existe  $g$  de poids 8 sur  $\Gamma_0(2)$  ordinaire en 11 telle que  $\overline{a_{11}(g)} = 3$  et :

$$\bar{V}_{k,a_p} = \bar{V}_{20,a_{11}(f)} \simeq (\bar{V}_g|_{\text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}_{11}/\mathbf{Q}_{11})})^{\text{ss}} \otimes \omega \simeq \begin{pmatrix} \omega^{18} \mu_{\overline{a_{11}(g)}} & 0 \\ 0 & \omega \mu_{\overline{a_{11}(g)}^{-1}} \end{pmatrix}.$$

On a bien  $\overline{a_{11}(g)} = 3 = 8 \cdot 10 = (20 - 1) \frac{\overline{a_{11}(f)}}{11}$  dans  $\bar{\mathbf{F}}_{11}$ .

- $p = 11$ ,  $k = 16$ ,  $a_p = -45660 \cdot 11^2$  (donc  $\text{val}(a_p) = 2 > 1$ ). Il existe  $f$  de poids 16 sur  $\Gamma_0(8)$  telle que  $a_{11}(f) = a_p$  et il existe  $g$  de poids 4 sur  $\Gamma_0(8)$  non ordinaire en 11 telle que :

$$\bar{V}_{k,a_p} = \bar{V}_{16,a_{11}(f)} \simeq (\bar{V}_g|_{\text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}_{11}/\mathbf{Q}_{11})})^{\text{ss}} \otimes \omega \simeq \text{ind}(\omega_2^{15}).$$

On termine avec trois exemples où  $p = 2$  et  $k = 4 = p + 2$  :

- $p = 2$ ,  $k = 4$ ,  $a_p$  est une racine de  $x^2 - 2x - 2 = 0$  (donc  $\text{val}(a_p) = 1/2 < 1$ ). Il existe  $f$  de poids 4 sur  $\Gamma_0(11)$  telle que  $a_2(f) = a_p$  et il existe  $g$  de poids 2 sur  $\Gamma_0(11)$  non ordinaire en 2 telle que :

$$\bar{V}_{k,a_p} = \bar{V}_{4,a_2(f)} \simeq (\bar{V}_g|_{\text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}_2/\mathbf{Q}_2)})^{\text{ss}} \simeq \text{ind}(\omega_2) = \text{ind}(\omega_2^2).$$

- $p = 2$ ,  $k = 4$ ,  $a_p = -2$  (donc  $\text{val}(a_p) = 1$ ). Il existe  $f$  de poids 4 sur  $\Gamma_0(23)$  telle que  $a_2(f) = a_p$  et il existe  $g$  de poids 2 sur  $\Gamma_0(23)$  ordinaire en 2 telle que  $\overline{a_2(g)} = \lambda$  où  $\lambda^2 + \lambda + 1 = \lambda^2 - \frac{\overline{a_2(f)}}{2} \lambda + 1 = 0$  dans  $\bar{\mathbf{F}}_2$  et :

$$\bar{V}_{k,a_p} = \bar{V}_{4,a_2(f)} \simeq (\bar{V}_g|_{\text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}_2/\mathbf{Q}_2)})^{\text{ss}} \simeq \begin{pmatrix} \mu_{\overline{a_2(g)}} & 0 \\ 0 & \mu_{\overline{a_2(g)}^{-1}} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \mu_\lambda & 0 \\ 0 & \mu_{\lambda^{-1}} \end{pmatrix}.$$

- $p = 2$ ,  $k = 4$ ,  $a_p = 2^2$  (donc  $\text{val}(a_p) = 2 > 1$ ). Il existe  $f$  de poids 4 sur  $\Gamma_0(21)$  telle que  $a_2(f) = a_p$  et il existe  $g$  de poids 2 sur  $\Gamma_0(21)$  ordinaire en 2 telle que  $\overline{a_2(g)} = 1$  et :

$$\bar{V}_{k,a_p} = \bar{V}_{4,a_2(f)} \simeq (\bar{V}_g|_{\text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}_2/\mathbf{Q}_2)})^{\text{ss}} \simeq \begin{pmatrix} \mu_{\overline{a_2(g)}} & 0 \\ 0 & \mu_{\overline{a_2(g)}^{-1}} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_1 \end{pmatrix}.$$

On a bien  $1^2 + 1 = 0$  dans  $\bar{\mathbf{F}}_2$  (!).

## Références

- [1] Barthel L., Livné R., *Irreducible modular representations of  $GL_2$  of a local field*, Duke Math. J. 75, 1994, 261-292.
- [2] Breuil C., *Sur quelques représentations modulaires et  $p$ -adiques de  $GL_2(\mathbf{Q}_p)$  I*, prépublication Université Paris-Sud, 2001.
- [3] Breuil C., Mézard A., *Multiplicités modulaires et représentations de  $GL_2(\mathbf{Z}_p)$  et de  $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$  en  $\ell = p$* , à paraître à Duke Math. J.
- [4] Colmez P., *Périodes des variétés abéliennes à multiplication complexe*, Annals of Maths 138, 1993, 625-683.
- [5] Colmez P., Fontaine J.-M., *Construction des représentations  $p$ -adiques semi-stables*, Inv. Math. 140, 2000, 1-43.
- [6] Deligne P., *Formes modulaires et représentations de  $GL_2$* , Modular functions of one variable II, Lecture Notes 349, 1973, 55-105.
- [7] Edixhoven B., *The weight in Serre's conjectures on modular forms*, Inv. Math. 109, 1992, 563-594.
- [8] Fontaine J.-M., Laffaille G., *Construction de représentations  $p$ -adiques*, Ann. Sci. E.N.S. 15, 1982, 547-608.
- [9] Savitt D., Stein W., *Some data about the local representation attached to a newform of medium weight*, disponible à l'adresse <http://modular.fas.harvard.edu/breuil/>.
- [10] Schneider P., Stuhler U., *The cohomology of  $p$ -adic symmetric spaces*, Inv. Math. 105, 1991, 47-122.
- [11] Schneider P., Teitelbaum J.,  *$U(\mathfrak{g})$ -finite locally analytic representations*, Representation Theory 5, 2001, 111-128.
- [12] Serre J.-P., Cours au Collège de France, 1987-1988.
- [13] Vignéras M.-F., *Représentations  $\ell$ -modulaires d'un groupe réductif  $p$ -adique avec  $\ell \neq p$* , Progress in Mathematics 137, Birkhäuser, 1996.