Représentations ordinaires de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ et compatibilité local-global

Christophe Breuil

28 juin 2005

Notations :

$$\begin{array}{rcl}
p & = & \text{nombre premier, } \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C},\ \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p} \\
f & = & \text{forme modulaire parabolique nouvelle} \\
 & & \text{dans } S_k(\Gamma_0(Mp^r),\chi),\ k \geq 2, (M,p)=1 \\
 & & T_\ell f = a_\ell(f) f,\ \forall\ \ell \nmid Mp \\
\sigma(f) & = & \text{représentation } p\text{−adique de } \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \\
 & & \text{telle que, } \forall\ \ell \nmid Mp\ : \\
 & & \mathrm{Frob}_\ell^2 - a_\ell(f)\,\mathrm{Frob}_\ell + \chi(\ell)\ell^{k-1} = 0 \\
 & & (\mathrm{Frob}_\ell\ =\ \text{Frobenius arithmétique}) \\
\sigma_\ell(f) & = & \sigma(f)|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}/\mathbb{Q}_\ell)}\ \ (\forall\ \ell \text{ premier}) \\
\pi_\ell(f) & = & \text{représentation lisse de } \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_\ell) \text{ asso−} \\
 & & \text{ciée à } f\ (\forall\ \ell \text{ premier})
\end{array}$$

Motivation :

Si $\ell \neq p$:

$$\sigma_\ell(f) \longleftrightarrow \pi_\ell(f) \qquad \text{(Delig., Langl., Caray.)}$$

par la correspondance de Hecke (à F-semi-simplification près).

Si $\ell = p$:

$$\sigma_p(f) \longrightarrow \pi_p(f) \qquad \text{(T.Saito, Faltings)}$$

mais plusieurs $\sigma_p(f)$ peuvent donner le même $\pi_p(f)$.

Question 1 *Y-a-t'il une représentation « naturelle » de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$*, notée* $\Pi_p(f)$*, telle que, en un sens convenable :*

$$\sigma_p(f) \longleftrightarrow \Pi_p(f) \quad ?$$

Dans cet exposé, on donne un candidat pour $\Pi_p(f)$ et on le teste dans le cas particulier où f est ordinaire en p (i.e. $a_p(f) =$ unité p-adique).

On fixe L extension finie de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$ d'anneau d'entiers $\mathcal{O}_L$ telle que $f(q) \in \mathcal{O}_L[[q]]$.

La représentation $\Pi_p(f)$:

$$\widehat{H}^1(M) \stackrel{\text{déf}}{=} \varprojlim_n \Big(\varinjlim_r H^1_{\text{ét}}(Y_1(M;p^r)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \Big)$$

$$\widehat{H}^1(M)_L \stackrel{\text{déf}}{=} L \otimes_{\mathbb{Z}_p} \widehat{H}^1(M)$$

($Y_1(M;p^r)$ = courbe modulaire sur $\mathbb{Q}$ (non géométriquement connexe) associée à $\Gamma_1(M) \cap \Gamma(p^r)$).

L'espace $\widehat{H}^1(M)_L$ est un espace de Banach p-adique sur L muni d'actions qui commutent de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ et T_ℓ,$\langle \ell \rangle$, $\ell \nmid Mp$.

L'application donnée par l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$:

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \times \widehat{H}^1(M)_L \to \widehat{H}^1(M)_L$$

est continue et $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ préserve la boule unité $\mathcal{O}_L \otimes_{\mathbb{Z}_p} \widehat{H}^1(M)$: on dit que $\widehat{H}^1(M)_L$ est un $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaire.

Définition 2

$$\Pi_p(f) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}\Big(\sigma(f)^\vee, \widehat{H}^1(M)_L\Big)$$

$\Pi_p(f)$ est aussi un $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaire.

Théorème 3 (Emerton) *Les vecteurs localement algébriques de $\Pi_p(f)$ s'identifient à la représentation localement algébrique :*

$$\mathrm{Sym}^{k-2} L^2 \otimes_L \pi_p(f).$$

Espoir : $\Pi_p(f) \longleftrightarrow \sigma_p(f)$?

(Plus généralement, quelle est la structure de la $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-représentation $\widehat{H}^1(M)_L$?)

Nous supposons maintenant f ordinaire en p. Il y a deux cas à distinguer :

(i) $k = 2$ et $\pi_p(f) =$ série spéciale

(ii) $k \geq 2$ et $\pi_p(f) =$ série principale.

Cas particulier f ordinaire :

(i) $k = 2$, $\pi_p(f) = \left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} 1\right)/1$ (à torsion près).

Dans ce cas, pour retrouver $\sigma_p(f)$, il manque l'invariant $\mathcal{L}(f)$ de Fontaine-Mazur-Tate-Teitelbaum (si f est à coefficients dans $\mathbb{Z}$, $f \leftrightarrow E/\mathbb{Q}$ avec $E(\overline{\mathbb{Q}_p}) \simeq \overline{\mathbb{Q}_p}^{\times}/q^{\mathbb{Z}}$ et $\mathcal{L}(f) = \frac{\log_{\mathrm{Iw}}(q)}{\mathrm{val}(q)}$).

Pour $\mathcal{L} \in L$, posons $\log_{\mathcal{L}} \stackrel{\text{déf}}{=} \log_{\mathrm{Iw}} + \mathcal{L}\,\mathrm{val}$. La fonction $\log_{\mathcal{L}}$ permet de définir une représentation $\mathcal{E}(\mathcal{L})$ du tore $\mathrm{T}(\mathbb{Q}_p) \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ qui est une extension non triviale :

$$0 \to 1 \to \mathcal{E}(\mathcal{L}) \to 1 \to 0$$

($\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} e_2 = (\log_{\mathcal{L}}(a) - \log_{\mathcal{L}}(d))e_1 + e_2$). Il existe un sous-quotient $B(\mathcal{L})$ de l'induite parabolique continue $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \mathcal{E}(\mathcal{L})\right)^{\mathcal{C}^0}$ qui est une extension non triviale de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaires :

$$0 \to \mathrm{Steinberg}^{\mathrm{cont}} \to B(\mathcal{L}) \to 1 \to 0$$

où Steinberg$^{\text{cont}} \overset{\text{déf}}{=} \left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} 1\right)^{\mathcal{C}^0} / 1$.

Théorème 4 (B.) *L'injection équivariante :*

$$\pi_p(f) \hookrightarrow \Pi_p(f)$$

se prolonge de manière unique en une injection continue fermée $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$*-équivariante :*

$$B(-\mathcal{L}(f)) \otimes \mathrm{nr}(a_p(f)^{-1}) \hookrightarrow \Pi_p(f)$$

où $\mathrm{nr}(x) : \mathbb{Q}_p^\times \to L^\times$ *est le caractère non ramifié envoyant* p *sur* x*.*

La preuve utilise (entre autres) les symboles modulaires et une interprétaton de $\mathcal{L}(f)$ due à H. Darmon.

Question 5 *A-t'on :*

$$B(-\mathcal{L}(f)) \otimes \mathrm{nr}(a_p(f)^{-1}) \xrightarrow{\sim} \Pi_p(f) \ ?$$

(ii) $k \geq 2$, $\pi_p(f)$ = série principale

Ce cas est un travail en collaboration avec M. Emerton.

Les hypothèses impliquent $\sigma_p(f)$ potentiellement cristalline et réductible, i.e. de la forme :

$$\sigma_p(f) \simeq \begin{pmatrix} \eta_1\varepsilon & *(f) \\ 0 & \eta_2 \end{pmatrix}$$

où ε = caractère cyclotomique p-adique, η_1 (resp. η_2) = caractère potentiellement cristallin de poids (de Hodge-Tate) $k-2$ (resp. 0). L'extension $*(f)$ est unique si elle est non-nulle. Ce qui manque cette fois à $\pi_p(f)$ (ou plutôt à $\mathrm{Sym}^{k-2} L^2 \otimes \pi_p(f)$) pour déterminer $\sigma_p(f)$ est de savoir si $*(f) = 0$ ou non.

Nous allons définir deux $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaires $B(0)$ et $B(1)$ correspondant aux deux cas $*(f) = 0$ et $*(f) \neq 0$. Lorsque $*(f) \neq 0$, on pose par convention $*(f) = 1$.

• si $*(f) = 0$, on pose :

$$B(0) \overset{\text{déf}}{=} \left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \eta_2 \otimes \eta_1\right)^{\mathcal{C}^0} \oplus \left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \eta_1\varepsilon \otimes \eta_2\varepsilon^{-1}\right)^{\mathcal{C}^0}$$

• si $*(f) = 1$, on pose :
$B(1) \overset{\text{déf}}{=}$ complété unitaire de l'induite analytique $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \eta_1 \mid\mid^{k-1} \varepsilon^{2-k} \otimes \eta_2 \mid\mid^{1-k} \varepsilon^{k-2}\right)^{\mathrm{an}}$ (il n'existe qu'une seule norme $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-invariante sur cette induite à équivalence près). On peut alors montrer que $B(1)$ est une extension non triviale de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaires :

$$0 \to \left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \eta_2 \otimes \eta_1\right)^{\mathcal{C}^0} \to B(1) \to \left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \eta_1\varepsilon \otimes \eta_2\varepsilon^{-1}\right)^{\mathcal{C}^0} \to 0$$

[$\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \eta \otimes \eta'\right)^{\mathcal{C}^0}$ (resp. $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \eta \otimes \eta'\right)^{\mathrm{an}}$) désigne les fonctions continues (resp. localement analytiques) F sur $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ à valeurs dans L telles que $F(bg) = (\eta \otimes \eta')(b)F(g)$, l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ étant la translation usuelle à droite sur les fonctions.]

Morale : « c'est scindé côté $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ si et seulement si c'est scindé côté $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ ».

Théorème 6 (Emerton + B.) *Supposons $p > 3$ et $N > 4$.*
(i) L'injection équivariante :

$$\mathrm{Sym}^{k-2} L^2 \otimes \pi_p(f) \hookrightarrow \Pi_p(f)$$

se prolonge en une injection continue fermée $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariante :

$$B(*(f)) \hookrightarrow \Pi_p(f).$$

(ii) Si $\sigma_p(f)$ n'est pas scindé (i.e. $*(f) = 1$), on a de plus $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\Big(B(1), \Pi_p(f)\Big) = L$ et :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\left(\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \eta_1\varepsilon \otimes \eta_2\varepsilon^{-1}\right)^{\mathcal{C}^0}, \Pi_p(f)\right) = 0.$$

Question 7 *A-t'on :*

$$B(*(f)) \xrightarrow{\sim} \Pi_p(f) \text{ ?}$$

Nous donnons maintenant les principales étapes dans la preuve du théorème 6.

Esquisse de preuve du théorème 6 :

La preuve utilise principalement deux ingrédients donnant lieu à deux théorèmes intermédiaires :
(i) le théorème de comparaison p-adique pour les formes modulaires (Faltings, Tsuji, $\cdots$)
(ii) la construction d'un foncteur de Jacquet p-adique (Emerton).

(i) Si N est premier à p, soient α, β les racines de $X^2 - a_p(f)X + p^{k-1}\chi(p)$ avec β unité p-adique et $\widetilde{f} \overset{\text{déf}}{=} f(z) - \beta f(pz)$.
Si $N = Mp^r$ avec $r > 0$, soit $\widetilde{f} \overset{\text{déf}}{=} f\,|_{w_{p^r}}$ où $w_{p^r} \overset{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} p^r a & b \\ Nc & p^r d \end{pmatrix}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $b \equiv 1 \bmod p^r$, $a \equiv 1 \bmod M$ et $p^r ab - Mcd = 1$.

La forme $\widetilde{f}$ est vecteur propre de U_p de pente $k-1$, i.e. vérifie $U_p\widetilde{f} = \alpha\widetilde{f}$ avec $\mathrm{val}(\alpha) = k-1$.

Théorème 8 *Supposons $p > 3$ et $N > 4$. Alors $\sigma_p(f)$ est scindé si et seulement s'il existe une forme surconvergente h (nécessairement de pente nulle et de poids $2-k$) telle que $\widetilde{f} = \theta^{k-1}(h)$.*

Rappelons que $\theta = qd/dq$ sur les q-développements.

La forme h (lorsqu'elle existe) mérite le nom de forme compagnon surconvergente de f et le théorème 8 est donc un analogue en caractéristique 0 du théorème de Gross (« A tameness criterion »).

Sa preuve est basée sur les théorèmes de comparaison p-adiques usuels combinés avec la théorie des formes modulaires surconvergentes.

L'hypothèse sur p est là pour disposer de la série d'Eisenstein E_{p-1} et celle sur N pour disposer de la courbe modulaire $X_1(N)$. Aucune n'est certainement indispensable.

Certains cas du théorème 8 étaient déjà connus par une méthode de relèvement à la caractéristique 0 du résultat de Gross (Buzzard, Taylor, Ghate).

(ii) On dit qu'une forme surconvergente g de poids entier k telle que $U_p g = \alpha g$ avec $\alpha \in \mathcal{O}_L \setminus \{0\}$ est « mauvaise » si $g \in \mathrm{Image}(\theta^{k-1})$. Cela entraîne $\mathrm{val}(\alpha) \geq k-1$.

Théorème 9 *Soit g une forme modulaire surconvergente de poids entier k, niveau modéré M, caractère χ, vecteur propre des opérateurs de Hecke et telle que $U_p g = \alpha g$ avec $\alpha \neq 0$. Supposons que g n'est pas « mauvaise ». Alors on a une injection continue $\mathsf{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariante (non-unique) :*

$$\left(\mathrm{Ind}_{\mathsf{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathsf{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \mathrm{nr}(\alpha^{-1}) \otimes \chi_p \mathrm{nr}(\alpha) \varepsilon^{k-2}\right)^{\mathrm{an}} \hookrightarrow \widehat{H}^1(M)_L^g$$

où $\widehat{H}^1(M)_L^g$ est l'espace propre de $\widehat{H}^1(M)_L$ pour l'action de Hecke (hors Mp) et pour les valeurs propres de g, χ_p est la composante en p du caractère des adèles finis de $\mathbb{Q}$ déduit de χ et « an » désigne l'induite parabolique localement analytique.

Le théorème 9 s'obtient de la manière suivante :

À la forme surconvergente g correspond un point de la courbe de Coleman-Mazur. On note $J_B\Big(\widehat{H}^1(M)_L\Big)$ la représentation de $\mathsf{T}(\mathbb{Q}_p)$ obtenue après application du foncteur de Jacquet p-adique d'Emerton J_B à $\widehat{H}^1(M)_L$. Tout point de la courbe de Coleman-Mazur s'interprète comme un sous-espace propre de $J_B\Big(\widehat{H}^1(M)_L\Big)$ pour l'action de $\mathsf{T}(\mathbb{Q}_p)$ et des opérateurs de Hecke (hors Mp). Ainsi, g correspond au sous-espace propre pour le caractère $\chi_p\mathrm{nr}(\alpha)\varepsilon^{k-2}\,|\;|\otimes \mathrm{nr}(\alpha^{-1})\;|\;|^{-1}$ de $\mathsf{T}(\mathbb{Q}_p)$. On déduit alors le théorème 9 d'une loi d'adjonction pour le foncteur J_B (sorte de réciprocité de Frobenius), sauf dans le cas essentiel $\mathrm{val}(\alpha) = k - 1$ et $g \notin \mathrm{Image}(\theta^{k-1})$ qui nécessite plus de travail.

Noter que lorsque $\mathrm{val}(\alpha) \leq k - 2$, alors g est classique (Coleman) et l'injection du théorème 9 s'obtient par prolongement à partir d'une injection $\mathrm{Sym}^{k-2} L^2 \otimes \pi_p(g) \hookrightarrow \widehat{H}^1(M)_L^g$ par la technique d'Amice-vélu et Vishik.

(iii) Preuve du théorème 6 :

• On montre d'abord facilement que le morceau $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_2\otimes\eta_1\right)^{\mathcal{C}^0}$ est toujours contenu dans $\Pi_p(f)$ car c'est l'adhérence de la représentation $\mathrm{Sym}^{k-2} L^2 \otimes_L \pi_p(f)$.

• Supposons que $\sigma_p(f)$ est scindé. En appliquant le théorème 9 à la forme surconvergente h donnée par le théorème 8 et en tordant par ε^{k-1}, on obtient une injection continue :

$$\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_1\varepsilon\otimes\eta_2\varepsilon^{-1}\right)^{\mathrm{an}} \hookrightarrow \Pi_p(f)$$

d'où (par adhérence) une immersion fermée $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariante :

$$\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_1\varepsilon\otimes\eta_2\varepsilon^{-1}\right)^{\mathcal{C}^0} \hookrightarrow \Pi_p(f).$$

Ainsi $\Pi_p(f)$ contient dans ce cas la somme directe des deux induites paraboliques continues, c'est-à-dire $B(0)$.

• Supposons maintenant que $\sigma_p(f)$ n'est pas scindé.

D'abord, $\Pi_p(f)$ ne peut contenir le morceau $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \eta_1\varepsilon \otimes \eta_2\varepsilon^{-1}\right)^{\mathcal{C}^0}$.

Sinon, par la théorie du foncteur de Jacquet p-adique, on déduit que le système de valeurs propres de Hecke associé à $\widetilde{f} \otimes \varepsilon^{-(k-1)}$, i.e. le système :

$$\begin{array}{rcl} T_\ell & = & a_\ell(f)\ell^{-(k-1)}, \langle \ell \rangle = \chi(\ell)\ell^{-(k-1)} \ (\ell \nmid Mp) \\ U_p & = & \alpha/p^{k-1} \end{array}$$

se trouve aussi dans $\widehat{H}^1(M)_L^{\mathrm{P}(\mathbb{Z}_p)}$ où $\mathrm{P}(\mathbb{Z}_p) \overset{\text{déf}}{=} \{\begin{pmatrix} a & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ a \in \mathbb{Z}_p^\times, z \in \mathbb{Z}_p\}$. Ce système de Hecke est ordinaire (car $\mathrm{val}(\alpha) = k-1$), et donc provient toujours d'une vraie forme p-adique ordinaire h (Hida) nécessairement telle que $\widetilde{f} = \theta^{k-1}(h)$, ce qui contredit le théorème 8.

Mais le théorème 9 appliqué cette fois à la forme $\widetilde{f}$ (qui n'est pas « mauvaise ») fournit une injection continue :

$$\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \eta_1 \mid \, \mid^{k-1} \varepsilon^{2-k} \otimes \eta_2 \mid \, \mid^{1-k} \varepsilon^{k-2}\right)^{\mathrm{an}} \hookrightarrow \Pi_p(f)$$

d'où (par adhérence) une immersion fermée $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariante :

$$B(1) \hookrightarrow \Pi_p(f)$$

par définition de $B(1)$.

Esquisse de preuve du théorème 8 :

Nous supposons $(N,p)=1$ pour simplifier et montrons la direction la plus délicate :

$$\sigma_p(f) \text{ scindée } \Rightarrow \widetilde{f} = \theta^{k-1}(h).$$

Module filtré associé à f :

$$\begin{aligned}
D_{\mathrm{cris}}(f) &= Le_1 \oplus Le_2 \\
\varphi(e_1) &= \alpha e_1 \\
\varphi(e_2) &= \beta e_2 \\
\mathrm{Fil}^i D_{\mathrm{cris}}(f) &= D_{\mathrm{cris}}(f),\ i \le 0 \\
\mathrm{Fil}^i D_{\mathrm{cris}}(f) &= L(e_1 + \delta e_2),\ 1 \le i \le k-1 \\
\mathrm{Fil}^i D_{\mathrm{cris}}(f) &= 0,\ i \ge k
\end{aligned}$$

avec $\delta = 0$ si et seulement si $\sigma_p(f)$ est scindé.

Réalisation géométrique du module filtré :

$$\begin{aligned}
D_{\mathrm{cris}}(f) &\simeq \Big(\mathbb{H}^1(X_1(N), \mathcal{H}_{k-2} \otimes \Omega^{\cdot}(\log)) \otimes_{\mathbb{Q}_p} L\Big)^f \\
\mathrm{Fil}^i D_{\mathrm{cris}}(f) &\simeq \Big(H^0(X_1(N), \omega^k) \otimes_{\mathbb{Q}_p} L\Big)^f \\
&= L \cdot f \qquad (1 \le i \le k-1)
\end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned}
\pi &: E \to X_1(N)\\
\tilde{C} &\overset{\text{déf}}{=} \pi^{-1}(\text{Pointes})\\
\omega &\overset{\text{déf}}{=} \pi_*\Omega^1_{E/X_1(N)}(\log \tilde{C})\\
\mathcal{H}_{k-2} &\overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Sym}^{k-2}\Big(\mathrm{R}^1\pi_*\Omega^{\cdot}_{E/X_1(N)}(\log \tilde{C})\Big).
\end{aligned}$$

et :

$$\mathcal{H}_{k-2}\otimes\Omega^{\cdot}(\log) : \mathcal{H}_{k-2} \xrightarrow{\nabla} \mathcal{H}_{k-2}\otimes_{\mathcal{O}_{X_1(N)}}\Omega^1_{X_1(N)/\mathbb{Q}_p}(\log \text{Pointes}).$$

Soit $W_1 \subset X_1(N)^{\mathrm{rig}}$ l'ouvert analytique rigide des points fermés x de $X_1(N)$ vérifiant :

$$x \in W_1 \Leftrightarrow |\,E_{p-1}(x)| > p^{-p/(p+1)}.$$

On a les isomorphismes :

$$\mathbb{H}^1\Big(W_1, \mathcal{H}_{k-2}\otimes\Omega^{\cdot}(\log)\,|_{W_1}\Big) \simeq \frac{H^0\Big(W_1,\mathcal{H}_{k-2}\otimes\Omega^1(\log)\,|_{W_1}\Big)}{\nabla\Big(H^0(W_1,\mathcal{H}_{k-2}\,|_{W_1})\Big)}$$

$$\frac{H^0(W_1,\omega^k|_{W_1})}{\theta^{k-1}\Big(H^0(W_1,\omega^{2-k}|_{W_1})\Big)} \simeq \frac{H^0\Big(W_1,\mathcal{H}_{k-2}\otimes\Omega^1(\log)|_{W_1}\Big)}{\nabla\Big(H^0(W_1,\mathcal{H}_{k-2}|_{W_1})\Big)}.$$

Supposons $\sigma_p(f)$ scindé, i.e. $\delta = 0$. On a donc $\varphi(f) = \alpha f$ dans $\mathbb{H}^1(X_1(N),\mathcal{H}_{k-2}\otimes\Omega^{\cdot}(\log))\otimes_{\mathbb{Q}_p}L$, donc :

$$\varphi(f) - \alpha f = \theta^{k-1}(h)$$

dans $H^0(W_1,\omega^k|_{W_1})$ par les deux isomorphismes. Or, si $f = \sum_{n>0} a_n(f)q^n$, on a :

$$\varphi(f) = p^{k-1}\sum_{n>0} a_n(\langle p\rangle f)q^{pn} = p^{k-1}\chi(p)f(pz)$$

d'où :

$$-\widetilde{f}(z) = \frac{p^{k-1}\chi(p)}{\alpha}f(pz) - f(z) = \frac{1}{\alpha}\theta^{k-1}(h)$$

($\beta = \frac{p^{k-1}\chi(p)}{\alpha}$).