Programme de Langlands modulo p pour $\mathsf{GL}_2(L)$ et compatibilité local-global

25 mars 2010

p nombre premier

$L =$ extension finie de $\mathbb{Q}_p$ (corps de base),
$\mathcal{O}_L$, $\mathfrak{m}_L$, $k_L \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{O}_L/\mathfrak{m}_L = \mathbb{F}_{p^f}$

$E =$ extension finie de $\mathbb{Q}_p$ (corps des coefficients),
$\mathcal{O}_E$, $\mathfrak{m}_E$, $k_E \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{O}_E/\mathfrak{m}_E$

$G \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{GL}_2(L)$, $B \overset{\text{déf}}{=}$ Borel supérieur dans G,
$K \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)$, $Z \overset{\text{déf}}{=} L^\times$

poids de Serre pour $KZ \overset{\text{déf}}{=}$ représentation lisse absolument irréductible de KZ sur k_E

$\omega \overset{\text{déf}}{=}$ caractère cyclotomique modulo p

BREFS RAPPELS POUR $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$

Théorème 1 *(Colmez, Emerton, B.-Paskunas) Soit $\chi_i : \mathbb{Q}_p^\times \to k_E^\times$, $i \in \{1,2\}$ deux caractères lisses. Supposons $\chi_1 \neq \chi_2$ et $\chi_1 \neq \chi_2\omega^{\pm 1}$, alors le k_E-espace vectoriel :*

$$\mathrm{Ext}^1_{G,\mathrm{central}}\Big(\mathrm{Ind}_B^G \chi_1 \otimes \chi_2\omega^{-1}, \mathrm{Ind}_B^G \chi_2 \otimes \chi_1\omega^{-1}\Big)$$

des extensions avec caractère central est de dimension 1.

Théorème 2 *(B.) Soit $r \in \{0, \cdots, p-1\}$ et $\sigma_r \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Sym}^r(k_E^2)$ vu comme représentation de KZ en envoyant $p \in Z$ vers Id. La représentation de G :*

$$\Big(c - \mathrm{ind}_{KZ}^G \sigma_r\Big)/T$$

est (absolument) irréductible et admissible.

(Barthel-Livné : $\mathrm{End}_G\Big(c - \mathrm{ind}_{KZ}^G \sigma_r\Big) = k_E[T]$.)

CORRESPONDANCE MODULO p pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ (CAS GÉNÉRIQUE) :

(i) La représentation de G associée à l'unique extension non-scindée (resp. scindée) dans :

$$\mathrm{Ext}^1_{G,\mathrm{central}}\Big(\mathrm{Ind}_B^G\chi_1\otimes\chi_2\omega^{-1},\mathrm{Ind}_B^G\chi_2\otimes\chi_1\omega^{-1}\Big)$$

correspond à l'unique extension non-scindée (resp. scindée) dans $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}(\chi_2,\chi_1)$.

(ii) La représentation $\Big(c\text{--}\mathrm{ind}_{KZ}^G\sigma_r\Big)/T$ correspond à l'unique représentation (absolument) irréductible de G sur k_E de dimension 2, de restriction à l'inertie $\omega_2^{r+1}\oplus\omega_2^{p(r+1)}$ et de déterminant ω^{r+1}.

($\omega_2 \overset{\text{déf}}{=}$ caractère fondamental de Serre de niveau 2.)

POURQUOI $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ NE PEUT S'ÉTENDRE DIRECTEMENT

Espoir initial naïf : l'espace des extensions $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)}(\chi_2, \chi_1)$ (qui a génériquement dimension $[L : \mathbb{Q}_p]$) est isomorphe à l'espace des extensions $\mathrm{Ext}^1_{G,\mathrm{central}}(\mathrm{Ind}_B^G \chi_1 \otimes \chi_2 \omega^{-1}, \mathrm{Ind}_B^G \chi_2 \otimes \chi_1 \omega^{-1})$?

Malheureusement :

Théorème 3 *(B.-Paskunas)*
Supposons $L \neq \mathbb{Q}_p$. Pour $\chi_1 \neq \chi_2$ on a :

$$\mathrm{Ext}^1_{G,\mathrm{central}}\Big(\mathrm{Ind}_B^G \chi_1 \otimes \chi_2 \omega^{-1}, \mathrm{Ind}_B^G \chi_2 \otimes \chi_1 \omega^{-1}\Big) = 0.$$

Théorème 4 *Supposons $L \neq \mathbb{Q}_p$. Pour σ un poids de Serre pour KZ, la représentation $\Big(c - \mathrm{ind}_{KZ}^G \sigma\Big)/T$ est de longueur infinie et n'est pas admissible.*

PREUVE : On montre que, dès que $L \neq \mathbb{Q}_p$, $\left(c-\text{ind}_{KZ}^G\sigma\right)/T$ contient (au moins) une induite compacte $c-\text{ind}_{KZ}^G\sigma'$ pour un poids de Serre σ'. $\square$

Question 5 Supposons $L \neq \mathbb{Q}_p$. Est-ce qu'il existe un quotient admissible irréductible de $(c-\text{ind}_{KZ}^G\sigma)/T$ qui est de présentation finie, i.e. qui est isomorphe à :

$$(c-\text{ind}_{KZ}^G\sigma)/V$$

pour $V \subset c-\text{ind}_{KZ}^G\sigma$ *de type fini* comme G-représentation ?

(Hu : Non si $L = k_L((t))$!)

POIDS DE SERRE

Pour $\tau : k_L \hookrightarrow k_E$, $r_\tau \in \{0, \cdots, p-1\}$ et $s_\tau \in \{0, \cdots, p-2\}$, soit σ_{r_τ, s_τ} la représentation (irréductible) de K sur k_E :

$$\sigma_{r_\tau, s_\tau} \overset{\text{déf}}{=} (\mathrm{Sym}^{r_\tau} k_E^2) \otimes_{k_E} \det{}^{s_\tau}$$

où K agit via $K \twoheadrightarrow \mathrm{GL}_2(k_L) \overset{\tau}{\hookrightarrow} \mathrm{GL}_2(k_E)$.

Définition 6 (B.-D.-J., Gee)
Soit $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L) \to \mathrm{GL}_2(k_E)$ continue et $(r_\tau, s_\tau)_{\tau : k_L \hookrightarrow k_E}$ comme ci-dessus. On dit que:

$$\sigma = \otimes_\tau \sigma_{r_\tau, s_\tau}$$

est un poids de Serre de $\overline{\rho}$ si $\overline{\rho}$ admet un relevé cristallin de poids de Hodge-Tate :

$$\Big((s_\tau, s_\tau + r_\tau + 1)_{\widehat{\tau}: L \hookrightarrow E \text{ induisant } \tau}\Big)_{\tau : k_L \hookrightarrow k_E}.$$

On étend $\otimes_\tau \sigma_{r_\tau, s_\tau}$ à KZ en envoyant une uniformisante ϖ_L sur $\det(\overline{\rho})(\varpi_L) \in k_E^\times$.

$\mathcal{S}(\overline{\rho}) \overset{\text{déf}}{=}$ ensemble des poids de Serre de $\overline{\rho}$.

ESPACES DE FORMES DE HILBERT

F = corps de nombres totalement réel. On suppose que F n'a qu'une place $\mathfrak{p}$ au-dessus de p, $L \stackrel{\text{déf}}{=} F_{\mathfrak{p}}$.

D = algèbre de quaternions sur F ramifiée aux places infinies et non-ramifiée en $\mathfrak{p}$ (et $p \nmid (1 - |\mathcal{O}_F/\mathfrak{l}|)$ en $\mathfrak{l}$ où D est ramifié.)

Pour K_f (resp. $K_f^{\mathfrak{p}}$) sous-groupe ouvert compact de $(D \otimes_F \mathbb{A}_{F,f})^\times$ (resp. $(D \otimes_F \mathbb{A}_{F,f}^{\mathfrak{p}})^\times$) :

$$\begin{aligned} S(D, K_f) &\stackrel{\text{déf}}{=} \{f : D^\times \backslash (D \otimes_F \mathbb{A}_{F,f})^\times / K_f \to k_E\} \\ S(D, K_f^{\mathfrak{p}}) &\stackrel{\text{déf}}{=} \varinjlim_{K_{\mathfrak{p}}} S(D, K_f^{\mathfrak{p}} K_{\mathfrak{p}}). \end{aligned}$$

$G = \mathrm{GL}_2(L)$ agit sur $S(D, K_f^{\mathfrak{p}})$ par translation à droite.

$T_{\mathfrak{l}}$, $S_{\mathfrak{l}}$ agissent sur $S(D, K_f)$ et $S(D, K_f^{\mathfrak{p}})$ pour presque tout $\mathfrak{l} \neq \mathfrak{p}$.

Soit $(\overline{\rho}, K_f^{\mathfrak{p}})$ tel que :

(i) $\overline{\rho}$: $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F) \to \mathrm{GL}_2(k_E)$ continue absolument irréductible $\rightsquigarrow$ $\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^\vee(1)} \subset \mathrm{End}_{k_E}(S(D, K_f^{\mathfrak{p}}))$

(ii) $S(D, K_f^{\mathfrak{p}})[\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^\vee(1)}] \neq 0$, $S(D, {K'}_f^{\mathfrak{p}})[\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^\vee(1)}] = 0$ si $K_f^{\mathfrak{p}} \subsetneq {K'}_f^{\mathfrak{p}}$ (et $K_f^{\mathfrak{p}}$ maximal en $\mathfrak{l}$ où D est ramifié).

$S(D, K_f^{\mathfrak{p}})[\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^\vee(1)}] =$ représentation lisse admissible de G sur k_E.

Objectif : comprendre cette G-représentation.

Question 7 Est-ce que la G-représentation $S(D, K_f^{\mathfrak{p}})[\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^\vee(1)}]$ ne dépend que de la représentation locale $\overline{\rho}_{\mathfrak{p}} \overset{\text{déf}}{=} \overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)}$?

(Oui si $L = \mathbb{Q}_p$.)

Trouver ce qui, dans $S(D, K_f^{\mathfrak{p}})[\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^\vee(1)}]$, peut ne dépendre que de $\overline{\rho}_{\mathfrak{p}}$ ("compatibilité local-global").

ÉNONCÉS SUR LE K-SOCLE

Conjecture 8 *(B.-D.-J., Gee, Schein)*

$$\mathrm{socle}_{KZ}\Big(S(D,K_f^{\mathfrak{p}})[\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^\vee(1)}]\Big) = \bigoplus_{\sigma\in\mathcal{S}(\overline{\rho}_{\mathfrak{p}})} \sigma^{m_\sigma}$$

pour des entiers $m_\sigma \geq 1$ (qui pourraient dépendre de plus que $\overline{\rho}_{\mathfrak{p}}$).

Théorème 9 *(Gee)*
Si $p > 2$, $L = F_{\mathfrak{p}}$ est non-ramifié, $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F(\sqrt[p]{1}))}$ est absolument irréductible et $\overline{\rho}_{\mathfrak{p}}$ est "suffisamment générique", on a :

$$\mathrm{socle}_{KZ}\Big(S(D,K_f^{\mathfrak{p}})[\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^\vee(1)}]\Big) = \bigoplus_{\sigma\in\mathcal{S}(\overline{\rho}_{\mathfrak{p}})} \sigma^{m_\sigma}$$

$$\bigoplus \text{ poids "non-réguliers"}.$$

(Gee-Savitt : résultat analogue pour L totalement ramifié et $\overline{\rho}_{\mathfrak{p}}$ semi-simple.)

Conjecture 10 *Si $\overline{\rho}_{\mathfrak{p}}$ est "suffisamment générique" et $p \gg e(L/\mathbb{Q}_p)$, on a $m_\sigma = 1$ pour tout $\sigma \in \mathcal{S}(\overline{\rho}_{\mathfrak{p}})$.*

AU DELÀ DU K-SOCLE

Soit $D_0(\overline{\rho}_{\mathfrak{p}})$ l'unique représentation lisse de KZ sur k_E maximale (pour l'inclusion) telle que:

(i) $\mathrm{socle}_{KZ} D_0(\overline{\rho}_{\mathfrak{p}}) = \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{S}(\overline{\rho}_{\mathfrak{p}})} \sigma$

(ii) $\sigma \in \mathcal{S}(\overline{\rho}_{\mathfrak{p}})$ n'apparaît que dans le socle.

Une telle représentation existe et est admissible (de dimension finie ?)

Proposition 11 *Si l'on a :*

$$\mathrm{socle}_{KZ}\Big(S(D, K_f^{\mathfrak{p}})[\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^{\vee}(1)}]\Big) = \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{S}(\overline{\rho}_{\mathfrak{p}})} \sigma$$

alors :

$$D_0(\overline{\rho}_{\mathfrak{p}}) \subset S(D, K_f^{\mathfrak{p}})[\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^{\vee}(1)}].$$

PREUVE : Utiliser l'exactitude de :

$$V \mapsto \mathrm{Hom}_{KZ}\Big(V, S(D, K_f^{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^{\vee}(1)}}\Big)$$

et $\mathrm{Hom}_{KZ}(\sigma, S(D, K_f^{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^{\vee}(1)}}) = 0$ si $\sigma \notin \mathcal{S}(\overline{\rho}_{\mathfrak{p}})$.
$\square$

$I_1 \stackrel{\text{déf}}{=}$ sous-groupe de K des matrices unipotentes supérieures modulo $\mathfrak{m}_L$

$S(D, K_f^{\mathfrak{p}})[\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^\vee(1)}] \neq 0 \Rightarrow S(D, K_f^{\mathfrak{p}} I_1)[\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^\vee(1)}] = S(D, K_f^{\mathfrak{p}})[\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^\vee(1)}]^{I_1} \neq 0$

$w_L \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varpi_L & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(F_{\mathfrak{p}})$ normalise I_1

$S(D, K_f^{\mathfrak{p}})[\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^\vee(1)}]^{I_1}$ stable sous w_L dans $S(D, K_f^{\mathfrak{p}})$.

($S(D, K_f^{\mathfrak{p}})[\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^\vee(1)}]^{I_1}$ de dimension finie.)

Conjecture 12 On suppose :

$$\mathrm{socle}_{KZ}\Big(S(D, K_f^{\mathfrak{p}})[\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^\vee(1)}]\Big) = \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{S}(\overline{\rho}_{\mathfrak{p}})} \sigma.$$

(i) (version forte) $D_0(\overline{\rho}_{\mathfrak{p}})^{I_1} \xrightarrow{\sim} S(D, K_f^{\mathfrak{p}})[\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^\vee(1)}]^{I_1}$

(ii) (version faible) $D_0(\overline{\rho}_{\mathfrak{p}})^{I_1}$ est stable par w_L dans $S(D, K_f^{\mathfrak{p}})[\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^\vee(1)}]^{I_1}$.

Théorème 13 *(i) Version forte vraie si* $|\mathcal{S}(\overline{\rho}_{\mathfrak{p}})| = 1$.

(ii) Version faible vraie si $|\mathcal{S}(\overline{\rho}_{\mathfrak{p}})| \leq 2$, *$L$ non-ramifié et $\overline{\rho}_{\mathfrak{p}}$ "suffisamment générique".*

PREUVE DE (i) : Dans ce cas, on a :

$D_0(\overline{\rho}_{\mathfrak{p}})^{I_1} = \mathrm{inj}_{\mathrm{GL}_2(k_{F_{\mathfrak{p}}})}(\sigma)^{I_1} = S(D, K_f^{\mathfrak{p}})[\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^{\vee}(1)}]^{I_1}$

où $\mathcal{S}(\overline{\rho}_{\mathfrak{p}}) = \{\sigma\}$ et inj = enveloppe injective. $\square$

Dembélé : version forte dans des cas où $F_{\mathfrak{p}}$ non-ramifié et $|\mathcal{S}(\overline{\rho}_{\mathfrak{p}})| \in \{2, 4\}$ (sur ordinateur).

(Si L non-ramifié et $\overline{\rho}_{\mathfrak{p}}$ "suffisamment générique", on a $|\mathcal{S}(\overline{\rho}_{\mathfrak{p}})| = 2^d$, $0 \leq d \leq [L : \mathbb{Q}_p]$.)

Question 14 Quelles sont les représentations lisses admissibles π de G sur k_E de KZ-socle $\bigoplus_{\sigma \in \mathcal{S}(\overline{\rho}_{\mathfrak{p}})} \sigma$, contenant $D_0(\overline{\rho}_{\mathfrak{p}})$, engendrées par $D_0(\overline{\rho}_{\mathfrak{p}})$ avec $D_0(\overline{\rho}_{\mathfrak{p}})^{I_1} = \pi^{I_1}$?

Théorème 15 *(B.-Paskunas)*
Supposons L non-ramifié distinct de $\mathbb{Q}_p$ et $\overline{\rho}_{\mathfrak{p}}$ "suffisamment générique". Il existe "beaucoup" de représentations lisses admissibles π de G sur k_E de KZ-socle $\bigoplus_{\sigma\in\mathcal{S}(\overline{\rho}_{\mathfrak{p}})}\sigma$, contenant $D_0(\overline{\rho}_{\mathfrak{p}})$, engendrées par $D_0(\overline{\rho}_{\mathfrak{p}})$ avec $D_0(\overline{\rho}_{\mathfrak{p}})^{I_1}$ stable par w_L.

PREUVE : Il y a plein de façons de mettre une action de w_L sur $D_0(\overline{\rho}_{\mathfrak{p}})^{I_1}$. $\square$

(Si on remplace k_E par $\overline{\mathbb{F}_p}$, il y a une infinité de telles π.)

On peut s'attendre à ce que ce résultat reste encore vrai en rajoutant $D_0(\overline{\rho}_{\mathfrak{p}})^{I_1}=\pi^{I_1}$ et dès que $L\neq\mathbb{Q}_p$ (mais pas de preuve).

Question 16 En plus de $D_0(\overline{\rho}_{\mathfrak{p}})^{I_1}=\pi^{I_1}$, y a t'il d'autres conditions "naturelles" pour sélectionner certaines de ces π ?

CYCLES

DORÉNAVANT : $L = F_{\mathfrak{p}}$ non-ramifié et $\overline{\rho}_{\mathfrak{p}}$ "suffisamment générique" *semi-simple*. On a $k_L = \mathbb{F}_{p^f}$ ($f = [L : \mathbb{Q}_p]$) et $|\mathcal{S}(\overline{\rho}_{\mathfrak{p}})| = 2^f$. On prend $w_L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix}$.

Toute action de w_L sur $D_0(\overline{\rho}_{\mathfrak{p}})^{I_1}$ fait apparaître naturellement une partition canonique de $\mathcal{S}(\overline{\rho}_{\mathfrak{p}})$ en des *cycles* de poids de Serre.

Lemme 17 *Soit $\sigma \in \mathcal{S}(\overline{\rho}_{\mathfrak{p}})$ et $v \neq 0 \in \sigma^{I_1}$. Pour tout $\tau : k_L \hookrightarrow k_E$ il existe un unique entier $s_\tau(\sigma) \in \{0, \cdots, p^f - 1\}$ tel que :*

$$S(v) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{\lambda \in k_L} \tau(\lambda)^{s_\tau(\sigma)} \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} w_L \cdot v$$
$$\in \Big(\mathrm{socle}_{KZ} D_0(\overline{\rho}_{\mathfrak{p}})\Big)^{I_1}.$$

$S(v) \in C(\sigma)^{I_1}$ pour un unique $C(\sigma) \in \mathcal{S}(\overline{\rho}_{\mathfrak{p}})$ et ne dépend ni de τ ni de l'action de w_L.

$S : \bigoplus_{\sigma\in\mathcal{S}(\overline{\rho}_{\mathfrak{p}})} \sigma^{I_1} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\sigma\in\mathcal{S}(\overline{\rho}_{\mathfrak{p}})} \sigma^{I_1}$

$C : \mathcal{S}(\overline{\rho}_{\mathfrak{p}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}(\overline{\rho}_{\mathfrak{p}})$.

On décompose la permutation C en produit de cycles $C = c_1 c_2 \cdots c_{n_{\overline{\rho}_{\mathfrak{p}}}}$. On pose $f_i \overset{\text{déf}}{=} |c_i|$.

On peut retrouver directement $n_{\overline{\rho}_{\mathfrak{p}}}$ et les f_i côté Galois.

$\mathrm{ind}_L^{\otimes\mathbb{Q}_p}\overline{\rho}_{\mathfrak{p}} \overset{\text{déf}}{=}$ induite tensorielle de $\overline{\rho}_{\mathfrak{p}}$ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)$ à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$.

Lemme 18

$$\mathrm{ind}_L^{\otimes\mathbb{Q}_p}\overline{\rho}_{\mathfrak{p}} = \bigoplus_{i=1}^{n_{\overline{\rho}_{\mathfrak{p}}}} \mathrm{ind}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_{p^{f_i}})}^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)} \chi_i$$

pour des caractères $\chi_i : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_{p^{f_i}}) \to k_E^{\times}$ *(*$\mathbb{Q}_{p^{f_i}}$ *non-ramifié,* $[\mathbb{Q}_{p^{f_i}} : \mathbb{Q}_p] \overset{\text{déf}}{=} f_i$*).*

PREUVE : Calcul. $\square$

$\dim_{k_E} \sigma^{I_1} = 1 \Rightarrow$ il existe $x_i \in k_E^\times$, $1 \leq i \leq n_{\overline{\rho}_{\mathfrak{p}}}$ tel que $S^{f_i} : \sigma^{I_1} \xrightarrow{\sim} \sigma^{I_1}$ est la multiplication par x_i si $\sigma \in c_i$.

Question 19 *:* Supposons $D_0(\overline{\rho}_{\mathfrak{p}})^{I_1}$ stable par w_L dans $S(D, K_f^{\mathfrak{p}})[\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^\vee(1)}]^{I_1}$ (cf. conjecture précédente), que valent les x_i ?

Colmez : si $L = \mathbb{Q}_p$ et $\overline{\rho}_{\mathfrak{p}}$ semi-simple, on peut retrouver *a posteriori* le (φ, Γ)-module $M(\overline{\rho}_{\mathfrak{p}}^\vee)$ de $\overline{\rho}_{\mathfrak{p}}^\vee$ par la recette :

(i) $M(\overline{\rho}_{\mathfrak{p}}^\vee) = k_E((X)) \otimes_{k_E} \left(\bigoplus_{\sigma \in \mathcal{S}(\overline{\rho}_{\mathfrak{p}})} \sigma^{I_1}\right)^\vee$

(ii) $\varphi(1 \otimes f) = s(\sigma)! X^{p-1-s(\sigma)} \otimes f \circ S^{-1}, f \in (\sigma^{I_1})^\vee$

(iii) $\gamma(1 \otimes f) =$ unique élément de $k_E[[X]] \otimes_{k_E} \left(\bigoplus_{\sigma \in \mathcal{S}(\overline{\rho}_{\mathfrak{p}})} \sigma^{I_1}\right)^\vee$ tel que $\gamma \circ \varphi = \varphi \circ \gamma$ et $\gamma(1 \otimes f) \equiv 1 \otimes (f \circ [\gamma]^{-1})$ modulo (X) ($\gamma \in \Gamma \xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p^\times & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\gamma \mapsto [\gamma]$).

Si $L \neq \mathbb{Q}_p$ la même recette donne un (φ, Γ)-module étale M en modifiant φ comme suit ($f \in (\sigma^{I_1})^\vee$) :

$$\varphi(1 \otimes f) = s_0! \cdots s_{f-1}! X^{p-1-s_0} \ldots X^{p-1-s_{f-1}} \otimes f \circ S^{-1}$$

où $s_0, \cdots, s_{f-1} \overset{\text{déf}}{=}$ chiffres de $s_\tau(\sigma)$ en base p (indépendants de τ à permutation près).

Modification suggérée par un théorème de Stickelberger calculant $\sum_{\lambda \in k_L} \tau(\lambda)^{s_\tau(\sigma)}[\mathrm{tr}_{k_L/\mathbb{F}_p}(\lambda)]$ dans $k_E[\mathbb{F}_p]$.

Quelle est la représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ sur k_E dont M est le (φ, Γ)-module ?

$\mathcal{S}(\overline{\rho}_\mathfrak{p})$ s'identifie à $\mathcal{P} \stackrel{\text{déf}}{=}$ ensemble des parties de $\mathbb{Z}/f\mathbb{Z}$.

La permutation C sur $\mathcal{S}(\overline{\rho}_\mathfrak{p})$ induit une permutation $C_{\overline{\rho}_\mathfrak{p}}$ sur $\mathcal{P}$ ($J \in \mathcal{P}$) :

(i) $\overline{\rho}_\mathfrak{p}$ scindé : $C_{\overline{\rho}_\mathfrak{p}}(J) = \{j \mid j+1 \in J\}$

(ii) $\overline{\rho}_\mathfrak{p}$ irréductible :

$$C_{\overline{\rho}_\mathfrak{p}}(J) = \begin{cases} \{j \mid j+1 \in J\} \backslash \{f-1\} \text{ si } 0 \in J \\ \{j \mid j+1 \in J\} \amalg \{f-1\} \text{ si } 0 \notin J. \end{cases}$$

Soit $\sigma \in c_i$ et $J_\sigma \in \mathcal{P}$ correspondant :

(i) $\ell_i \stackrel{\text{déf}}{=} |J_\sigma|$

(ii) $h_i \stackrel{\text{déf}}{=} |J_\sigma \cup C_{\overline{\rho}_\mathfrak{p}}(J_\sigma) \backslash J_\sigma \cap C_{\overline{\rho}_\mathfrak{p}}(J_\sigma)|$.

Les entiers ℓ_i et h_i ne dépendent que de c_i.

(Rappel : $f_i \stackrel{\text{déf}}{=} |c_i|$.)

$\omega_d : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_{p^d}) \to k_E^\times$ caractère fondamental de Serre, $\omega_d(p) \overset{\text{déf}}{=} 1$.

$\mathrm{nr}(x) : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_{p^d}) \to k_E^\times$ caractère non-ramifié envoyant Frob. arith. sur $x \in k_E^\times$.

On a l'un des deux cas :

$$\overline{\rho}_{\mathfrak{p}} \cong \begin{pmatrix} \omega_f^{\sum_{j=0}^{f-1}(r_j+1)p^j}\mathrm{nr}(\alpha^{-1}) & 0 \\ 0 & \mathrm{nr}(\alpha) \end{pmatrix} \otimes \chi$$

$$\overline{\rho}_{\mathfrak{p}} \cong \mathrm{ind}_{\mathbb{Q}_{p^{2f}}}^{\mathbb{Q}_{p^f}}\Big(\omega_{2f}^{\sum_{j=0}^{f-1}(r_j+1)p^j} \otimes \mathrm{nr}(-1)\Big) \otimes \chi$$

pour des $r_i \in \{0, \cdots, p-1\}$, $\alpha \in k_E^\times$ et $\chi : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_{p^f}) \to k_E^\times$.

(Rappel : $\mathrm{ind}_L^{\otimes \mathbb{Q}_p} \overline{\rho}_{\mathfrak{p}}^\vee = \bigoplus_{i=1}^{n_{\overline{\rho}_{\mathfrak{p}}}} \mathrm{ind}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_{p^{f_i}})}^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)} \chi_i^{-1}$.)

Théorème 20 *M est le (φ,Γ)-module de :*

$$\bigoplus_{i=1}^{n_{\overline{\rho}_{\mathfrak{p}}}} \mathrm{ind}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_{p^{f_i}})}^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)} \Big(\chi_i^{-1}\mathrm{nr}(\alpha_i^{-1})\Big)$$

où si $\overline{\rho}_{\mathfrak{p}}$ scindé :

$$\alpha_i = (-1)^{\frac{f_i h_i}{2f}\sum_{j=0}^{f-1} r_j}\alpha^{\frac{(f-2\ell_i)f_i}{f}}\chi(p)^{f_i}x_i^{-1}$$

et si $\overline{\rho}_{\mathfrak{p}}$ irréductible :

$$\alpha_i = (-1)^{\frac{f_i}{2}+\frac{f_i h_i}{2f}(1+\sum_{j=0}^{f-1} r_j)}\chi(p)^{f_i}x_i^{-1}.$$

Question 21 En supposant $D_0(\overline{\rho}_{\mathfrak{p}})^{I_1}$ stable par w_L dans $S(D,K_f^{\mathfrak{p}})[\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^\vee(1)}]^{I_1}$, la valeur de x_i est-elle :

$(-1)^{\frac{f_i h_i}{2f}\sum_{j=0}^{f-1} r_j}\alpha^{\frac{(f-2\ell_i)f_i}{f}}\chi(p)^{f_i}$ si $\overline{\rho}_{\mathfrak{p}}$ scindé

$(-1)^{\frac{f_i}{2}+\frac{f_i h_i}{2f}(1+\sum_{j=0}^{f-1} r_j)}\chi(p)^{f_i}$ si $\overline{\rho}_{\mathfrak{p}}$ irréductible ?

(Valeurs pour avoir exactement le (φ,Γ)-module de $\mathrm{ind}_L^{\otimes\mathbb{Q}_p}\overline{\rho}_{\mathfrak{p}}^\vee$, elles ne dépendent que de $\overline{\rho}_{\mathfrak{p}}$.)

Proposition 22 *Oui lorsque $f_i \in \{1, 2\}$.*

$f_i = 1$ n'arrive que pour $\overline{\rho}_{\mathfrak{p}}$ scindé : il y a 2 cycles de longueur 1 avec $x_i = \alpha\chi(p)$ ou $x_i = \alpha^{-1}\chi(p)$.

Question 23 En plus de $D_0(\overline{\rho}_{\mathfrak{p}})^{I_1} = \pi^{I_1}$ et de ces égalités sur les x_i, y a t'il d'autres conditions "naturelles" pour sélectionner les bonnes représentations π ?