Quelques perspectives sur le programme de Langlands p-adique

Christophe Breuil

Toulouse, 14 décembre 2012

Correspondance de Langlands locale classique

$\ell \neq p$ nombres premiers, $\mathbb{Q}_\ell$, $\mathbb{Q}_p$
$\overline{\mathbb{Q}_\ell}$, $\overline{\mathbb{Q}_p}$ = clôtures algébriques
$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ = automorphismes de $\overline{\mathbb{Q}_p}$ fixant $\mathbb{Q}_p$
$\mathrm{W}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \subset \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ = autom. relevant $\overline{x} \mapsto \overline{x}^{p^n}$ sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ ($n \in \mathbb{Z}$) = sous-groupe dense.

Théorème 1 *(Harris-Taylor, Henniart)*
$\exists$ une bijection naturelle $(\rho, N) \mapsto \pi(\rho, N)$ entre classes d'isomorphisme :

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{repr. semi simples} \\ \text{lisses } \rho \text{ de dim. } n \text{ de} \\ \mathrm{W}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \ \text{ sur } \overline{\mathbb{Q}_\ell} \\ + \text{ endo. nilpotent } N \end{array} \right\}_{/\sim} \overset{\sim}{\to} \left\{ \begin{array}{c} \text{repr. irréd.} \\ \text{lisses } \pi \text{ de} \\ \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p) \\ \text{sur } \overline{\mathbb{Q}_\ell} \end{array} \right\}_{/\sim}.$$

ρ lisse = ρ continue pour topologie discrète sur le $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-espace vectoriel sous-jacent
π lisse = idem = tout vecteur est fixé par un sous-groupe ouvert de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$.

On peut remplacer $\mathbb{Q}_p$ par extension finie L.

Correspondance rationnelle et exemples

Si on tensorise $\pi(\rho, N)$ par un caractère loc. constant $\mathsf{GL}_n(\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\text{dét}} \mathbb{Q}_p^\times \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$ la correspondance devient *rationnelle* :
(ρ, N) défini sur E (= extension finie de $\mathbb{Q}_\ell$) $\Rightarrow$ $\pi(\rho, N)$ aussi défini sur E.

$|\,| : \mathbb{Q}_p^\times \longrightarrow p^{\mathbb{Z}} \subset E^\times$, $x \mapsto p^{-\mathrm{val}(x)}$ = caractère cyclotomique "ℓ-adique" ($\equiv 1$ sur $\mathbb{Z}_p^\times$)
$B^-(\mathbb{Q}_p) \subset \mathsf{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ = matrices triang. inf.
Corps de classes local : $\mathbb{Q}_p^\times \cong \mathsf{W}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{ab}}$.

Exemple 2 $(\rho, N) = (\mathrm{diag}(\chi_1, \cdots, \chi_n), 0)$ où $\chi_i : \mathsf{W}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \to E^\times$ loc. const., $\chi_i\chi_j^{-1} \neq 1, |\,|^{\pm 1}$

$$\pi(\rho, 0) = \mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{\mathsf{GL}_n(\mathbb{Q}_p)}(\chi_1|\,|^{1-n} \otimes \chi_2|\,|^{2-n} \otimes \cdots \otimes \chi_n)$$
$$\overset{\text{déf}}{=} \{f : \mathsf{GL}_n(\mathbb{Q}_p) \to E \text{ loc. cstt},\ f(bg) = (\chi_1|\,|^{1-n} \otimes \cdots \otimes \chi_n)(b) f(g)\}$$

action de $\mathsf{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$: $(g \cdot f)(g') \overset{\text{déf}}{=} f(g'g)$
= *série principale lisse*, irréductible, indépendante de l'ordre des χ_i.

Correspondance locale ℓ-adique, $\ell \neq p$

$\mathcal{O}_E$ = entiers de E, $k_E = \mathcal{O}_E/(\varpi_E)$ (corps fini)

$(\rho, N) \equiv$ repr. continue de $\mathsf{W}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ sur E (th. de monodromie ℓ-adique) encore notée ρ.

ρ s'étend à $\mathsf{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ ssi ρ a un $\mathcal{O}_E$-réseau stable par $\mathsf{W}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ ssi $\pi(\rho, N)$ a un $\mathcal{O}_E$-réseau stable par $\mathsf{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ ssi $\pi(\rho, N)$ a une norme invariante $\|gv\| = \|v\|$ (Vignéras).
Dans ce cas $\| \ \|$ = unique norme invariante à équivalence près (Vignéras).

Soit ρ repr. cont. de $\mathsf{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ de dim. n :
$\rho \rightsquigarrow (\rho, N) \rightsquigarrow (\rho^{\mathsf{ss}}, N) \rightsquigarrow \pi(\rho^{\mathsf{ss}}, N) \rightsquigarrow \Pi(\rho)$
où $\Pi(\rho)$ = complété de $\pi(\rho, N)$ pour $\| \ \|$ = Banach ℓ-adique unitaire. Analogue modulo ℓ.

Exemple 3 $\rho = \mathrm{diag}(\chi_1, \cdots, \chi_n)$ où
$\chi_i : \mathsf{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \to E^\times$ continus, $\chi_i\chi_j^{-1} \neq 1, |\,|^{\pm 1}$
$\Pi(\rho) = (\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{\mathsf{GL}_n(\mathbb{Q}_p)} \chi_1|\,|^{1-n} \otimes \chi_2|\,|^{2-n} \otimes \cdots \otimes \chi_n)^{\mathcal{C}^0}$
même déf. que $\pi(\rho, N)$ mais avec f continue.

Correspondance locale p-adique pour $\mathsf{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ (cas réductible)

Maintenant on suppose $\ell = p$!

Côté Galois, on ne regarde que les représ. continues de $\mathsf{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ sur E.

Cas $\rho = \left(\begin{smallmatrix}\chi_1 & * \\ 0 & \chi_2\end{smallmatrix}\right)$ où $\chi_1, \chi_2 : \mathsf{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \to E^\times$ continus
$\rightsquigarrow \chi_1, \chi_2 =$ car. de $\mathbb{Q}_p^\times$ (corps de classes local)
$\varepsilon : \mathbb{Q}_p^\times \xrightarrow{p \mapsto 1} \mathbb{Z}_p^\times \subset E^\times =$ caractère cyclotomique p-adique ($\equiv 1$ sur $p^{\mathbb{Z}}$)
$\chi_1\chi_2^{-1} \neq 1, \varepsilon^{\pm 1} \Rightarrow \exists$ unique ext. non scindée $\left(\begin{smallmatrix}\chi_1 & * \\ 0 & \chi_2\end{smallmatrix}\right)$ (analogue ℓ-adique : pas d'extension).

$\left(\mathsf{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{\mathsf{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi_1\varepsilon^{-1} \otimes \chi_2\right)^{\mathcal{C}^0} \overset{\text{déf}}{=} \{f : \mathsf{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \to E$ continue, $f\left(\left(\begin{smallmatrix}a & 0 \\ c & d\end{smallmatrix}\right)g\right) = \chi_1(a)\varepsilon^{-1}(a)\chi_2(d)f(g)\}$
action de $\mathsf{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$: $(g \cdot f)(g') \overset{\text{déf}}{=} f(g'g)$
$=$ Banach p-adique unitaire $=$ *série principale continue unitaire*, irréductible. MAIS *dépend* de l'ordre de χ_1, χ_2.

Théorème 4 *(Emerton,...)*
Si $\chi_1\chi_2^{-1} \neq 1, \varepsilon^{\pm 1}$, $\exists$ *unique ext. non scindée :*

$$0 \to (\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi_1\varepsilon^{-1} \otimes \chi_2)^{\mathcal{C}^0} \to \mathcal{E} \to (\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi_2\varepsilon^{-1} \otimes \chi_1)^{\mathcal{C}^0} \to 0.$$

Les représentations $(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi_1\varepsilon^{-1} \otimes \chi_2)^{\mathcal{C}^0}$ et $(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi_2\varepsilon^{-1} \otimes \chi_1)^{\mathcal{C}^0}$ sont non isomorphes : que faire ?

Idée : on prend les deux ! $\rightsquigarrow$ correspondance p-adique dans le cas réductible (générique) :

$$\rho = \begin{pmatrix} \chi_1 & 0 \\ 0 & \chi_2 \end{pmatrix} \mapsto \Pi(\rho) \overset{\text{déf}}{=} (\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi_1\varepsilon^{-1} \otimes \chi_2)^{\mathcal{C}^0} \oplus (\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi_2\varepsilon^{-1} \otimes \chi_1)^{\mathcal{C}^0}$$

$$\rho = \begin{pmatrix} \chi_1 & * \\ 0 & \chi_2 \end{pmatrix} \mapsto \Pi(\rho) \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{E}.$$

Correspondance locale p-adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ (cas irréductible)

Π = Banach p-adique + action cont. unitaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ t.q., si $\Pi^0 \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \in \Pi, \|x\| \leq 1\}$: $\pi \stackrel{\text{déf}}{=} \Pi^0 \otimes_{\mathcal{O}_E} k_E = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-représentation (lisse) de longueur finie (+ chaque constituant a un caractère central).

Théorème 5 *(Colmez, Paskunas, B., ...)* *Si $p > 3$, $\exists$ une bijection naturelle $\rho \mapsto \Pi(\rho)$ entre classes d'isomorphisme :*

$$\left\{\begin{array}{c}\text{représ. cont. } \rho \\ \text{irréductibles} \\ \text{de dim. 2} \\ \text{de } \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)\end{array}\right\}_{/\sim} \stackrel{\sim}{\to} \left\{\begin{array}{c}\text{représ. } \Pi \\ \text{ci}-\text{dessus} \\ \text{top. irréduc.} \\ \text{non}-\text{ordinaires}\end{array}\right\}_{/\sim}$$

où non-ordinaire $\stackrel{\text{déf}}{=}$ n'est pas un constituant d'une série principale continue unitaire.

Un foncteur dû à Colmez

Colmez a défini un foncteur exact covariant :

$$\left\{\begin{array}{c}\text{représ. } \Pi \\ \text{de } \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \\ \text{ci}-\text{dessus}\end{array}\right\} \xrightarrow{F} \left\{\begin{array}{c}\text{représ. de} \\ \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \\ \text{de dim. finie}\end{array}\right\}$$

tel que $F(\Pi(\rho)) = \rho$.

Facile à décrire mod. p : $W \subset \pi = k_E$-e.v. de dim. finie stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times$ et qui engendre π sous $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, on pose $M(W) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}_{k_E}\Big(\sum_{m\geq 0}\begin{pmatrix} p^m & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1\end{pmatrix} W, k_E\Big) = k_E[[X]]$-module où $X \stackrel{\text{déf}}{=} [\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}] - [\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}]$.

$k_E((X)) \otimes_{k_E[[X]]} M(W)$ indépendant de W + $\varphi \stackrel{\text{déf}}{=}$ action de $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ + action de $\Gamma \cong \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p^\times & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow$ (φ, Γ)-module étale $\overset{\text{Fontaine}}{\rightsquigarrow}$ représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ (sur k_E) $\overset{\text{dual}}{\rightsquigarrow}$ $F(\pi)$.

Exemple : $F\Big((\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi_1\varepsilon^{-1} \otimes \chi_2)^{\mathcal{C}^0}\Big) = \chi_1$.

Correspondance mod. p et poids de Serre

Correspondance analogue $\overline{\rho} \mapsto \Pi(\overline{\rho})$ mod. p :
$\overline{\rho}$ réductible $\rightsquigarrow$ $\Pi(\overline{\rho})$ = extension entre 2 séries princ. lisses sur k_E (scindée ssi $\overline{\rho}$ semi-simple)
$\overline{\rho}$ irréductible $\rightsquigarrow$ $\Pi(\overline{\rho})$ = reprexcl. irréductible lisse de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur k_E.

Définition 6 *Un poids de Serre = une représentation irréductible de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ *(ou* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$*) sur* k_E*.*

Exemple 7 Pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$: $(\mathrm{Sym}^{a_1-a_2}k_E^2) \otimes \det^{a_2}$ avec $0 \leq a_1 - a_2 \leq p-1$.

À $\overline{\rho}$ (de dimension 2) on associe l'ensemble des poids de Serre en sous-objet dans $\Pi(\overline{\rho})|_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)}$.
$\overline{\rho}$ réductible non scindé (générique) $\rightsquigarrow$ 1 poids de Serre
$\overline{\rho}$ réductible scindée ou irréductible (générique) $\rightsquigarrow$ 2 poids de Serre.

Avantage : on a la liste (conjecturale) des poids de Serre de $\overline{\rho}$ en dim. n (mais pas $\Pi(\overline{\rho})$).

Problèmes pour passer à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$

$\Pi(\rho) =$? $F =$? $F(\Pi(\rho)) =$? (idem avec $\overline{\rho}$)

Idée : deviner d'abord $F(\Pi(\rho))$.

Cas $\rho = \begin{pmatrix} \chi_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \chi_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \chi_n \end{pmatrix}$ où $\chi_i : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \to E^\times$ continus, $\chi_i\chi_j^{-1} \neq 1, \varepsilon^{\pm 1}$.

Soit $I_w \overset{\text{déf}}{=} \left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)} \chi_{w(1)}\varepsilon^{1-n} \otimes \cdots \otimes \chi_{w(n)}\right)^{\mathcal{C}^0}$ (w = permutation), $I_w \cong I_{w'}$ ssi $w = w'$.

On peut deviner des propriétés de $\Pi(\rho)$ et de $F(\Pi(\rho))$ (idem avec $\overline{\rho}$) :

(i) ρ semi-simple $\Rightarrow \oplus_w I_w \subseteq \Pi(\rho) \Rightarrow \oplus_w F(I_w) \subseteq F(\Pi(\rho))$ ($\Rightarrow F(\Pi(\rho)) \neq \rho$ si $n > 2$)

(ii) nbre de poids de Serre de $\overline{\rho} > n!$ si $n > 2 \Rightarrow \oplus_w I_w \subsetneq \Pi(\rho)$ si $n > 2$

(iii) $F(I_w) \overset{?}{=} \chi_{w(1)}^{n-1}\chi_{w(2)}^{n-2}\cdots\chi_{w(n)}$.

Autres cas :

(iv) cas $\mathsf{GL}_2(L)$, $L/\mathbb{Q}_p$ extension galoisienne finie :

$$F(\Pi(\rho)) \overset{?}{=} \bigotimes_{\sigma\in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}_p)} \rho^{\sigma}$$

où ρ^{σ} = conjugué de ρ par $\sigma \Rightarrow F(\Pi(\rho))$ représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ même si $L \neq \mathbb{Q}_p$!

(v) $\rho \mapsto F(\Pi(\rho))$ fonctoriel en ρ, covariant.

Suggestion qui interpole **(i)**-**(v)** (B.-Herzig) :

$L = \mathbb{Q}_p$: $F(\Pi(\rho)) \overset{?}{=} \rho \otimes_E \wedge^2\rho \otimes_E \cdots \otimes_E \wedge^{n-1}\rho$

$L \neq \mathbb{Q}_p$: $F(\Pi(\rho)) \overset{?}{=}$ induite tensorielle de L à $\mathbb{Q}_p$ de $\bigotimes_{i=1}^{n-1} \wedge^i\rho$

$\Rightarrow F(\Pi(\rho)) \cong \rho$ ssi $n = 2$ et $L = \mathbb{Q}_p$.

Quand n augmente $\rightsquigarrow$ représ. de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ ÉNORME !

Un formalisme conjectural

$F(\Pi(\rho))$ suggère un formalisme conjectural donnant nbre et "forme" des constituants de $\Pi(\rho)$.

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \rho_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \rho_r \end{pmatrix} \text{où } \rho_i : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \to \mathrm{GL}_{n_i}(E)$$

irréductibles, $\rho_i \neq \rho_j$, si $n_i = n_j = 1$ $\rho_i \otimes \rho_j^\vee \neq \varepsilon^{\pm 1}$.

On appelle monôme en les ρ_i une représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ de la forme :
$(\rho_1)^{\otimes d_1^1} \otimes (\wedge^2 \rho_1)^{\otimes d_1^2} \otimes \cdots \otimes (\wedge^j \rho_i)^{\otimes d_i^j} \otimes \cdots \otimes (\wedge^{n_r} \rho_r)^{\otimes d_r^r}$.

$\left(\sum_{j=1}^{n_1} j d_1^j, \cdots, \sum_{j=1}^{n_r} j d_r^j\right) =$ degré du monôme.

Tous les monômes de même degré en sous-quotients de $\bigotimes_{i=1}^{n-1} \wedge^i \rho$ apparaissent en somme directe (dans un sous-quotient convenable)

$\rightsquigarrow \bigotimes_{i=1}^{n-1} \wedge^i \rho =$ extension successive de sommes directes de monômes en les ρ_i de même degré.

Formalisme :

(i) chaque degré apparaissant dans $\bigotimes \wedge^i \rho \leftrightarrow$ un constituant irréductible de $\Pi(\rho)$

(ii) la place du constituant dans $\Pi(\rho)$ = la place du sous-quotient de degré correspondant dans $\otimes \wedge^i \rho$

(iii) on peut aussi prédire la "forme" du constituant (induite parabolique ou non) à partir de son degré.

Exemple 8 ρ irréductible $\Leftrightarrow \Pi(\rho)$ irréductible, ρ semi-simple $\Leftrightarrow \Pi(\rho)$ semi-simple.

Formalisme analogue si $L \neq \mathbb{Q}_p$ en définissant le degré (si $L/\mathbb{Q}_p$ Galois) :

$$\Big(\sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}_p)} \sum_{j=1}^{n_1} j d_{1,\sigma}^j, \cdots, \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}_p)} \sum_{j=1}^{n_r} j d_{r,\sigma}^j \Big)$$

où $d_{i,\sigma}^j$ = exposant de $\wedge^j \rho_i^\sigma$.

Exemples pour $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$

(i) $\rho = \begin{pmatrix} \chi_1 & * & *'' \\ 0 & \chi_2 & *' \\ 0 & 0 & \chi_3 \end{pmatrix}$ où $*, *' \neq 0$, on a (une barre = une extension non scindée en sous-quotient) :

$$\rho \otimes \wedge^2 \rho = \begin{tikzcd}[column sep=small] & \chi_2^2\chi_1 \arrow[dr, dash] & & \chi_2^2\chi_3 \arrow[dr, dash] & \\ \chi_1^2\chi_2 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & (\chi_1\chi_2\chi_3)^{\oplus 3} \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & \chi_3^2\chi_2. \\ & \chi_1^2\chi_3 \arrow[ur, dash] & & \chi_3^2\chi_1 \arrow[ur, dash] & \end{tikzcd}$$

Le formalisme suggère :

$$\Pi(\rho) \overset{?}{=} \begin{tikzcd}[column sep=small] & I_{(12)} \arrow[dr, dash] & & I_{(123)} \arrow[dr, dash] & \\ I_{\mathrm{Id}} \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & ? \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & I_{(13)} \\ & I_{(23)} \arrow[ur, dash] & & I_{(132)} \arrow[ur, dash] & \end{tikzcd}$$

où les I_w définis ci-dessus et ? est un constituant "nouveau" (non obtenu par induction parabolique).

(ii) $\rho = \begin{pmatrix} \rho_1 & * \\ 0 & \chi_2 \end{pmatrix}$ où $* \neq 0$, $\dim \rho_1 = 2$ et $\dim \chi_2 = 1$, on a :

$$\rho \otimes \wedge^2 \rho = \rho_1 \otimes \wedge^2 \rho_1 - \begin{smallmatrix} \rho_1^{\otimes 2} \otimes \chi_2 \\ \oplus \\ \wedge^2 \rho_1 \otimes \chi_2 \end{smallmatrix} - \rho_1 \otimes \chi_2^2.$$

Le formalisme suggère :

$$\Pi(\rho) \overset{?}{=} I_1 \text{——} ? \text{——} I_2$$

où :

$$I_1 \overset{\text{déf}}{=} \left(\mathrm{Ind}_{P_1^-(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} \Pi(\rho_1)\varepsilon^{-1} \circ \det \otimes \chi_2\right)^{\mathcal{C}^0}$$

$$I_2 \overset{\text{déf}}{=} \left(\mathrm{Ind}_{P_2^-(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} \chi_2 \varepsilon^{-2} \otimes \Pi(\rho_1)\right)^{\mathcal{C}^0},$$

$P_1^- = \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix}$, $P_2^- = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$, $\Pi(\rho_1)$ = représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ corresp. à ρ_1 par la correspondance p-adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et ? est encore un constituant "nouveau".

Un résultat partiel récent

Aucun cas de $\Pi(\rho)$ ou $\Pi(\overline{\rho})$ connu complètement si $n \neq 2$ ou $L \neq \mathbb{Q}_p$.
Raison : la présence de constituants (conjecturaux) supercuspidaux (= non obtenus par induction parabolique) dès que $n \neq 2$ ou $L \neq \mathbb{Q}_p$: cf. les constituants ? ci-dessus.

ρ réductible $\Rightarrow \Pi(\rho)$ a (conjecturalement) beaucoup de constituants $\rightsquigarrow$ on peut parfois construire des sous-représ. $\widetilde{\Pi}(\rho) \subseteq \Pi(\rho)$ ou $\widetilde{\Pi}(\overline{\rho}) \subseteq \Pi(\overline{\rho})$.

Tests : **(i)** $\widetilde{\Pi}(\rho)$, $\widetilde{\Pi}(\overline{\rho})$ doivent apparaître dans la cohomologie ou dans des espaces de formes automorphes (p-adiques, mod. p)
(ii) $\widetilde{\Pi}(\overline{\rho})$ doit être compatible avec les poids de Serre = contrainte sur le socle de $\widetilde{\Pi}(\overline{\rho})|_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)}$
(iii) $\widetilde{\Pi}(\rho)$ doit être compatible avec la correspondance de Langlands locale classique si ρ est de Rham + HT distincts.

Plusieurs résultats partiels connus.

$$\overline{\rho} = \begin{pmatrix} \overline{\chi}_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \overline{\chi}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \overline{\chi}_n \end{pmatrix} \text{ où } \overline{\chi}_i : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \to k_E^\times$$

loc. const., $\overline{\chi}_i\overline{\chi}_j^{-1} \neq 1, \overline{\varepsilon}^{\pm 1}$.

$\widetilde{\Pi}(\overline{\rho}) \overset{\text{déf}}{=}$ plus grande sous-représentation de $\Pi(\overline{\rho})$ formée uniquement de séries principales. Le formalisme suggère la forme de $\widetilde{\Pi}(\overline{\rho})$.

Exemple 9 Cas $\overline{\rho}$ s.-simple : $\widetilde{\Pi}(\overline{\rho}) \overset{?}{=} \oplus_w I_w$. Cas **(i)** précédent pour $n = 3$:

$$\widetilde{\Pi}(\overline{\rho}) \overset{?}{=} I_{\mathrm{Id}} \begin{array}{l} \diagup\ I_{(12)} \\ \diagdown\ I_{(23)} \end{array}$$

Théorème 10 *(B.-Herzig)*
(i) *On peut définir la* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$*-représentation* $\widetilde{\Pi}(\overline{\rho})$.
(ii) *Elle apparaît dans des espaces de formes automorphes modulo* p*.*

D'autres résultats partiels (ou qui vont dans la direction du formalisme) connus, en particulier pour $\mathrm{GL}_2(L)$, L non ramifié sur $\mathbb{Q}_p$.