REPRÉSENTATIONS p-ADIQUES SEMI-STABLES ET TRANSVERSALITÉ DE GRIFFITHS

Christophe Breuil
Centre de Mathématiques
U.R.A. 169 du C.N.R.S.
Ecole Polytechnique
F-91128 PALAISEAU cedex
E-mail: breuil@orphee.polytechnique.fr

Sommaire

1 Introduction

Dans tout ce travail, K est un corps de caractéristique 0 complet pour une valuation discrète de corps résiduel k parfait de caractéristique $p > 0$, $\mathcal{O}_K$ est l'anneau des entiers de K, W est l'anneau des vecteurs de Witt $W(k)$, K_0 est le corps Frac$W$, e est l'indice de ramification $[K : K_0]$ et on fait le choix d'une uniformisante π sur K. On notera $\bar{K}$ une clôture algébrique de K, $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ l'anneau des entiers de $\bar{K}$, $\mathbf{C}_p$ le complété pour la topologie p-adique de $\bar{K}$ et G le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$.

Soit X_K un schéma propre et lisse sur K; si X_K admet un modèle X propre et lisse sur $\mathcal{O}_K$, de fibre spéciale Y sur k, Fontaine a conjecturé l'existence d'un isomorphisme canonique (conjecture C_{cris} dans [Fo4]):

$$B_{cris} \otimes_{\mathbf{Q}_p} H^i_{et}(X_{\bar{K}}, \mathbf{Q}_p) \xrightarrow{\sim} B_{cris} \otimes_{K_0} H^i_{cris}(Y)$$

compatible à toutes les structures (action de Galois, Frobenius, filtrations après tensorisation par K). Grâce à une interprétation cristalline de l'anneau A_{cris}, à savoir $\varprojlim H^0_{cris}(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}, W_n)$, Fontaine et Messing ont montré C_{cris} dans [FM] pour $K = K_0$ et $dimX_K \leq p-1$. La conjecture a ensuite été démontrée en toute généralité, mais par une méthode différente, par Faltings dans [Fa1]. Quelques années plus tard, après l'introduction de l'anneau B_{st} par Fontaine ([Fo2]) et de la cohomologie cristalline à pôles logarithmiques par Hyodo et Kato ([HK]), l'analogue de C_{cris} au cas où X est semi-stable sur $\mathcal{O}_K$ a pu être énoncé (C_{st}), Kato l'a d'abord démontré pour $dimX_K < (p-1)/2$ ([Ka]) puis Tsuji a étendu sa preuve au cas général ([Ts]). Au cours de la démonstration, Kato est amené à considérer l'analogue logarithmique de la construction de B_{cris}, et la bonne base logarithmique (qui remplace la base $W_n(k)$ du cas classique) s'avère être, pour $K = K_0$ par exemple, non pas $(\mathbf{N} \to W_n,\ 1 \mapsto p)$ ou $(\mathbf{N} \to W_n,\ 1 \mapsto 0)$, mais la P.D. log-algèbre polynomiale $(\mathbf{N} \to W_n < u >,\ 1 \mapsto u)$. On obtient alors ([Ka],3.3) un anneau raisonnable, noté ici $\widehat{B_{st}}$, plus gros que B_{st}, qui dépend de même de π, muni d'un opérateur de monodromie, d'un Frobenius, d'une action de G et tel que B_{st} (défini avec le même π) s'identifie aux éléments de $\widehat{B_{st}}$ annulés par une puissance de la monodromie (lemme (7.1) ou [Ka],3.6). On peut par ailleurs définir sur $\widehat{B_{st}}$ une filtration naturelle (voir section 2) qui vérifie le critère de transversalité de Griffiths avec la monodromie.

Une question naturelle se pose alors: l'action de G sur $\widehat{B_{st}}$ permet de définir de la même façon qu'avec B_{cris} ou B_{st} une classe de représentations p-adiques de G qu'on appelle représentations $\widehat{B_{st}}$-admissibles (définition (3.2)), quelle est leur relation avec les représentations p-adiques de G semi-stables ? Dans ce travail, nous montrons qu'il s'agit des mêmes représentations (théorème (3.3)). Soient $\widehat{D_{st}}(V) = (\widehat{B_{st}} \otimes_{\mathbf{Q_p}} V)^G$ et $D_{st}(V) = (B_{st} \otimes_{\mathbf{Q_p}} V)^G$; on sait que la monodromie induite sur $K \otimes_{K_0} D_{st}(V)$ ne vérifie pas, en général, le critère de transversalité de Griffiths par rapport à la filtration induite. L'avantage de $\widehat{B_{st}}$ est que la monodromie induite sur $\widehat{D_{st}}(V)$ vérifie, elle, ce critère de transversalité par rapport à la filtration induite. Soit $S = \widehat{B_{st}}^G$, le principe de la démonstration de (3.3) consiste alors à utiliser une équivalence de catégories entre les (ϕ, N)-modules filtrés de Fontaine (comme $D_{st}(V)$) et certains S-modules filtrés munis d'un opérateur de Frobenius et d'un opérateur de monodromie satisfaisant le critère de transversalité de Griffiths (comme $\widehat{D_{st}}(V)$) pour obtenir un isomorphisme compatible à toutes les structures $\widehat{D_{st}}(V) \simeq \widehat{B_{st}} \otimes_{K_0} D_{st}(V)$ (en définissant "correctement" la filtration sur $\widehat{B_{st}} \otimes_{K_0} D_{st}(V)$).

Le plan du travail est le suivant: en 2, on définit les anneaux $\widehat{B_{st}^+}$ et $\widehat{B_{st}}$. En 3, on définit les représentations $\widehat{B_{st}}$-admissibles et on énonce le théorème principal. En 4, on calcule l'algèbre $\widehat{B_{st}^+}^G$. En 5, on démontre des propriétés de l'algèbre $\widehat{B_{st}}^G$ qu'on formalise sous le terme de "ϕ-algèbre admissible". En 6, on montre une équivalence de catégories, cruciale pour la suite, entre certains modules sur une ϕ-algèbre admissible et certains K_0-espaces vectoriels filtrés. Il s'agit ici d'un résultat d'algèbre élémentaire uniquement (il n'y a pas de géométrie), mais qui peut vraisemblablement se déduire des travaux récents d'Ogus ([Og]) sur la cohomologie cristalline à coefficients (qui ont une portée bien plus profonde). Tsuji m'a signalé qu'il avait obtenu, indépendamment, une partie des résultats de 6 (non publié). En 7, on montre deux lemmes utiles et en 8, on achève la démonstration du théorème en utilisant, entre autre, les résultats de 6. Dans un appendice, on montre que certains modules filtrés sur une ϕ-algèbre admissible admettent une base adaptée à leur filtration.

Ce travail n'aurait jamais vu le jour sans le soutien et les conseils de J.-M. Fontaine. Qu'il trouve ici l'expression de ma gratitude. Je remercie également M. Gros, L. Illusie et A. Mokrane pour d'utiles discussions et remarques.

2 Les algèbres $\widehat{B_{st}^+}$ et $\widehat{B_{st}}$

On renvoie à [Fo2] ou [Il] pour la définition des anneaux A_{cris}, B_{cris}^+, B_{cris}, B_{dR}^+ et B_{dR} ainsi que pour leurs propriétés et à [HK] pour la définition de la cohomologie log-cristalline. Dans ([Ka],3.2) Kato note R_n l'enveloppe aux puissances divisées de l'anneau des polynômes à une indéterminée $W_n[u]$ par rapport au noyau de l'immersion fermée $W_n[u] \to \mathcal{O}_K/p^n\mathcal{O}_K$, $u \mapsto \pi$, compatible avec les puissances divisées canoniques sur $pW_n[u]$. Il munit R_n de la log-structure associée à $(\mathbf{N} \to R_n,\ 1 \mapsto u)$ (Kato appelle t l'indéterminée notée ici u. Nous utilisons u car t désigne traditionnellement un générateur de $\mathbf{Z}_p(1) \subset A_{cris}$). On a alors un morphisme de log-structures induit par le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\bar{K}}\backslash\{0\} & \to & \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}} \\ {\scriptstyle\alpha}\uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{N} & \to & R_n \end{array}$$

où $\alpha(1) = \pi$ et où la flèche de droite est la composée $R_n \to \mathcal{O}_K/p^n\mathcal{O}_K \to \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$. On notera $(Spec\ \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}, \mathcal{O}_{\bar{K}}\backslash\{0\})$ et $(Spec\ R_n, \mathcal{L}(u))$ les deux log-schémas et $H^0_{cris}((Spec\ \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}, \mathcal{O}_{\bar{K}}\backslash\{0\})/(Spec\ R_n, \mathcal{L}(u)))$ la cohomologie log-cristalline (en degré 0) de $(Spec\ \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}, \mathcal{O}_{\bar{K}}\backslash\{0\})$ sur la base $(Spec\ R_n, \mathcal{L}(u))$. On a une surjection canonique d'algèbres:

$$\begin{array}{ccc} W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}) & \xrightarrow{\theta_n} & \mathcal{O}_{\bar{K}}/p^n\mathcal{O}_{\bar{K}} \\ (a_0, ..., a_{n-1}) & \mapsto & \widehat{a_0}^{p^n} + p\widehat{a_1}^{p^{n-1}} + ... + p^{n-1}\widehat{a_{n-1}}^p \end{array}$$

où les $\widehat{a_i}$ désignent des relevés quelconques des a_i dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$. Soient $W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}})^{DP}$ l'enveloppe aux puissances divisées de $W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}})$ par rapport au noyau de θ_n et $W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}})^{DP} < X >$ l'algèbre polynomiale aux puissances divisées en X; Kato montre ([Ka],3.3) qu'à chaque racine $p^{n^{ième}}$ ξ_n de π dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ est associé un isomorphisme canonique de R_n-algèbres:

$$H^0_{cris}((Spec\ \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}, \mathcal{O}_{\bar{K}}\backslash\{0\})/(Spec\ R_n, \mathcal{L}(u))) \xrightarrow{\sim} W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}})^{DP} < X >$$

où la structure de R_n-algèbre du membre de droite est donnée par $u \mapsto [\bar{\xi_n}](1 + X)^{-1}$ et $(k_0, ..., k_{n-1}) \mapsto (k_0^{p^{-n}}, ..., k_{n-1}^{p^{-n}})$ ($[\bar{\xi_n}]$ désigne le représentant de Teichmüller de l'image de ξ_n dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$). On vérifie facilement à partir de ([Ka],3.9) qu'un autre choix d'une racine $p^{n^{ième}}$ de π, ξ'_n, donne un isomorphisme de $W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}})^{DP}$-algèbres:

$$\begin{array}{ccc} W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}})^{DP} < X > & \to & W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}})^{DP} < X' > \\ X & \mapsto & [\bar{\epsilon_n}]^{-1}(1 + X') - 1 \end{array}$$

où $\xi'_n = \epsilon_n\xi_n$ dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$.

LEMME 2.1 *R_n est l'enveloppe aux puissances divisées de $W_n[u]$ par rapport à l'idéal engendré par u^e.*

Preuve. — Soit $P(u) = \sum_{i=0}^{d} w_i u^i \in W_n[u]$ tel que $P(\bar{\pi}) = 0$ dans $\mathcal{O}_K/p^n\mathcal{O}_K$, alors $\bar{P}(\bar{\pi}) = 0$ dans $\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$ où $\bar{P} \in k[u]$, i.e. $\sum_{i=0}^{e-1} \bar{w_i}\bar{\pi}^i = 0$, i.e. $\bar{w_i} = 0$ et il existe un polynôme R de degré $e-1$ et un polynôme Q dans $W_n[u]$ tels que $P = u^eQ + pR$. A cause de la compatibilité avec les puissances divisées canoniques sur $pW_n[u]$, il suffit donc de prendre les puissances divisées par rapport à $u^e.W_n[u]$. □

Le morphisme d'anneaux $W_{n+1}[u] \to W_n[u]$, $(k_0,...,k_n)u^i \mapsto (k_0,...,k_{n-1})u^i$ induit un morphisme $R_{n+1} \to R_n$ d'où on déduit un système projectif:

$$\Big(H^0_{cris}((Spec\ \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}, \mathcal{O}_{\bar{K}}\backslash\{0\})/(Spec\ R_n, \mathcal{L}(u)))\Big)_{n\in\mathbf{N}}$$

et on pose $\widehat{A_{st}} = \varprojlim H^0_{cris}((Spec\ \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}, \mathcal{O}_{\bar{K}}\backslash\{0\})/(Spec\ R_n, \mathcal{L}(u)))$, $\widehat{B^+_{st}} = \widehat{A_{st}}[1/p]$ et $\widehat{B_{st}} = \widehat{B^+_{st}}[1/t]$ où t est un générateur quelconque de $\mathbf{Z}_p(1) \hookrightarrow A_{cris}$. L'algèbre $\widehat{A_{st}}$ est naturellement munie d'une action de Galois, d'un Frobenius ϕ et d'un opérateur de monodromie N ([Ka],3.3). D'autre part, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ le log-schéma:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\bar{K}}\backslash\{0\} & \to & \mathcal{O}_{\bar{K}}/p^n\mathcal{O}_{\bar{K}} \\ {\scriptstyle\alpha}\uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{N} & \to & R_n \end{array}$$

où $\alpha(1) = \pi$ est un épaississement particulier ([HK],2.15) du log-schéma $(Spec\ \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}, \mathcal{O}_{\bar{K}}\backslash\{0\})$ au dessus de $(Spec\ R_n, \mathcal{L}(u))$, on a donc un morphisme canonique:

$$s_n:\ H^0_{cris}((Spec\ \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}, \mathcal{O}_{\bar{K}}\backslash\{0\})/(Spec\ R_n, \mathcal{L}(u))) \to \mathcal{O}_{\bar{K}}/p^n\mathcal{O}_{\bar{K}}$$

dont le noyau I_n est un idéal à puissances divisées. On munit $\widehat{A_{st}}$ de la filtration $Fil^i(\widehat{A_{st}}) = \varprojlim I_n^{[i]}$, $i \in \mathbf{N}$ où $I_n^{[i]}$ désigne la $i^{i\grave{e}me}$ puissance divisée de I_n.
Si l'on choisit un système compatible $(\xi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de racines $p^{n^{i\grave{e}mes}}$ de π, on a alors des diagrammes commutatifs:

$$\begin{array}{ccc} H^0_{cris}((Spec\ \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}, \mathcal{O}_{\bar{K}}\backslash\{0\})/(Spec\ R_{n+1}, \mathcal{L}(u))) & \tilde{\to} & W_{n+1}(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}})^{DP}<X> \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^0_{cris}((Spec\ \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}, \mathcal{O}_{\bar{K}}\backslash\{0\})/(Spec\ R_n, \mathcal{L}(u))) & \tilde{\to} & W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}})^{DP}<X> \end{array}$$

où la flèche verticale de droite est donnée par

$$\gamma_i((a_0, a_1, ..., a_n)).\gamma_j(X) \mapsto \gamma_i((a_0^p, a_1^p, ..., a_{n-1}^p)).\gamma_j(X)$$

On en déduit un isomorphisme canonique:

$$\widehat{A_{st}} \simeq \varprojlim W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}})^{DP} < X > \simeq A_{cris}\widehat{<X>}$$

où $A_{cris}\widehat{<X>}$ désigne le complété p-adique de $A_{cris} < X >$ (la topologie de la limite projective sur $A_{cris} \simeq \varprojlim W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}})^{DP}$ s'identifie à la topologie p-adique). Nous allons expliciter les structures de $\widehat{A_{st}}$ sur $A_{cris}\widehat{<X>}$.
Pour tout $g \in G$, on a $g(\xi_n) = \epsilon_n(g).\xi_n$ où $\epsilon_n(g)$ est une racine $p^{n^{i\grave{e}me}}$ de l'unité dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$; on note $[\bar{\xi}_n]$ (resp. $[\bar{\epsilon}_n(g)]$) le représentant de Teichmüller de la réduction modulo p de ξ_n (resp. $\epsilon_n(g)$), et $[\xi_\pi]$ (resp. $[\epsilon(g)]$) l'élément correspondant de $\varprojlim W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}})^{DP} = A_{cris}$. Les structures précédentes se traduisent ainsi:

i) on a l'action de Galois classique sur A_{cris} et pour tout g dans G, on a $g(X) = [\epsilon(g)]X + [\epsilon(g)] - 1$,
ii) on a le Frobenius classique sur A_{cris} et $\phi(X) = (1+X)^p - 1$,
iii) l'opérateur de monodromie N est A_{cris}-linéaire et $N(X) = 1 + X$,
iv) le morphisme $s_n:\ W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}})^{DP}\!<\!X\!>\to \mathcal{O}_{\bar{K}}/p^n\mathcal{O}_{\bar{K}}$ est tel que $s_n(\gamma_j(X)) = 0$ et $s_n = \theta_n$ sur $W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}})^{DP}$; on déduit alors facilement $Fil^0(\widehat{A_{cris}\!<\!X\!>}) = \widehat{A_{cris}\!<\!X\!>}$ et, si $i \geq 1$:

$$Fil^i(\widehat{A_{cris}\!<\!X\!>}) = \Big(\sum_{k=0}^{i-1} Fil^{i-k}(B^+_{cris})X^k + X^i B^+_{cris}[[X]]\Big)\bigcap \widehat{A_{cris}\!<\!X\!>}$$

Remarquons que N est tel que $N(Fil^i) \subset Fil^{i-1}$ (transversalité de Griffiths).

On fait le choix désormais d'un élément $[\xi_\pi]$ de A_{cris} comme précédemment et on identifie par ce choix $\widehat{A_{st}}$ avec $\widehat{A_{cris}\!<\!X\!>}$. Toutes les opérations s'étendent de manière naturelle à $\widehat{B^+_{st}}$ et $\widehat{B_{st}}$ et on pose $Fil^i(\widehat{B^+_{st}}) = K_0 \otimes_W Fil^i(\widehat{A_{st}})$, $i \in \mathbf{N}$ et $Fil^i(\widehat{B_{st}}) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} t^{i-k} Fil^k(\widehat{B^+_{st}})$, $i \in \mathbf{Z}$. Soit $\widehat{B^+_{st,K}} = K \otimes_{K_0} \widehat{B^+_{st}}$ (resp. $\widehat{B_{st,K}},\ B^+_{cris,K},\ B_{cris,K}$), on munit également $\widehat{B^+_{st,K}}$ d'une filtration positive par

$$Fil^i(\widehat{B^+_{st,K}}) = \Big(\sum_{k=0}^{i-1} Fil^{i-k}(K\otimes_{K_0} B^+_{cris})X^k + X^i.K\otimes_{K_0} B^+_{cris}[[X]]\Big)\bigcap \widehat{B^+_{st,K}}$$

où la filtration sur $B^+_{cris,K} = K \otimes_{K_0} B^+_{cris}$ est induite par celle de B_{dR} (voir [Fo2],4.1.3); on déduit de même que précédemment une filtration sur $\widehat{B_{st,K}}$. Ces filtrations induisent les filtrations initiales sur $\widehat{B^+_{st}}$ (resp. $\widehat{B_{st}}$). Enfin, on pose $U = [\xi_\pi](1+X)^{-1} \in \widehat{A_{st}}$. C'est un élément invariant par l'action de Galois: $U \in \widehat{A_{st}}^G$.

3 Représentations semi-stables et $\widehat{B_{st}}$-admissibles

On renvoie à ([Fo2],4.2) ou à ([Il],1.2.3) pour la définition de l'anneau B_{st} comme sous-algèbre de B_{dR} (correspondant au choix de π). Soit V un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une action linéaire continue de G. Rappelons d'abord la définition de V semi-stable:

Définition 3.1 *On dit que V est semi-stable si $dim_{K_0}(B_{st}\otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^G = dim_{\mathbf{Q}_p} V$.*

Si M et M' sont deux modules filtrés sur un anneau A commutatif, on rappelle que la filtration produit tensoriel sur $M \otimes_A M'$ est la filtration

$$Fil^n(M\otimes_A M') = Image\Big(\sum_{i\in\mathbf{Z}} Fil^i(M)\otimes_A Fil^{n-i}(M')\Big)$$

Notons $B_{st,K} = K \otimes_{K_0} B_{st}$ muni de la filtration induite par B_{dR} ([Fo2],4.2.4). Fontaine montre ([Fo1],3.2.1 ou [Fo3],1.4.2) que si V est semi-stable alors on a un isomorphisme $B_{st,K} \otimes_K (B_{st,K} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^G \xrightarrow{\sim} B_{st,K} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ strictement compatible aux filtrations (i.e. pour tout $i \in \mathbf{Z}$, l'image de $Fil^i(B_{st,K} \otimes_K (B_{st,K} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^G)$ est $Fil^i B_{st,K} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$, la filtration à gauche étant la filtration produit tensoriel).

DÉFINITION 3.2 *On dit que V est $\widehat{B_{st}}$-admissible si V vérifie les deux conditions:*
- $(\widehat{B_{st}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^G$ est un $\widehat{B_{st}}^G$-module libre,
- la flèche $\widehat{B_{st}} \otimes_{\widehat{B_{st}}^G} (\widehat{B_{st}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^G \to \widehat{B_{st}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ est un isomorphisme de modules galoisiens strictement compatible aux filtrations produit tensoriel.

Remarque 1: On verra (lemme (8.1.1)) qu'il est équivalent de demander un isomorphisme $\widehat{B_{st,K}} \otimes_{\widehat{B_{st,K}}^G} (\widehat{B_{st,K}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^G \to \widehat{B_{st,K}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ strictement compatible aux filtrations. Autrement dit, avec $\widehat{B_{st}}$, il est inutile de tensoriser par K.

Remarque 2: J'ignore si la stricte compatibilité aux filtrations est automatique, comme dans le cas semi-stable. Si on essaye d'adapter la preuve de ([Fo1],3.2.1), on doit montrer que la flèche canonique:

$$Gr^i\Big(\widehat{B_{st,K}} \otimes_{\widehat{B_{st,K}}^G} (\widehat{B_{st,K}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^G\Big) \to Gr^i(\widehat{B_{st,K}}) \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$$

est injective (on se ramène sur K par la remarque précédente). On est alors conduit à étudier des K-espaces vectoriels du type $\Big(Fil^i(\widehat{B^+_{st,K}})/Fil^{i+1}(\widehat{B^+_{st,K}}) \otimes_{\mathbf{Q}_p} V\Big)^G$ et le fait que, pour $g \in G$, $g(X)$ n'est pas "proportionnel" à X (puisque $g(X) = [\epsilon(g)]X + [\epsilon(g)] - 1$) rend les calculs vite inextricables.

On déduit immédiatement que $(\widehat{B_{st}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^G$ est un $\widehat{B_{st}}^G$-module libre de rang $\dim_{\mathbf{Q}_p} V$; on se propose de démontrer le théorème:

THÉORÈME 3.3 *Avec les notations précédentes, V est $\widehat{B_{st}}$-admissible si et seulement si V est semi-stable.*

Pour démontrer ce théorème, on a besoin de comprendre les propriétés des algèbres $\widehat{B^+_{st}}^G$ et $\widehat{B_{st}}^G$: c'est l'objet des deux sections suivantes.

4 L'algèbre $\widehat{B^+_{st}}^G$

On introduit une certaine algèbre S^0_{min} et on montre qu'elle coïncide avec $\widehat{B^+_{st}}^G$.

4.1 L'algèbre S^0_{min}

Soit $S^0_{min} = \varprojlim_n R_n$: d'après la définition des R_n, on a que S^0_{min} s'identifie au séparé complété pour la topologie p-adique de l'enveloppe aux puissances divisées de $W[u]$ relativement à l'idéal noyau de $W[u] \to \mathcal{O}_K,\ u \mapsto \pi$ (compatible avec les puissances divisées sur $pW[u]$). Par (2.1), on a aussi la description suivante de S^0_{min}: si $i \in \mathbf{N}$, notons $q(i)$ le quotient dans la division euclidienne de i par e, alors S^0_{min} est la sous-W-algèbre de $K_0[[u]]$ définie par $\{\sum_{i=0}^{\infty} w_i \frac{u^i}{q(i)!},\ w_i \in W, \lim_{i\to\infty} w_i = 0\}$. On définit une filtration $Fil^{\cdot}$ sur S^0_{min} en disant que $Fil^i(S^0_{min})$ est l'adhérence (pour la topologie p-adique) de la $i^{ième}$ puissance divisée de $Ker(S^0_{min} \to \mathcal{O}_K,\ u \mapsto \pi)$, on définit aussi un Frobenius semi-linéaire ϕ par $\phi(\gamma_i(u)) = \gamma_i(u^p)$ et un opérateur de monodromie W-linéaire N par $N(\gamma_i(u)) = -i\gamma_i(u)$ (ces opérations laissent bien stable S^0_{min} et on a $N\phi = p\phi N$). On note également $S_{min} = K_0 \otimes_W S^0_{min}$ auquel on étend ϕ par semi-linéarité et N par linéarité, et $S_{min,K} = K \otimes_{K_0} S_{min}$ auquel on étend N en N_K par $K-$linéarité. Soit S_π la K-algèbre des séries formelles en $u-\pi$: $S_\pi = K[[u-\pi]]$. Si $\sum_{i=0}^{\infty} k_i u^i \in S_{min}$, en écrivant que π est racine d'un polynôme d'Eisenstein sur K_0, on a facilement $\lim_{i\to\infty} k_i\pi^i = 0$, ce qui permet de faire le changement de variable $u \leftrightarrow u-\pi$ et donne une injection $S_{min,K} \hookrightarrow S_\pi$. On définit sur S_π une filtration positive par $Fil^i(S_\pi) = (u-\pi)^i.S_\pi$ et un opérateur de monodromie N_K par $N_K(u-\pi) = -\pi - (u-\pi)$.

Lemme 4.1.1 *La filtration définie sur S^0_{min} coïncide avec la filtration induite par S_π.*

Preuve. — Soit $x \in S^0_{min}$ non nul, $x = \sum_{r=0}^{e-1}\sum_{i=0}^{\infty} w_{i,r}\frac{u^{ei+r}}{i!}$ avec $w_{i,r} \in W$ et $\lim_{i\to\infty} w_{i,r} = 0$. Soit $P(u) = u^e - p.H(u)$ le polynôme minimal de π sur W (où $H(u)$ est un polynôme de degré plus petit que $e-1$); un calcul facile permet d'écrire $x = \sum_{r=0}^{e-1}\sum_{i=0}^{\infty} p^{n_{i,r}} S_{i,r}(u).\frac{P(u)^i}{i!}$, où $n_{i,r} \in \mathbf{N}$, $\lim_{i\to\infty} n_{i,r} = \infty$ et où $S_{i,r}(u)$ est dans le séparé-complété pour la topologie p-adique de l'anneau des polynômes $W[u]$, noté $\widehat{W[u]}$. En utilisant que tout élément $S(u) \in \widehat{W[u]}$ s'écrit de façon unique $S(u) = \sum_{i=0}^{\infty} w_i R_i(u).P(u)^i$ avec $w_i \in W$, $R_i(u) \in W[u]\backslash pW[u]$ de coefficient dominant une puissance (éventuellement nulle) de p, avec $deg(R_i(u)) \leq e-1$ et $\lim_{i\to\infty} w_i = 0$ (car $P(u)$ est unitaire), on déduit aisément que x s'écrit de façon unique sous la forme $x = \sum_{i\in\mathbf{N}} w'_i T_i(u).\gamma_i(P(u))$ où $T_i(u) \in W[u]\backslash pW[u]$, de coefficient dominant une puissance de p, de degré plus petit que $e-1$ et avec $\lim_{i\to\infty} w'_i = 0$

dans W. Soit i_{min} le plus petit i tel que w_i est non nul, il est alors clair que $x \in Fil^{i_{min}}(S^0_{min})$, $x \notin Fil^{i_{min}+1}(S^0_{min})$ et aussi $x \in Fil^{i_{min}}(S_\pi)$, $x \notin Fil^{i_{min}+1}(S_\pi)$. $\square$

On munit S_{min} et $S_{min,K}$ de la filtration induite par S_π et on vérifie facilement qu'on a $N_K(Fil^i(S_{min,K})) \subset Fil^{i-1}(S_{min,K})$.

D'autre part $\widehat{A_{st}}$ est muni d'une structure de $\varprojlim_n R_n$-algèbre (voir section 2) par $u \mapsto U = [\xi_\pi](1+X)^{-1}$. Comme U est dans $\widehat{A_{st}}^G$, on a ainsi un morphisme de W-algèbres $\mathcal{F}$: $S^0_{min} \to \widehat{A_{st}}^G$, $\mathcal{F}(\sum_{i=0}^{\infty} w_i \frac{u^i}{q(i)!}) = \sum_{i=0}^{\infty} w_i \frac{U^i}{q(i)!}$.

Proposition 4.1.2 *Le morphisme $\mathcal{F}$ est un isomorphisme de modules filtrés compatible aux opérations de Frobenius et de monodromie.*

La preuve, un peu longue, est l'objet de la section suivante.

Corollaire 4.1.3 *On a $S_{min} \simeq \widehat{B^+_{st}}^G$ et $S_{min,K} \simeq \widehat{B^+_{st,K}}^G$.*

4.2 Calcul de $\widehat{A_{st}}^G$

On prouve ici la proposition (4.1.2). On renvoie à ([Fo2],1.2.2) et ([Fo2],2.3.3) pour la définition et les propriétés des anneaux R et $W(R)$ et la description de A_{cris} correspondante ($A_{cris} \simeq W(R)^{DP}$). Rappelons simplement que R est la limite projective du diagramme:

$$\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}} \leftarrow \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}} \leftarrow ... \leftarrow \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}} \leftarrow ...$$

où les applications de transition sont l'élévation à la puissance p, et que $W(R)$ est l'anneau des vecteurs de Witt correspondant.

On vérifie facilement d'abord que $N(U) = -U$, $\phi(U) = U^p$ et que $\mathcal{F}$ commute à N et ϕ. Montrons la compatibilité aux filtrations: on peut voir $\widehat{B^+_{st,K}}$ comme inclus dans $B^+_{dR}[[X]]$ (par l'injection $B^+_{cris,K} \hookrightarrow B^+_{dR}$) où la filtration sur ce dernier est définie par

$$Fil^i(B^+_{dR}[[X]]) = \sum_{k=0}^{i-1} Fil^{i-k}(B^+_{dR})X^k + X^i.B^+_{dR}[[X]]$$

on a d'autre part une flèche $\tilde{\mathcal{F}} : S_\pi \to B^+_{dR}[[X]]$, $u - \pi \mapsto [\xi_\pi](1+X)^{-1} - \pi$, qui donne un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} S^0_{min} & \hookrightarrow & S_\pi \\ {\scriptstyle \mathcal{F}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\mathcal{F}}} \\ \widehat{A_{st}} & \hookrightarrow & B^+_{dR}[[X]] \end{array}$$

et il suffit donc de montrer la compatibilité à droite par (4.1.1). Mais soit $V \in Fil^i(S_\pi)$ i.e. $V = (u-\pi)^i.T$, $T \in S_\pi$; on a $\tilde{\mathcal{F}}(V) = \tilde{\mathcal{F}}((u-\pi))^i.\tilde{\mathcal{F}}(T)$ et il est clair que $\tilde{\mathcal{F}}((u-\pi))^i \in Fil^i(B^+_{dR}[[X]])$.

Nous allons définir une flèche additive $\mathcal{G} : \widehat{A_{st}}^G \to S^0_{min}$. Pour tout $i \in \mathbf{N}$, on a $Fil^i(B^+_{cris,K})/Fil^{i+1}(B^+_{cris,K}) \simeq Fil^i(B^{dR})/Fil^{i+1}(B_{dR}) \simeq \mathbf{C}_p\bar{t}^i$ où $\bar{t}^i$ désigne l'image de $t^i \in Fil^i(B^+_{cris,K})$ ([Fo2],2.3.4); on a donc:

$$Fil^i(\widehat{B^+_{st,K}})/Fil^{i+1}(\widehat{B^+_{st,K}}) \simeq \mathbf{C}_p\bar{t}^i + \mathbf{C}_p\bar{t}^{i-1}.\bar{X} + ... + \mathbf{C}_p.\bar{X}^i$$

Soit $x \in Fil^i(\widehat{B^+_{st,K}})$ tel que son image $\bar{x}$ soit dans $\Big(Fil^i(\widehat{B^+_{st,K}})/Fil^{i+1}(\widehat{B^+_{st,K}})\Big)^G$, on a des $x_k \in Fil^k(B^+_{cris,K})$, $k = 0, ..., i$ tels que $\bar{x} = \bar{x_i} + \bar{x_{i-1}}\bar{X} + ... + \bar{x_0}\bar{X}^i$ et un calcul facile donne la formule pour tout $g \in G$:

$$g(\bar{x}) = \sum_{l=0}^{i}\Big(\sum_{k=l}^{i}\frac{k!}{(k-l)!l!}g(\overline{x_{i-k}})(\overline{[\epsilon(g)]-1})^{k-l}\Big).\bar{X}^l = \bar{x}$$

On en déduit les relations dans $Fil^{i-l}(B^+_{cris,K})/Fil^{i-l+1}(B^+_{cris,K})$:

$$\sum_{k=l}^{i}\frac{k!}{(k-l)!l!}g(\overline{x_{i-k}})(\overline{[\epsilon(g)]-1})^{k-l} = \overline{x_{i-l}}$$

pour $l = 0, ..., i$. Pour $l = i$, cela donne $g(\bar{x_0}) = \bar{x_0}$ dans $\mathbf{C}_p$ et comme $\mathbf{C}_p^G = K$ ([Ta],3.3), on peut prendre x_0 dans K. Pour $l = i-1$, on obtient $g(\bar{x_1}) - \bar{x_1} = i\bar{x_0}(\overline{[\epsilon(g)]-1})$ dans $\mathbf{C}_p\bar{t}$; soit $\bar{y}$ un autre élément de $Fil^1(B^+_{cris,K})/Fil^2(B^+_{cris,K})$ tel que pour tout $g \in G$, $g(\bar{y}) - \bar{y} = i\bar{x_0}(\overline{[\epsilon(g)]-1})$, alors $g(\bar{x_1}-\bar{y}) = \bar{x_1}-\bar{y}$ i.e. $\bar{x_1}-\bar{y} \in (\mathbf{C}_p\bar{t})^G = 0$ ([Fo1],2.2.3) et $\bar{x_1}$, s'il existe, est unique. Une récurrence élémentaire montre que si la solution existe, elle est déterminée par la donnée de $x_0 \in K$ seulement, i.e. qu'on a $\dim_K\Big(Fil^i(\widehat{B^+_{st,K}})/Fil^{i+1}(\widehat{B^+_{st,K}})\Big)^G \leq 1$. Comme

$$Fil^i(\widehat{B^+_{st}})/Fil^{i+1}(\widehat{B^+_{st}}) = Fil^i(\widehat{B^+_{st,K}})/Fil^{i+1}(\widehat{B^+_{st,K}})$$

(car c'est déjà vrai pour B^+_{cris}), on en déduit $\dim_{K_0}\Big(Fil^i(\widehat{B^+_{st}})/Fil^{i+1}(\widehat{B^+_{st}})\Big)^G \leq e$.

Lemme 4.2.1 *Les vecteurs* 1, $\bar{U}$, ..., $\bar{U}^{ei-1}$ *sont* K_0*-linéairement indépendants dans* $\widehat{B^+_{st}}/Fil^i(\widehat{B^+_{st}})$ *pour tout* $i \in \mathbf{N}^*$.

Preuve. — Soient $k_0, ..., k_{ei-1} \in K_0$ tels que $\sum_{\alpha=0}^{ei-1} k_\alpha U^\alpha \in Fil^i(\widehat{B^+_{st}})$, on a alors $\sum_{\alpha=0}^{ei-1} k_\alpha[\xi_\pi]^\alpha \in Fil^i(B^+_{cris})$ et quitte à multiplier par une puissance de p, on obtient dans $W(R)$, $\sum_{\alpha=0}^{ei-1} w_\alpha[\xi_\pi]^\alpha \in Fil^i(W(R))$. Modulo p, on a pour tout i dans

$\mathbf{N}$, $Fil^i R = \xi_\pi^i R$, d'où dans R:

$$\sum_{\alpha=0}^{ei-1} \bar{w_\alpha}[\xi_\pi]^\alpha = \sum_{q=0}^{i-1} \Big(\sum_{r=0}^{e-1} \overline{w}_{eq+r}\xi_\pi^r \Big) (\xi_\pi^e)^q \in \xi_\pi^{ei} R$$

En particulier, on a $\sum_{r=0}^{e-1} \overline{w}_r \xi_\pi^r \in \xi_\pi^e R$ qui donne (en prenant la première composante dans R) une relation de dépendance linéaire de degré $e-1$ de $\bar{\pi}$ sur k dans $\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$, ce qui impose $\overline{w}_r = 0,\ r = 0, ..., e-1$. On a alors $\xi_\pi^e \sum_{r=0}^{e-1} \overline{w}_{e+r}\xi_\pi^r \in \xi_\pi^{2e} R$, soit, R étant intègre, $\sum_{r=0}^{e-1} \overline{w}_{e+r}\xi_\pi^r \in \xi_\pi^e R$ i.e. $\overline{w}_{e+r} = 0$. Par une récurrence élémentaire, on a $w_\alpha = pw'_\alpha$ pour tout α et $\sum_{\alpha=0}^{ei-1} w'_\alpha [\xi_\pi]^\alpha \in Fil^{ei}(W(R))$; en raisonnant de même, on obtient finalement $w_\alpha \in p^n W$ pour tout n, i.e. $w_\alpha = 0$ i.e. $k_\alpha = 0$. $\square$

Supposons (récurrence sur i) que $\dim_{K_0} \Big(\widehat{B_{st}^+}/Fil^i(\widehat{B_{st}^+}) \Big)^G = ei$ c'est à dire $\Big(\widehat{B_{st}^+}/Fil^i(\widehat{B_{st}^+}) \Big)^G = K_0 \oplus K_0\bar{u} \oplus ... \oplus K_0\bar{u}^{ei-1}$ par (4.2.1) (ce qui est trivialement vrai pour $i = 0$), on a une suite exacte courte de modules galoisiens pour tout $i \in \mathbf{N}$:

$$0 \to Fil^i(\widehat{B_{st}^+})/Fil^{i+1}(\widehat{B_{st}^+}) \to \widehat{B_{st}^+}/Fil^{i+1}(\widehat{B_{st}^+}) \to \widehat{B_{st}^+}/Fil^i(\widehat{B_{st}^+}) \to 0$$

qui donne une suite exacte courte:

$$0 \to \Big(Fil^i(\widehat{B_{st}^+})/Fil^{i+1}(\widehat{B_{st}^+}) \Big)^G \to \Big(\widehat{B_{st}^+}/Fil^{i+1}(\widehat{B_{st}^+}) \Big)^G \to \Big(\widehat{B_{st}^+}/Fil^i(\widehat{B_{st}^+}) \Big)^G \to 0$$

où la flèche de droite est bien surjective car $1, \bar{U}, ..., \bar{U}^{ei-1} \in \Big(\widehat{B_{st}^+}/Fil^{i+1}(\widehat{B_{st}^+}) \Big)^G$. Finalement, on a $\dim_{K_0} \Big(\widehat{B_{st}^+}/Fil^{i+1}(\widehat{B_{st}^+}) \Big)^G = ei + \dim_{K_0} \Big(Fil^i(\widehat{B_{st}^+})/Fil^{i+1}(\widehat{B_{st}^+}) \Big)^G \leq e(i+1)$, mais, par (4.2.1), $\dim_{K_0} \Big(\widehat{B_{st}^+}/Fil^{i+1}(\widehat{B_{st}^+}) \Big)^G \geq e(i+1)$ d'où exactement:

$$K_0 \oplus K_0\bar{U} \oplus ... \oplus K_0\bar{U}^{e(i+1)-1} \simeq \Big(\widehat{B_{st}^+}/Fil^{i+1}(\widehat{B_{st}^+}) \Big)^G$$

Soit $x \in \widehat{A_{st}}^G$; par ce qui précède, on a pour tout $n \in \mathbf{N}$ des éléments $k_0^{(n)}, ..., k_{ne-1}^{(n)}$ de K_0 tels que $y^{(n)} = x - (k_0^{(n)} + ... + k_i^{(n)} \frac{u^i}{q(i)!} + ... + k_{ne-1}^{(n)} \frac{u^{ne-1}}{n!}) \in Fil^n(\widehat{B_{st}^+}^G)$. Soit α suffisamment grand tel que $w_i^{(n)} = p^\alpha k_i^{(n)} \in W$ et $p^\alpha y^{(n)} \in Fil^n(\widehat{A_{st}}^G)$, en regardant la composante de degré 0 (en X) dans $\widehat{B_{st}^+}$, on déduit qu'il existe $z^{(n)} \in Fil^n(A_{cris})$ tel que:

$$w_0^{(n)} + ... + w_i^{(n)} \frac{[\xi_\pi]^i}{q(i)!} + ... + w_{ne-1}^{(n)} \frac{[\xi_\pi]^{ne-1}}{n!} + z^{(n)} \in p^\alpha A_{cris}$$

d'où en réduisant modulo p:

$$\sum_{q=0}^{n-1}\Big(\sum_{r=0}^{e-1}\overline{w}^{(n)}_{eq+r}\xi_\pi^r\Big)\gamma_q(\xi_\pi^e)\in Fil^nR^{DP}$$

On veut montrer que $w_i^{(n)}\in p^\alpha W$ pour tout i. En raisonnant comme en (4.2.1), il est facile de voir qu'il suffit de montrer: si $\gamma_{n-1}(\xi_\pi^e)\sum_{r=0}^{e-1}k_r\xi_\pi^r\in Fil^nR^{DP}$ (les k_i sont dans k), alors $k_i=0$ pour tout $i=0,...,e-1$. Soit ξ_1 la racine $p^{i\grave{e}me}$ de π qui intervient dans ξ_π, par l'isomorphisme canonique $R^{DP}\xrightarrow{\sim}(\mathcal{O}_{\bar K}/p\mathcal{O}_{\bar K})^{DP}$ (où les puissances divisées sur ce dernier sont prises par rapport au noyau du Frobenius), on se ramène dans $(\mathcal{O}_{\bar K}/p\mathcal{O}_{\bar K})^{DP}$. On a alors $\gamma_{n-1}(\bar{\xi_1}^e)\sum_{r=0}^{e-1}k_r\bar{\xi_1}^r\in Fil^n(\mathcal{O}_{\bar K}/p\mathcal{O}_{\bar K})^{DP}$ avec $(\mathcal{O}_{\bar K}/p\mathcal{O}_{\bar K})^{DP}\simeq\mathcal{O}_{\bar K}/p\mathcal{O}_{\bar K}[X_i]/(X_i^p)_{i\geq\mathbf{1}}$ $(X_i=\gamma_{p^i}(\bar{\xi_1}^e))$. Soit r_{max} le plus grand r tel que $k_r=0$ si $r\leq r_{max}-1$ et supposons $r_{max}<e$; on a $\sum_{r=0}^{e-1}k_r\bar{\xi_1}^r=\bar{v}\bar{\xi_1}^{r_{max}}$ où $\bar{v}\in(\mathcal{O}_{\bar K}/p\mathcal{O}_{\bar K})^*$ et $\bar{\xi_1}^{r_{max}}\gamma_{n-1}(\bar{\xi_1}^e)\in Fil^n(\mathcal{O}_{\bar K}/p\mathcal{O}_{\bar K})^{DP}$. Les éléments de $Fil^n(\mathcal{O}_{\bar K}/p\mathcal{O}_{\bar K})^{DP}$ sont des sommes de monômes du type $\bar{x_k}\bar{X_1}^{n_1}...\bar{X_s}^{n_s}$ où $\bar{x_k}\in Fil^k(\mathcal{O}_{\bar K}/p\mathcal{O}_{\bar K})=\bar{\xi_1}^{ek}(\mathcal{O}_{\bar K}/p\mathcal{O}_{\bar K})$ et $n_1p+n_2p^2+...+n_sp^s\geq n-k$; soit $i_0+i_1p+...+i_sp^s$ l'écriture de $n-1$ en base p (i.e. $0\leq i_k\leq p-1$), on a

$$\bar{\xi_1}^{r_{max}}\gamma_{n-1}(\bar{\xi_1}^e)=\bar{w}\bar{\xi_1}^{r_{max}}\bar{\xi_1}^{ei_0}\bar{X_1}^{i_1}...\bar{X_s}^{i_s}\in Fil^n(\mathcal{O}_{\bar K}/p\mathcal{O}_{\bar K})^{DP}$$

où w est une unité p-adique, donc $\bar{\xi_1}^{r_{max}+ei_0}\in\bar{\xi_1}^{e(i_0+1)}.(\mathcal{O}_{\bar K}/p\mathcal{O}_{\bar K})^{DP}$. Comme $r_{max}+ei_o<e(i_0+1)$, on déduit $\bar{\xi_1}^{r_{max}+ei_o}=0$ d'où $\bar{\xi_1}^{pe-1}=0$ i.e $v_p(\xi_1)\geq\dfrac{1}{pe-1}$ en notant v_p la valuation p-adique dans $\mathcal{O}_{\bar K}$ telle que $v_p(p)=1$. Ceci est impossible puisque $v_p(\xi_1)=\dfrac{1}{pe}$. On a finalement pour tout $n\in\mathbf{N}^*$ des éléments $w_i'^{(n)}(x),\ 0\leq i\leq ne-1$ de W tels que:

$$x-(w_0'^{(n)}(x)+...+w_i'^{(n)}(x)\frac{U^i}{q(i)!}+...+w_{ne-1}'^{(n)}(x)\frac{U^{ne-1}}{(n-1)!})\in Fil^n(\widehat{B_{st}^+}^G)$$

et par (4.2.1), ces éléments sont ainsi déterminés de manière unique. En raisonnant comme en (4.1.1), on voit finalement qu'on a des $w_i(x)$ uniques dans W et des $R_i(x)(u)$ uniques dans $W[u]\backslash pW[u]$ de coefficient dominant une puissance de p et de degré $\leq e-1$ tels que $x-\sum_{i=0}^{n-1}w_i(x)R_i(x)(U).\gamma_i(P(U))\in Fil^n(\widehat{B_{st}^+}^G)$ ($P(u)$ =polynôme d'Eisenstein de π) et tels que $w_i(x+y)R_i(x+y)=w_i(x)R_i(x)+w_i(y)R_i(y)$ pour $x,y\in\widehat{A_{st}}^G$. Montrons que $\lim_{i\to\infty}w_i(x)=0$. On va se servir de la composante de “degré 0 en X” de x dans A_{cris}; notons la x_0, on a alors pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$x_0 - \sum_{i=0}^{n-1} w_i(x) R_i(x)([\xi_\pi]).\gamma_i(P([\xi_\pi])) \in Fil^n(A_{cris})$$

Comme précédemment, on travaille dans $(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}})^{DP} \simeq \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}[X_i]/(X_i^p)_{i\geq \mathbf{1}}$ où $\bar{x_0}$ s'écrit $\bar{x_0} = \bar{\alpha_n} + \bar{\beta_n}$ avec:

$$\bar{\alpha_n} = \sum_{i=0}^{n-1} \overline{w}_i(x) R_i(x)(\bar{\xi_1}).\gamma_i(\bar{\xi_1}^e) \ et \ \bar{\beta_n} \in Fil^n\Big(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}[X_i]/(X_i^p)\Big)$$

Supposons les $\overline{w}_i(x)$ non tous nuls, $\bar{\alpha_n}$ s'écrit de façon unique sous la forme:

$$\bar{\alpha_n} = \sum_{\substack{q=i_0+pi_1+\ldots+p^s i_s \\ q\in\{0,\ldots,n-1\}}} C_q.X_1^{i_1}\ldots X_s^{i_s}$$

où $C_q \in \bigoplus_{r=0}^{e(p-1)+e-1} k.\bar{\xi_1}^r$. En raisonnant comme précédemment, il est facile de voir qu'aucun de ces monômes (non nuls) ne peut appartenir à $Fil^n(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}})^{DP}$. De même, $\bar{\beta_n}$ s'écrit de manière unique comme somme de monômes en X_i de $Fil^n(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}})^{DP}$ et qui ne peuvent donc s'annuler avec les précédents. Finalement, si pour i arbitrairement grand, il y avait des $\overline{w}_i(x)$ non nuls, on aurait pour q arbitrairement grand des C_q non nuls et $\bar{x_0}$ s'écrirait comme une somme infinie de monômes différents dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}[X_j]/(X_j^p)$, ce qui est absurde. Il existe donc $n_0 \in \mathbf{N}^*$ tel que pour $i \geq n_0 e$, $w_i(x) \in pW$. Soit $y = x - \sum_{i=0}^{n_0 e-1} w_i(x) R_i(x)(U).\gamma_i(P(U))$, on a modulo p, $\bar{y} \in Fil^n(\widehat{A_{st}}/p\widehat{A_{st}})$ pour tout n, i.e. $y = pz$ dans $\widehat{A_{st}}^G$. En raisonnant avec z comme avec x, on déduit $m_0 \in \mathbf{N}^*$ tel que pour $i \geq m_0 e$, $w_i(z) \in pW$. Mais $w_i(y) = pw_i(z)$ et pour $i \geq n_0 e$, $w_i(y) = w_i(x)$, on a donc un $n_1 \geq n_0$ tel que pour $i \geq n_1 e$, $w_i(x) \in p^2 W$. Une récurrence élémentaire donne alors le résultat. Finalement, on a une flèche additive $\mathcal{G} : \widehat{A_{st}}^G \to S^0_{min}$, $x \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} w_i(x) R_i(x)(u).\gamma_i(P(u))$ dont on voit facilement qu'elle est injective (car $\bigcap Fil^n(\widehat{A_{st}}) = 0$) et qu'elle redonne l'identité sur S^0_{min}. Comme $\mathcal{F} : S^0_{min} \to \widehat{A_{st}}^G$ est un morphisme d'algèbres compatible à toutes les structures, on en déduit le résultat.

5 L'algèbre $\widehat{B_{st}}^G$

Il semble plus difficile de déterminer exactement la K_0-algèbre $\widehat{B_{st}}^G$. On va montrer seulement qu'elle possède certaines propriétés (qui suffiront dans la suite), puis formaliser ces propriétés sous le terme “ϕ-algèbre admissible”.

5.1 Propriétés de $\widehat{B_{st}}^G$

PROPOSITION 5.1.1 *i) La K-algèbre $\widehat{B_{st,K}}^G$ s'identifie à une sous-algèbre de S_π stable par N_K (avec la filtration induite) et telle que le diagramme:*

$$\begin{array}{ccc} \widehat{B_{st,K}}^G & \hookrightarrow & S_\pi \\ \uparrow & & \uparrow \\ \widehat{B^+_{st,K}}^G & \overset{(4.1.3)}{\simeq} & S_{min,K} \end{array}$$

est commutatif,
ii) On a une inclusion $\phi(\widehat{B_{st}}^G) \subset \widehat{B^+_{st}}^G$ si $p \geq 3$ et $\phi^2(\widehat{B_{st}}^G) \subset \widehat{B^+_{st}}^G$ si $p = 2$.

Remarque: J'ignore si on a une inclusion $\widehat{B_{st}}^G \subset \{\sum_{i=0}^{\infty} k_i u^i,\ k_i \in K_0,\ \lim_{i\to\infty} k_i \pi^i = 0\}$ ou même $\widehat{B_{st}}^G \subset K_0[[u]]$. De telles inclusions permettraient de "visualiser" l'opérateur de Frobenius sur $\widehat{B_{st}}^G$ $(u \mapsto u^p)$.

La preuve de (5.1.1) est dans la section suivante. En vue du prochain théorème, formalisons un peu les propriétés de l'algèbre $\widehat{B_{st}}^G$.

Nous appellerons ϕ-algèbre une K_0-algèbre quelconque S munie d'un morphisme d'algèbre $\phi : S \to S$ K_0-semi-linéaire et injectif. Un morphisme de ϕ-algèbres est un morphisme de K_0-algèbres qui commute à ϕ. On rappelle que le changement de variable $u \leftrightarrow u - \pi$ permet de "voir" S_{min} comme une sous-algèbre de S_π stable par N_K.

DÉFINITION 5.1.2 *Soit S une ϕ-algèbre. On dit que S est admissible si S vérifie les propriétés suivantes:*
1) S est une sous-algèbre de S_π stable par N_K telle que $N_K|_S \circ \phi = p\phi \circ N_K|_S$ et telle que la flèche canonique $K \otimes_{K_0} S \to S_\pi$ soit injective,
2) S contient S_{min} (dans la catégorie des ϕ-algèbres),
3) il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que $\phi^m(S) \subset S_{min}$.

On munit S admissible de la filtration induite par S_π et on note $N = N_K|_S$.

Exemple 1: Soit S_{max} la sous ϕ-algèbre de $K_0[[u]]$: $\{\sum_{i=0}^{\infty} k_i u^i,\ \lim_{i\to\infty} k_i \pi^i = 0\ (dans\ K)\}$ munie de N et ϕ tels que $N(u) = -u$ et $\phi(u) = u^p$. Alors toute K_0-algèbre S telle que $S_{min} \subset S \subset S_{max}$, stable par ϕ et N est une ϕ-algèbre admissible. La seule chose non totalement triviale dans la définition précédente est 3) qui provient du:

LEMME 5.1.3 *On a $\phi(S_{max}) \subset S_{min}$.*

Preuve. — Soit $g(u) = \sum_{i=0}^{\infty} k_i u^i \in S_{max}$, on a $\phi(g)(u) = \sum_{i=0}^{\infty} \phi(k_i) u^{pi}$. Il est facile de voir que $\lim_{i\to\infty} k_i \pi^i = 0$ dans K équivaut à $\lim_{i\to\infty} k_i p^{q(i)} = 0$ dans K_0 ($q(i)$ est le quotient dans la division euclidienne de i par e). Pour montrer que $\phi(g) \in S_{min}$, il faut voir que $\lim_{i\to\infty} q(pi)!\phi(k_i) = 0$, mais $q(pi) \geq pq(i)$ donc $(pq(i))!$ divise $q(pi)!$. Comme $p^{q(i)}$ divise $(pq(i))!$ et que $p^{q(i)}\phi(k_i)$ tend vers 0 dans K_0 puisque $g \in S_{max}$, on a le résultat. $\square$

Exemple 2: Les ϕ-algèbres $\widehat{B_{st}^+}^G$ et $\widehat{B_{st}}^G$ sont admissibles ((4.1.3) et (5.1.1)).

5.2 Preuve de la proposition (5.1.1)

Montrons i): soit $x \in \widehat{B_{st,K}}^G$, on a $n \in \mathbf{N}$ tel que $x \in (\frac{1}{t^n}\widehat{B_{st,K}^+})^G$. Pour $i \geq -n$, on sait que:

$$Fil^i(\frac{1}{t^n}\widehat{B_{st,K}^+})/Fil^{i+1}(\frac{1}{t^n}\widehat{B_{st,K}^+}) = \mathbf{C}_p\bar{t}^i + ... + \mathbf{C}_p\bar{t}^{i-n}\bar{X}^{n+i}$$

et par un raisonnement complètement analogue au début de (4.1.2), on déduit:

$$\Big(Fil^i(\frac{1}{t^n}\widehat{B_{st,K}^+})/Fil^{i+1}(\frac{1}{t^n}\widehat{B_{st,K}^+})\Big)^G = 0 \ si \ i < 0$$

et

$$\Big(Fil^i(\frac{1}{t^n}\widehat{B_{st,K}^+})/Fil^{i+1}(\frac{1}{t^n}\widehat{B_{st,K}^+})\Big)^G = \frac{1}{\bar{t}^n}K.\bar{t}^n(\overline{U-\pi})^i \simeq K(\overline{U-\pi})^i \ si \ i \geq 0$$

Lemme 5.2.1 *Les vecteurs* $1, (\overline{U-\pi}), ..., (\overline{U-\pi})^{i-1}$ *sont* K*-linéairement indépendants dans* $\frac{1}{t^n}\widehat{B_{st,K}^+}/Fil^i(\frac{1}{t^n}\widehat{B_{st,K}^+})$ $(i \in \mathbf{N}^*)$.

Preuve. — Soient $k_0, ..., k_{i-1} \in K$ tels que $\sum_{\alpha=0}^{i-1} k_\alpha (U-\pi)^\alpha \in Fil^i(\frac{1}{t^n}\widehat{B_{st,K}^+})$, on a en fait $\sum_{\alpha=0}^{i-1} k_\alpha (U-\pi)^\alpha \in Fil^i(\widehat{B_{st,K}^+})$, d'où:

$$\sum_{\alpha=0}^{i-1} k_\alpha(\xi_\pi - \pi)^\alpha \in Fil^i(B_{cris,K}^+) \cap W_K(R) = (\xi_\pi - \pi)^i.W_K(R)$$

en notant $W_K(R) = K \otimes_W W(R)$. Ceci entraine $k_0 = 0$ et $\sum_{\alpha=0}^{i-2} k_{\alpha+1}(\xi_\pi - \pi)^\alpha \in (\xi_\pi - \pi)^{i-1}.W_K(R)$. Une récurrence facile donne pour tout α, $k_\alpha = 0$. $\square$

On montre alors comme en (4.2) que pour $i \in \mathbf{N}^*$:

$$\Big(\frac{1}{t^n}\widehat{B^+_{st,K}}/Fil^i(\frac{1}{t^n}\widehat{B^+_{st,K}})\Big)^G \simeq \bigoplus_{j=0}^{i-1} K(\overline{U-\pi})^j$$

On en déduit que pour tout $x \in \widehat{B_{st,K}}^G$, il existe des $(k_\alpha(x))_{\alpha\in\mathbf{N}}$ uniques dans K tels que pour tout $i \in \mathbf{N}^*$, $x - \sum_{\alpha=0}^{i-1} k_\alpha(x)(U-\pi)^\alpha \in Fil^i(\widehat{B_{st,K}})$ et on construit de même qu'en (4.2) une application $\tilde{\mathcal{G}_K}:\ \widehat{B_{st,K}}^G \to S_\pi,\ x \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} k_i(x)(u-\pi)^i$. On a de même qu'il s'agit d'un morphisme de K-algèbres injectif et en utilisant $N\Big(Fil^i(\widehat{B_{st,K}})\Big) \subset Fil^{i-1}(\widehat{B_{st,K}})$, on montre la compatibilité aux dérivations. En utilisant que si $x \in Fil^i(\widehat{B_{st,K}}^G)$, alors $k_\alpha(x) = 0$ pour $0 \leq \alpha \leq i-1$ (par unicité des $k_\alpha(x)$), on montre la compatibilité aux filtrations. Soit $x \in \widehat{B_{st,K}}^G$ tel que $\tilde{\mathcal{G}_K}(x) \in Fil^i(S_\pi) = (u-\pi)^i S_\pi,\ i \in \mathbf{N}$, alors $k_\alpha(x) = 0,\ \alpha = 0, ..., i-1$ ce qui entraine $x \in Fil^i(\widehat{B_{st,K}})^G$: la filtration sur $\widehat{B_{st,K}}^G$ est induite par celle de S_π. La commutativité du diagramme est claire.

Montrons ii): On rappelle le lemme suivant démontré par Fontaine ([Fo2],5.3.7i)):

Lemme 5.2.2 *Soit* $B'_{cris} = \{x \in B_{cris}/\phi^n(x) \in Fil^0(B_{cris}),$ *pour tout* $n \in \mathbf{N}\}$, *alors* $\phi(B'_{cris}) \subset B^+_{cris}$ *si* $p \geq 3$ *et* $\phi^2(B'_{cris}) \subset B^+_{cris}$ *si* $p = 2$.

Soit $x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i\gamma_i(X) \in \widehat{B_{st}}^G$, $(a_i \in B_{cris})$; par i), on a des $k_i(x)$ tels que pour tout n de $\mathbf{N}^*$, $x - \sum_{i=0}^{n-1} k_i(x)(U-\pi)^i \in Fil^n(\widehat{B_{st,K}})$. Mais $\sum_{i=0}^{n-1} k_i(x)(U-\pi)^i \in \widehat{B^+_{st,K}}$, d'où $a_i \in Fil^0(B_{cris,K}) \cap B_{cris} = Fil^0(B_{cris})$ pour $i = 0, ..., n$. Comme c'est vrai pour tout n, on a finalement $a_i \in Fil^0(B_{cris})$ pour tout i. D'autre part $\phi(x)$ est de la forme:

$$\phi(x) = \sum_{i=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{i} n_{k,i}\phi(a_k)\Big).\gamma_i(X) \in \widehat{B_{st}}^G$$

avec les $n_{k,i}$ dans $\mathbf{N}$, $n_{i,i} = p^i \in \mathbf{N}^*$ et par ce qui précède $\sum_{k=0}^{i} n_{k,i}\phi(a_k) \in Fil^0(B_{cris})$. Un raisonnement par récurrence immédiat donne $\phi(a_i) \in Fil^0(B_{cris})$ pour tout i. En recommençant avec $\phi(x)$, on obtient pour tout i, $\phi^2(a_i) \in Fil^0(B_{cris})$. Finalement, on a pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\phi^n(a_i) \in Fil^0(B_{cris})$, soit par (5.2.2), $\phi(a_i) \in B^+_{cris}$ si $p \geq 3$ et $\phi^2(a_i) \in B^+_{cris}$ si $p = 2$. On en déduit aisément le résultat.

6 Une équivalence de catégories

Dans cette section, on fait le choix d'une ϕ-algèbre admissible S. On introduit deux catégories de modules filtrés: les uns sur K_0 et les autres sur S. On montre que ces catégories sont équivalentes.

6.1 Les catégories $\mathcal{MF}_S(\Phi,\mathcal{N})$ et $MF_K(\phi, N)$

On note $\mathcal{MF}_S(\Phi,\mathcal{N})$ la catégorie suivante: les objets sont des S-modules $\hat{M}$ libres de rang fini munis:

- d'une application $\Phi: \ \hat{M} \to \hat{M}$ semi-linéaire par rapport au ϕ de S et dont le déterminant dans une base est inversible dans S (c'est indépendant de la base),
- d'une filtration décroissante sur $\hat{M}$ par des S-modules: $Fil^i(\hat{M}), \ i \in \mathbf{Z}$, telle que $Fil^i(\hat{M}) = \hat{M}$ pour $i << 0$ et telle que si $f \in Fil^i(S)$ et $x \in Fil^j(\hat{M}), \ f.x \in Fil^{i+j}(\hat{M})$ $(i \in \mathbf{N}, \ j \in \mathbf{Z})$,
- d'une application K_0-linéaire $\mathcal{N}: \ \hat{M} \to \hat{M}$ telle que:
  - pour tout f dans S et tout x dans $\hat{M}$, $\mathcal{N}(f.x) = N(f).x + f.\mathcal{N}(x)$,
  - $\mathcal{N}\Phi = p\Phi\mathcal{N}$,
  - $\mathcal{N}(Fil^i(\hat{M})) \subset Fil^{i-1}(\hat{M})$.

Les flèches sont les applications S-linéaires qui préservent les filtrations et commutent à Φ et $\mathcal{N}$.

On note $MF_K(\phi, N)$ la catégorie suivante: les objets sont des K_0-espaces vectoriels M de dimension finie munis:

- d'une application $\phi: \ M \to M$ semi-linéaire par rapport au Frobenius sur K_0 et bijective,
- d'une filtration décroissante sur $M_K = K \otimes_{K_0} M$ par des K-espaces vectoriels: $Fil^i(M_K), \ i \in \mathbf{Z}$, telle que $Fil^i(M_K) = M_K$ pour $i << 0$,
- d'une application K_0-linéaire $N: \ M \to M$ telle que $N\phi = p\phi N$.

Les flèches sont les applications K_0-linéaires qui préservent les filtrations et commutent à ϕ et N. On remarquera qu'on n'impose ici aucune relation entre la filtration et l'opérateur de monodromie.

Les deux catégories sont naturellement munies d'un produit tensoriel (au dessus de S pour $\mathcal{MF}_S(\Phi,\mathcal{N})$ et au dessus de K_0 pour $MF_K(\phi, N)$). On a d'autre part un foncteur T de $MF_K(\phi, N)$ dans $\mathcal{MF}_S(\Phi,\mathcal{N})$ qui à M associe $T(M) = S \otimes_{K_0} M$: on définit Φ sur $T(M)$ par $\Phi(f \otimes x) = \phi(f) \otimes \phi(x)$, $\mathcal{N}$ par

$\mathcal{N}(f\otimes x) = N(f)\otimes x + f\otimes N(x)$. Soit f_π la surjection $S_\pi \overset{“u=\pi“}{\rightarrow} K,\ g(u-\pi) \mapsto g(0)$, par abus de notations, on notera encore f_π la surjection induite $S \to K$ et celle qu'on en déduit $T(M) = S \otimes_{K_0} M \to M_K$. Soit $i_0 \in \mathbf{Z}$ tel que $Fil^{i_0}(M_K) = M_K$, on définit une filtration sur $T(M)$ par récurrence en posant $Fil^{i_0}(T(M)) = T(M)$ et pour $i \geq i_0$:

$$Fil^{i+1}(T(M)) = \{x \in T(M)\ /\ f_\pi(x) \in Fil^{i+1}(M_K)\ et\ \mathcal{N}(x) \in Fil^i(T(M))\}$$

ce qui donne à $T(M)$ une structure d'objet de $\mathcal{MF}_S(\Phi,\mathcal{N})$ (on vérifie par une récurrence facile que cette filtration satisfait bien les conditions demandées). Si h est une flèche dans $MF_K(\phi,N)$, on vérifie aisément que $T(h)$ en est une dans $\mathcal{MF}_S(\Phi,\mathcal{N})$ (la seule chose qui n'est pas complètement triviale est de voir par récurrence que $T(h)$ est bien compatible aux filtrations). Nous appellerons **filtration canonique** la filtration ainsi définie sur $S \otimes_{K_0} M$.

On se propose de démontrer le:

Théorème 6.1.1 *Avec les notations précédentes, le foncteur T induit une équivalence de catégories entre $MF_K(\phi,N)$ et $\mathcal{MF}_S(\Phi,\mathcal{N})$.*

Remarque: En un sens légèrement abusif mais évident, cette équivalence est de plus compatible au produit tensoriel.

6.2 Preuve de l'équivalence de catégories (6.1.1)

On note f_0 la surjection $S_{min} \overset{“u=0''}{\rightarrow} K_0,\ g(u) \to g(0)$ (f_π désigne toujours la surjection $S_\pi \overset{“u=\pi''}{\rightarrow} K,\ g(u-\pi) \to g(0)$). Par abus de notation, on notera encore f_0 (resp. f_π) la restriction de f_0 (resp. f_π) à des sous-algèbres de S_{min} (resp. S_π). On va définir un quasi-inverse T^{-1}; pour cela, il est nécessaire de démontrer deux propositions, l'une qui concerne essentiellement le Frobenius, l'autre qui concerne les filtrations et la transversalité de Griffiths.

6.2.1 Construction d'une section compatible aux opérateurs

Puisque S est admissible, il existe $m \in \mathbf{N}$ tel qu'on peut identifier $\phi^m(S)$ à une sous-K_0-algèbre de S_{min} qu'on note $\widetilde{S_{min}}$. Remarquons que $\phi^m(S_{min}) \subset \widetilde{S_{min}} \subset S_{min}$. Par l'intermédiaire de f_0, on fait de K_0 une $\widetilde{S_{min}}$-algèbre. Soit $\hat{M}$ un S-module libre de rang fini muni:

- d'une application $\Phi : \hat{M} \to \hat{M}$ semi-linéaire par rapport au ϕ de S et dont le déterminant dans une base est inversible dans S (indépendant de la base),
- d'une application K_0-linéaire $\mathcal{N} : \hat{M} \to \hat{M}$ telle que $\mathcal{N}\Phi = p\Phi\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}(f.x) = N(f).x + f.\mathcal{N}(x)$ pour tout f de S et tout x de $\hat{M}$.

On note $M_0 = K_0 \otimes_{\widetilde{S_{min}}} \Phi^m(\hat{M})$. Comme $\Phi^m(\hat{M})$ est un $\widetilde{S_{min}}$-module libre de même rang que $\hat{M}$ stable par Φ et $\mathcal{N}$, M_0 est un espace vectoriel de même dimension finie (sur K_0). On munit M_0 du Frobenius image (bijectif) ϕ et de la monodromie image N.

Proposition 6.2.1.1 *Avec les notations précédentes, il existe une unique section s K_0-linéaire: $M_0 \to \hat{M}$ compatible avec ϕ et Φ. Elle est de plus compatible avec N et $\mathcal{N}$.*

Preuve. — Il revient au même de montrer qu'il existe une unique section s K_0-linéaire: $M_0 \to \Phi^m(\hat{M})$ compatible avec les opérateurs, quitte à prendre par la suite (Φ étant injectif) $\Phi^{-m} \circ s \circ \phi^m$. On commence par définir $s : M_0 \to \Phi^m(\hat{M}) \otimes_{\widetilde{S_{min}}} K_0[[u]]$ puis on montre que l'image est en fait dans $\Phi^m(\hat{M})$. Soit x dans M_0 et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ l'unique suite de M_0 telle que $\phi(x_n) = x_{n-1}$ et $x_0 = x$. Si s existe, on doit avoir $s(\phi^n(x_n)) = \Phi^n(s(x_n))$, mais soit $\widehat{x_n}$ un relevé quelconque de x_n dans $\Phi^m(\hat{M})$, on a alors $\Phi^n(\widehat{x_n}) - \Phi^{n-1}(\widehat{x_{n-1}}) \in u^{p^{n-1}}.(\Phi^m(\hat{M}) \otimes_{\widetilde{S_{min}}} K_0[[u]])$, ce qui montre que la suite $(\Phi^n(\widehat{x_n}))_{n\in\mathbf{N}}$ converge dans $(\Phi^m(\hat{M}) \otimes_{\widetilde{S_{min}}} K_0[[u]])$, i.e. qu'on a une unique application K_0-linéaire $s' : M_0 \to \Phi^m(\hat{M}) \otimes_{\widetilde{S_{min}}} K_0[[u]]$ compatible aux Frobenius. Pour que s existe, il faut donc et il suffit que l'image de s' soit dans $\Phi^m(\hat{M})$, et $s = s'$ sera alors unique. Soit r le rang de $\hat{M}$ et choisissons une base $\hat{B} = (\widehat{e_1}, ..., \widehat{e_r})$ de $\hat{M}$ sur S qui donne par Φ^m une base $\Phi^m(\hat{B}) = (\Phi^m(\widehat{e_1}), ...\Phi^m(\widehat{e_r}))$ de $\Phi^m(\hat{M})$ sur $\widetilde{S_{min}}$ et par f_0 une base notée $C = (f_1, ..., f_r)$ de M_0 sur K_0. Soit $\widehat{\mathcal{M}}$ (resp. $\mathcal{M}$) la matrice (inversible) de Φ (resp. ϕ) dans $\Phi^m(\hat{B})$ (resp. C). Un calcul rapide montre que la matrice de s' relative à ces deux bases s'écrit:

$$\mathcal{M}(s') = \lim_{n\to\infty} \left(\widehat{\mathcal{M}}.\phi(\widehat{\mathcal{M}}).\phi^2(\widehat{\mathcal{M}})...\phi^{n-1}(\widehat{\mathcal{M}})\phi^{n-1}(\mathcal{M}^{-1})...\phi^2(\mathcal{M}^{-1}).\phi(\mathcal{M}^{-1}).\mathcal{M}^{-1}\right)$$

où $\phi^i(\widehat{\mathcal{M}})$ (resp. $\phi^i(\mathcal{M}^{-1})$) désigne la matrice dont les coefficients sont les ϕ^i(ceux de $\widehat{\mathcal{M}}$) (resp. ϕ^i(ceux de $\mathcal{M}^{-1}$)). On sait par ce qui précède que cette matrice est à coefficients dans $K_0[[u]]$, il s'agit de montrer qu'elle est à coefficients dans $\widetilde{S_{min}}$. La matrice $\widehat{\mathcal{M}}$ est à coefficients dans $\widetilde{S_{min}}$ et on a (le Frobenius étant continu pour la topologie u-adique):

$$\mathcal{M}(s') = \widehat{\mathcal{M}}.\phi(\widehat{\mathcal{M}}).\phi^2(\widehat{\mathcal{M}})...\phi^{m-1}(\widehat{\mathcal{M}}).\phi^m\Big(\mathcal{M}(s')\Big)\phi^{m-1}(\mathcal{M}^{-1})...\phi^2(\mathcal{M}^{-1}).\phi(\mathcal{M}^{-1}).\mathcal{M}^{-1}$$

Si on montre que $\mathcal{M}(s')$ est à coefficients dans S_{min}, on aura gagné puisque $\phi^m(S_{min}) \subset \widetilde{S_{min}}$. Autrement dit, il suffit de montrer que pour une matrice $\widehat{\mathcal{N}}$ à coefficients dans S_{min} et de déterminant inversible dans S_{min}, la matrice

$$\mathcal{L}(\widehat{\mathcal{N}}) = \lim_{n\to\infty} \left(\widehat{\mathcal{N}}.\phi(\widehat{\mathcal{N}})...\phi^{n-1}(\widehat{\mathcal{N}})\phi^{n-1}(\mathcal{N}^{-1})...\phi(\mathcal{N}^{-1}).\mathcal{N}^{-1}\right)$$

est encore à coefficients dans S_{min} (ici, $\mathcal{N}=\widehat{\mathcal{N}}(0)$).
On peut toujours trouver $d\in\mathbf{N}$ tel que $\widehat{\mathcal{N}}=1/p^d.\widehat{\mathcal{N}}^o$ avec $\widehat{\mathcal{N}}^o$ à coefficients dans $S_{min}^o=\{\sum_{i=0}^{\infty} w_i\frac{u^i}{q(i)!},\ w_i\in W,\ \lim_{i\to\infty} w_i=0\}$. En notant $\mathcal{N}^o=\widehat{\mathcal{N}}^o(0)$, on a encore:

$$\mathcal{L}(\widehat{\mathcal{N}})=\lim_{n\to\infty}\Big(\widehat{\mathcal{N}}^o.\phi(\widehat{\mathcal{N}}^o)...\phi^{n-1}(\widehat{\mathcal{N}}^o)\phi^{n-1}\big((\mathcal{N}^o)^{-1}\big)...\phi\big((\mathcal{N}^o)^{-1}\big).(\mathcal{N}^o)^{-1}\Big)=\mathcal{L}(\widehat{\mathcal{N}}^o)$$

on peut donc supposer $\widehat{\mathcal{N}}$ à coefficients dans S_{min}^o. On écrit $\widehat{\mathcal{N}}=\sum_{l=0}^{\infty}\mathcal{N}_l\frac{u^l}{q(l)!}$ avec les $\mathcal{N}_l$ à coefficients dans W. Pour calculer les matrices-coefficients de u^{p^n}, $u^{p^n+1},...,$ $u^{p^{n+1}-1}$ dans la matrice $\mathcal{L}(\widehat{\mathcal{N}})$, il suffit de s'arréter à l'ordre n dans la limite (l'ordre $n+1$ ne rajoutant que des $u^{p^{n+1}}$). Un calcul facile donne alors que la matrice-coefficient du terme en u^{p^n+k}, $0\le p^n+k\le p^{n+1}-1$ est la matrice:

$$A_{p^n+k}=\sum_{i_0+pi_1+...+p^ni_n=p^n+k}\frac{1}{q(i_0)!q(i_1)!...q(i_n)!}\mathcal{N}_{i_0}.\phi(\mathcal{N}_{i_1})...\phi^n(\mathcal{N}_{i_n}).\phi^n(\mathcal{N}_0^{-1})...\phi(\mathcal{N}_0^{-1}).\mathcal{N}_0^{-1}$$

Si $\mathcal{N}$ est une matrice à coefficients dans K_0, notons $v_p(\mathcal{N})$ la plus petite valuation p-adique de ses coefficients. Il faut donc montrer que pour $0\le p^n+k\le p^{n+1}-1$, on a $v_p(q(p^n+k)!A_{p^n+k})\ge\alpha(n)$ avec $\lim_{n\to+\infty}\alpha(n)=+\infty$. On décompose la somme A_{p^n+k} en deux parties: $A_{p^n+k}=S_1+S_2$ avec:

$$S_1=\sum_{\substack{i_0+pi_1+...+p^ni_n=p^n+k\\ i_0\le n-1}}(*)\quad et\quad S_2=\sum_{\substack{i_0+pi_1+...+p^ni_n=p^n+k\\ i_0\ge n}}(*)$$

On note v la valuation p-adique du déterminant de $\mathcal{N}_0$, ce qui fait que les dénominateurs dans $\mathcal{N}_0^{-1}$ sont au plus en $\frac{1}{p^v}$.

- cas de S_1:
  Les coefficients d'une matrice de la forme:

  $$q(p^n+k)!\frac{1}{q(i_0)!q(i_1)!...q(i_n)!}\mathcal{N}_{i_0}.\phi(\mathcal{N}_{i_1})...\phi^n(\mathcal{N}_{i_n}).\phi^n(\mathcal{N}_0^{-1})...\phi(\mathcal{N}_0^{-1}).\mathcal{N}_0^{-1}$$

  ont leur valuation p-adique supérieure à celle de $\frac{1}{p^{(n+1)v}}\frac{q(p^n+k)!}{q(i_0)!...q(i_n)!}$, i.e. supérieure à:

  $$v_p\Big(\frac{1}{p^{(n+1)v}}\frac{p^{q(i_1+...+p^{n-1}i_n)}q(i_0)!q(i_1)!...q(p^{n-1}i_n)!}{q(i_0)!...q(i_n)!}\Big)$$

  soit supérieure à $q(\frac{p^n+k-i_0}{p})-(n+1)v$ (ici, on a utilisé la remarque triviale que $(q(i)+q(j))!/q(i+j)!$). Mais $i_0\le n-1$ et on trouve finalement, par exemple, que $v_p(q(p^n+k)!S_1) \geq \dfrac{p^{n-1}-(n-1)}{e} - (n+1)v$, $0 \leq p^n + k \leq p^{n+1}-1$.

- cas de S_2:
  Soit $(i_0, ..., i_n)$ tel que $i_0 + pi_1 + ... + p^n i_n = p^n + k$ avec $i_0 \geq n$ et soit $\lambda \in \mathbf{N}$ tel que $i_\mu = 0$ pour $\mu \geq \lambda + 1$ ($\lambda = n$ si tous les i_μ sont non nuls). La matrice correspondante s'écrit:

  $$q(p^n+k)!\frac{1}{q(i_0)!q(i_1)!...q(i_\lambda)!}\mathcal{N}_{i_0}.\phi(\mathcal{N}_{i_1})...\phi^\lambda(\mathcal{N}_{i_\lambda}).\phi^{\lambda+1}(\mathcal{N}_0)...\phi^n(\mathcal{N}_0)\phi^n(\mathcal{N}_0^{-1})...\mathcal{N}_0^{-1}$$

  c'est à dire:

  $$q(p^n+k)!\frac{1}{q(i_0)!q(i_1)!...q(i_\lambda)!}\mathcal{N}_{i_0}.\phi(\mathcal{N}_{i_1})...\phi^\lambda(\mathcal{N}_{i_\lambda}).\phi^\lambda(\mathcal{N}_0^{-1})...\mathcal{N}_0^{-1}$$

  avec $i_\lambda \geq 1$. Les valuations des coefficients de cette matrice sont alors supérieures à $v_p\Big(\mathcal{N}_{i_0}\Big) + v_p\Big(\frac{1}{p^{(\lambda+1)v}}\frac{q(i_0+pi_1+...+p^\lambda i_\lambda)!}{q(i_0)!q(i_1)!...q(i_\lambda)!}\Big)$.
  - Si $\lambda = 0$, les valuations sont supérieures à $v_p\Big(\mathcal{N}_{i_0}\Big) - v$ avec $i_0 = p^n + k$.
  - Si $\lambda \geq 1$, les valuations sont supérieures à $v_p\Big(\mathcal{N}_{i_0}\Big) + v_p\Big(\frac{1}{p^{(\lambda+1)v}}\frac{q(pi_1+...+p^\lambda i_\lambda)!}{q(i_1)!...q(i_\lambda)!}\Big)$
  i.e. supérieure à $v_p\Big(\mathcal{N}_{i_0}\Big) + v_p\Big(\frac{1}{p^{(\lambda+1)v}}\frac{p^{q(i_1+pi_2+...+p^{\lambda-1}i_\lambda)}q(i_1+...+p^{\lambda-1}i_\lambda)!}{q(i_1)!...q(i_\lambda)!}\Big)$
  soit finalement supérieure à $v_p\Big(\mathcal{N}_{i_0}\Big) + q(p^{\lambda-1}) - (\lambda+1)v$, c'est à dire à:

  $$v_p\Big(\mathcal{N}_{i_0}\Big) + \frac{p^{\lambda-1}}{e} - 1 - (\lambda+1)v$$

  avec $i_0 \geq n$.
  En réunissant les deux cas, on trouve (pour $0 \leq p^n + k \leq p^{n+1}-1$) que $v_p(q(p^n+k)!S_2) \geq v_p\Big(\mathcal{N}_{i_0}\Big) - C$ où $C = max\{v, ((\lambda+1)v + 1 - \frac{p^{\lambda-1}}{e})_{\lambda\geq 1}\}$ est une constante positive ou nulle indépendante de n.

Finalement, soit $M \geq 0$ et soit N tel que, pour $n \geq N$, $\dfrac{p^{n-1}-(n-1)}{e} - (n+1)v \geq M$ et $v_p\Big(\mathcal{N}_n\Big) - C \geq M$, alors on a $v_p\Big(q(p^n+k)!A_{p^n+k}\Big) \geq v_p\Big(q(p^n+k)!S_1\Big) + v_p\Big(q(p^n+k)!S_2\Big) \geq 2M$ pour tout $n \geq N$ et $0 \leq p^n + k \leq p^{n+1}-1$, ce qui montre bien que $\mathcal{L}(\widehat{\mathcal{N}})$ est à coefficients dans S_{min}. Remarquons que:

$$det\Big(\mathcal{M}(s)\Big) = \lim_{n\to\infty}\Big(det(\widehat{\mathcal{M}}).det(\phi(\widehat{\mathcal{M}}))...det(\phi^{n-1}(\widehat{\mathcal{M}}))det(\phi^{n-1}(\mathcal{M}^{-1}))...det(\mathcal{M}^{-1})\Big)$$

i.e. $det\Big(\mathcal{M}(s)\Big)$ est inversible dans $\widetilde{S_{min}}$ (son inverse est:

$$\lim_{n\to\infty}\left(det(\widehat{\mathcal{M}})^{-1}.det(\phi(\widehat{\mathcal{M}}))^{-1}...det(\mathcal{M})\right)$$

et on montre comme précédemment qu'il est dans $\widetilde{S_{min}}$); $(s(f_1),...,s(f_r))$ est donc une base du $\widetilde{S_{min}}$-module libre $\Phi^m(\hat{M})$. On définit le "vrai" s par $\Phi^{-m}\circ s\circ\phi^m$. Enfin, il est formel en utilisant les relations de commutations $N\phi=p\phi N$ et $\mathcal{N}\Phi=p\Phi\mathcal{N}$ de vérifier que $s\circ N=\mathcal{N}\circ s$. □

6.2.2 La filtration canonique

Par l'intermédiaire de f_π, on fait de K une S-algèbre. Soit $\hat{M}$ (resp. $\widehat{M_K}$) un S-module (resp. un S_K-module) quelconque muni:

- d'une filtration décroissante par des S-modules $Fil^i(\hat{M}),\ i\in\mathbf{Z}$, telle que $Fil^i(\hat{M})=\hat{M}$ pour $i<<0$ et telle que si $f\in Fil^i(S)$ et $x\in Fil^j(\hat{M}),\ f.x\in Fil^{i+j}(\hat{M})$ $(i\in\mathbf{N},\ j\in\mathbf{Z})$ (resp. avec $Fil^i(S_K)$ et $Fil^j(\widehat{M_K})$),
- d'une application K_0-linéaire $\mathcal{N}:\ \hat{M}\to\hat{M}$ telle que pour tout f dans S et tout x dans $\hat{M}$, $\mathcal{N}(f.x)=N(f).x+f.\mathcal{N}(x)$ et telle que $\mathcal{N}(Fil^i(\hat{M}))\subset Fil^{i-1}(\hat{M})$ $(i\in\mathbf{Z})$ (resp. avec $S_K,\ \widehat{M_K}$ et $\mathcal{N}_K$).

On note M_π le K-espace vectoriel $M_\pi=K\otimes_S\hat{M}=\hat{M}/Fil^1(S).\hat{M}$ (resp. $M_\pi=\widehat{M_K}/Fil^1(S_K).\widehat{M_K}$), qu'on munit de la filtration image $Fil^{\cdot}(M_\pi)$. Soit $i_0\in\mathbf{Z}$ tel que $Fil^i(\hat{M})=\hat{M}$ pour $i\leq i_0$. En notant toujours f_π la surjection canonique $\hat{M}\to M_\pi$, on définit la filtration canonique sur $\hat{M}$ par récurrence en posant $\widehat{Fil}^{i_0}(\hat{M})=\hat{M}$ et pour $i\geq i_0$:

$$\widehat{Fil}^{i+1}(\hat{M})=\{x\in\hat{M}\ /\ f_\pi(x)\in Fil^{i+1}(M_\pi)\ et\ \mathcal{N}(x)\in\widehat{Fil}^{i}(\hat{M})\}$$

(resp. avec $\widehat{Fil}^{i}(\widehat{M_K})$).

Proposition 6.2.2.1 *On a pour tout $i\in\mathbf{Z}$, $\widehat{Fil}^i(\hat{M})=Fil^i(\hat{M})$ (resp. $\widehat{Fil}^i(\widehat{M_K})=Fil^i(\widehat{M_K})$).*

Preuve. — Nous donnons la preuve pour $\hat{M}$ (pour $\widehat{M_K}$, c'est la même en plus simple). Soit $P(u)\in K_0[u]$ le polynôme d'Eisenstein de π de degré e; pour tout $k\in\mathbf{N}$, on a $N^k(P)(u)=u.R_k(u)$ avec $R_k(u)$ de degré $e-1$, donc $N^k(P)(\pi)\neq 0$ dans K. On a des injections $S_{min}/Fil^i(S_{min})\hookrightarrow S/Fil^i(S)\hookrightarrow S_\pi/Fil^i(S_\pi)$, mais $dim_{K_0}(S_{min}/Fil^i(S_{min}))=ei=dim_{K_0}(S_\pi/Fil^i(S_\pi))$, d'où:

$$S/Fil^i(S)=S_{min}/Fil^i(S_{min})$$

Pour tout $x \in Fil^1(S)$, on en déduit des décompositions $x = x_1(i)+x_2(i)$ avec $i \in \mathbf{N}$, $x_1(i) \in P(u).K_0[u]$ et $x_2(i) \in Fil^i(S)$. Il est clair que pour $i \leq i_0$, $\widehat{Fil}^i(\hat{M}) = Fil^i(\hat{M}) = \hat{M}$ et une récurrence élémentaire montre qu'on a $Fil^i(\hat{M}) \subset \widehat{Fil}^i(\hat{M})$ pour tout $i \in \mathbf{Z}$. Soit $i \geq i_0$ et supposons que pour tout $j \in \mathbf{Z}$, $j \leq i$, on ait $Fil^j(\hat{M}) = \widehat{Fil}^j(\hat{M})$. Soit $x \in \widehat{Fil}^{i+1}(\hat{M})$, on a $\mathcal{N}(x) \in \widehat{Fil}^i(\hat{M}) = Fil^i(\hat{M})$ par récurrence; comme $f_\pi(x) \in Fil^{i+1}(M_\pi)$, il existe $y \in Fil^{i+1}(\hat{M})$, des $s_\alpha \in Fil^1(S)$ et des $z_\alpha \in \hat{M}$ tels que $x = y + \sum_\alpha s_\alpha.z_\alpha$. En décomposant les s_α comme ci-dessus à l'ordre $i+1-i_0$, quitte à changer y dans $Fil^{i+1}(\hat{M})$, on peut trouver $z \in \hat{M}$ tel que $x = y + P(u).z$. D'où $\mathcal{N}(x) = \mathcal{N}(y) + P(u).\mathcal{N}(z) + N(P)(u).z$, qui donne $N(p)(u).z + P(u).\mathcal{N}(z) \in Fil^i(\hat{M})$. Comme $N(P)(\pi) \neq 0$, on a en particulier $f_\pi(z) \in Fil^i(M_\pi)$. On recommence: $\mathcal{N}\Big(P(u).\mathcal{N}(z) + N(P)(u).z\Big) \in Fil^{i-1}(\hat{M})$ soit:

$$N^2(P)(u).z + 2N(P)(u).\mathcal{N}(z) + P(u).\mathcal{N}^2(z) \in Fil^{i-1}(\hat{M})$$

d'où on déduit par ce qui précède:

$$2N(P)(\pi).f_\pi(\mathcal{N}(z)) \in Fil^{i-1}(M_\pi) \textit{ i.e. } f_\pi(\mathcal{N}(z)) \in Fil^{i-1}(M_\pi)$$

Une récurrence facile donne pour $0 \leq k \leq i - i_0$: $f_\pi(\mathcal{N}^k(z)) \in Fil^{i-k}(M_\pi)$. En particulier, $f_\pi(\mathcal{N}^{i-i_0-1}(z)) \in Fil^{i_0+1}(M_\pi)$, et, en raisonnant comme ci-dessus, on trouve $v \in Fil^{i_0+1}(\hat{M})$ et $w \in \hat{M} = Fil^{i_0}(\hat{M})$ tel que $\mathcal{N}^{i-i_0-1}(z) = v + P(u).w \in Fil^{i_0+1}(\hat{M})$. On a ainsi:

$$\mathcal{N}\Big(\mathcal{N}^{i-i_0-2}(z)\Big) \in Fil^{i_0+1}(\hat{M}) \subset \widehat{Fil}^{i_0+1}(\hat{M}) \textit{ et } f_\pi(\mathcal{N}^{i-i_0-2}(z)) \in Fil^{i_0+2}(M_\pi)$$

d'où $\mathcal{N}_K^{i-i_0-2}(z) \in \widehat{Fil}^{i_0+2}(\hat{M})$ par définition de la filtration canonique. On recommence en écrivant $\mathcal{N}^{i-i_0-2}(z) = \mathcal{N}\Big(\mathcal{N}^{i-i_0-3}(z)\Big)$, pour arriver finalement à $z \in \widehat{Fil}^i(\hat{M}) = Fil^i(\hat{M})$ par récurrence, d'où $x = y + P(u).z \in Fil^{i+1}(\hat{M})$ i.e. $\widehat{Fil}^{i+1}(\hat{M}) \subset Fil^{i+1}(\hat{M})$. Ceci achève la preuve de la proposition. □

Corollaire 6.2.2.2 *Soit $\hat{M}$ un S-module comme en (6.2.2.1) et $\widehat{M_K} = S_K \otimes_S \hat{M}$ muni de la filtration produit tensoriel. Alors cette filtration s'identifie à la filtration canonique sur $\widehat{M_K}$ et induit la filtration initiale sur $\hat{M}$.*

Preuve. — Par (6.2.2.1) appliquée à $\widehat{M_K}$, la filtration sur $\widehat{M_K}$ est la filtration canonique. Comme il est clair que la filtration canonique sur $\widehat{M_K}$ induit la filtration canonique sur $\hat{M}$, et que cette dernière est la filtration initiale de $\hat{M}$ par (6.2.2.1) appliquée à $\hat{M}$, on en déduit que la filtration induite sur $\hat{M}$ par $\widehat{M_K}$ est la filtration de départ. □

Remarque: La signification de (6.2.2.2) est que cela n'apporte rien de plus sur les filtrations, dans le cas des S-modules, de tensoriser par K.

Soit $\hat{M}$ (resp. $\widehat{M_K}$) un S-module (resp. un S_K-module) quelconque tel que:

- $M_\pi = \hat{M}/Fil^1(S).\hat{M}$ (resp. $M_\pi = \widehat{M_K}/Fil^1(S_K).\widehat{M_K}$) est muni d'une filtration décroissante par des K-espaces vectoriels $Fil^i(M_\pi)$, $i \in \mathbf{Z}$, telle que $Fil^i(M_\pi) = M_\pi$ pour $i << 0$,

- $\hat{M}$ est muni d'une application K_0-linéaire $\mathcal{N} : \hat{M} \to \hat{M}$ telle que pour tout f dans S et tout x dans $\hat{M}$, $\mathcal{N}(f.x) = N(f).x + f.\mathcal{N}(x)$ (resp. avec S_K, $\widehat{M_K}$ et $\mathcal{N}_K$).

On munit $\hat{M}$ (resp. $\widehat{M_K}$) de la filtration canonique $\widehat{Fil}^{\cdot}$ définie précédemment et on note $\bar{Fil}^{\cdot}(M_\pi)$ son image dans M_π par l'application f_π précédente.

Proposition 6.2.2.3 *On a pour tout $i \in \mathbf{Z}$, $\bar{Fil}^i(M_\pi) = Fil^i(M_\pi)$.*

Preuve. — Comme précédemment, nous le prouvons pour $\hat{M}$, la preuve pour $\widehat{M_K}$ étant la même en plus simple. Il est d'abord clair que $\bar{Fil}^i(M_\pi) \subset Fil^i(M_\pi)$ pour tout $i \in \mathbf{Z}$ et que $\bar{Fil}^i(M_\pi) = Fil^i(M_\pi) = M_\pi$ pour $i << 0$. Soit $i \in \mathbf{Z}$, on raisonne encore par récurrence en supposant que pour tout $j \in \mathbf{Z}$, $j \leq i$, on a $Fil^j(M_\pi) = \bar{Fil}^j(M_\pi)$. Soit $x \in Fil^{i+1}(M_\pi)$, en particulier $x \in Fil^i(M_\pi) = \bar{Fil}^i(M_\pi)$ donc il existe $\hat{x} \in \widehat{Fil}^i(\hat{M})$ *tq* $f_\pi(\hat{x}) = x$ et $\hat{x}$ vérifie $\mathcal{N}(\hat{x}) \in \widehat{Fil}^{i-1}(\hat{M})$. Soit $P(u)$ le polynôme minimal d'Eisenstein de π sur K_0, alors $N(P)(u) = u.R(u)$ où $R(u)$ est de degré $e-1$ donc $N(P)(\pi) \neq 0$. Il existe donc un polynôme $Q(u) \in K_0[u]$ tel que $Q(\pi).N(P)(\pi) = -1$. Soit $H(u) = Q(u).P(u)$, on a $1 + N[H(u)] \in Fil^1 S$. Considérons l'élément:

$$\hat{y} = \hat{x} + H(u).\mathcal{N}(\hat{x}) + \frac{1}{2}[H(u)]^2.\mathcal{N}^2(\hat{x}) + ... + \frac{1}{i!}[H(u)]^i.\mathcal{N}^i(\hat{x})$$

un calcul facile donne:

$$\mathcal{N}(\hat{y}) = (1+N[H(u)]).\mathcal{N}(\hat{x}) + ... + \frac{1}{(i-1)!}H(u)^{i-1}(1+N[H(u)]).\mathcal{N}^i(\hat{x}) + \frac{1}{i!}H(u)^i.\mathcal{N}^{i+1}(\hat{x})$$

donc $\mathcal{N}(\hat{y}) \in \widehat{Fil}^i(\hat{M})$ (car chaque terme y est). De plus $f_\pi(\hat{y}) = f_\pi(\hat{x}) \in Fil^{i+1}(M_\pi)$ ce qui entraine $\hat{y} \in \widehat{Fil}^{i+1}(\hat{M})$ d'après la définition de la filtration canonique, donc $x \in \bar{Fil}^{i+1}(M_\pi)$ i.e. $Fil^{i+1}(M_\pi) \subset \bar{Fil}^{i+1}(M_\pi)$ i.e. $Fil^{i+1}(M_\pi) = \bar{Fil}^{i+1}(M_\pi)$. □

6.2.3 Fin de la preuve

On achève maintenant la preuve du théorème (6.1.1). Par (6.2.1.1), on a une section $s : M_0 \to \hat{M}$. En composant s avec la surjection $f_\pi : \hat{M} \to M_\pi$ et puisque s transforme une base de M_0 en une base de $\hat{M}$, on obtient un isomorphisme canonique de K-espaces vectoriels $K \otimes_{K_0} M_0 \xrightarrow{\sim} M_\pi$ permettant donc de construire un K_0-espace vectoriel $T^{-1}(\hat{M}) = M_0$ muni à la fois d'un Frobenius, d'un opérateur de monodromie et d'une filtration sur $K \otimes_{K_0} T^{-1}(\hat{M})$ qui en font un objet de

$MF_K(\phi, N)$. On vérifie aisément que si $\hat{f}$ est une flèche dans $\mathcal{MF}_S(\Phi, \mathcal{N})$, alors $T^{-1}(\hat{f})$ est bien une flèche dans $MF_K(\phi, N)$. Il reste à construire des isomorphismes canoniques et fonctoriels **1)** $T^{-1}\Big(T(M)\Big) \xrightarrow{\sim} M$ et **2)** $T\Big(T^{-1}(\hat{M})\Big) \xrightarrow{\sim} \hat{M}$.

1) On a $T(M) \simeq S \otimes_{K_0} M$ (muni de la filtration canonique) et il n'est pas difficile de voir que l'application s dans ce cas n'est autre que l'application canonique: $M \to S \otimes_{K_0} M$. On a alors clairement un isomorphisme de K_0-espaces vectoriels $T^{-1}(T(M)) \simeq M$ compatible avec le Frobenius et la monodromie. Il reste à voir que les filtrations sont bien les mêmes, et c'est précisément le contenu de la proposition (6.2.2.3), avec $\hat{M} = S \otimes_{K_0} M$ et $M_\pi = K \otimes_{K_0} M$.

2) On a $T\Big(T^{-1}(\hat{M})\Big) \simeq S \otimes_{K_0} T^{-1}(\hat{M})$ et on considère $Id \otimes s : S \otimes_{K_0} T^{-1}(\hat{M}) \to \hat{M}$. On sait déjà que c'est un isomorphisme de S-modules libres de rang fini compatible aux Frobenius et aux monodromies sur les deux membres (d'après (6.2.1.1)). Il s'agit de montrer que $(Id \otimes s)\Big(Fil^i(S \otimes_{K_0} T^{-1}(\hat{M}))\Big) = Fil^i(\hat{M})$. On a un diagramme commutatif (qui commute à l'action de la monodromie):

$$\begin{array}{ccc} S \otimes_{K_0} T^{-1}(\hat{M}) & \overset{Id \otimes s}{\to} & \hat{M} \\ f_\pi \downarrow & & \downarrow f_\pi \\ K \otimes_{K_0} T^{-1}(\hat{M}) & \overset{\sim}{\to} & M_\pi \end{array}$$

d'où on déduit que $(Id \otimes s)\Big(Fil^i(S \otimes_{K_0} T^{-1}(\hat{M}))\Big)$ est la filtration canonique sur $\hat{M}$. La proposition (6.2.2.1) permet alors de conclure.

La fonctorialité des isomorphismes est formelle et laissée au lecteur. Enfin, pour démontrer la remarque qui suit (6.1.1), on remarque que $T^{-1}(\widehat{M_1} \otimes_S \widehat{M_2}) \simeq T^{-1}(\widehat{M_1}) \otimes_{K_0} T^{-1}(\widehat{M_2})$ dans $MF_K(\phi, N)$ (avec les filtrations produit tensoriel). L'équivalence de catégories est donc compatible au produit tensoriel.

7 Deux lemmes sur $\widehat{B_{st}}$

Avant d'achever la démonstration du théorème (3.3), nous allons établir deux lemmes, dont le premier est dû à Kato.

LEMME 7.1 *([Ka],3.7) On a un isomorphisme compatible avec l'action de Galois, le Frobenius et la monodromie:* $B_{st} \simeq (\widehat{B_{st}})_{N_{nilp}}$ *où* $(\widehat{B_{st}})_{N_{nilp}} = \{x \in \widehat{B_{st}} / \ \exists\ n \in \mathbf{N}\ tq\ N^n(x) = 0\}$.

Preuve. — Remarquons que $\mathrm{Log}(1+X) \in \widehat{B_{st}}$ et $N(\mathrm{Log}(1+X)) = 1$. Soit $x \in (\widehat{B_{st}})_{N_{nilp}}$; si $N(x) = 0$, un calcul facile donne $x \in B_{cris}$; si $N^2(x) = 0$, on a $N(x) = b_1 \in B_{cris}$, d'où $N(x - b_1 \mathrm{Log}(1+X)) = 0$ i.e il existe $b_0 \in B_{cris}$ tel que $x = b_0 + b_1 \mathrm{Log}(1+X)$. Par une récurrence immédiate, on a $(\widehat{B_{st}})_{N_{nilp}} =$

$B_{cris}[\mathrm{Log}(1+X)]$. Enfin, il est clair qu'on a un isomorphisme compatible à l'action de Galois, au Frobenius et à la dérivation $B_{st} \simeq B_{cris}[\mathrm{Log}(1+X)]$. $\square$

Soit f_π la flèche canonique $B_{cris,K}$-linéaire $\widehat{B_{st,K}} \to B_{dR}$, $X \mapsto \frac{[\xi_\pi]}{\pi} - 1$: elle est compatible aux filtrations et à l'action de Galois. Par abus de notations, on notera encore f_π sa restriction à des sous-algèbres de $\widehat{B_{st,K}}$ (les notations sont bien cohérentes puisque la restriction de f_π à $\widehat{B_{st}}^G$ redonne la flèche "$u = \pi$"). Par un résultat de Fontaine ([Fo2],4.2.4), la flèche induite $f_\pi : B_{st,K} \to B_{dR}$ est injective et la filtration sur $B_{st,K}$ est la filtration induite par B_{dR} (via cette injection). L'isomorphisme en (7.1) n'est alors pas compatible aux filtrations, sinon B_{st} vérifierait le critère de transversalité de Griffiths (et ce n'est pas le cas: par exemple, si $\pi^e = p$, $x = \Big(1+\mathrm{Log}(1+X)\Big)^e - \Big(\frac{[\xi_\pi]}{\pi}\Big)^e \in Fil^2(B_{st})$ car $f_\pi(x) = \Big(1+\mathrm{Log}(\frac{[\xi_\pi]}{\pi})\Big)^e - \Big(\frac{[\xi_\pi]}{\pi}\Big)^e \in \Big(\frac{[\xi_\pi]}{\pi} - 1\Big)^2 .B_{dR}^+$ (développer $\mathrm{Log}(\frac{[\xi_\pi]}{\pi})$ en puissances de $\frac{[\xi_\pi]}{\pi} - 1$); mais $N(x) = e\Big(1+\mathrm{Log}(1+X)\Big)^{e-1} \notin Fil^1(B_{st})$).

Soit $B_K^+ = \widehat{B_{st,K}}^G \otimes_K B_{st,K}^+$ (resp. $B_K = \widehat{B_{st,K}}^G \otimes_K B_{st,K}$) qu'on munit de façon évidente d'une action de Galois et d'une monodromie N_K. On définit la filtration canonique sur B_K^+ par $Fil^0(B_K^+) = B_K^+$ et:

$$Fil^i(B_K^+) = \{x \in B_K \ tq \ (f_\pi \otimes Id)(x) \in Fil^i(B_{st,K}^+) \ et \ N_K(x) \in Fil^{i-1}(B_K^+)\}$$

pour $i \geq 1$. On définit alors $Fil^i(B_K) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} (1 \otimes \frac{1}{t^k}).Fil^{i+k}(B_K^+)$.

LEMME 7.2 *On a une injection de K-algèbres compatible à l'action de Galois et à la monodromie $h_K : B_K \hookrightarrow \widehat{B_{st,K}}$ qui induit la filtration canonique sur B_K.*

Preuve. — Il est trivial que h_K est compatible à Galois et à la dérivation. Munissons $\widehat{B_{st,K}^+}$ de la filtration $\widehat{Fil}^\cdot$ définie par $\widehat{Fil}^0(\widehat{B_{st,K}^+}) = \widehat{B_{st,K}^+}$ et $\widehat{Fil}^i(\widehat{B_{st,K}^+}) = \{x \in \widehat{B_{st,K}^+} \ tq \ f_\pi(x) \in Fil^i(B_{dR}^+) \ et \ N_K(x) \in \widehat{Fil}^{i-1}(\widehat{B_{st,K}^+})\}$ pour $i \geq 1$. On a clairement $Fil^\cdot(\widehat{B_{st,K}^+}) \subset \widehat{Fil}^\cdot(\widehat{B_{st,K}^+})$ (avec l'égalité au niveau 0). Montrons par récurrence qu'en fait $Fil^\cdot(\widehat{B_{st,K}^+}) = \widehat{Fil}^\cdot(\widehat{B_{st,K}^+})$. Soit $x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \gamma_k(X) \in \widehat{Fil}^i(\widehat{B_{st,K}^+})$, de $N_K(x) \in \widehat{Fil}^{i-1}(\widehat{B_{st,K}^+}) = Fil^{i-1}(\widehat{B_{st,K}^+})$, on déduit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \gamma_k(X) \in Fil^i(\widehat{B_{st,K}^+})$, et de $f_\pi(x) \in Fil^i(B_{dR}^+)$, on déduit $a_0 \in Fil^i(B_{cris,K}^+)$ (puisque la filtration sur $B_{cris,K}$ est induite par celle de B_{dR}), i.e. $x \in Fil^i(\widehat{B_{st,K}^+})$. Supposons h_K injective, la filtration sur $B_{st,K}^+$ étant induite par celle de B_{dR}^+, on laisse au lecteur le soin de vérifier que la filtration induite sur B_K^+ (resp. B_K) par $\widehat{Fil}^\cdot(\widehat{B_{st,K}^+}) = Fil^\cdot(\widehat{B_{st,K}^+})$

(resp. avec $\widehat{B_{st,K}}$) est bien la filtration canonique. Il reste donc à montrer l'injectivité pour prouver le lemme.
On rappelle (5.1.1) qu'on a une injection de K-algèbres $\widehat{B_{st,K}}^G \hookrightarrow S_\pi$. Notons $T = Log(1+X) \in \widehat{B_{st}}$. On a trois morphismes de K-algèbres (en écrivant $B_{st,K} \simeq B_{cris,K}[T]$):

$$\begin{array}{ccc} S_\pi & \stackrel{g_K^1}{\to} & B_{dR}[[Z]] \\ (u-\pi) & \mapsto & \pi((1+Z)^{-1}-1) \end{array} , \quad \begin{array}{ccc} B_{st,K} & \stackrel{g_K^2}{\to} & B_{dR}[[Z]] \\ T & \mapsto & Log(\frac{[\xi_\pi]}{\pi})+Log(1+Z) \end{array} , \quad \begin{array}{ccc} \widehat{B_{st,K}} & \stackrel{f_K}{\to} & B_{dR}[[Z]] \\ X & \mapsto & \frac{[\xi_\pi]}{\pi}-1+\frac{[\xi_\pi]}{\pi}Z \end{array}$$

tels que le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} B_K & \hookrightarrow & S_\pi \otimes_K B_{st,K} \\ h_K \downarrow & & \downarrow \tilde{h}_K = g_K^1 \otimes g_K^2 \\ \widehat{B_{st,K}} & \stackrel{f_K}{\to} & B_{dR}[[Z]] \end{array}$$

est commutatif. Il suffit donc de montrer l'injectivité de $\tilde{h}_K$ pour avoir celle de h_K. Quitte à faire le changement de variable $Z \leftrightarrow -Log(1+Z)$ dans $B_{dR}[[Z]]$, on peut prendre $\tilde{h}_K(u-\pi) = \pi(e^Z-1)$ et $\tilde{h}_K(T) = Log(\frac{[\xi_\pi]}{\pi}) - Z$.
1) La flèche B_{dR}-linéaire: $B_{dR}[[u-\pi]] \to B_{dR}[[Z]]$, $(u-\pi) \mapsto \pi(e^Z-1)$ est clairement un isomorphisme.
2) Soient $S_1, ..., S_N \in B_{cris,K}[[Z]]$ tels que $\sum_{i=0}^{N} S_i(Z)(Log(\frac{[\xi_\pi]}{\pi}) - Z)^i = 0$ dans $B_{dR}[[Z]]$. En développant en Z et en utilisant la transcendance de $Log(\frac{[\xi_\pi]}{\pi})$ sur $B_{cris,K}$ ([Fo2],4.3.3), on déduit facilement que $S_i = 0$ pour tout i.
3) Soit $x \in S_\pi \otimes_K B_{st,K} \simeq S_\pi \otimes_K B_{cris,K}[T]$ tel que $\tilde{h}_K(x) = 0$, x peut s'écrire sous la forme $x = \sum_{j=1}^{r} \Big(T_j(u-\pi) \otimes \sum_{i=0}^{N} b_i^{(j)} T^i\Big) = \sum_{i=0}^{N} \Big(\sum_{j=1}^{r} T_j(u-\pi) \otimes b_i^{(j)}\Big).1 \otimes T^i$ avec des notations évidentes. En écrivant que son image est nulle dans $B_{dR}[[Z]]$ et en utilisant 2) puis 1), on trouve que $\sum_{j=1}^{r} b_i^{(j)} T_j(u-\pi) = 0$ dans $B_{cris,K}[[u-\pi]]$ pour tout i. Mais on a une injection $S_\pi \otimes_K B_{cris,K} \hookrightarrow B_{cris,K}[[u-\pi]]$ (car $S_\pi = K[[u-\pi]]$), et finalement, $x = 0$ dans $S_\pi \otimes_K B_{cris,K}[T]$. $\square$

8 Preuve du théorème principal

Nous prouvons maintenant le théorème (3.3). Par (5.1.1), l'algèbre $\widehat{B_{st}}^G$ est une ϕ-algèbre admissible et les résultats de la section 6 s'appliquent.

8.1 Deux lemmes préliminaires

Le lemme suivant montre que tensoriser par K n'apporte rien de plus:

Lemme 8.1.1 *Soit V une représentation p-adique. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*
i) V est $\widehat{B_{st}}$-admissible,
ii) $(\widehat{B_{st}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^G$ est un $\widehat{B_{st}}^G$-module libre et la flèche $\widehat{B_{st,K}} \otimes_{\widehat{B_{st,K}}^G} (\widehat{B_{st,K}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^G \to \widehat{B_{st,K}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ est un isomorphisme de modules galoisiens strictement compatible aux filtrations.

Preuve. — On note $\hat{M} = (\widehat{B_{st}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^G$ et $\widehat{M_K} = (\widehat{B_{st,K}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^G$. Comme dans les deux cas, $\hat{M}$ est libre de rang fini sur $\widehat{B_{st}}^G$, les hypothèses de la proposition (6.2.2.1) sont en particulier satisfaites.
Montrons i)⇒ii): par (6.2.2.1), on a que la filtration sur $\widehat{M_K}$ est la filtration produit tensoriel $\widehat{B_{st,K}}^G \otimes_{\widehat{B_{st}}^G} \hat{M}$. On a d'autre part un isomorphisme strictement compatible aux filtrations produit tensoriel:

$$\widehat{B_{st,K}} \otimes_{\widehat{B_{st}}} (\widehat{B_{st}} \otimes_{\widehat{B_{st}}^G} \hat{M}) \xrightarrow{\sim} \widehat{B_{st,K}} \otimes_{\widehat{B_{st}}} (\widehat{B_{st}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V) = \widehat{B_{st,K}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$$

Il est alors clair que le membre de gauche est égal à $\widehat{B_{st,K}} \otimes_{\widehat{B_{st,K}}^G} \widehat{M_K}$.
Montrons ii)⇒i): il suffit de montrer que la filtration induite par $\widehat{B_{st,K}} \otimes_{\widehat{B_{st,K}}^G} \widehat{M_K}$ sur $\widehat{B_{st}} \otimes_{\widehat{B_{st}}^G} \hat{M}$ est la filtration produit tensoriel, notée $Fil^\cdot$, et il suffit de le faire avec $Fil^0(\widehat{B_{st}})$ (resp. $Fil^0(\widehat{B_{st,K}})$) au lieu de $\widehat{B_{st}}$ (resp. $\widehat{B_{st,K}}$). Soit B_π l'image de $Fil^0(\widehat{B_{st}})$ dans B_{dR} munie de la filtration induite, $M_K = \hat{M}/Fil^1(\widehat{B_{st}}^G).\hat{M}$ muni de la filtration image et notons encore f_π la surjection canonique $Fil^0(\widehat{B_{st}}) \otimes_{\widehat{B_{st}}^G} \hat{M} \to B_\pi \otimes_K M_K$. On munit $B_\pi \otimes_K M_K$ de la filtration produit tensoriel et on définit la filtration canonique $\widehat{Fil}^\cdot$ sur $Fil^0(\widehat{B_{st}}) \otimes_{\widehat{B_{st}}^G} \hat{M}$ (resp. sur $Fil^0(\widehat{B_{st,K}}) \otimes_{\widehat{B_{st,K}}^G} \widehat{M_K}$) de la manière habituelle en utilisant f_π. Par une preuve analogue à celle du corollaire (6.2.2.2), il suffit de montrer que $Fil^i = \widehat{Fil}^i$ pour tout $i \in \mathbf{Z}$. Nous allons le faire pour $Fil^0(\widehat{B_{st}}) \otimes_{\widehat{B_{st}}^G} \hat{M}$, la preuve pour l'autre étant la même en plus simple. Nous aurons besoin de l'approximation suivante: soit $x \in Fil^0(\widehat{B_{st}})$ et $j \in \mathbf{N}^*$ tels que $\bar{x} \in Ker\Big(Fil^0(\widehat{B_{st}})/Fil^j(\widehat{B_{st}}) \to B_\pi/Fil^j(B_\pi)\Big)$. En utilisant que $Fil^0(\widehat{B_{st}})/Fil^j(\widehat{B_{st}}) \simeq Fil^0(\widehat{B_{st,K}})/Fil^j(\widehat{B_{st,K}})$, on obtient aisément:

$$x \in [X - (\frac{[\xi_\pi]}{\pi} - 1)].Fil^0(\widehat{B_{st}}) + Fil^j(\widehat{B_{st,K}})$$

En écrivant, pour $i \geq j$, $\dfrac{1}{\pi} = \pi_1(i) + \pi_2(i)$ où $\pi_1(i) \in B^+_{cris}$ et $\pi_2(i) \in Fil^i(B^+_{cris,K})$, on a $x = [X - ([\xi_\pi]\pi_1(i) - 1)].y + z$ avec $y \in Fil^0(\widehat{B_{st}})$ et $z \in Fil^j(\widehat{B_{st,K}})$. Comme $x - [X - ([\xi_\pi]\pi_1(i) - 1)].y \in Fil^0(\widehat{B_{st}})$, on a finalement $z \in Fil^j(\widehat{B_{st,K}}) \bigcap Fil^0(\widehat{B_{st}}) = Fil^j(\widehat{B_{st}})$ (remarquons aussi que $X - ([\xi_\pi]\pi_1(i) - 1) \in Fil^1(\widehat{B_{st}})$). Il est clair que

$Fil^i \subset \widehat{Fil}^i$, montrons la réciproque par récurrence (le raisonnement est très similaire à celui de (6.2.2.1)): soit $i_0 \in \mathbf{Z}$ tel que pour $i \leq i_0$, $Fil^i = \widehat{Fil}^i =$ tout. Soit $i \geq i_0$ et supposons que pour tout $j \leq i$, on ait $Fil^j\Big(Fil^0(\widehat{B_{st}}) \otimes_{\widehat{B_{st}}^G} \hat{M}\Big) = \widehat{Fil}^j\Big(Fil^0(\widehat{B_{st}}) \otimes_{\widehat{B_{st}}^G} \hat{M}\Big)$. Soit $x \in \widehat{Fil}^{i+1}\Big(Fil^0(\widehat{B_{st}}) \otimes_{\widehat{B_{st}}^G} \hat{M}\Big)$. On a:

$$f_\pi(x) \in Fil^{i+1}(B_\pi \otimes_K M_K) = \sum_{j \in \mathbf{N}} Fil^j(B_\pi) \otimes_K Fil^{i+1-j} M_K$$

En utilisant l'approximation ci-dessus à des ordres convenables, on trouve $c \in Fil^1(B^+_{cris})$, $y \in Fil^{i+1}\Big(Fil^0(\widehat{B_{st}}) \otimes_{\widehat{B_{st}}^G} \hat{M}\Big)$ et $z \in Fil^0(\widehat{B_{st}}) \otimes_{\widehat{B_{st}}^G} \hat{M}$ tels que $x = y + (X - c).z$ avec $(X - c) \in Fil^1(\widehat{B_{st}})$. En appliquant $\mathcal{N}$, on a:

$$(1) \qquad \mathcal{N}(x) - \mathcal{N}(y) = (1 + X).z + (X - c).\mathcal{N}(z)$$

De l'hypothèse de récurrence, on déduit $(1+X).z \in Fil^{i_0+1}\Big(Fil^0(\widehat{B_{st}}) \otimes_{\widehat{B_{st}}^G} \hat{M}\Big)$. En appliquant $\mathcal{N}$ une deuxième fois, on a de même $\mathcal{N}(z) \in Fil^{i_0+1}\Big(Fil^0(\widehat{B_{st}}) \otimes_{\widehat{B_{st}}^G} \hat{M}\Big)$, qui, réinjecté dans (1), donne $z \in Fil^{i_0+2}\Big(Fil^0(\widehat{B_{st}}) \otimes_{\widehat{B_{st}}^G} \hat{M}\Big)$. Une récurrence facile s'ensuit, qui aboutit à $z \in Fil^i\Big(Fil^0(\widehat{B_{st}}) \otimes_{\widehat{B_{st}}^G} \hat{M}\Big)$. Mais $x = y + (X - c).z$, donc $x \in Fil^{i+1}\Big(Fil^0(\widehat{B_{st}}) \otimes_{\widehat{B_{st}}^G} \hat{M}\Big)$ et ceci achève le lemme. $\square$

Par (6.1.1), on a une équivalence de catégories entre certains $\widehat{B_{st}}^G$-modules filtrés et certains K_0-espaces vectoriels filtrés. Soit M un objet de $MF_K(\phi, N)$, $\hat{M}$ l'objet associé de $\mathcal{MF}_{\widehat{B_{st}}^G}(\Phi, \mathcal{N})$ par (6.1.1) et $\widehat{M_K} = K \otimes_{K_0} \hat{M}$; on munit $\widehat{B_{st,K}} \otimes_{\widehat{B_{st,K}}^G} \widehat{M_K}$ (resp. $B_{st,K} \otimes_K M_K$) de la filtration produit tensoriel.

Lemme 8.1.2 *On a un isomorphisme de modules galoisiens compatible aux Frobenius:*

$$(B_{st} \otimes_{K_0} M)_{N=0} \xrightarrow{\sim} (\widehat{B_{st}} \otimes_{\widehat{B_{st}}^G} \hat{M})_{\mathcal{N}=0}$$

qui est strictement compatible aux filtrations après tensorisation par K.

Preuve. — Comme $\widehat{B_{st}} \otimes_{\widehat{B_{st}}^G} \hat{M} \simeq \widehat{B_{st}} \otimes_{K_0} M$ (isomorphisme de $\widehat{B_{st}}$-algèbres), on a par (7.1) une flèche de B_{st}-algèbres $B_{st} \otimes_{K_0} M \to \widehat{B_{st}} \otimes_{\widehat{B_{st}}^G} \hat{M}$ compatible aux Frobenius, aux dérivations et à l'action de Galois. De plus, l'opérateur N étant nilpotent sur M (ceci vient de $N\phi = p\phi N$), il est facile de voir, en prenant une base trigonalisante pour N dans M, que:

$$(\widehat{B_{st}} \otimes_{K_0} M)_{N=0} = \Big((\widehat{B_{st}})_{N_{nilp}} \otimes_{K_0} M\Big)_{N=0} = (B_{st} \otimes_{K_0} M)_{N=0}$$

d'où un isomorphisme de modules galoisiens compatible aux Frobenius: $(B_{st} \otimes_{K_0} M)_{N=0} \xrightarrow{\sim} (\widehat{B_{st}} \otimes_{\widehat{B_{st}}^G} \hat{M})_{\mathcal{N}=0}$. Reste la compatibilité aux filtrations. Par (7.1) et (7.2), on a un isomorphisme de modules galoisiens filtrés $\Big((\widehat{B_{st}}^G \otimes_{K_0} B_{st}) \otimes_{\widehat{B_{st}}^G} \hat{M}\Big)_{\mathcal{N}=0} \xrightarrow{\sim} (\widehat{B_{st}} \otimes_{\widehat{B_{st}}^G} \hat{M})_{\mathcal{N}=0}$. D'autre part, les deux algèbres $(\widehat{B_{st}}^G \otimes_{K_0} B_{st}^+) \otimes_{\widehat{B_{st}}^G} \hat{M}$ et $\widehat{B_{st}}^G \otimes_{K_0} (B_{st}^+ \otimes_{K_0} M)$ sont isomorphes: quelle est la filtration image sur $\widehat{B_{st,K}}^G \otimes_K (B_{st,K}^+ \otimes_K M_K)$? Soit $S_K = \widehat{B_{st,K}}^G$ et $\mathbf{M_K} = B_{st,K}^+ \otimes_K M_K$: il n'est pas difficile de voir (par (7.2)) que cette filtration vérifie les hypothèses de la proposition (6.2.2.1): on a donc que la filtration sur $S_K \otimes_K \mathbf{M_K}$ est la filtration canonique, i.e. pour $i \geq 1$:

$$Fil^i\Big(\widehat{B_{st,K}}^G \otimes_K (B_{st,K}^+ \otimes_K M_K)\Big) = \{x \in \widehat{B_{st,K}}^G \otimes_K (B_{st,K}^+ \otimes_K M_K)\ tq$$
$$(f_\pi \otimes Id)(x) \in Fil^i(B_{st,K}^+ \otimes_K M_K)\ et\ N_K(x) \in Fil^{i-1}\Big(\widehat{B_{st,K}}^G \otimes_K (B_{st,K}^+ \otimes_K M_K)\Big)\}$$

Montrons que l'isomorphisme:

$$(1) \qquad (B_{st,K} \otimes_K M_K)_{N_K=0} \xrightarrow{1 \otimes Id} \Big(\widehat{B_{st,K}}^G \otimes_K (B_{st,K} \otimes_K M_K)\Big)_{N_K=0}$$

est compatible aux filtrations. Soit $x \in Fil^i(B_{st,K} \otimes_K M_K)_{N_K=0}$, il existe $j \in \mathbf{N}$ tel que $y = t^j x \in Fil^{i+j}(B_{st,K}^+ \otimes_K M_K)_{N_K=0}$, l'élément $1 \otimes y$ est donc tel que:
1) $(f_\pi \otimes Id)(1 \otimes y) = y \in Fil^{i+j}(B_{st,K}^+ \otimes_K M_K)$,
2) $N_K(1 \otimes y) = 0 \in Fil^{i+j-1}\Big(\widehat{B_{st,K}}^G \otimes_K (B_{st,K}^+ \otimes_K M_K)\Big)$,
donc $1 \otimes y \in Fil^{i+j}\Big(\widehat{B_{st,K}}^G \otimes_K (B_{st,K}^+ \otimes_K M_K)\Big)$ i.e $1 \otimes x \in Fil^i\Big(\widehat{B_{st,K}}^G \otimes_K (B_{st,K} \otimes_K M_K)\Big)$. Pour montrer que (1) est exactement un isomorphisme sur les filtrations, on peut montrer que son inverse est aussi compatible aux filtrations. Par (7.1) et (7.2), on a $(\widehat{B_{st,K}}^G \otimes_K B_{st,K})_{N_{K,nilp}} = B_{st,K}$, donc $(f_\pi \otimes Id)|_{(\widehat{B_{st,K}}^G \otimes_K B_{st,K})_{N_{K,nilp}}} = Id|_{B_{st,K}}$; on en déduit un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \widehat{B_{st,K}}^G \otimes_K (B_{st,K} \otimes_K M_K) & \xrightarrow{f_\pi \otimes Id} & B_{st,K} \otimes_K M_K \\ \uparrow & & \uparrow \\ \Big(\widehat{B_{st,K}}^G \otimes_K (B_{st,K} \otimes_K M_K)\Big)_{N_K=0} & \xrightarrow{\sim} & (B_{st,K} \otimes_K M_K)_{N_K=0} \end{array}$$

où les flèches verticales sont les injections canoniques et l'isomorphisme du bas est l'inverse de (1). Mais $f_\pi \otimes Id$ est compatible aux filtrations par ce qui précède, il en est donc de même de l'isomorphisme du bas. Ceci achève la preuve du lemme. $\square$

8.2 Preuve du théorème

Si V est une représentation galoisienne p-adique de G, on notera $D_{st}(V) = (B_{st} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^G$ et $\widehat{D_{st}}(V) = (\widehat{B_{st}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^G$.

Soit V une représentation semi-stable: on a un isomorphisme de modules galoisiens $\alpha_{st} : B_{st} \otimes_{K_0} (B_{st} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^G \xrightarrow{\sim} B_{st} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$, d'où:

$$\widehat{D_{st}}(V) \simeq \left(\widehat{B_{st}} \otimes_{B_{st}} (B_{st} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)\right)^G \overset{\alpha_{st}}{\underset{\sim}{\longleftarrow}} \widehat{B_{st}}^G \otimes_{K_0} (B_{st} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^G$$

est un $\widehat{B_{st}}$-module libre de rang $\dim_{\mathbf{Q}_p} V$ et la flèche $\widehat{\alpha_{st}} : \widehat{B_{st}} \otimes_{\widehat{B_{st}}^G} (\widehat{B_{st}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^G \xrightarrow{\sim} \widehat{B_{st}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ n'est autre que l'isomorphisme-extension des scalaires par $\widehat{B_{st}}$. Soit $\hat{M} = (\widehat{B_{st}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^G$: c'est un objet de $\mathcal{MF}_{\widehat{B_{st}}^G}(\Phi, \mathcal{N})$ dont on voit facilement (en utilisant (7.2) pour les filtrations) que l'objet associé de $MF_K(\phi, N)$ par (6.1.1) est $M = D_{st}(V) = (B_{st} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^G$, tel que $V = Fil^0(B_{st} \otimes_{K_0} M)^{\phi=1}_{N=0}$. Mais, par (8.1.2), on a $Fil^0(B_{st} \otimes_{K_0} M)_{N=0} \xrightarrow{\sim} Fil^0(\widehat{B_{st}} \otimes_{\widehat{B_{st}}^G} \hat{M})_{\mathcal{N}=0}$ (il s'agit ici des filtrations induites par les tensorisés par K), et l'isomorphisme réciproque de $\widehat{\alpha_{st}}$ est la flèche canonique:

$$\widehat{B_{st}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} Fil^0(\widehat{B_{st}} \otimes_{\widehat{B_{st}}^G} \hat{M})^{\phi=1}_{\mathcal{N}=0} \to \widehat{B_{st}} \otimes_{\widehat{B_{st}}^G} \hat{M}$$

qui est compatible aux filtrations par (8.1.1) (la filtration produit tensoriel sur $\widehat{B_{st,K}} \otimes_{\widehat{B_{st,K}}^G} \widehat{M_K}$ induit la filtration produit tensoriel sur $\widehat{B_{st}} \otimes_{\widehat{B_{st}}^G} \hat{M}$), montrant que $\widehat{\alpha_{st}}$ est bien strictement compatible aux filtrations.

Soit V une représentation $\widehat{B_{st}}$-admissible; il est facile de voir que $\widehat{D_{st}}(V)$ est alors un objet de $\mathcal{MF}_{\widehat{B_{st}}^G}(\Phi, \mathcal{N})$ qui s'écrit (par (6.1.1) et (5.1.1)) sous la forme $\widehat{B_{st}}^G \otimes_{K_0} M$ où M est l'objet correspondant de $MF_K(\phi, N)$. De l'isomorphisme $\widehat{\alpha_{st}} : \widehat{B_{st}} \otimes_{\widehat{B_{st}}^G} \hat{M} \xrightarrow{\sim} \widehat{B_{st}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$, on déduit $Fil^0(\widehat{B_{st}} \otimes_{\widehat{B_{st}}^G} \hat{M})_{\mathcal{N}=0} \simeq Fil^0(B_{cris}) \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$. En utilisant $[Fil^0(B_{cris})]^{\phi=1} = \mathbf{Q}_p$ ([Fo2],5.3.7,iii)) et (8.1.2), on déduit un isomorphisme de modules galoisiens $Fil^0(B_{st} \otimes_{K_0} M)^{\phi=1}_{N=0} \simeq V$, d'où un diagramme commutatif (de modules galoisiens):

$$\begin{array}{ccc} B_{st} \otimes_{\mathbf{Q}_p} Fil^0(B_{st} \otimes_{K_0} M)^{\phi=1}_{N=0} & \hookrightarrow & \widehat{B_{st}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} Fil^0(B_{st} \otimes_{K_0} M)^{\phi=1}_{N=0} \\ {\scriptstyle \beta_{st}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \widehat{\alpha_{st}}^{-1}} \\ B_{st} \otimes_{K_0} M & \hookrightarrow & \widehat{B_{st}} \otimes_{K_0} M \end{array}$$

Soit $e_1, ..., e_n$ une base de M sur K_0, $f_1, ..., f_n$ une base de $Fil^0(B_{st} \otimes_{K_0} M)^{\phi=1}_{N=0}$ sur $\mathbf{Q}_p$ ($n = \dim_{\mathbf{Q}_p} V$) et notons $det = det_{(e_1,...,e_n)}(f_1, ..., f_n) \in B_{st}$. Dans $B_{st} \otimes_{K_0} \Lambda^n_{K_0} M$, on a $N(f_1 \wedge ... \wedge f_n) = 0 = det.N(e_1 \wedge ... \wedge e_n) + N(det).e_1 \wedge ... \wedge e_n$, d'où $N(det) = \lambda.det$ avec $\lambda \in K_0$, ce qui entraine $det \in B_{cris}$. Mais det est inversible dans $\widehat{B_{st}}$ par hypothèse et son inverse est tel que $N(det.det^{-1}) = 0 = N(det^{-1}).det$, donc $N(det^{-1}) = 0$ et $det^{-1} \in B_{cris}$. Finalement, β_{st} est aussi un isomorphisme de modules galoisiens et $\widehat{\alpha_{st}}$ induit un isomorphisme compatible aux Frobenius et aux dérivations $M \xrightarrow{\sim} (B_{st} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^G$ qui montre que V est semi-stable. De plus, on a des injections:

$$\widehat{B_{st}}^G \otimes_{K_0} (B_{st} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^G \hookrightarrow \left((\widehat{B_{st}}^G \otimes_{K_0} B_{st}) \otimes_{\mathbf{Q}_p} V\right)^G \overset{(7.2)}{\hookrightarrow} (\widehat{B_{st}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^G$$

qui sont en fait des isomorphismes de modules galoisiens strictement compatibles aux filtrations après tensorisation par K, et du diagramme commutatif (de modules galoisiens):

$$\begin{array}{ccc} \widehat{B_{st,K}}^G \otimes_K (B_{st,K} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^G & \overset{\sim}{\to} & (\widehat{B_{st,K}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^G = \widehat{M}_K \\ {\scriptstyle f_\pi \otimes Id} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle f_\pi} \\ (B_{st,K} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^G & \overset{\sim}{\to} & M_K \end{array}$$

on déduit $(f_\pi \otimes Id)\Big(Fil^i(\widehat{B_{st,K}}^G \otimes_K (B_{st,K} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^G)\Big) \simeq f_\pi\Big(Fil^i(\widehat{M}_K)\Big)$ i.e. $Fil^i\Big((B_{st,K} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^G\Big) \overset{\sim}{\to} Fil^i(M_K)$, ce qui montre que $D_{st}(V)$ est exactement l'objet de $MF_K(\phi, N)$ associé à $\widehat{D_{st}}(V)$ (6.1.1). $\square$

9 Conclusion

Notons $Rep_{st}(G)$ (resp. $\widehat{Rep_{st}}(G)$) la catégorie des représentations semi-stables de G (resp. $\widehat{B_{st}}$-admissibles), $MF_K^{ad}(\phi, N)$ l'image essentielle dans $MF_K(\phi, N)$ par le foncteur D_{st} (9.2) des représentations semi-stables et $\mathcal{MF}^{ad}_{\widehat{B_{st}}^G}(\Phi, \mathcal{N})$ l'image essentielle dans $\mathcal{MF}_{\widehat{B_{st}}^G}(\Phi, \mathcal{N})$ de $MF_K^{ad}(\phi, N)$ par le foncteur T de (6.1.1). Tout ce qui précède peut finalement être résumé par le diagramme suivant (les $\Leftrightarrow$ désignant des équivalences de catégories):

$$\begin{array}{ccc} Rep_{st}(G) & = & \widehat{Rep_{st}}(G) \\ {\scriptstyle D_{st}} \Updownarrow & & \Updownarrow {\scriptstyle \widehat{D_{st}}} \\ MF_K^{ad}(\phi, N) & \overset{T}{\Longleftrightarrow} & \mathcal{MF}^{ad}_{\widehat{B_{st}}^G}(\Phi, \mathcal{N}) \\ \bigcap & & \bigcap \\ MF_K(\phi, N) & \overset{T}{\Longleftrightarrow} & \mathcal{MF}_{\widehat{B_{st}}^G}(\Phi, \mathcal{N}) \end{array}$$

Pour terminer, soit X_K un schéma propre et lisse sur K à mauvaise réduction semi-stable sur $\mathcal{O}_K$. Dans [HK], Hyodo et Kato, pour définir la cohomologie cristalline à pôles logarithmiques, passent d'abord par l'intermédiaire de certains R_n-modules (voir section 2 pour R_n), notons les $\hat{H}^i_n$, et construisent un isomorphisme canonique (preuve du th.5.1 de [HK]):

$$K \otimes_W \varprojlim \hat{H}^i_n \simeq (K \otimes_W \varprojlim R_n) \otimes_K H^i_{dR}(X_K) = S_{min,K} \otimes_K H^i_{dR}(X_K)$$

pour tout i, qui devrait coïncider avec celui construit en (6.1.1). Autrement dit, dans le cas de mauvaise réduction semi-stable, la géométrie amène naturellement à définir des R_n-modules au lieu des W_n-modules du cas de bonne réduction non ramifié. Cette remarque et l'équivalence de catégories (6.1.1) suggèrent qu'une théorie générale à la Fontaine-Laffaille existe peut-être avec des S^0_{min}-modules (i.e.

pour la réduction semi-stable avec $e \geq 1$, [FL] traitant le cas de bonne réduction non ramifié). Faltings a des résultats partiels pour le cas de réduction semi-stable non ramifié ([Fa2],5), mais qui ne permettent pas d'obtenir, en dimension 2 par exemple, toutes les représentations p-adiques semi-stables (voir aussi ses travaux à venir pour le cas de bonne réduction ramifié). Dans un prochain travail sur le cas non ramifié ([Br2]), nous construisons pour p suffisamment grand toutes les représentations p-adiques semi-stables de dimension 2 (entre autres) en montrant que certains (ϕ, N)-modules filtrés de dimension 2 faiblement admissibles ([Fo3],4.4.3), avec un N non nul, sont admissibles, i.e. sont dans $MF_{K_0}^{ad}(\phi, N)$. Nous décrivons les exposants des caractères fondamentaux de l'action de l'inertie modérée sur les semi-simplifiées modulo p de ces représentations.

A Bases adaptées pour la filtration canonique

Cet appendice présente un résultat indépendant, qui n'est pas utilisé dans les preuves des théorèmes (3.3) et (6.1.1). S désigne toujours une ϕ-algèbre admissible (5.1.2) (en fait, on n'aura pas besoin ici de l'existence du Frobenius).

Soit $\mathcal{MF}_S^s(\mathcal{N})$ la catégorie suivante: les objets sont des S-modules $\hat{M}$ comme en (6.2.2.1) tels que 1): $\hat{M}$ est libre de rang fini et 2): il existe $i_1 >> 0$ tel que pour $i \geq i_1$, $Fil^i(\hat{M}) = Fil^{i-i_1}(S).Fil^{i_1}(\hat{M}) + Fil^i(S).\hat{M}$. Les flèches sont définies de manière évidente. Si $\hat{M}$ est dans $\mathcal{MF}_S^s(\mathcal{N})$, on note i_0 (resp. i_1) le plus grand (resp. petit) entier tel que $Fil^{i_0}(\hat{M}) = \hat{M}$ (resp. i_1 vérifie 2)).

Définition A.1 *Soit $\hat{M}$ dans $\mathcal{MF}_S^s(\mathcal{N})$ de rang n. On dit qu'une base $(\hat{e_1}, ..., \hat{e_n})$ de $\hat{M}$ est adaptée à la filtration s'il existe des entiers $1 = n_{i_0} \leq n_{i_0+1} \leq ... \leq n_{i_1} \leq n$ tels que, pour $i_0 \leq i \leq i_1$:*

$$Fil^i(\hat{M}) = \left(S.\hat{e_{n_i}} \oplus S.\hat{e_{n_i+1}} \oplus ... \oplus S.\hat{e_n}\right) + \sum_{k \in \mathbf{N}^*} Fil^k(S).Fil^{i-k}(\hat{M})$$

Soit $MF_K^s(N)$ la catégorie suivante: les objets sont des K_0-espaces vectoriels M de dimension finie munis d'un opérateur K_0-linéaire *nilpotent* N et tels que $M_K = K \otimes_{K_0} M$ est muni d'une filtration décroissante $Fil^{\cdot}(M_K)$ par des sous-K-espaces vectoriels vérifiant $Fil^i(M_K) = M_K$ pour $i << 0$ et $Fil^i(M_K) = 0$ pour $i >> 0$. Si M est dans $MF_K^s(N)$, on pose $\hat{M} = S \otimes_{K_0} M$ qu'on munit de la filtration canonique (voir 7 ou 6.2.2): on vérifie aisément que c'est un objet de $\mathcal{MF}_S^s(\mathcal{N})$ (par exemple en utilisant (6.2.2.3) puis (6.2.2.1) pour 2)). On dira que $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ (resp. $0 \to \hat{M}' \to \hat{M} \to \hat{M}'' \to 0$) est une suite exacte dans $MF_K^s(N)$ (resp. $\mathcal{MF}_S^s(\mathcal{N})$) si pour tout $i \in \mathbf{Z}$, on a une suite exacte de modules $0 \to Fil^i(M') \to Fil^i(M) \to Fil^i(M'') \to 0$ (resp. $0 \to Fil^i(\hat{M}') \to Fil^i(\hat{M}) \to Fil^i(\hat{M}'') \to 0$). On commence par deux lemmes faciles:

Lemme A.2 *Soit* $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ *une suite exacte de* $MF_K^s(N)$*, alors* $0 \to S \otimes_{K_0} M' \to S \otimes_{K_0} M \to S \otimes_{K_0} M'' \to 0$ *est une suite exacte de* $\mathcal{MF}_S^s(\mathcal{N})$ *(avec filtrations canoniques).*

Preuve. — Il faut vérifier l'exactitude sur les filtrations seulement. Par (6.2.2.3), la filtration quotient $\widetilde{Fil}^i(S \otimes_{K_0} M'') = Fil^i(S \otimes_{K_0} M)/Fil^i(S \otimes_{K_0} M')$ vérifie les hypothèses en (6.2.2.1): c'est donc la filtration canonique Fil^i. $\square$

Lemme A.3 *Soit* $0 \to \hat{M}' \to \hat{M} \to \hat{M}'' \to 0$ *une suite exacte dans* $\mathcal{MF}_S^s(\mathcal{N})$*. Si* $\hat{M}'$ *et* $\hat{M}''$ *admettent des bases adaptées, alors* $\hat{M}$ *admet une base adaptée.*

Preuve. — Soit $(\hat{f}_1, ..., \hat{f}_r)$ (resp. $(\hat{h}_1, ..., \hat{h}_s)$) une base adaptée de $\hat{M}'$ (resp. $\hat{M}''$). Puisque pour tout $i \in \mathbf{Z}$, on a des suites exactes de S-modules $0 \to Fil^i(\hat{M}') \to Fil^i(\hat{M}) \to Fil^i(\hat{M}'') \to 0$, on peut choisir des relevés $(\hat{g}_1, ..., \hat{g}_s)$ dans $\hat{M}$ des $\hat{h}_k$ qui respectent la filtration. Il est facile de voir alors que $(\hat{f}_1, ..., \hat{f}_r, \hat{g}_1, ..., \hat{g}_s)$ (éventuellement renumérotée) est une base de $\hat{M}$ adaptée à la filtration. $\square$

Proposition A.4 *Soit* M *un objet de* $MF_K^s(N)$ *et* $\hat{M}$ *l'objet associé de* $\mathcal{MF}_S^s(\mathcal{N})$*, alors* $\hat{M}$ *admet une base adaptée à la filtration.*

Preuve. — Supposons d'abord $N = 0$ sur M. Soient $(e_1, ..., e_n)$ une base de M et $(f_1, ..., f_n)$ une base de M_K adaptée à la filtration et numérotée telle que $f_i \in Fil^j(M_K) \Rightarrow f_{i+1} \in Fil^j(M_K)$. Par des manipulations d'algèbre linéaire élémentaires, et quitte à renuméroter la base $(e_1, ..., e_n)$, on peut trouver une base $(g_1, ..., g_n)$ de M_K adaptée à la filtration dont la matrice dans $(e_1, ..., e_n)$ est de la forme:

$$\begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_n(K)$$

On trouve facilement une base $(\hat{g}_1, ..., \hat{g}_n)$ de $\hat{M}$ telle que $f_\pi(\hat{g}_i) = g_i$ et dont la matrice dans $(1 \otimes e_1, ..., 1 \otimes e_n)$ est encore de la forme:

$$\begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_n(S)$$

Soit r_i l'indice maximal tel que $g_i \in Fil^{r_i}(M_K)$. En remarquant que $\mathcal{N}^k(\hat{g}_i) \in S.e_{i-1} \oplus ... \oplus S.e_1$ (car $N(e_i) = 0$) et en utilisant la formule récurrente de la preuve de (6.2.2.3), on peut changer $\hat{g}_i$ pour avoir $\hat{g}_i \in Fil^{r_i}(\hat{M})$. Un examen précis de la formule donne de plus $\hat{g_i} - 1 \otimes e_i \in S.e_{i-1} \oplus ... \oplus S.e_1$ et $\mathcal{N}(\hat{g_i}) \in Fil^{i-1}(S).\hat{M}$. On pose alors:

$$\widetilde{Fil}^i(\hat{M}) = \Big(\bigoplus_{g_k \in Fil^i(M_K)} S.\hat{g_k} \Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\substack{g_k \in Fil^{i-1}(M_K) \\ g_k \notin Fil^i(M_K)}} Fil^1(S).\hat{g_i} \Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\substack{g_k \in Fil^{i-2}(M_K) \\ g_k \notin Fil^{i-1}(M_K)}} Fil^2(S).\hat{g_i} \Big) \oplus ...$$

Par (6.2.2.1) (toutes les hypothèses sont vérifiées) $\widetilde{Fil}^{\cdot}$ s'identifie à la filtration canonique et $(\hat{g_1}, ..., \hat{g_n})$ est donc une base adaptée. Si N est nilpotent quelconque, on a des suites exactes dans $MF_K^s(N)$ $(k \geq 2)$:

$$0 \to KerN^{k-1} \to KerN^k \to KerN^k/KerN^{k-1} \to 0$$

Comme $N|_{KerN} = N|_{KerN^k/KerN^{k-1}} = 0$, on sait par ce qui précède que $S \otimes_{K_0} KerN$ (resp. $S \otimes_{K_0} KerN^k/KerN^{k-1}$) admet une base adaptée. Une récurrence facile qui utilise successivement (A.2) et (A.3) montre que $S \otimes_{K_0} M$ admet une base adaptée. $\square$

Remarque: Soit M un objet de $MF_K^s(N)$, $\hat{M}$ l'objet associé de $\mathcal{MF}_S^s(\mathcal{N})$ et $\widehat{M_K} = S_K \otimes_S \hat{M}$ muni de la filtration produit tensoriel (qui est aussi la filtration canonique, voir (6.2.2.2)). Comme me l'a fait remarquer Tsuji, on peut alors facilement expliciter une base de $\widehat{M_K}$ adaptée à la filtration. Supposons, pour simplifier, que $Fil^0(M_K) = M_K$ et rappelons que $S_\pi = K[[u-\pi]]$. Soit $(f_1, ..., f_n)$ une base de M_K adaptée à la filtration et considérons les vecteurs suivants de $S_\pi \otimes_K M_K$:

$$\hat{f_{i,\pi}} = exp\Big(Log(\frac{u}{\pi}).N_K\Big)(f_i) = \sum_{j=0}^{\infty} \Big(Log(\frac{u}{\pi})\Big)^j . \frac{N_K^j}{j!}(f_i)$$

On remarque que, dans $S_\pi \otimes_K M_K$, $\mathcal{N}_K(\hat{f_{i,\pi}}) = (N_K \otimes Id + Id \otimes N_K)(\hat{f_{i,\pi}}) = 0$. Si r_i est l'unique entier tel que $f_i \in Fil^{r_i}(M_K)$ et $f_i \notin Fil^{r_i+1}(M_K)$, notons $\hat{f_i}$ l'élément de $S_\pi \otimes_K M_K$ obtenu en ne gardant, dans le développement de $\hat{f_{i,\pi}}$ en puissances de $u - \pi$, que les termes de degré inférieur ou égal à $r_i - 1$: c'est un élément de $\widehat{M_K}$ et on peut vérifier que la base $\hat{f_i}$ est alors une base adaptée à la filtration canonique sur $\widehat{M_K}$. En effet, la filtration "engendrée" par cette base (en un sens évident) vérifie la transversalité de Griffiths (en fait, $\mathcal{N}_K(\hat{f_i}) \in (u-\pi)^{r_i-1}.\widehat{M_K}$), sa filtration image sur M_K par l'application f_π (voir 6.2.2) est bien la filtration initiale de M_K et on conclut par (6.2.2.1).

Bibliographie

[Br1] Breuil C., *Topologie log-syntomique, cohomologie log-cristalline et cohomologie de Čech*, preprint, Ecole Polytechnique, 1995.

[Br2] Breuil C., *Construction de représentations p-adiques semi-stables*, preprint, Ecole Polytechnique, 1995.

[Fa1] Faltings G., *Crystalline cohomology and p-adic Galois representations*, Algebraic analysis, Geometry and Number Theory, Johns Hopkins Univ. Press, 1989, 25-79.

[Fa2] Faltings G., *Crystalline cohomology of semi-stable curves, and p-adic Galois representations*, Journal of Algebraic Geometry 1, 1992, 61-82.

[Fo1] Fontaine J.-M., *Modules galoisiens, modules filtrés et anneaux de Barsotti-Tate*, **in** Journées de Géométrie Algébrique de Rennes (III), Astérisque 65, Soc. Math. de France, 1979, 3-80.

[Fo2] Fontaine J.-M., *Le corps des périodes p-adiques*, Astérisque 223, Soc. Math. de France, 1994, 59-111.

[Fo3] Fontaine J.-M., *Représentations p-adiques semi-stables*, Astérisque 223, Soc. Math. de France, 1994, 113-184.

[Fo4] Fontaine J.-M., *Sur certains types de représentations p-adiques du groupe de Galois d'un corps local; construction d'un anneau de Barsotti-Tate*, Annals of maths 115, 1982, 529-577.

[FL] Fontaine J.-M., Laffaille G., *Construction de représentations p-adiques*, Ann. Scient. E.N.S. 15, 1982, 547-608.

[FM] Fontaine J.-M., Messing W., *P-adic periods and p-adic étale cohomology*, Contemporary Mathematics 67, 1987, 179-207.

[HK] Hyodo O., Kato K., *Semi-stable reduction and crystalline cohomology with logarithmic poles*, Astérisque 223, Soc. Math. de France, 1994, 221-268.

[Il] Illusie L., *Cohomologie de de Rham et cohomologie étale p-adique [d'après G. Faltings, J.M. Fontaine et al.]*, Séminaire Bourbaki 726, juin 1990.

[Ka] Kato K., *Semi-stable reduction and p-adic étale cohomology*, Astérisque 223, Soc. Math. de France, 1994, 269-293.

[Og] Ogus A., *F-crystals, Griffiths transversality and the Hodge decomposition*, Astérisque 221, Soc. Math. de France, 1994.

[Ta] Tate J., *p-Divisible Groups*, **in** Proc. of a Conf. on Local Fields, NUFFIC Summer School, Driebergen, Springer, Berlin, 1967, 158-183.

[Ts] Tsuji T., *On syntomic cohomology of higher degree of a semi-stable family*, preprint, Kyoto, 1994.