SÉRIE SPÉCIALE p-ADIQUE ET COHOMOLOGIE ÉTALE COMPLÉTÉE

par

Christophe Breuil

Résumé. — Soit f une forme modulaire parabolique nouvelle de poids $k \geq 2$ sur $\Gamma_0(Np)$ avec $(N,p)=1$ vecteur propre des opérateurs de Hecke. Soit E une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ contenant les valeurs propres. Si $k>2$, on montre que l'adhérence de la représentation $\mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes \pi_p(f)$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ dans le complété p-adique $\varprojlim_n \varinjlim_r H^1(Y(Np^r), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \otimes E$ détermine l'invariant $\mathcal{L}$ de f, c'est-à-dire la restriction à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ de la représentation galoisienne p-adique associée à f. En utilisant des résultats de Colmez, on donne une description explicite de ce qu'est cette adhérence. Le cas $k=2$ se comporte différemment, mais on montre comment on peut encore retrouver l'invariant $\mathcal{L}$, du point de vue $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, dans le complété p-adique précédent.

Table des matières

Pour des discussions avant et pendant la rédaction de cet article, ou pour leurs réponses à mes questions, je remercie K. Buzzard, G. Chenevier, L. Clozel, M. Emerton, L. Fargues, A. Genestier, A. Iovita, L. Merel, L. Orton, J. Nekovář, J.-P. Serre et G. Stevens. Je suis particulièrement reconnaissant à A. Genestier pour d'innombrables échanges de points de vue et à A. Iovita et G. Stevens pour m'avoir signalé la référence [**25**]. Pour leur soutien mathématique et/ou psychologique, je remercie M. Harris, L. Lafforgue, A. Mézard et M.-F. Vignéras.

1. Introduction et notations

1.1. Introduction. — Soit p un nombre premier, f une forme modulaire parabolique de poids 2 sur $\Gamma_1(M)$ vecteur propre des opérateurs de Hecke et $\sigma(f)$ la représentation p-adique de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ associée. La composante automorphe locale $\pi_p(f)$ se réalise dans la représentation lisse $\varinjlim H^1_{\mathrm{c}}(Y(Mp^r),\mathbb{Z}_p)\otimes_{\mathbb{Z}_p}E$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ pour E extension finie suffisamment grande de $\mathbb{Q}_p$ (il s'agit ici de la cohomologie de Betti à support compact). On sait que $\pi_p(f)$, en général, ne détermine pas $\sigma(f)|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$ mais seulement la représentation de Weil-Deligne associée. Il est donc naturel de se demander où est l'information qui manque, côté théorie des représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, pour reconstruire cette représentation p-adique de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$.

Considérons le $\mathbb{Z}_p$-module ([**15**]) :

$$\widehat{H}^1_{\mathrm{c}} \overset{\text{déf}}{=} \varprojlim_n \big(\varinjlim_r H^1_{\mathrm{c}}(Y(Mp^r),\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})\big)$$

qui s'identifie au complété p-adique du $\mathbb{Z}_p$-module $\varinjlim H^1_{\mathrm{c}}(Y(Mp^r),\mathbb{Z}_p)$. L'espace $\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}\otimes_{\mathbb{Z}_p}E$ est un Banach p-adique muni d'une action continue unitaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Notons $\widehat{\pi}_p(f)$ l'*adhérence* de $\pi_p(f)$ dans ce Banach, c'est-à-dire le complété p-adique de $\pi_p(f)$ par rapport au $\mathcal{O}_E$-réseau $\pi_p(f)\cap(\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}\otimes\mathcal{O}_E)$. C'est aussi un Banach p-adique avec action unitaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Faisons l'hypothèse que la représentation galoisienne p-adique $\sigma(f)|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$ est absolument irréductible.

L'espoir de l'auteur est alors que, dans ce cas, $\widehat{\pi}_p(f)$ *détermine* la représentation $\sigma(f)|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$ et *ne* dépend *que* d'elle. Autrement dit, l'auteur espère que la complétion $\widehat{\pi}_p(f)$ de $\pi_p(f)$ contient exactement l'information qui manque à $\pi_p(f)$ pour reconstruire $\sigma(f)|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$ lorsque cette dernière est irréductible.

Plus généralement, lorsque f est de poids $k \geq 2$, on peut encore plonger la représentation localement algébrique $\mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes_E \pi_p(f)$ dans $\widehat{H}^1_{\mathrm{c}} \otimes E$ et considérer de même son adhérence $\widehat{\pi}_p(f)$. Comme précédemment, l'auteur espère que $\widehat{\pi}_p(f)$ détermine la représentation $\sigma(f)|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$ lorsque cette dernière est irréductible et ne dépend que d'elle (voir [**17**]). Si cet espoir correspond à une réalité, il doit alors être possible de construire les Banach $\widehat{\pi}_p(f)$ de manière *purement locale* comme spéculé dans [**4**],§1.3(1).

Lorsque $\sigma(f)|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$ n'est pas irréductible, $\widehat{\pi}_p(f)$ en général ne suffit pas à déterminer $\sigma(f)|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$, mais $\widehat{H}^1_{\mathrm{c}} \otimes E$ contient alors un Banach plus gros que $\widehat{\pi}_p(f)$ et qui, lui, détermine $\sigma(f)|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$ (voir [**6**] et le cas $k = 2$ du présent article).

Considérons d'abord le cas où $\pi_p(f)$ est une série principale. Il se trouve que dans ce cas $\mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes_E \pi_p(f)$ *suffit* déjà à déterminer $\sigma(f)|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$ (lorsque celle-ci est irréductible). On peut alors montrer (au moins si la représentation de Weil-Deligne associée à $\sigma(f)|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$ est bien F-semi-simple comme il est conjecturé) que le Banach $\widehat{\pi}_p(f)$ est alors simplement le complété p-adique de $\mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes_E \pi_p(f)$ par rapport à un quelconque $\mathcal{O}_E$-réseau de $\mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes_E \pi_p(f)$ de *type fini* sur $\mathcal{O}_E[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]$ (de tels réseaux existent bien par les résultats de [**34**] et [**19**], cf. [**4**]). En fait, le réseau induit sur $\mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes_E \pi_p(f)$ par $\widehat{H}^1_{\mathrm{c}} \otimes \mathcal{O}_E$ est nécessairement commensurable à un réseau de type fini sur $\mathcal{O}_E[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]$ ([**5**],Cor.5.3.4). Ceci n'est pas vrai lorsque $\pi_p(f)$ n'est pas une série principale.

Dans cet article, on s'intéresse au cas immédiatement après, c'est-à-dire celui où $\pi_p(f)$ est, à torsion non ramifiée près, la représentation de Steinberg. Lorsque $k > 2$, $\sigma(f)|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$ est alors toujours absolument irréductible. Ce cas représente un bon test pour l'"espoir" ci-dessus car $\mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes_E \pi_p(f)$ ne suffit plus à déterminer $\sigma(f)|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$: il manque l'invariant $\mathcal{L}(f)$ de la forme f qui est le paramètre de la filtration de Hodge sur le module de Dieudonné-Fontaine filtré associé à f (voir [**9**], [**21**] et [**10**] pour une comparaison des différentes définitions de $\mathcal{L}(f)$). L'objectif de cet article est de montrer que $\widehat{\pi}_p(f)$ détermine exactement l'invariant $\mathcal{L}(f)$. Lorsque $k = 2$, $\sigma(f)|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$ (qui est dans ce cas réductible) n'est plus déterminé par $\widehat{\pi}_p(f)$ mais on montre que $\widehat{H}^1_{\mathrm{c}} \otimes E$ contient un Banach topologiquement réductible de longueur 2 avec $\widehat{\pi}_p(f)$ en unique sous-objet et qui, lui, détermine $\mathcal{L}(f)$ et ne dépend que de $\sigma(f)|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$.

(1)Voir sur ces questions [**18**].

On donne plus en détails maintenant les résultats principaux de l'article.

Soit E une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ et notons $B(k)$ le Banach obtenu en complétant $|\det|^{\frac{k-2}{2}}\otimes \mathrm{Sym}^{k-2}E^2\otimes_E \mathrm{Steinberg}$ par rapport à un quelconque $\mathcal{O}_E$-réseau de type fini sur $\mathcal{O}_E[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]$ (où $|\cdot|$ est la norme p-adique). Il est muni d'une action continue unitaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ de caractère central le caractère cyclotomique p-adique à la puissance $k-2$ (via la réciprocité locale pour $\mathbb{Q}_p$ convenablement normalisée). Ce Banach admet la description concrète suivante, déduite via [**4**],§4.6 de résultats de Teitelbaum (cf. §3.2) : c'est le Banach des fonctions $h : \mathbb{Q}_p \to E$ telles que $h(z)\,|_{\mathbb{Z}_p}$ est de classe $\mathcal{C}^{\frac{k-2}{2}}$ et $z^{k-2}h(1/z)\,|_{\mathbb{Z}_p-\{0\}}$ se prolonge sur $\mathbb{Z}_p$ en une fonction de classe $\mathcal{C}^{\frac{k-2}{2}}$, quotienté par les polynômes en z de degré au plus $k-2$ (rappelons que, si k est pair pour simplifier, une fonction est de classe $\mathcal{C}^{\frac{k-2}{2}}$ moralement si elle est $\frac{k-2}{2}$ fois dérivable avec dernière dérivée continue, cf. §3.2 pour le cas général). L'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ est induite par :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(h)(z) = |ad-bc|^{\frac{k-2}{2}}(-cz+a)^{k-2}h\Big(\frac{dz-b}{-cz+a}\Big).$$

Dans [**4**], on a associé à tout entier $k \geq 2$ et tout $\mathcal{L} \in \overline{\mathbb{Q}_p}$ un Banach p-adique $B(k,\mathcal{L})$ sur E (quitte à agrandir E) muni d'une action continue unitaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ de caractère central le caractère cyclotomique p-adique à la puissance $k-2$. La définition est par dualité : si $\log_{\mathcal{L}}$ est la branche du logarithme p-adique sur $\mathbb{C}_p^\times$ telle que $\log_{\mathcal{L}}(p) \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{L}$, le dual de $B(k,\mathcal{L})$ est un sous-espace convenable de l'espace des fonctions "$\log_{\mathcal{L}}$-rigides" sur le demi-plan p-adique avec action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ de poids $2-k$ (cf. §3.1). Pour $k=2$, $B(2,\mathcal{L})$ est une extension non scindée $0 \to B(2) \to B(2,\mathcal{L}) \to E \to 0$ dépendant de $\mathcal{L}$. Pour $k>2$, $B(k,\mathcal{L})$ est une complétion p-adique de $|\det|^{\frac{k-2}{2}} \otimes \mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes \mathrm{Steinberg}$ dépendant de $\mathcal{L}$ et on a un morphisme $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariant continu $B(k) \to B(k,\mathcal{L})$ d'image dense (en fait surjectif, voir théorème 1.1.1 ci-dessous). On donne dans ce texte une description directe plus concrète des $B(k,\mathcal{L})$ pour $k>2$ (cf. Cor.3.3.4) :

Théorème 1.1.1. — *Si $k>2$, le Banach $B(k,\mathcal{L})$ avec son action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ s'identifie au quotient du Banach $B(k)$ par l'adhérence du sous-espace vectoriel des fonctions :*

$$h(z) = \sum_{i\in I} \lambda_i (z-z_i)^{n_i} \log_{\mathcal{L}}(z-z_i)$$

où I est un ensemble fini, $\lambda_i \in E$, $z_i \in \mathbb{Q}_p$, $n_i \in \{\lfloor \frac{k-2}{2}\rfloor + 1, \ldots, k-2\}$ et $\deg\big(\sum_{i\in I}\lambda_i(z-z_i)^{n_i}\big) < \frac{k-2}{2}$.

Il n'est pas difficile de vérifier que les $B(2,\mathcal{L})$ (munis de leur action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$) sont tous distincts, admissibles au sens de [**28**] et topologiquement de longueur 2. Pour $k>2$, les $B(k,\mathcal{L})$ (munis de leur action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$) sont encore tous distincts, admissibles au sens de [**28**] et topologiquement irréductibles, mais la preuve est alors nettement plus délicate et utilise de façon cruciale la théorie des

(φ,Γ)-modules ([**12**], [**13**]), même si quelques résultats partiels peuvent s'obtenir par un calcul géométrique plus direct ([**7**]). Les Banach $B(k,\mathcal{L})$ et leurs tordus par des caractères non ramifiés de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ "correspondent" aux représentations p-adiques semi-stables non-cristallines de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ de dimension 2, de poids de Hodge-Tate $(0,k-1)$ et de déterminant le caractère cyclotomique p-adique à la puissance $k-1$ (à un caractère non ramifié près).

Le résultat principal de ce texte est (cf. Cor.5.1.9) :

Théorème 1.1.2. — *Soit $f=\sum_{n>0}a_n e^{2i\pi nz}$ une forme modulaire parabolique normalisée de poids $k>2$ nouvelle sur $\Gamma_1(M)$ avec $M=Np$ et $(N,p)=1$. On suppose f vecteur propre des opérateurs de Hecke et son caractère trivial en p de sorte que $\pi_p(f)=\mathrm{Steinberg}\otimes\mathrm{nr}(a_p^{-1})$ où $\mathrm{nr}(\lambda)(x)\overset{\text{déf}}{=}\lambda^{\mathrm{val}(x)}$ si $x\in\mathbb{Q}_p$. Si E est une extension finie suffisamment grande de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$, on a :*

$$\widehat{\pi}_p(f)\simeq B(k,-\mathcal{L}(f))\otimes\mathrm{nr}(p^{\frac{k-2}{2}}a_p^{-1}).$$

Lorsque $k=2$, on a $\widehat{\pi}_p(f)\simeq B(2)\otimes\mathrm{nr}(a_p^{-1})$ et $-\mathcal{L}(f)$ est la *seule* valeur de $\mathcal{L}$ telle que l'injection $\widehat{\pi}_p(f)\hookrightarrow\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}\otimes_{\mathbb{Z}_p}E$ s'étende en une injection $B(2,\mathcal{L})\otimes\mathrm{nr}(a_p^{-1})\hookrightarrow\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}\otimes_{\mathbb{Z}_p}E$ (voir corollaire 1.1.6 ci-dessous). Le fait que la valeur de $\mathcal{L}$ intervenant dans $\widehat{\pi}_p(f)$ lorsque $k>2$ soit précisément $-\mathcal{L}(f)$ est conséquence des résultats de [**3**] pour k pair et des résultats de [**12**] (voir aussi [**13**]) combinés avec le corollaire 5.2.4 pour $k>2$ (voir §5.1 et aussi [**17**],Th.7.10.1).

On explique maintenant les étapes de la preuve du théorème 1.1.2.

Soit B un Banach p-adique à coefficients dans une extension finie E de $\mathbb{Q}_p$ muni d'une action continue unitaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et $B^\vee$ son dual muni de l'action duale de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Soit $\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(N)\overset{\text{déf}}{=}\varprojlim_n\big(\varinjlim_r H^1_{\mathrm{c}}(Y(N,p^r),\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})\big)$ où N est premier à p et $Y(N,p^r)=Y(K_1^p(N)K(p^r))$ est la courbe modulaire "associée" au groupe de congruence $\Gamma_1(N)\cap\Gamma(p^r)$ (voir §2.1 et §2.2 pour une définition précise). On exprime pour commencer les espaces $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(B,\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(N)\otimes_{\mathbb{Z}_p}E)$ comme des symboles modulaires (cf. Th.2.4.2) :

Théorème 1.1.3. — *Soit $\widetilde{\Gamma}_1^p(N)$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[1/p])$ des matrices de déterminant positif congrues à $\begin{pmatrix}1&*\\0&*\end{pmatrix}$ modulo N et $\mathrm{Div}^0(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}))$ le $\mathbb{Z}$-module des diviseurs de degré 0 de $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ muni de son action naturelle de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$. Soit $\mathrm{Hom}_{\widetilde{\Gamma}_1^p(N)}\big(\mathrm{Div}^0(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})),B^\vee\big)$ le sous-espace vectoriel de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(\mathrm{Div}^0(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})),B^\vee\big)$ des éléments invariants par $\widetilde{\Gamma}_1^p(N)$ (agissant sur $B^\vee$ et $\mathrm{Div}^0(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}))$). Il y a un isomorphisme canonique compatible aux opérateurs de Hecke :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(B,\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(N)\otimes_{\mathbb{Z}_p}E\big)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_{\widetilde{\Gamma}_1^p(N)}\big(\mathrm{Div}^0(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})),B^\vee\big)$$

où l'action de Hecke sur le membre de gauche provient de celle sur $\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(N)$ et est donnée sur le membre de droite par l'action des doubles classes en $\widetilde{\Gamma}^p_1(N)$.

Si V est un E-espace vectoriel sur lequel les opérateurs de Hecke hors Np agissent, notons V^f le sous-espace sur lequel ils agissent par les valeurs propres associées à f. Soit $\Gamma^p_1(N) \subset \widetilde{\Gamma}^p_1(N)$ le sous-groupe des matrices de déterminant 1. On étudie dans un second temps les espaces $\mathrm{Hom}_{\Gamma^p_1(N)}\big(\mathrm{Div}^0(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})), B(k,\mathcal{L})^\vee\big)^f$ pour $\mathcal{L} \in E$. Plus précisément, une certaine involution w_∞ (correspondant grosso-modo à une conjugaison complexe) agit sur ces espaces et on étudie les sous-espaces $\mathrm{Hom}_{\Gamma^p_1(N)}\big(\mathrm{Div}^0(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})), B(k,\mathcal{L})^\vee\big)^{f,\pm}$ sur lesquels elle vaut $\pm$identité. Pour cela, on utilise de façon essentielle les résultats de [**14**] lorsque $k = 2$ et [**25**] lorsque $k > 2$ (étendus aux formes modulaires de caractère non trivial) qui, combinés avec les constructions de [**4**], permettent d'obtenir (cf. Cor.4.5.3) :

Théorème 1.1.4. — *Soit f comme dans le Th.1.1.2 avec $k \geq 2$. Il existe un (unique) nombre p-adique $\mathcal{L}^+(f)$ (resp. $\mathcal{L}^-(f)$) dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$ tel que, si E est une extension finie suffisamment grande de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$, on a :*

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\Gamma^p_1(N)}\big(\mathrm{Div}^0(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})), B(k,\mathcal{L})^\vee\big)^{f,+} &= 0 \quad \text{si} \quad \mathcal{L} \neq -\mathcal{L}^+(f)\\
\mathrm{Hom}_{\Gamma^p_1(N)}\big(\mathrm{Div}^0(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})), B(k,\mathcal{L})^\vee\big)^{f,+} &= E \quad \text{si} \quad \mathcal{L} = -\mathcal{L}^+(f)
\end{aligned}$$

(resp. avec $-$ au lieu de $+$).

Pour mettre ensembles les théorèmes 1.1.4 et 1.1.3, on voit qu'il faut passer de $\widetilde{\Gamma}^p_1(N)$ à $\Gamma^p_1(N)$ (ou l'inverse). On utilise ici l'"involution" d'Atkin-Lehner w_p. À partir de la relation $f|_{W_p} = -a_p f$ pour $W_p \in \widetilde{\Gamma}^p_1(N)\backslash\Gamma^p_1(N)$ tel que $\det(W_p) = p$, on déduit (cf. Prop.5.1.1) :

Proposition 1.1.5. — *Si $\lambda = p^{\frac{k-2}{2}}a_p^{-1}$, l'inclusion naturelle :*

$$\mathrm{Hom}_{\widetilde{\Gamma}^p_1(N)}\big(\mathrm{Div}^0(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})), (B(k,\mathcal{L})\otimes\mathrm{nr}(\lambda))^\vee\big)^f \subseteq \mathrm{Hom}_{\Gamma^p_1(N)}\big(\mathrm{Div}^0(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})), B(k,\mathcal{L})^\vee\big)^f$$

est un isomorphisme pour $\mathcal{L} \in E$.

En combinant les théorèmes 1.1.3 et 1.1.4, la proposition 1.1.5 et en utilisant l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur $\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(N)$, on obtient alors (cf. Cor.5.1.2 et Th.5.1.6) :

Corollaire 1.1.6. — *Soit f comme dans le Th.1.1.2 avec $k \geq 2$. On a $\mathcal{L}^+(f) = \mathcal{L}^-(f)$ et, notant $\widetilde{\mathcal{L}}(f)$ cette valeur commune :*

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(B(k,\mathcal{L}) \otimes \mathrm{nr}(p^{\frac{k-2}{2}}a_p^{-1}), (\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(N) \otimes_{\mathbb{Z}_p} E)^f\big) &= 0 \quad \text{si} \quad \mathcal{L} \neq -\widetilde{\mathcal{L}}(f)\\
\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(B(k,\mathcal{L}) \otimes \mathrm{nr}(p^{\frac{k-2}{2}}a_p^{-1}), (\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(N) \otimes_{\mathbb{Z}_p} E)^f\big) &\simeq E^2 \quad \text{si} \quad \mathcal{L} = -\widetilde{\mathcal{L}}(f).
\end{aligned}$$

Du corollaire 1.1.6 et des résultats de Colmez ([**12**], [**13**]) sur l'irréductibilité et l'admissibilité des Banach $B(k,\mathcal{L})$, il est facile de déduire $\widehat{\pi}_p(f)\simeq B(k,-\widetilde{\mathcal{L}}(f))\otimes \mathrm{nr}(p^{\frac{k-2}{2}}a_p^{-1})$ pour $k>2$. L'identification $\widetilde{\mathcal{L}}(f)=\mathcal{L}(f)$ n'est pas due à l'auteur (comme déjà signalé) et est conséquence des résultats de [**3**] et [**12**]. L'énoncé du corollaire 1.1.6 est encore valable en remplaçant $\widehat{H}^1_c$ par $\widehat{H}^1$ (cohomologie usuelle sans support).

Dans [**22**] sont associées à une forme f comme dans le théorème 1.1.2 des distributions p-adiques sur $\mathbb{Z}_p^\times$ dépendant (outre de f) d'un entier c premier à p, d'un élément $\nu\in(\mathbb{Z}/c\mathbb{Z})^\times$ et du choix d'une période complexe $\Omega_f^\pm$ (que l'on oublie ici mais voir §4.1). On les note $\mu_{f,c,\nu}$. Il est facile de les prolonger de $\mathbb{Z}_p^\times$ à $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ de façon à les voir comme éléments du dual $B(k)^\vee$ (cf. §5.2). Une relecture des résultats de [**14**] et [**25**] montre qu'elles peuvent alors s'obtenir par "spécialisations" à partir des éléments de $\mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}\big(\mathrm{Div}^0(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})),B(k)^\vee\big)^f$ (cf. Prop.5.2.2). Ceci combiné avec les résultats précédents entraîne (cf. Cor.5.2.5) :

Corollaire 1.1.7. — *Soit f comme dans le théorème 1.1.2 avec $k>2$. Pour tout $c\in\mathbb{Z}$ tel que $(c,p)=1$ et tout $\nu\in(\mathbb{Z}/c\mathbb{Z})^\times$, on a :*

$$\int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} h(z)\mu_{f,c,\nu}(z)=0$$

pour toute fonction $h:\mathbb{Q}_p\to E$ de la forme :

$$h(z)=\sum_{i\in I}\lambda_i(z-z_i)^{n_i}\log_{-\mathcal{L}(f)}(z-z_i)$$

où I est un ensemble fini, $\lambda_i\in E$, $z_i\in\mathbb{Q}_p$, $n_i\in\{\lfloor\frac{k-2}{2}\rfloor+1,\dots,k-2\}$ et $\deg\big(\sum_{i\in I}\lambda_i(z-z_i)^{n_i}\big)<\frac{k-2}{2}$.

L'article est organisé comme suit. Dans la partie 2, on définit les Banach $\widehat{\pi}_p(f)$, on vérifie qu'ils ne dépendent d'aucun choix et on montre le théorème 1.1.3 (la vérification de la compatibilité à Hecke étant un peu fastidieuse). Dans la partie 3, on rappelle les définitions des Banach $B(k)$, $B(k,\mathcal{L})$ et de leur duaux et on montre le théorème 1.1.1. Dans la partie 4, après quelques rappels classiques, on introduit ce dont on a besoin du formalisme de Darmon-Orton et on l'utilise pour montrer le théorème 1.1.4. Dans la partie 5, on combine les résultats des parties précédentes pour montrer la proposition 1.1.5, le corollaire 1.1.6 et le corollaire 1.1.7, puis avec les résultats de [**12**] et [**13**], le théorème 1.1.2.

1.2. Notations. — On note $\overline{\mathbb{Q}}$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}$, $\overline{\mathbb{Q}_p}$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$ et $\mathbb{C}_p$ la complétion p-adique de $\overline{\mathbb{Q}_p}$. On fixe des plongements $\overline{\mathbb{Q}}\hookrightarrow\mathbb{C}$ et $\overline{\mathbb{Q}}\hookrightarrow\overline{\mathbb{Q}_p}$. On note $\sqrt{p}$ la racine carrée positive de p (pour le premier plongement). Pour $x \in \mathbb{C}_p$, $\mathrm{val}(x) \in \mathbb{Q} \cup \{+\infty\}$ est la valuation p-adique normalisée par $\mathrm{val}(p) = 1$ et $|\,x\,| \overset{\text{déf}}{=} p^{-\mathrm{val}(x)} \in \mathbb{R}^+$. On note $\widehat{\mathbb{Z}} \overset{\text{déf}}{=} \prod_\ell \mathbb{Z}_\ell$ le complété profini de $\mathbb{Z}$, $\widehat{\mathbb{Z}}^p \overset{\text{déf}}{=} \prod_{\ell \neq p} \mathbb{Z}_\ell$, $\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f} \overset{\text{déf}}{=} \widehat{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, $\mathbb{A}^p_{\mathbb{Q},f} \overset{\text{déf}}{=} \widehat{\mathbb{Z}}^p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ et $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}} \overset{\text{déf}}{=} \mathbb{A}_{\mathbb{Q},f} \times \mathbb{R}^\times$.

Pour $\mathcal{L} \in \overline{\mathbb{Q}_p}$, on note $\log_{\mathcal{L}} : {\mathbb{C}_p}^\times \to \mathbb{C}_p$ l'unique fonction telle que $\log_{\mathcal{L}}(xy) = \log_{\mathcal{L}}(x) + \log_{\mathcal{L}}(y)$, $\log_{\mathcal{L}}(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ si $|x| < 1$ et $\log_{\mathcal{L}}(p) = \mathcal{L}$.

Un sous-groupe ouvert compact K (resp. K^p) de $\mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}})$ (resp. $\mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}}^p)$) sera toujours supposé de la forme $K = \prod_\ell K_\ell$ (resp. $K^p = \prod_\ell K^p_\ell$) où K_ℓ (resp. K^p_ℓ) est un sous-groupe ouvert compact de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell)$ (qui lui est égal pour presque tout ℓ). On note $\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)$ le sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ des matrices triangulaires supérieures et $\mathrm{I}(\mathbb{Z}_p)$ le sous-groupe ouvert de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ des matrices triangulaires supérieures modulo p.

On pose $\Omega \overset{\text{déf}}{=} \mathbb{C}_p - \mathbb{Q}_p$ et on fait agir $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ à gauche sur Ω par $z \mapsto gz \overset{\text{déf}}{=} \frac{az+b}{cz+d}$ si $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et $z \in \Omega$.

On normalise l'application de réciprocité du corps de classes local en envoyant les Frobenius arithmétiques sur l'inverse des uniformisantes. On note ε le caractère cyclotomique p-adique de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ et on remarque que, via la réciprocité locale en p, $\varepsilon(x) = x\,|x|$ si $x \in {\mathbb{Q}_p}^\times$.

On note $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$ les matrices de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ de déterminant positif et $\mathcal{H}$ le demi-plan de Poincaré complexe avec action à gauche usuelle de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$ ($z \mapsto gz \overset{\text{déf}}{=} \frac{az+b}{cz+d}$ si $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$). Pour $k \in \mathbb{Z}$ fixé, on fait agir à droite les matrices $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$ sur les fonctions $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ par la formule :

$$(f\,|_g)(z) \overset{\text{déf}}{=} \frac{\det(g)^{k-1}}{(cz+d)^k} f(gz).$$

Si $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ est une forme modulaire holomorphe de poids $k \geq 2$ nouvelle pour un groupe de congruence $\Gamma_1(M)$ vecteur propre des opérateurs de Hecke et si E est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$ dont l'anneau des entiers $\mathcal{O}_E$ contient les valeurs propres associées, on note $\sigma(f) : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_E)$ la représentation p-adique semi-simple associée à f par Deligne. Son déterminant est $\varepsilon^{k-1}\chi$ si χ est le caractère de f. Elle est absolument irréductible si f est parabolique. On note $\pi_p(f)$ la composante locale en p de la représentation admissible irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$ associée à f. C'est une représentation lisse irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ de caractère central $|\ |^{k-2}\chi_p$ où χ_p est la composante locale en p de χ vu comme caractère de $\mathbb{A}^\times_{\mathbb{Q},f}$.

Si E est une extension finie quelconque de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$, on note indifféremment St la représentation de Steinberg de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur E. Elle s'identifie au E-espace vectoriel des fonctions localement constantes $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p) \to E$ muni de l'action à gauche $(g(f))(z) \overset{\text{déf}}{=} f(\frac{dz-b}{-cz+a})$ (où $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$) quotienté par le sous-espace invariant des fonctions constantes.

Si A est un anneau (commutatif unitaire), on note $\mathrm{Sym}^{k-2}A^2$ la représentation algébrique de $\mathrm{GL}_2(A)$ de plus haut poids $(0, k-2)$. Elle s'identifie aux polynômes $\oplus_{0\leq j\leq k-2} AT^j$ munis de l'action à gauche $(g(P))(T) \overset{\text{déf}}{=} (-cT+a)^{k-2}P(\frac{dT-b}{-cT+a})$ où $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(A)$ et $P \in \mathrm{Sym}^{k-2}A^2$. Lorsque A est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$, on note $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}A^2$ la représentation $|\det|^{\frac{k-2}{2}} \otimes \mathrm{Sym}^{k-2}A^2$.

Si V est un espace vectoriel topologique sur un corps E muni d'une action à gauche E-linéaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ par automorphismes continus, on note $V^\vee \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}_E(V, E)$ le dual continu que l'on munit de l'action à gauche $(g(f))(v) \overset{\text{déf}}{=} f(g^{-1}(v))$ où $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et $f \in \mathrm{Hom}_E(V, E)$.

On fait agir $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ à gauche sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ via $g(x, y) \overset{\text{déf}}{=} (ax+by, cx+dy)$ si $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$. On note D_0 le $\mathbb{Z}$-module des diviseurs de degré 0 de $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ muni de l'action à gauche induite de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$. Pour tout $\mathbb{Z}$-module M, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0, M)$ est le $\mathbb{Z}$-module des applications $\mathbb{Z}$-linéaires de D_0 dans M. Si M est muni d'une action à gauche $\mathbb{Z}$-linéaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$, on munit le $\mathbb{Z}$-module $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0, M)$ d'une action à gauche $\mathbb{Z}$-linéaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ par :

$$g(\phi)(\{r_2\} - \{r_1\}) \overset{\text{déf}}{=} g\big(\phi(\{g^{-1}r_2\} - \{g^{-1}r_1\})\big)$$

où $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$, $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0, M)$ et $\{r_2\} - \{r_1\} \in D_0$. Pour tout sous-groupe H de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$, $\mathrm{Hom}_H(D_0, M) \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0, M)^H$ désigne les invariants sous H.

Si M est un module sur l'anneau des entiers $\mathcal{O}$ d'un corps de nombres muni d'endomorphismes T_ℓ et S_ℓ pour tout nombre premier ℓ sauf un nombre fini et si f est une forme modulaire quelconque telle que, pour tous ces ℓ, on a $T_\ell f = a_\ell f$, $S_\ell f = \alpha_\ell f$ avec $a_\ell, \alpha_\ell \in \mathcal{O}$, on note $M^f \overset{\text{déf}}{=} \{x \in M \mid T_\ell x = a_\ell x,\ S_\ell x = \alpha_\ell x\}$.

Tous les espaces de Banach B de ce texte sont p-adiques et tels que $\|B\| \subseteq |E|$ où $E \subset \overline{\mathbb{Q}_p}$ désigne le corps des coefficients qui est toujours une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. On appelle $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaire un espace de Banach B muni d'une action à gauche E-linéaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ telle que les applications $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \to B$, $g \mapsto gv$ sont continues pour tout $v \in B$ et telle que, pour un choix de norme $\|\ \|$ sur B, on a $\|gv\| = \|v\|$ pour tout $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et tout $v \in B$. Un $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaire est dit admissible (suivant [**28**],§3) si le Banach dual est de type fini sur $E \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathcal{O}_E[[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)]]$ où $\mathcal{O}_E[[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)]] \overset{\text{déf}}{=} \varprojlim \mathcal{O}_E[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)/H]$, la limite projective étant prise sur les sous-groupes de congruences principaux H de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$.

2. Cohomologies étales complétées, Banach p-adiques et symboles modulaires

On définit les Banach $\widehat{\pi}_p(f)$ et on démontre le Th.1.1.3 de l'introduction (Th.2.4.2 ci-dessous). Les définitions et résultats de cette partie sont valables pour toute forme modulaire f parabolique nouvelle de poids $k \geq 2$, niveau $\Gamma_1(M)$ (M entier quelconque) vecteur propre des opérateurs de Hecke.

2.1. Cohomologies étales complétées. — On introduit les espaces de cohomologie étale (ou de Betti) complétés et on en rappelle quelques propriétés.

Pour $K = \prod_\ell K_\ell$ un sous-groupe ouvert compact de $\mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}})$, on note $Y(K)$ la courbe modulaire algébrique ouverte sur $\mathbb{Q}$ dont les points complexes sont :

$$Y(K)(\mathbb{C}) \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})/\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})\mathbb{R}^\times K$$

Elle a un nombre de composantes connexes géométriques égal au cardinal de $(\mathbb{Q}^+)^\times\backslash\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f}^\times/\det(K)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $H^1(Y(K), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ (resp. $H^1_{\mathrm{c}}(Y(K), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$) désigne au choix la cohomologie de Betti de l'espace topologique $Y(K)(\mathbb{C})$ ou la cohomologie étale de la variété algébrique $Y(K)_{\overline{\mathbb{Q}}}$ (resp. les cohomologies à support compact) et $H^1_{\mathrm{par}}(Y(K), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ l'image de $H^1_{\mathrm{c}}(Y(K), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ dans $H^1(Y(K), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$. Dans la suite, on écrit $H^1_*(Y(K), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ pour désigner l'une quelconque de ces cohomologies. Les $H^1_*(Y(K), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ sont munis d'une action continue de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ et d'une action des opérateurs de Hecke KgK pour $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$, ces actions commutant entre elles. Voici nos conventions pour l'action de KgK : on voit $H^1_*(Y(K), \mathbb{Z}_p)$ dans $\big(\varinjlim_{K'} H^1_*(Y(K'), \mathbb{Z}_p)\big)^K$ et on fait agir $KgK = \amalg_i Kg_i$ par $KgKx \overset{\text{déf}}{=} \sum_i g_i^{-1}(x)$ si $x \in H^1_*(Y(K), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \simeq H^1_*(Y(K), \mathbb{Z}_p)/p^n$. On note T_ℓ et S_ℓ pour ℓ tel que $K_\ell = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell)$ les opérateurs de Hecke correspondant aux doubles classes $K\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \ell\end{pmatrix}K$ et $K\begin{pmatrix}\ell & 0\\ 0 & \ell\end{pmatrix}K$ avec $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \ell\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}\ell & 0\\ 0 & \ell\end{pmatrix}$ dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_\ell)$.

Soit maintenant $K^p = \prod_{\ell\neq p} K_\ell$ un sous-groupe ouvert compact de $\mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}}^p)$. On pose en suivant les notations de [**15**] :

$$H^1_*(K^p) \overset{\text{déf}}{=} \varinjlim_r H^1_*(Y(K^pK(p^r)), \mathbb{Z}_p)$$

$$\widehat{H}^1_*(K^p) \overset{\text{déf}}{=} \varprojlim_n \big(\varinjlim_r H^1_*(Y(K^pK(p^r)), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})\big) \simeq \varprojlim_n H^1_*(K^p)/p^nH^1_*(K^p)$$

où $K(p^r) \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Ker}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}))$ et où, pour $* = \mathrm{c}$, les applications de transition dans la limite inductive sont les duales des applications traces $H^1(Y(K^pK(p^{r+1})), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \to H^1(Y(K^pK(p^r)), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$. Les $H^1_*(K^p)$ et $\widehat{H}^1_*(K^p)$ sont des $\mathbb{Z}_p$-modules sans torsion. Les modules $H^1_*(K^p)$ sont munis d'une action

$\mathbb{Z}_p$-linéaire lisse de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, d'une action $\mathbb{Z}_p$-linéaire des T_ℓ, S_ℓ pour $\ell \nmid p$ tel que $K_\ell = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell)$ et d'une action $\mathbb{Z}_p$-linéaire de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, toutes ces actions commutant entre elles. Les modules $\widehat{H}^1_*(K^p)$ sont munis d'une action $\mathbb{Z}_p$-linéaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, T_ℓ, S_ℓ et $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, ces actions commutant entre elles et l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ faisant de $\widehat{H}^1_*(K^p) \otimes \mathbb{Q}_p$ un $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaire (voir [**15**],§3.3 pour plus de détails).

Les quatre lemmes qui suivent n'ont rien d'original. Quand on donne leurs preuves, c'est pour la commodité du lecteur.

Lemme 2.1.1. — *On a une surjection* $\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K^p) \twoheadrightarrow \widehat{H}^1(K^p)$ *et un isomorphisme* $\widehat{H}^1_{\mathrm{par}}(K^p) \xrightarrow{\sim} \widehat{H}^1(K^p)$.

Démonstration. — Pour tout r et tout n, on a une suite exacte :

$$(1)\qquad 0 \to (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^c \to (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^{\mathrm{ptes}} \to H^1_{\mathrm{c}}(Y(K^pK(p^r)), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \to \\ H^1(Y(K^pK(p^r)), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \to (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^{\mathrm{ptes}} \to (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^c \to 0$$

où c est le nombre de composantes connexes géométriques de $Y(K^pK(p^r))$. En se rappelant que les pointes de $Y(K^pK(p^{r+1}))$ sont ramifiées avec indice de ramification p au-dessus des pointes de $Y(K^pK(p^r))$ ([**30**],p.23), et en utilisant la commutativité des diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} H^1_{\mathrm{c}}(Y(K^pK(p^{r+1})), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) & \to & H^1(Y(K^pK(p^{r+1})), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H^1_{\mathrm{c}}(Y(K^pK(p^r)), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) & \to & H^1(Y(K^pK(p^r)), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}), \end{array}$$

un passage à la limite inductive sur (1) donne une surjection :

$$H^1_{\mathrm{c}}(K^p)/p^nH^1_{\mathrm{c}}(K^p) \twoheadrightarrow H^1(K^p)/p^nH^1(K^p).$$

Le résultat s'en déduit par passage à la limite projective, les conditions de Mittag-Leffler étant trivialement satisfaites. □

Lemme 2.1.2. — *Les* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$*-Banach unitaires* $\widehat{H}^1_*(K^p) \otimes \mathbb{Q}_p$ *sont admissibles.*

Démonstration. — Ce lemme est un cas particulier des résultats généraux de [**15**], mais se déduit aussi directement de [**24**]. Il suffit de regarder $* = \mathrm{c}$ et $* = $ rien par le Lem.2.1.1. L'admissibilité des Banach $\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K^p) \otimes \mathbb{Q}_p$ est démontrée dans [**24**],§4 (via l'étude de leur dual $\varprojlim H^1(Y(K^pK(p^r)), \mathbb{Z}_p) \otimes \mathbb{Q}_p$). La surjection $\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K^p) \twoheadrightarrow \widehat{H}^1(K^p)$ entraîne que les Banach $\widehat{H}^1(K^p) \otimes \mathbb{Q}_p$ sont aussi admissibles (cf. [**28**],§3). □

Lemme 2.1.3. — *Pour tout* $r > 1$ *et tout* n*, les applications de transition :*

$$H^1_{\mathrm{c}}(Y(K^pK(p^r)), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \to H^1_{\mathrm{c}}(Y(K^pK(p^{r+1})), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$$

sont injectives.

Démonstration. — Par [**2**],Prop.4.2 et la décomposition de la variété non-connexe $Y(K^pK(p^r))(\mathbb{C})$ en sommes disjointe de quotients de $\mathcal{H}$ par des sous-groupes de congruences $\Gamma_i(r)$ contenus (à conjugaison près) dans $\Gamma(p^r)$, on a :

$$H^1_{\mathrm{c}}(Y(K^pK(p^r)),\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) = \oplus_{i\in I(r)}\mathrm{Hom}_{\Gamma_i(r)}(D_0,\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}).$$

De même, $H^1_{\mathrm{c}}(Y(K^pK(p^{r+1})),\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) = \oplus_{i\in I(r+1)}\mathrm{Hom}_{\Gamma_i(r+1)}(D_0,\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ et l'application de transition est la composée d'injections :

$$\mathrm{Hom}_{\Gamma_i(r)}(D_0,\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\Gamma_i(r+1)}(D_0,\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$$

pour $\Gamma_i(r+1)\subset\Gamma_i(r)$ et d'applications diagonales :

$$\mathrm{Hom}_{\Gamma_i(r+1)}(D_0,\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\Gamma_i(r+1)}(D_0,\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^{d_i}$$

d'où le résultat. □

Lemme 2.1.4. — *Si f est une forme modulaire parabolique de poids $k\geq 2$ vecteur propre des opérateurs de Hecke T_ℓ et S_ℓ pour ℓ suffisamment grand et si $\mathcal{O}_E$ est l'anneau des entiers d'une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$ contenant les valeurs propres associées, on a :*

$$(\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K^p)\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}_E)^f \xrightarrow{\sim} (\widehat{H}^1_{\mathrm{par}}(K^p)\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}_E)^f \xrightarrow{\sim} (\widehat{H}^1(K^p)\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}_E)^f.$$

Démonstration. — En vertu du Lem.2.1.1, il suffit de montrer le premier isomorphisme. Il découle du fait que les noyau et conoyau de la flèche $(\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K^p)\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}_E)^f \to (\widehat{H}^1(K^p)\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}_E)^f$ sont "Eisenstein", et donc nuls puisque f est parabolique. Pour plus de détails, voir la preuve de [**6**],Prop.3.2.4 ou de [**17**],Prop.7.7.13. □

2.2. Les Banach $\widehat{\pi}_p(f)$. —

On vérifie que l'adhérence de la représentation $\mathrm{Sym}^{k-2}E^2\otimes_E\pi_p(f)$ dans les divers Banach p-adiques cohomologiques dans lesquels elle se plonge naturellement de façon équivariante ne dépend d'aucun choix.

Soit $K^p=\prod_{\ell\neq p}K_\ell$ un sous-groupe ouvert compact de $\mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}}^p)$ et notons $(\widetilde{\mathrm{Sym}}^{k-2}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^2)^\vee$ le faisceau localement constant associé pour chaque $r\in\mathbb{N}$ au fibré sur la variété $Y(K^pK(p^r))(\mathbb{C})$:

$$\Big((\mathrm{Sym}^{k-2}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^2)^\vee\times[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})/\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})\mathbb{R}^\times K^p]\Big)/K(p^r)$$

où $g\in K(p^r)$ agit sur la représentation algébrique $(\mathrm{Sym}^{k-2}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^2)^\vee$ par l'action à gauche de l'image dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ de g^{-1} et sur $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ par la multiplication à droite par g. On note encore $(\widetilde{\mathrm{Sym}}^{k-2}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^2)^\vee$ le faisceau descendu sur le petit site étale de $Y(K^pK(p^r))_{\overline{\mathbb{Q}}}$ (cf. [**8**],§2.1). Lorsque $r\geq n$, la cohomologie (de Betti ou étale) $H^1_*(Y(K^pK(p^r)),(\widetilde{\mathrm{Sym}}^{k-2}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^2)^\vee)$ est isomorphe à

$(\mathrm{Sym}^{k-2}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^2)^\vee \otimes H^1_*(Y(K^pK(p^r)),\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ car le fibré est alors trivial d'où un isomorphisme :

$$\varprojlim_n \big(\varinjlim_r H^1_*(Y(K^pK(p^r)),(\widetilde{\mathrm{Sym}}^{k-2}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^2)^\vee)\big) \simeq (\mathrm{Sym}^{k-2}\mathbb{Z}_p^2)^\vee \otimes_{\mathbb{Z}_p} \widehat{H}^1_*(K^p)$$

qui est compatible aux actions de Hecke et Galois (agissant trivialement à droite sur $(\mathrm{Sym}^{k-2}\mathbb{Z}_p^2)^\vee$) et à l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ ($\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ si l'on tensorise par $\mathbb{Q}_p$). En composant avec l'application naturelle de $\varinjlim H^1_*\big(Y(K^pK(p^r)),(\widetilde{\mathrm{Sym}}^{k-2}\mathbb{Z}_p^2)^\vee\big)$ dans le membre de gauche, en tensorisant par $\mathrm{Sym}^{k-2}\mathbb{Z}_p^2$ et en composant à droite avec l'application d'évaluation :

$$\mathrm{Sym}^{k-2}\mathbb{Z}_p^2 \otimes (\mathrm{Sym}^{k-2}\mathbb{Z}_p^2)^\vee \otimes \widehat{H}^1_*(K^p) \to \widehat{H}^1_*(K^p),$$

on en déduit une application canonique qui commute aux actions de Hecke, Galois et $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$:

$$\Psi : \mathrm{Sym}^{k-2}\mathbb{Z}_p^2 \otimes_{\mathbb{Z}_p} \varinjlim_r H^1_*\big(Y(K^pK(p^r)),(\widetilde{\mathrm{Sym}}^{k-2}\mathbb{Z}_p^2)^\vee\big) \longrightarrow \widehat{H}^1_*(K^p).$$

Lemme 2.2.1. — *Le noyau de Ψ est la torsion du membre de gauche.*

Démonstration. — Notons que $\varinjlim H^1_*\big(Y(K^pK(p^r)),(\widetilde{\mathrm{Sym}}^{k-2}\mathbb{Z}_p^2)^\vee\big)$ n'a pas de torsion si $k=2$ ou si $*\in\{\mathrm{c},\mathrm{par}\}$ de sorte que l'énoncé dit que Ψ est injectif dans ces cas. Ce lemme est une conséquence de la suite spectrale de [**15**],§4.3, mais se déduit aussi de [**24**],§6. En effet, on déduit facilement de *loc.cit.* que pour tout $v\in\mathrm{Sym}^{k-2}\mathbb{Z}_p^2$ non nul, la flèche :

$$\Psi_v : \varinjlim_r H^1_*\big(Y(K^pK(p^r)),(\widetilde{\mathrm{Sym}}^{k-2}\mathbb{Z}_p^2)^\vee\big) \to \widehat{H}^1_*(K^p), x\mapsto \Psi(v\otimes x)$$

est injective modulo torsion. Mais si Ψ n'est pas injectif (modulo torsion), soit $N\leq k-2$ minimal tel que $\Psi(\sum_{i=0}^N T^i\otimes x_i)=0$ avec x_N qui n'est pas de torsion dans $\varinjlim H^1_*\big(Y(K^pK(p^r)),(\widetilde{\mathrm{Sym}}^{k-2}\mathbb{Z}_p^2)^\vee\big)$ et $N>0$ puisque $\Psi_1=\Psi_{T^0}$ est injectif (modulo torsion). Soit $b\in\mathbb{Z}_p$ de valuation suffisamment grande pour que $\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix} x_i = x_i$ pour tout i. Alors :

$$\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\big(\sum_{i=0}^N T^i\otimes x_i\big) - \sum_{i=0}^N T^i\otimes x_i = \sum_{i=0}^{N-1} T^i\otimes y_i$$

avec y_{N-1} qui n'est pas de torsion. Donc $\Psi(\sum_{i=0}^{N-1} T^i\otimes y_i)=0$ ce qui contredit la minimalité de N. $\square$

L'application $\Psi\otimes\mathbb{Q}_p$ est donc injective et commute à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$.

Soit maintenant f une forme parabolique normalisée de poids $k\geq 2$ nouvelle pour le groupe de congruence $\Gamma_1(Np^\alpha)$ (N premier à p) et vecteur propre des opérateurs de Hecke T_ℓ, S_ℓ pour $\ell \nmid Np$. On note χ son caractère de sorte que $S_\ell f = \ell^{k-2}\chi(\ell)f$. On fixe une extension finie E de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$ contenant les valeurs propres associées et on note $K_1^p(N) \subseteq \mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}}^p)$ le sous-groupe ouvert compact :

$$K_1^p(N) \overset{\text{déf}}{=} \prod_{\ell \nmid Np} \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell) \times \prod_{\ell | N} K_{1,\ell}(\ell^{n_\ell}) \tag{2}$$

où $K_{1,\ell}(\ell^{n_\ell}) \overset{\text{déf}}{=} \left\{ g_\ell \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell),\ g_\ell \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \text{ mod. } \ell^{n_\ell} \right\}$ et $N = \prod_\ell \ell^{n_\ell}$.

On choisit un sous-groupe ouvert compact $K^p \subseteq K_1^p(N)$ et un plongement $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariant :

$$\iota : \mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes_E \pi_p(f) \hookrightarrow \mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes_E \varinjlim_r H^1_*\big(Y(K^pK(p^r)), (\widetilde{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2)^\vee\big)^f$$

où $(\widetilde{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2)^\vee \overset{\text{déf}}{=} (\widetilde{\mathrm{Sym}}^{k-2}\mathbb{Z}_p{}^2)^\vee \otimes_{\mathbb{Z}_p} E$. Noter que ι est juste le tensorisé par $\mathrm{Sym}^{k-2}E^2$ d'un plongement $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariant de la représentation lisse $\pi_p(f)$ dans $\varinjlim H^1_*\big(Y(K^pK(p^r)), (\widetilde{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2)^\vee\big)^f$. En composant ι à droite avec l'injection canonique $\Psi_E \overset{\text{déf}}{=} \Psi \otimes E$, on obtient un plongement $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariant :

$$\Psi_E \circ \iota : \mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes_E \pi_p(f) \hookrightarrow (\widehat{H}^1_*(K^p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} E)^f \subset \widehat{H}^1_*(K^p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} E.$$

Définition 2.2.2. — *Pour $*$, K^p et ι comme ci-dessus, on note $\widehat{\pi}_p(f)_{*,K^p,\iota}$ l'adhérence de $\mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes_E \pi_p(f)$ dans $\widehat{H}^1_*(K^p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} E$ via l'injection $\Psi_E \circ \iota$.*

En d'autres termes, $\widehat{\pi}_p(f)_{*,K^p,\iota}$ est le complété p-adique de $\mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes_E \pi_p(f)$ par rapport au $\mathcal{O}_E$-réseau $(\mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes_E \pi_p(f)) \cap (\Psi_E \circ \iota)^{-1}(\widehat{H}^1_*(K^p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_E)$. Les $\widehat{\pi}_p(f)_{*,K^p,\iota}$ sont des $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaires.

Proposition 2.2.3. — *Le $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaire $\widehat{\pi}_p(f)_{*,K^p,\iota}$ est indépendant des choix de $*$, K^p ou ι et est admissible.*

Démonstration. — L'admissibilité résulte du Lem.2.1.2. Fixons d'abord $*$ et K^p. Soit $\pi^p(f)$ le produit restreint aux places finies hors p des composantes locales de la représentation automorphe associée à f (c'est-à-dire des composantes locales unitaires tordues en chaque place par le caractère norme à la puissance $k/2-1$) que l'on peut réaliser sur E. On a un isomorphisme canonique :

$$\mathrm{Hom}\big(\pi^p(f)^{K^p} \otimes_E \sigma(f)^\vee, \mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes \varinjlim_r H^1_*\big(Y(K^pK(p^r)), (\widetilde{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2)^\vee\big)\big) \simeq \mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes_E \pi_p(f)$$

où il s'agit à gauche des applications E-linéaires commutant aux actions de Hecke et Galois. Un plongement ι comme ci-dessus revient au choix d'un élément $v \in \pi^p(f)^{K^p} \otimes_E \sigma(f)^\vee$ via $\iota(x) \overset{\text{déf}}{=} x(v)$ si $x \in \mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes_E \pi_p(f)$ est vu à gauche comme un homomorphisme. Soit M_v le $\mathcal{O}_E$-réseau de $\pi^p(f)^{K^p} \otimes_E \sigma(f)^\vee$ stable par Hecke et Galois engendré par v. Le $\mathcal{O}_E$-réseau ci-dessus induit par $\Psi_E \circ \iota$ sur $\mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes_E \pi_p(f)$ est l'ensemble des x tels que $\Psi_E(x(v)) \in \widehat{H}^1_*(K^p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_E$ ou, de manière équivalente, l'ensemble des x tels que $\Psi_E(x(M_v))$ est "entier". Or, comme $\pi^p(f)^{K^p} \otimes_E \sigma(f)^\vee$ est un E-espace vectoriel de dimension finie, tous les M_v sont commensurables entre eux, donc aussi tous les réseaux induits par les $\Psi_E \circ \iota$ ce qui entraîne que $\widehat{\pi}_p(f)_{*,K^p,\iota}$ ne dépend pas de ι. Fixons maintenant $*$ = rien, K^p, ι et soit $K'^p \subseteq K^p$ un autre sous-groupe ouvert compact de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}^p)$, que l'on peut prendre normal, et $\Psi_E \circ \iota'$ le plongement $\mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes_E \pi_p(f) \hookrightarrow \widehat{H}^1(K'^p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} E$ déduit de $\Psi_E \circ \iota$ par composition avec $\widehat{H}^1(K^p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} E \hookrightarrow \widehat{H}^1(K'^p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} E$. Il est facile de voir que cette dernière immersion est fermée (car par exemple $\widehat{H}^1(K^p) \otimes E = (\widehat{H}^1(K'^p) \otimes E)^{K^p}$, cf. [**15**],§3.3), d'où $\widehat{\pi}_p(f)_{K^p,\iota} \xrightarrow{\sim} \widehat{\pi}_p(f)_{K'^p,\iota'}$ et de même avec $*$ = par par le Lem.2.1.1. Enfin, fixons K^p, $\Psi_E \circ \iota : \mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes_E \pi_p(f) \hookrightarrow \widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K^p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} E$ et notons $\Psi_E \circ \iota'$ le plongement $\mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes_E \pi_p(f) \hookrightarrow \widehat{H}^1(K^p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} E$ déduit par composition avec la surjection $\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K^p) \otimes E \twoheadrightarrow \widehat{H}^1(K^p) \otimes E$ (Lem.2.1.1). On a une application continue d'image dense $\widehat{\pi}_p(f)_{\mathrm{c},K^p,\iota} \to \widehat{\pi}_p(f)_{K^p,\iota}$. La catégorie des Banach admissibles étant abélienne ([**28**],§3), c'est forcément une surjection. Par le Lem.2.1.4, c'est aussi une injection. Ceci achève la preuve. □

On note simplement $\widehat{\pi}_p(f)$ ce Banach ne dépendant que de f. Son caractère central (via la réciprocité locale) est $\varepsilon^{k-2}\chi_p$ où χ_p est la composante en p de $\chi : (\mathbb{Q}^+)^\times \backslash \mathbb{A}^\times_{\mathbb{Q},f} \to \mathcal{O}_E^\times$. Par ailleurs, on déduit des résultats de [**15**],§4.3 que les vecteurs localement algébriques de $\widehat{\pi}_p(f)$ sont exactement $\mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes_E \pi_p(f)$.

2.3. Cohomologie et symboles modulaires. — Pour N premier à p, on explicite $H^1_{\mathrm{c}}(Y(K^p_1(N)K(p^r)), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ et $\varinjlim_r H^1_{\mathrm{c}}(Y(K^p_1(N)K(p^r)), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ avec leurs actions de GL_2 et de Hecke en termes de symboles modulaires (cf. (2) pour $K^p_1(N)$). Tous les résultats sont certainement bien connus, mais faute de références précises, nous donnons des preuves complètes.

Pour n entier ≥ 1, soit I_n le $\mathbb{Z}_p$-module des fonctions localement constantes $f : \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ telles que $f(\gamma g) = \gamma f(g)$ pour $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$ et $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$. On le munit d'une action à gauche de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$ par translation à droite. Soit $K = \prod_\ell K_\ell$ un sous-groupe ouvert compact de $\mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}})$, on munit I_n^K d'une action $\mathbb{Z}$-linéaire des doubles classes $KgK = \amalg_i K g_i$ par :

$$KgK\Phi \overset{\text{déf}}{=} \sum_i g_i^{-1}(\Phi)$$

où $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$ et $\Phi \in I_n$. Pour ℓ tel que $K_\ell = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell)$, on note T_ℓ (resp. S_ℓ) l'action de la double classe $K \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \ell \end{pmatrix} K$ (resp. $K \begin{pmatrix} \ell & 0 \\ 0 & \ell \end{pmatrix} K$) avec $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \ell \end{pmatrix}$ (resp. $\begin{pmatrix} \ell & 0 \\ 0 & \ell \end{pmatrix}$) dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_\ell)$. Si $K_p = K(p^r)$ pour un entier $r > 0$, l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p) \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$ sur I_n induit une action sur I_n^K via son quotient $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)/K_p \simeq \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})$.

Le lemme suivant est une version adélique d'un cas simple de [**2**],Prop.4.2 qui suffit pour la suite. Je remercie A. Genestier pour son aide dans sa démonstration.

Lemme 2.3.1. — *Pour K suffisamment petit, on a un isomorphisme canonique compatible aux opérateurs de Hecke KgK :*

$$H^1_{\mathrm{c}}(Y(K), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \simeq I_n^K.$$

Si $K_p = K(p^r)$ pour un entier $r > 0$, cet isomorphisme commute aux actions de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$.

Démonstration. — Soit $\mathcal{I}_n$ le $\mathbb{Z}_p$-module des fonctions localement constantes f : $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ muni de l'action à droite de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$ par translation à gauche et de l'action à gauche de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$ par translation à droite. Notons $\overline{\mathcal{H}} \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{H} \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$, en utilisant que $H^1(\overline{\mathcal{H}}, \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}); \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ (il s'agit de la cohomologie de Betti relative), on a un isomorphisme canonique :

$$H^1\big(\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f}) \times \overline{\mathcal{H}}, \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}); \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\big) \simeq \mathcal{I}_n \tag{3}$$

compatible à toutes les actions. Le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$ agit librement sur $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f}) \times \overline{\mathcal{H}}$ et un examen de la suite spectrale de Hochschild-Serre fournit un isomorphisme canonique $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$-équivariant :

$$H^1\big(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+ \backslash \big(\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f}) \times \overline{\mathcal{H}}\big), \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+ \backslash \big(\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})\big); \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\big) \simeq I_n.$$

Le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+ \times K$, même pour K suffisamment petit, n'agit pas librement sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$, mais en remplaçant dans (3) $\overline{\mathcal{H}}$ par $\mathcal{H}$ et $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ par un système stable sous $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$ de petits disques (épointés) dans $\mathcal{H}$ contractiles dans $\overline{\mathcal{H}}$ autour de chaque pointe de $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ sur lequel $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+ \times K$ agit librement pour K suffisamment petit (c'est possible), on a un H^1 relatif isomorphe (par excision) à celui de (3) et la suite spectrale de Hochschild-Serre donne encore un isomorphisme :

$$H^1\big(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+ \backslash \big(\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})/K \times \overline{\mathcal{H}}\big), \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+ \backslash \big(\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})/K \times \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})\big); \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\big) \simeq I_n^K.$$

On en déduit le résultat car $H^1(Y(K) \cup \mathrm{ptes}, \mathrm{ptes}; \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) = H^1_{\mathrm{c}}(Y(K), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ et car toutes les actions passent par celle de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$. □

Le Lem.2.3.1 s'applique en particulier pour $K \subseteq K_1^p(N)K(p^r)$ avec $Np^r > 2$.

Pour tout entier $n > 0$ et tout entier $r \geq 0$, on note $\mathrm{Ind}_1^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})} 1_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}$ le $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$-module des fonctions $f : \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. Il est muni de *deux* actions à gauche de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ (via son quotient $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})$) :

$$(g *_1 f)(\cdot) \overset{\text{déf}}{=} f(\cdot g) \quad \text{et} \quad (g *_2 f)(\cdot) \overset{\text{déf}}{=} f(g^{-1}\cdot).$$

Ces deux actions commutent entre elles. Soit $N > 0$ un entier premier à p. On définit :

$$\mathrm{Hom}_{\Gamma_1(N)}\big(D_0, \mathrm{Ind}_1^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})} 1_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}\big)$$

comme le $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$-module des fonctions $\mathbb{Z}$-linéaires $\phi : D_0 \to \mathrm{Ind}_1^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})} 1_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}$ telles que $\gamma *_1 \phi(\{r_2\} - \{r_1\}) = \phi(\{\gamma r_2\} - \{\gamma r_1\})$ pour tout $\{r_2\} - \{r_1\} \in D_0$ et tout $\gamma \in \Gamma_1(N)$. Il est muni de l'action à gauche de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})$:

$$(g(\phi))(\{r_2\} - \{r_1\}) \overset{\text{déf}}{=} g *_2 \phi(\{r_2\} - \{r_1\}). \tag{4}$$

On définit de façon strictement analogue $\mathrm{Hom}_{\Gamma_1(N)}\big(D_0, \mathrm{Ind}_1^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})} 1_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}\big)$ avec la même action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})$. On munit $\mathrm{Hom}_{\Gamma_1(N)}\big(D_0, \mathrm{Ind}_1^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})} 1_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}\big)$ de l'action des opérateurs de Hecke T_ℓ, S_ℓ pour $\ell \nmid Np$ suivante :

$$\begin{aligned}(T_\ell\phi)(\{r_2\} - \{r_1\}) &\overset{\text{déf}}{=} \sum_i \delta_i^{-1} *_1 \phi(\{\delta_i r_2\} - \{\delta_i r_1\})\\ (S_\ell\phi)(\{r_2\} - \{r_1\}) &\overset{\text{déf}}{=} \sigma_\ell^{-1} \begin{pmatrix} \ell^{-1} & 0 \\ 0 & \ell^{-1} \end{pmatrix} *_1 \phi(\{\sigma_\ell r_2\} - \{\sigma_\ell r_1\})\end{aligned}$$

où les δ_i sont définis par :

$$\Gamma_1(N) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \ell \end{pmatrix} \Gamma_1(N) = \amalg_i \Gamma_1(N)\delta_i \tag{5}$$

et où $\sigma_\ell \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est tel que $\sigma_\ell \equiv \begin{pmatrix} \ell^{-1} & 0 \\ 0 & \ell \end{pmatrix}$ mod. N. Les actions de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})$ et des T_ℓ, S_ℓ sur $\mathrm{Hom}_{\Gamma_1(N)}\big(D_0, \mathrm{Ind}_1^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})} 1_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}\big)$ commutent entre elles.

On note $H^1_{\mathrm{c}}\big(Y^0(K_1^p(N)K(p^r)), -\big)$ la cohomologie étale à support compact d'une composante *connexe* géométrique (sur $\overline{\mathbb{Q}}$) de $Y(K_1^p(N)K(p^r))$ ou la cohomologie de Betti à support compact de ses points complexes. Rappelons que ceux-ci s'identifient à $(\Gamma_1(N) \cap \Gamma(p^r))\backslash\mathcal{H}$.

Lemme 2.3.2. — *Pour tout entier $n > 0$ et tout entier $r > 1$, on a des isomorphismes canoniques :*

$$\begin{aligned}H^1_{\mathrm{c}}\big(Y^0(K_1^p(N)K(p^r)), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\big) &\simeq \mathrm{Hom}_{\Gamma_1(N)}\big(D_0, \mathrm{Ind}_1^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})} 1_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}\big)\\ H^1_{\mathrm{c}}\big(Y(K_1^p(N)K(p^r)), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\big) &\simeq \mathrm{Hom}_{\Gamma_1(N)}\big(D_0, \mathrm{Ind}_1^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})} 1_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}\big)\end{aligned}$$

qui commutent aux actions de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})$ pour le premier, de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})$ et des T_ℓ, S_ℓ pour le deuxième.

Démonstration. — On montre seulement le deuxième isomorphisme avec ses compatibilités, laissant le premier, plus facile, au lecteur. Notons $K \overset{\text{déf}}{=} K_1^p(N)K(p^r) \subseteq K_1(N)$. On définit :

$$\varphi : I_n^K \to \mathrm{Hom}_{\Gamma_1(N)}\big(D_0, \mathrm{Ind}_1^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})} 1_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}\big)$$

par $\varphi(\Phi)(\{r_2\} - \{r_1\})(g) \overset{\text{déf}}{=} \Phi(\widehat{g}^{-1})(\{r_2\} - \{r_1\})$ où $\widehat{g}$ est un élément quelconque de $K_1(N)$ dont la composante en p relève g^{-1} modulo p^r. Montrons que $\varphi(\Phi)$

commute bien à $\Gamma_1(N)$. Pour $\{r_2\}-\{r_1\}\in D_0$, $\gamma\in\Gamma_1(N)$ et $g\in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})$, on a :

$$\begin{aligned}\varphi(\Phi)(\{\gamma r_2\}-\{\gamma r_1\})(g) &= \Phi(\widehat{g}^{-1})(\{\gamma r_2\}-\{\gamma r_1\}) = \gamma^{-1}(\Phi(\widehat{g}^{-1}))(\{r_2\}-\{r_1\})\\ &= \Phi(\gamma^{-1}\widehat{g}^{-1})(\{r_2\}-\{r_1\}) = \Phi((\widehat{g}\gamma)^{-1})(\{r_2\}-\{r_1\})\\ &= \gamma *_1 (\varphi(\Phi)(\{r_2\}-\{r_1\}))(g).\end{aligned}$$

On définit $\psi : \mathrm{Hom}_{\Gamma_1(N)}\big(D_0, \mathrm{Ind}_1^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})} 1_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}\big) \to I_n^K$ par $\psi(\phi)(g)(\{r_2\}-\{r_1\}) \overset{\text{déf}}{=} \phi(\{\gamma^{-1}r_2\}-\{\gamma^{-1}r_1\})(k_{1,p}^{-1})$ où $g=\gamma k_1$ dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+K_1(N)$ et $k_{1,p}$ est l'image dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})$ de la composante en p de k_1. On vérifie facilement que ψ est un inverse de φ, de sorte que φ est un isomorphisme. Montrons que φ commute à l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})$. Soit $g_0\in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})$ de relevé $\widehat{g}_0$ dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$. On a :

$$\begin{aligned}\varphi(g_0(\Phi))(\{r_2\}-\{r_1\})(g) &= \Phi(\widehat{g}^{-1}\widehat{g}_0)(\{r_2\}-\{r_1\}) = \Phi((\widehat{g}_0^{-1}\widehat{g})^{-1})(\{r_2\}-\{r_1\})\\ &= g_0 *_2 (\varphi(\Phi)(\{r_2\}-\{r_1\}))(g)\\ &= (g_0(\varphi(\Phi)))(\{r_2\}-\{r_1\})(g).\end{aligned}$$

Montrons que φ commute à T_ℓ :

$$\begin{aligned}\varphi(T_\ell\Phi)(\{r_2\}-\{r_1\})(g) &= \sum_i \Phi(\widehat{g}^{-1}\delta_{i,\ell}^{-1})(\{r_2\}-\{r_1\}) = \sum_i \Phi(\delta_{i,\ell}^{-1}\widehat{g}^{-1})(\{r_2\}-\{r_1\})\\ &= \sum_i \delta_i^{-1}(\Phi(\tilde{\delta}_i\widehat{g}^{-1}))(\{r_2\}-\{r_1\})\\ &= \sum_i \Phi((\widehat{g}\delta_{i,p}^{-1})^{-1})(\{\delta_i r_2\}-\{\delta_i r_1\})\\ &= \sum_i \delta_i^{-1} *_1 (\varphi(\Phi)(\{\delta_i r_2\}-\{\delta_i r_1\}))(g)\\ &= (T_\ell\varphi(\Phi))(\{r_2\}-\{r_1\})(g)\end{aligned}$$

où $\widehat{g}\in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ relève g, $\delta_{i,\ell'}=\delta_i$ mais vu dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_{\ell'})\subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$ (ℓ' premier quelconque) et $\tilde{\delta}_i \overset{\text{déf}}{=} \delta_i\delta_{i,\ell}^{-1}$. On laisse le cas de S_ℓ en exercice au lecteur. On conclut avec le Lem.2.3.1. □

On munit $\mathrm{Hom}_{\Gamma_1(N)}\big(D_0, \mathrm{Ind}_1^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})} 1_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}\big)$ de l'action d'un opérateur supplémentaire w_∞ donnée par :

$$(w_\infty\phi)(\{r_2\}-\{r_1\}) \overset{\text{déf}}{=} \tau *_1 \phi(\{\tau r_2\}-\{\tau r_1\})$$

où τ est un élément quelconque de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\cap K_1(N)$ de déterminant négatif, par exemple $\tau = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. Elle commute à l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})$ et on vérifie facilement qu'elle commute aussi à l'action des T_ℓ, S_ℓ.

Lemme 2.3.3. — *L'isomorphisme du Lem.2.3.2 transforme l'action de la conjugaison complexe à gauche en l'action de w_∞.*

Démonstration. — Notons $K \overset{\text{déf}}{=} K_1^p(N)K(p^r)$. En termes adéliques, la conjugaison complexe agit sur $Y(K)(\mathbb{C}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+\backslash\big(\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})/K \times \mathcal{H}\big)$ par :

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+(gK, z) \mapsto \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+(\tau gK, \tau\overline{z})$$

de sorte qu'elle agit sur $H^1_c(Y(K), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \simeq I_n^K$ (Lem.2.3.1) en envoyant Φ sur Φ^τ défini par :

$$\Phi^\tau(g)(\{r_2\} - \{r_1\}) \overset{\text{déf}}{=} \Phi(\tau g)(\{\tau r_2\} - \{\tau r_1\}).$$

Par l'isomorphisme φ de la preuve du Lem.2.3.2, on a :

$$\begin{aligned}
\varphi(\Phi^\tau)(\{r_2\} - \{r_1\})(g) &= \Phi^\tau(\widehat{g}^{-1})(\{r_2\} - \{r_1\}) = \Phi(\tau\widehat{g}^{-1})(\{\tau r_2\} - \{\tau r_1\}) \\
&= \Phi((\widehat{g}\tau)^{-1})(\{\tau r_2\} - \{\tau r_1\}) = \varphi(\Phi)(\{\tau r_2\} - \{\tau r_1\})(g\tau) \\
&= \tau *_1 (\varphi(\Phi)(\{\tau r_2\} - \{\tau r_1\}))(g) \\
&= (w_\infty\varphi(\Phi))(\{r_2\} - \{r_1\})(g).
\end{aligned}$$

□

Soit $\mathrm{Ind}_1^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)} 1_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}$ (resp. $\mathrm{Ind}_1^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_p)} 1_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}$) le $\mathbb{Z}_p$-module des fonctions continues de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ (resp. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_p)$) dans $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ et définissons comme précédemment $\mathrm{Hom}_{\Gamma_1(N)}\big(D_0, \mathrm{Ind}_1^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)} 1_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}\big)$ (resp. $\mathrm{Hom}_{\Gamma_1(N)}\big(D_0, \mathrm{Ind}_1^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_p)} 1_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}\big)$) muni de l'action (4) de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ et des mêmes actions de Hecke (resp. de l'action (4) de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_p)$).

Lemme 2.3.4. — *On a des isomorphismes compatibles à toutes les actions :*

$$\begin{aligned}
\varinjlim_r \mathrm{Hom}_{\Gamma_1(N)}\big(D_0, \mathrm{Ind}_1^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})} 1_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}\big) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\Gamma_1(N)}\big(D_0, \mathrm{Ind}_1^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_p)} 1_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}\big) \\
\varinjlim_r \mathrm{Hom}_{\Gamma_1(N)}\big(D_0, \mathrm{Ind}_1^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})} 1_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}\big) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\Gamma_1(N)}\big(D_0, \mathrm{Ind}_1^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)} 1_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}\big)
\end{aligned}$$

Démonstration. — Cela résulte du fait que D_0 est un $\mathbb{Z}[\Gamma_1(N)]$-module de type fini. Voir le Lem.4.3.1 plus loin. □

Soit $\mathrm{G}_p \overset{\text{déf}}{=} \{g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \mid \det(g) \in p^{\mathbb{Z}}\}$, l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_p)$ sur le $\mathbb{Z}_p$-module $\mathrm{Hom}_{\Gamma_1(N)}\big(D_0, \mathrm{Ind}_1^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_p)} 1_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}\big)$ s'étend en une action lisse de G_p comme suit :

$$(g(\phi))(\{r_2\} - \{r_1\})(h) \overset{\text{déf}}{=} \phi(\{\gamma^{-1}\gamma_h r_2\} - \{\gamma^{-1}\gamma_h r_1\})(1) \tag{6}$$

où $g \in \mathrm{G}_p$, $h \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_p)$, $\phi \in \mathrm{Hom}_{\Gamma_1(N)}\big(D_0, \mathrm{Ind}_1^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})} 1_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}\big)$ via le Lem.2.3.4, γ_h relève h modulo p^r dans $\Gamma_1(N)$ et $\gamma \in \Gamma_1^p(N)$, $\gamma^{-1}g \in K(p^r)$ via $\mathrm{G}_p = \Gamma_1^p(N)K(p^r)$. Notons que l'on a un isomorphisme :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}_p}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \mathrm{Hom}_{\Gamma_1(N)}\big(D_0, \mathrm{Ind}_1^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_p)} 1_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}\big) &\simeq \mathrm{Hom}_{\Gamma_1(N)}\big(D_0, \mathrm{Ind}_1^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)} 1_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}\big) \\
F &\mapsto \big(\{r_2\} - \{r_1\} \mapsto F(\{r_2\} - \{r_1\})|_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)}\big)
\end{aligned}$$

où l'induite de gauche désigne les fonctions localement constantes sur $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ se transformant à gauche selon la représentation induite de G_p avec action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ par translation à droite.

Proposition 2.3.5. — *Pour tout entier $n > 0$, on a des isomorphismes canoniques compatibles aux actions de G_p (pour le premier), de Hecke (pour le deuxième) et de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ (pour le troisième) :*

$$\begin{aligned}\varinjlim_r H^1_c(Y^0(K_1^p(N)K(p^r)),\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) &\simeq \mathrm{Hom}_{\Gamma_1(N)}\big(D_0,\mathrm{Ind}_1^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_p)}1_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}\big)\\ \varinjlim_r H^1_c(Y(K_1^p(N)K(p^r)),\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) &\simeq \mathrm{Hom}_{\Gamma_1(N)}\big(D_0,\mathrm{Ind}_1^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)}1_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}\big)\\ &\simeq \mathrm{Ind}_{\mathrm{G}_p}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\mathrm{Hom}_{\Gamma_1(N)}\big(D_0,\mathrm{Ind}_1^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_p)}1_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}\big).\end{aligned}$$

Démonstration. — Vus le Lem.2.3.2, le Lem.2.3.3 et le Lem.2.3.4, il reste seulement à vérifier les compatibilités à G_p et $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Celle à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ du troisième isomorphisme résulte de celle à G_p du premier. Par [**2**],Prop.4.2, on a un isomorphisme compatible à G_p :

$$\varinjlim H^1_c(Y^0(K_1^p(N)K(p^r)),\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \simeq \varinjlim \mathrm{Hom}_{\Gamma_1(N)\cap\Gamma(p^r)}(D_0,\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$$

où l'action de G_p sur le membre de droite est $(g(\phi))(\{r_2\}-\{r_1\}) \overset{\text{déf}}{=} \phi(\{\gamma^{-1}r_2\}-\{\gamma^{-1}r_1\})$ ($g\in \mathrm{G}_p$, $\gamma\in\Gamma_1^p(N)$ est tel que $\gamma^{-1}g\in K(p^r)$). Par réciprocité de Frobenius, il est facile de vérifier que l'on retrouve (6). $\square$

2.4. Banach p-adiques et symboles modulaires. — Si B est un $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach p-adique unitaire à coefficients dans E et $N\geq 1$ un entier premier à p, on exprime le E-espace vectoriel $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(B,\widehat{H}^1_c(K_1^p(N))\otimes E\big)$ en termes de symboles modulaires. On conserve les notations des paragraphes précédents.

Soit $\mathcal{O}_E$ l'anneau des entiers d'une extension finie E de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$, π_E une uniformisante de $\mathcal{O}_E$ et M un $\mathcal{O}_E$-module muni d'une action à gauche $\mathcal{O}_E$-linéaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. On note :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(M,\varinjlim_r H^1_c(Y(K_1^p(N)K(p^r)),\mathbb{Z}_p)\otimes\mathcal{O}_E/\pi_E^n\mathcal{O}_E\big)$$

le $\mathcal{O}_E$-module des morphismes $\mathcal{O}_E$-linéaires de M dans la limite inductive de droite commutant à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. On le munit d'une action de T_ℓ, S_ℓ, w_∞ via leur action sur $\varinjlim H^1_c(Y(K_1^p(N)K(p^r)),\mathbb{Z}_p)$ (w_∞ correspondant à l'action de la conjugaison complexe). Soit $\widetilde{\Gamma}_1^p(N) \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+\cap K_1^p(N)\subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[1/p])^+$ (matrices de déterminant >0). On munit $\mathrm{Hom}_{\widetilde{\Gamma}_1^p(N)}(D_0,M)=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0,M)^{\widetilde{\Gamma}_1^p(N)}$ d'une action des opérateurs T_ℓ, S_ℓ ($\ell \nmid Np$) et w_∞ par ($\phi \in \mathrm{Hom}_{\widetilde{\Gamma}_1^p(N)}(D_0, M)$) :

$$\begin{aligned} T_\ell \phi &\overset{\text{déf}}{=} \sum_i \delta_i^{-1}(\phi) \\ S_\ell \phi &\overset{\text{déf}}{=} \sigma_\ell^{-1}\begin{pmatrix} \ell^{-1} & 0 \\ 0 & \ell^{-1}\end{pmatrix}(\phi) \\ w_\infty \phi &\overset{\text{déf}}{=} \tau^{-1}(\phi)\end{aligned}$$

en remarquant que l'on a $\widetilde{\Gamma}_1^p(N)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \ell\end{pmatrix}\widetilde{\Gamma}_1^p(N) = \amalg_i \widetilde{\Gamma}_1^p(N)\delta_i$ pour les mêmes δ_i qu'en (5).

Proposition 2.4.1. — *Soit n un entier > 0 et M un $\mathcal{O}_E$-module muni d'une action à gauche $\mathcal{O}_E$-linéaire lisse de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. On munit $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E}(M, \mathcal{O}_E/\pi_E^n\mathcal{O}_E)$ de l'action $(g(f))(\cdot) \overset{\text{déf}}{=} f(g^{-1}(\cdot))$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. On a un isomorphisme canonique :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(M, \varinjlim_r H^1_c(Y(K_1^p(N)K(p^r)), \mathbb{Z}_p) \otimes \mathcal{O}_E/\pi_E^n\mathcal{O}_E\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\widetilde{\Gamma}_1^p(N)}\big(D_0, \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E}(M, \mathcal{O}_E/\pi_E^n\mathcal{O}_E)\big)$$

compatible aux actions des opérateurs T_ℓ, S_ℓ ($\ell \nmid Np$) et w_∞.

Démonstration. — Via la Prop.2.3.5, on est ramené à montrer un isomorphisme canonique compatible à Hecke :

$$\varphi : \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(M, \mathrm{Hom}_{\Gamma_1(N)}(D_0, \mathrm{Ind}_1^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)} 1_{\mathcal{O}_E/\pi_E^n\mathcal{O}_E})\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\widetilde{\Gamma}_1^p(N)}\big(D_0, \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E}\big(M, \mathcal{O}_E/\pi_E^n\mathcal{O}_E)\big).$$

Pour F à gauche, on définit $\varphi(F) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E}(D_0, \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E}\big(M, \mathcal{O}_E/\pi_E^n\mathcal{O}_E)\big)$ par :

$$\varphi(F)(\{r_2\} - \{r_1\})(m) \overset{\text{déf}}{=} F(m)(\{r_2\} - \{r_1\})(1). \tag{7}$$

Montrons que $\varphi(F)$ est fixé par $\widetilde{\Gamma}_1^p(N)$. Par la Prop.2.3.5 et une réciprocité de Frobenius, on a un isomorphisme :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(M, \mathrm{Hom}_{\Gamma_1(N)}(D_0, \mathrm{Ind}_1^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)} 1_{\mathcal{O}_E/\pi_E^n\mathcal{O}_E})\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{G_p}\big(M, \mathrm{Hom}_{\Gamma_1(N)}(D_0, \mathrm{Ind}_1^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_p)} 1_{\mathcal{O}_E/\pi_E^n\mathcal{O}_E})\big)$$

et on note encore F l'image de F. Comme F commute à G_p, donc à $\widetilde{\Gamma}_1^p(N)$:

$$\begin{aligned} F(\gamma(m))(\{r_2\} - \{r_1\})(1) &= (\gamma(F(m)))(\{r_2\} - \{r_1\})(1) \\ &\overset{(6)}{=} F(m)(\{\gamma^{-1}r_2\} - \{\gamma^{-1}r_1\})(1)\end{aligned}$$

pour tout $m \in M$, $\{r_2\} - \{r_1\} \in D_0$ et $\gamma \in \widetilde{\Gamma}_1^p(N)$. Par (7), cela veut dire que $\varphi(F)$ est invariant sous $\widetilde{\Gamma}_1^p(N)$. Soit $G \in \mathrm{Hom}_{\widetilde{\Gamma}_1^p(N)}(D_0, \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E}\big(M, \mathcal{O}_E/\pi_E^n\mathcal{O}_E)\big)$, on définit $\psi(G) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E}\big(M, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0, \mathrm{Ind}_1^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_p)} 1_{\mathcal{O}_E/\pi_E^n\mathcal{O}_E})\big)$ par :

$$\begin{aligned}(8)\qquad \psi(G)(m)(\{r_2\}-\{r_1\})(h) &\overset{\text{déf}}{=} G(\{r_2\}-\{r_1\})(\gamma_h^{-1}(m))\\ &= G(\{\gamma_h r_2\}-\{\gamma_h r_1\})(m)\end{aligned}$$

où $\{r_2\}-\{r_1\} \in D_0$, $h \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_p)$, $m \in M$ et $\gamma_h \in \Gamma_1(N)$ est tel que $h\gamma_h^{-1} \in K(p^r)$ pour $K(p^r)$ fixant m. Comme G commute à $\widetilde{\Gamma}_1^p(N)$, donc à $\Gamma_1(N)$, on voit facilement que $\psi(G)(m)$ est fixé par $\Gamma_1(N)$. Soit $g \in G_p$, $m \in M$ et $\{r_2\}-\{r_1\} \in D_0$, la commutation de $\psi(G)$ à G_p est équivalente par (6) à l'égalité :

$$\psi(G)(g(m))(\{r_2\}-\{r_1\})(h) = \psi(G)(m)(\{\gamma^{-1}\gamma_h r_2\}-\{\gamma^{-1}\gamma_h r_1\})(1)$$

où $\gamma \in \widetilde{\Gamma}_1^p(N)$, $\gamma^{-1}g \in K(p^r)$ avec r tel que $K(p^r)$ fixe m. Par (8), cela se récrit :

$$G(\{\gamma_h r_2\}-\{\gamma_h r_1\})(\gamma(m)) = G(\{\gamma^{-1}\gamma_h r_2\}-\{\gamma^{-1}\gamma_h r_1\})(m)$$

qui est précisément la commutation de G à $\gamma \in \widetilde{\Gamma}_1^p(N)$. On vérifie facilement que $G = \varphi(\psi(G))$ et $F = \psi(\varphi(F))$ d'où le fait que φ est un isomorphisme. Reste la commutation de φ aux opérateurs de Hecke. Si F est comme avant, rappelons que $T_\ell F(m)(\{r_2\}-\{r_1\})(g) = \sum_i F(m)(\{\delta_i r_2\}-\{\delta_i r_1\})(g\delta_i^{-1})$ pour tout $m \in M$, $\{r_2\}-\{r_1\} \in D_0$ et $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$. On a donc :

$$\begin{aligned}\varphi(T_\ell F)(\{r_2\}-\{r_1\})(m) &= \sum_i F(m)(\{\delta_i r_2\}-\{\delta_i r_1\})(\delta_i^{-1})\\ &= \sum_i F(\delta_i(m))(\{\delta_i r_2\}-\{\delta_i r_1\})(1)\\ &= \sum_i \varphi(F)(\{\delta_i r_2\}-\{\delta_i r_1\})(\delta_i(m))\\ &= T_\ell\varphi(F)(\{r_2\}-\{r_1\})(m)\end{aligned}$$

où la deuxième égalité résulte de la commutation de F à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ et les autres des définitions. Les opérateurs S_ℓ et w_∞ se traitent de même. □

Si B_1 et B_2 sont deux $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach p-adiques unitaires (à coefficients dans E), on note $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(B_1, B_2)$ le E-espace vectoriel des applications continues E-linéaires $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariantes de B_1 dans B_2.

Théorème 2.4.2. — *Soit $N \geq 1$ un entier premier à p, B un $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach p-adique unitaire à coefficients dans E et $B^\vee \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}_E(B, E)$ le $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaire dual. On a un isomorphisme canonique :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(B, \widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(N)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} E\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\widetilde{\Gamma}_1^p(N)}(D_0, B^\vee)$$

compatible aux actions des opérateurs de Hecke T_ℓ, S_ℓ ($\ell \nmid Np$) et w_∞ (où l'action sur le membre de gauche se fait via l'action sur $\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(N)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} E$ et sur le membre de droite comme dans la Prop.2.4.1).

Démonstration. — Soit M une boule unité stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ dans B et $M^\vee \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E}(M, \mathcal{O}_E)$ (homomorphismes $\mathcal{O}_E$-linéaires) avec $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ agissant comme dans la Prop.2.4.1. Il suffit de montrer que l'on a un isomorphisme compatible aux opérateurs de Hecke :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(M, \widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(N)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_E\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\widetilde{\Gamma}_1^p(N)}(D_0, M^\vee).$$

Cela découle de la Prop.2.4.1 avec $M \otimes \mathcal{O}_E/\pi_E^n \mathcal{O}_E$ et un passage à la limite évident sur n dont on laisse les détails au lecteur. □

3. Espaces de distributions, invariant $\mathcal{L}$ et Banach p-adiques

On revient sur les définitions et résultats de [**4**] et on montre le Th.1.1.1 de l'introduction (Cor.3.3.4 ci-dessous).

3.1. Rappels sur les espaces $O(k)^{\mathrm{b}}$, $O(k,\mathcal{L})^{\mathrm{b}}$ de [4] et les Banach associés. — On rappelle sans preuve l'essentiel des constructions de [**4**], auquel on renvoie le lecteur pour plus de précisions. On fixe un entier $k \geq 2$, une extension finie E de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$ contenant $p^{k/2}$ et un nombre $\mathcal{L} \in E$.

On note $C(k,\mathcal{L})$ le E-espace vectoriel des fonctions localement analytiques $h : \mathbb{Q}_p \to E$ qui, pour $|z| \gg 0$, sont de la forme :

$$h(z) = z^{k-2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{z^n} - 2P(z) \log_{\mathcal{L}}(z)$$

avec $a_n \in E$ et $P(z) \in E[z]$ de degré au plus $k-2$. On note $C(k) \subset C(k,\mathcal{L})$ le sous-espace des h telles que $P = 0$. On munit $C(k,\mathcal{L})$ et $C(k)$ d'une topologie comme suit. Soit $U = \amalg_{0\leq i\leq s} U_i$ un recouvrement de $\mathbb{Q}_p$ dans $\mathbb{C}_p$ par des ouverts U_i deux à deux disjoints tels que $U_0 \overset{\text{déf}}{=} \{z \in \mathbb{C}_p \mid |z| > r_0\}$ et $U_i \overset{\text{déf}}{=} \{z \in \mathbb{C}_p \mid |z - z_i| < r_i\}$ pour $1 \leq i \leq s$ avec $r_i \in |E^\times|$ et $z_i \in \mathbb{Q}_p$. On définit $C(k,\mathcal{L})_U \subset C(k,\mathcal{L})$ comme le sous-espace des h telles que :

$$\begin{aligned} h(z)|_{U_i \cap \mathbb{Q}_p} &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_{i,n}(z - z_i)^n, \ 1 \leq i \leq s \\ h(z)|_{U_0 \cap \mathbb{Q}_p} &= z^{k-2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{z^n} - 2P(z) \log_{\mathcal{L}}(z) \end{aligned}$$

avec $a_n, a_{i,n} \in E$ et $|a_n| r_0^{-n}$, $|a_{i,n}| r_i^n$ bornés quand $n \to +\infty$, et on pose $C(k)_U \overset{\text{déf}}{=} C(k) \cap C(k,\mathcal{L})_U$. L'espace $C(k)_U$ est un Banach pour la norme :

$$\|h\|_U \overset{\text{déf}}{=} \max\big(\sup_{n\geq 0} |a_n| r_0^{-n}, \max_{1\leq i\leq s}(\sup_{n\geq 0} |a_{i,n}| r_i^n)\big).$$

L'espace $C(k,\mathcal{L})_U$ hérite aussi d'une structure de Banach puisque $C(k)_U$ y est d'indice fini. Si U' est un recouvrement plus fin que U, on a des injections continues $C(k,\mathcal{L})_U \hookrightarrow C(k,\mathcal{L})_{U'}$, $C(k)_U \hookrightarrow C(k)_{U'}$ et, en passant à la limite, des isomorphismes E-linéaires $C(k,\mathcal{L}) \xrightarrow{\sim} \varinjlim C(k,\mathcal{L})_U$, $C(k) \xrightarrow{\sim} \varinjlim C(k)_U$. On munit alors $C(k,\mathcal{L})$ et $C(k)$ de la topologie limite inductive au sens de [**26**] ainsi que d'une action à gauche E-linéaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ par :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(h)(z) \overset{\text{déf}}{=} |ad-bc|^{\frac{k-2}{2}}(-cz+a)^{k-2}\Big[h\Big(\frac{dz-b}{-cz+a}\Big) \\ +P\Big(\frac{dz-b}{-cz+a}\Big)\log_{\mathcal{L}}\Big(\frac{ad-bc}{(-cz+a)^2}\Big)\Big]$$

prolongé par continuité en z tel que $-cz+a=0$. Notons que cette action n'est pas tout-à-fait celle de [**4**],§2.2. Elle préserve le sous-espace de $C(k)$ des polynômes de degré au plus $k-2$ et on note $\Sigma(k,\mathcal{L})$ (resp. $\Sigma(k)$) le quotient de $C(k,\mathcal{L})$ (resp. $C(k)$) par ce sous-espace. Les représentations $C(k,\mathcal{L})$, $C(k)$, $\Sigma(k,\mathcal{L})$ et $\Sigma(k)$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sont localement analytiques au sens de [**27**] et on a pour tout $\mathcal{L}$ une suite exacte $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariante : $0 \to \Sigma(k) \to \Sigma(k,\mathcal{L}) \to \underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2 \to 0$. De plus, les vecteurs "localement algébriques" de $\Sigma(k,\mathcal{L})$ et $\Sigma(k)$ s'identifient à la représentation $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2 \otimes_E \mathrm{St}$ et il n'y a pas d'entrelacements entre les $\Sigma(k,\mathcal{L})$ (et *a fortiori* les $C(k,\mathcal{L})$) pour des valeurs distinctes de $\mathcal{L}$.

Les duaux topologiques :

$$\begin{aligned} O(k,\mathcal{L}) &\overset{\text{déf}}{=} \Sigma(k,\mathcal{L})^\vee \subset C(k,\mathcal{L})^\vee \simeq \varprojlim_U C(k,\mathcal{L})_U^\vee \\ O(k) &\overset{\text{déf}}{=} \Sigma(k)^\vee \subset C(k)^\vee \simeq \varprojlim_U C(k)_U^\vee \end{aligned}$$

sont des espaces de Fréchet. Ce sont par définition des espaces de distributions mais ils admettent aussi une description comme espaces de fonctions. L'espace $O(k)$ s'identifie à l'espace des fonctions rigides analytiques E-rationnelles $H : \Omega \to \mathbb{C}_p$ muni de l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(H)(z) = |ad-bc|^{-\frac{k-2}{2}}\frac{ad-bc}{(-cz+a)^k}H\Big(\frac{dz-b}{-cz+a}\Big).$$

L'espace $O(k,\mathcal{L})$ s'identifie à l'espace des fonctions $H : \Omega \to \mathbb{C}_p$ qui, en restriction à chaque affinoïde $\Omega_U \overset{\text{déf}}{=} \mathbb{C}_p - U \subset \Omega$ pour U comme avant, sont de la forme :

$$H|_{\Omega_U} = H_U + \sum_{i=1}^{s}\sum_{n=0}^{k-2} c_{i,n} z^n \log_{\mathcal{L}}(z-z_i)$$

avec $c_{i,n} \in E$ et H_U rigide analytique E-rationnelle sur Ω_U, muni de l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(H)(z) = |ad-bc|^{-\frac{k-2}{2}}\frac{(-cz+a)^{k-2}}{(ad-bc)^{k-2}}H\Big(\frac{dz-b}{-cz+a}\Big).$$

On a une suite exacte $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariante :

$$0 \to \underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2 \otimes \varepsilon(\det)^{-(k-2)} \to O(k,\mathcal{L}) \to O(k) \to 0 \tag{9}$$

où la surjection de droite est la dérivation $(k-1)^{\text{ième}}$ sur les fonctions H. On a aussi une surjection $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariante $O(k) \twoheadrightarrow (\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2 \otimes_E \mathrm{St})^\vee$.

Fixons U comme avant et une norme sur les Banach duaux $C(k,\mathcal{L})_U^\vee$ et $C(k)_U^\vee$. On note $O(k,\mathcal{L})^U$ (resp. $O(k)^U$) l'ensemble des $H \in O(k,\mathcal{L})$ (resp. des $H \in O(k)$) telles que, pour tout $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, l'image de $g(H)$ dans $C(k,\mathcal{L})_U^\vee$ (resp. dans $C(k)_U^\vee$) tombe dans la boule unité de $C(k,\mathcal{L})_U^\vee$ (resp. de $C(k)_U^\vee$). Muni de la topologie induite par $O(k,\mathcal{L})$ (resp. $O(k)$), $O(k,\mathcal{L})^U$ (resp. $O(k)^U$) est un $\mathcal{O}_E$-module compact au sens de [**28**] stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Le E-espace vectoriel $O(k,\mathcal{L})^{\mathrm{b}} \overset{\text{déf}}{=} O(k,\mathcal{L})^U \otimes E \subset O(k,\mathcal{L})$ (resp. $O(k)^{\mathrm{b}} \overset{\text{déf}}{=} O(k)^U \otimes E \subset O(k)$) est indépendant des choix. On le munit de la topologie localement convexe la plus fine rendant continue l'inclusion $O(k,\mathcal{L})^U \subset O(k,\mathcal{L})^{\mathrm{b}}$ (resp. $O(k)^U \subset O(k)^{\mathrm{b}}$) (ce n'est plus la topologie induite par $O(k,\mathcal{L})$ ou $O(k)$). On a un morphisme continu $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariant $O(k,\mathcal{L})^{\mathrm{b}} \to O(k)^{\mathrm{b}}$ qui est injectif pour $k > 2$. Par l'anti-équivalence de [**28**],§2, le dual $(O(k,\mathcal{L})^{\mathrm{b}})^\vee$ (resp. $(O(k)^{\mathrm{b}})^\vee$) est un $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaire $B(k,\mathcal{L})$ (resp. $B(k)$) contenant $\Sigma(k,\mathcal{L})$ (resp. $\Sigma(k)$).

Remarque 3.1.1. — La définition de $O(k,\mathcal{L})^U$ et $O(k)^U$ n'est pas exactement celle de [**4**],§4.1 mais donne des modules compacts commensurables, ce qui ne change donc pas $O(k,\mathcal{L})^{\mathrm{b}}$, $O(k)^{\mathrm{b}}$ et leur duaux.

Pour tout $k \geq 2$, $B(k)$ s'identifie en tant que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaire au complété de $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2 \otimes_E \mathrm{St}$ par rapport à un quelconque $\mathcal{O}_E$-réseau stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ de type fini sur $\mathcal{O}_E[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]$. Pour $k > 2$, $B(k,\mathcal{L})$ s'identifie aussi comme $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaire à un complété de $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2 \otimes_E \mathrm{St}$ par rapport à un $\mathcal{O}_E$-réseau stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Si $k = 2$, $B(2)$ est admissible et topologiquement irréductible. Si $k > 2$, $B(k)$ n'est ni admissible ni topologiquement irréductible. Si $k = 2$, $B(2,\mathcal{L})$ est une extension non-scindée $0 \to B(2) \to B(2,\mathcal{L}) \to E \to 0$ et les $B(2,\mathcal{L})$ sont tous distincts. Si $k > 2$, $B(k,\mathcal{L})$ devrait être admissible, topologiquement irréductible et les $B(k,\mathcal{L})$ devraient être tous distincts.

3.2. Une formulation plus concrète de $O(k)^{\mathrm{b}}$ et $B(k)$. — On donne une description explicite de $O(k)^{\mathrm{b}}$ et $B(k)$. On garde les notations du §3.1 et on renvoie à [**11**] pour des preuves détaillées des affirmations des deux paragraphes qui suivent.

Pour $r \in \mathbb{R}^+$, une fonction $h : \mathbb{Z}_p \to E$ est dite uniformément de classe $\mathcal{C}^r$ si, dans la décomposition de Mahler $h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(h)\binom{z}{n}$, les $a_n(h) \in E$ sont tels que $n^r|a_n(h)| \to 0$ dans $\mathbb{R}^+$ quand $n \to +\infty$. L'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^r$ est un Banach pour la norme $\|h\|_r \overset{\text{déf}}{=} \sup_n (n+1)^r \mid a_n(h) \mid$ que l'on note $\mathcal{C}^r(\mathbb{Z}_p, E)$. Si $\mathcal{C}^{\mathrm{an}}(\mathbb{Z}_p, E)$ est le E-espace vectoriel des fonctions localement analytiques de $\mathbb{Z}_p$ dans E avec sa topologie "limite inductive", on a une injection continue $\mathcal{C}^{\mathrm{an}}(\mathbb{Z}_p, E) \hookrightarrow \mathcal{C}^r(\mathbb{Z}_p, E)$ d'image dense.

Une *distribution* μ sur $\mathbb{Z}_p$ à valeurs dans E est un élément du dual continu $\mathcal{C}^{\mathrm{an}}(\mathbb{Z}_p, E)^\vee$. Si $h \in \mathcal{C}^{\mathrm{an}}(\mathbb{Z}_p, E)$, on note $\int_{\mathbb{Z}_p} h(z)\mu(z)$ l'accouplement et on pose $\int_{D(a,n)} h(z)\mu(z) \overset{\text{déf}}{=} \int_{\mathbb{Z}_p} h(z)\mathbf{1}_{D(a,n)}\mu(z)$ où $\mathbf{1}_{D(a,n)}$ est la fonction caractéristique de $D(a,n) \overset{\text{déf}}{=} a + p^n\mathbb{Z}_p$ ($a \in \mathbb{Z}_p$, $n \in \mathbb{N}$). Pour $r \in \mathbb{R}^+$, μ est dite *tempérée d'ordre* r s'il existe $C_\mu \in E$ tel que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $a \in \mathbb{Z}_p$, on a $\int_{D(a,n)}(z-a)^j\mu(z) \in C_\mu p^{n(j-r)}\mathcal{O}_E$. On peut supposer $0 \leq j \leq r$ et $n > \mathrm{val}(a)$ si $a \neq 0$ dans cette condition. L'espace des distributions tempérées d'ordre r est un Banach pour la norme $\|\mu\|_r \overset{\text{déf}}{=} \sup_{j,n,a} p^{n(j-r)} \,|\int_{D(a,n)}(z-a)^j\mu(z)|$ qui s'identifie au Banach dual $\mathcal{C}^r(\mathbb{Z}_p, E)^\vee \hookrightarrow \mathcal{C}^{\mathrm{an}}(\mathbb{Z}_p, E)^\vee$. En particulier, si μ est tempérée d'ordre r, on peut définir $\int_{D(a,n)} h(z)\mu(z)$ pour h seulement uniformément de classe $\mathcal{C}^r$.

On dit qu'une fonction $h : \mathbb{Q}_p \to E$ est uniformément de classe $\mathcal{C}^{\frac{k-2}{2}}$ avec un pôle d'ordre au plus $k-2$ à l'infini si $h_1 \overset{\text{déf}}{=} \big(z \mapsto h(pz)\big)|_{\mathbb{Z}_p}$ est de classe $\mathcal{C}^{\frac{k-2}{2}}$ et si $\big(z \mapsto z^{k-2}h(1/z)\big)\,|_{\mathbb{Z}_p - \{0\}}$ se prolonge sur $\mathbb{Z}_p$ en une fonction h_2 de classe $\mathcal{C}^{\frac{k-2}{2}}$. L'espace de ces fonctions est un Banach $D(k)$ pour la norme $\|h\| \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Max}(\|h_1\|_{\frac{k-2}{2}}, \|h_2\|_{\frac{k-2}{2}})$. Il contient l'espace $C(k)$ du §3.1 via une injection évidente qui est continue (par [**4**],preuve du Lem.2.3.1 et ce qui précède) et d'image dense. Il est aussi muni d'une action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ par automorphismes continus qui prolonge celle sur $C(k)$: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(h)(z) = |ad-bc|^{\frac{k-2}{2}}(-cz+a)^{k-2}h\big(\frac{dz-b}{-cz+a}\big)$. On note $\widetilde{B}(k)$ le quotient de $D(k)$ par les polynômes de degré au plus $k-2$. On a donc une injection canonique continue $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariante d'image dense $\Sigma(k) \hookrightarrow \widetilde{B}(k)$.

Une distribution μ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ avec un zéro d'ordre au moins $k-2$ à l'infini est par définition un élément du dual continu $C(k)^\vee$. Une telle distribution est dite tempérée d'ordre $(k-2)/2$ s'il existe $C_\mu \in E$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, elle vérifie les deux conditions suivantes :
(i) $\int_{D(\infty,n)} z^j\mu(z) \in C_\mu p^{n(\frac{k-2}{2}-j)}\mathcal{O}_E$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $j \leq k-2$ où $D(\infty,n) \overset{\text{déf}}{=} \{z \in \mathbb{Q}_p \mid \mathrm{val}(z) \leq -n\}$
(ii) $\int_{D(a,n)}(z-a)^j\mu(z) \in C_\mu p^{n(j-\frac{k-2}{2})}\mathcal{O}_E$ pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tout $a \in \mathbb{Q}_p$ où $D(a,n) \overset{\text{déf}}{=} a + p^n\mathbb{Z}_p$.
L'espace de ces distributions est un Banach pour la norme :

$$\|\mu\| \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Max}\left(\sup_{j,n,a} p^{n(j-\frac{k-2}{2})}\left|\int_{D(a,n)}(z-a)^j\mu(z)\right|, \sup_{j,n} p^{n(\frac{k-2}{2}-j)}\left|\int_{D(\infty,n)} z^j\mu(z)\right|\right).$$

Lemme 3.2.1. — *Pour $k \geq 2$, l'espace des distributions tempérées d'ordre $\frac{k-2}{2}$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ avec un zéro d'ordre au moins $k-2$ à l'infini s'identifie topologiquement au Banach dual $D(k)^\vee \hookrightarrow C(k)^\vee$.*

Démonstration. — Par l'application $h \mapsto (h_1, h_2)$, le Banach $D(k)$ s'identifie à deux copies de $\mathcal{C}^{\frac{k-2}{2}}(\mathbb{Z}_p, E)$. Un élément μ du dual est donc un couple de distributions μ_1, μ_2 sur $\mathbb{Z}_p$ tempérées d'ordre $\frac{k-2}{2}$ avec par définition :

$$\int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})} h(z)\mu(z) = \int_{\mathbb{Z}_p} h_1(z)\mu_1(z) + \int_{\mathbb{Z}_p} h_2(z)\mu_2(z).$$

Soit $a \in \mathbb{Z}_p$, $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > \mathrm{val}(a)$ si $a \neq 0$ et $j \in \mathbb{N}$, traduisons la condition :

$$\int_{D(a,n)} (z-a)^j \mu_2(z) = \int_{\mathbb{Z}_p} (z-a)^j \mathbf{1}_{D(a,n)}\mu_2(z) \in C_{\mu_2} p^{n(j-\frac{k-2}{2})}\mathcal{O}_E.$$

Si $a = 0$, la fonction $h \in C(k)$ correspondant au couple $(h_1, h_2) = (0, z^j \mathbf{1}_{D(0,n)})$ est la fonction $z^{k-2-j}\mathbf{1}_{D(\infty,n)}$ et donc pour $j \in \mathbb{N}$:

$$\int_{D(\infty,n)} z^{k-2-j}\mu(z) \in C_{\mu_2} p^{n(j-\frac{k-2}{2})} = C_{\mu_2} p^{n(\frac{k-2}{2}-(k-2-j))}$$

qui est bien une des deux conditions précédentes en remplaçant $k-2-j$ par j. Si $a \neq 0$, la fonction $h \in C(k)$ correspondant au couple $(h_1, h_2) = (0, (z-a)^j \mathbf{1}_{D(a,n)})$ est la fonction $(-a)^j z^{k-2-j}(z-\frac{1}{a})^j \mathbf{1}_{D(\frac{1}{a}, n-2\mathrm{val}(a))}$ de sorte que l'on a pour $j \in \mathbb{N}$:

$$\int_{D(\frac{1}{a}, n-2\mathrm{val}(a))} z^{k-2-j}\Big(z-\frac{1}{a}\Big)^j \mu(z) \in C_{\mu_2} p^{n(j-\frac{k-2}{2})-j\mathrm{val}(a)}. \tag{10}$$

En décomposant z^{k-2-j} sous la forme $a^{j-k+2}(1+\sum_{m\geq 1} *_m a^m (z-\frac{1}{a})^m)$ où $*_m \in \mathbb{Z}$ (ce qu'il est possible de faire pour tout $j \in \mathbb{N}$), une récurrence montre, quitte à modifier C_{μ_2}, que (10) est équivalent à :

$$\int_{D(\frac{1}{a}, n-2\mathrm{val}(a))} \Big(z-\frac{1}{a}\Big)^j \mu(z) \in C_{\mu_2} p^{(n-2\mathrm{val}(a))(j-\frac{k-2}{2})}$$

pour tout $j \in \mathbb{N}$: on obtient l'autre condition. Les conditions pour μ_1 donnent essentiellement les mêmes conditions pour μ. On laisse les derniers détails au lecteur. □

Un examen de la preuve du Lem.3.2.1 montre qu'il suffit de vérifier les conditions (i) et (ii) précédentes pour $0 \leq j \leq k-2$ pour les avoir pour les autres j. Le théorème qui suit est dû à Teitelbaum pour k pair ([**34**]). Nous en donnons une preuve directe pour tout k.

Théorème 3.2.2. — *Pour $k \geq 2$, l'inclusion $O(k)^{\mathrm{b}} \subset O(k)$ identifie $O(k)^{\mathrm{b}}$ avec le sous-espace vectoriel de $O(k)$ des distributions qui sont tempérées d'ordre $\frac{k-2}{2}$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ avec un zéro d'ordre au moins $k-2$ à l'infini.*

Démonstration. — Rappelons que $O(k)$ est le sous-espace de $C(k)^\vee$ des distributions μ telles que $\int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} z^j\mu(z) = 0$ pour $j \in \{0, \cdots, k-2\}$. C'est un espace de Fréchet dont la topologie peut se définir par la collection des normes $(\|\cdot\|_U)_U$ où :

$$\|\mu\|_U \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{h\in C(k)_U\backslash\{0\}} \frac{|\int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} h(z)\mu(z)|}{\|h\|_U}$$

si $\mu \in O(k)$. On fixe un recouvrement $U = \amalg_{0\leq i\leq s}U_i$ de $\mathbb{Q}_p$ dans $\mathbb{C}_p$ comme au §3.1. On a :

$$O(k)^{\mathrm{b}} = \left\{\mu \in O(k), \left|\int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} g(h)(z)\mu(z)\right| \leq \|h\|_U \ \forall g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p), \forall h \in C(k)_U\right\} \otimes E.$$

On peut choisir U tel que $C(k)_U$ est stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$. Comme $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ est compact, il existe $c_\mu \in |E^\times|$ tel que $\|g(h)\|_U \leq c_\mu\|h\|_U$ pour tout $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ et $h \in C(k)_U$. Comme $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) = \mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$, on voit que $O(k)^{\mathrm{b}}$ est aussi :

$$(11) \left\{\mu \in O(k), \left|\int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} g(h)(z)\mu(z)\right| \leq \|h\|_U \ \forall g \in \mathrm{B}(\mathbb{Q}_p),\ \forall h \in C(k)_U\right\} \otimes E.$$

On a $U \cap \mathbb{Q}_p = D(\infty, n_0) \amalg \left(\amalg_{1\leq i\leq s} D(z_i, n_i)\right)$ pour des $z_i \in \mathbb{Q}_p$ et des entiers $n_i > \mathrm{val}(z_i)$. Comme la norme p-adique est ultramétrique, la condition dans (11) est équivalente à :

$$(12) \qquad \left|\int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} g(h)(z)\mu(z)\right| \leq \|h\|_U \ \text{ pour tout } g \in \mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)$$

pour $h = (z-z_i)^j\mathbf{1}_{D(z_i,n_i)}$ ou $h = z^{k-2-j}\mathbf{1}_{D(\infty,n_0)}$, $j \in \mathbb{N}$. Soit $g = \begin{pmatrix}\lambda & \mu\\ 0 & \nu\end{pmatrix} \in \mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)$ et $h = (z-z_i)^j\mathbf{1}_{D(z_i,n_i)}$, on a :

$$g(h)(z) = |\lambda\nu|^{\frac{k-2}{2}} \lambda^{k-2-j}\nu^j\Big(z - \frac{\lambda z_i+\mu}{\nu}\Big)^j\mathbf{1}_{D\left(\frac{\lambda z_i+\mu}{\nu}, n_i+\mathrm{val}(\lambda/\nu)\right)},$$

et un calcul montre que (12) pour $h = (z-z_i)^j\mathbf{1}_{D(z_i,n_i)}$, $j \in \mathbb{N}$ est équivalent à :

$$\int_{D(a,n)} (z-a)^j\mu(z) \in C_\mu\alpha_i^j p^{n(j-\frac{k-2}{2})}\mathcal{O}_E$$

pour tout $a \in \mathbb{Q}_p$, $n \in \mathbb{Z}$ et $j \in \mathbb{N}$ où $C_\mu \in E$ est une constante et $\alpha_i \in E$ est une constante dépendant du rayon r_i de U_i dans $\mathbb{C}_p$ (cf. §3.1) telle que $-1 \leq \mathrm{val}(\alpha_i) < 0$. En écrivant $D(a,n) = \amalg_{a'\equiv a(p^n)}D(a', n+1)$ et en développant $(z-a)^{j+1} = ((z-a')+(a'-a))^{j+1}$, une récurrence sur j à la Amice-Vélu montre que c'est encore équivalent à $\int_{D(a,n)}(z-a)^j\mu(z) \in C_\mu p^{n(j-\frac{k-2}{2})}\mathcal{O}_E$ pour tout $a \in \mathbb{Q}_p$, $n \in \mathbb{Z}$ et $j \in \mathbb{N}$ où $C_\mu \in E$ est une constante. On retrouve donc la condition (ii) précédente. Soit $g = \begin{pmatrix}\lambda & \mu\\ 0 & \nu\end{pmatrix} \in \mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)$ et $h = z^j\mathbf{1}_{D(\infty,n_0)}$, on a :

$$g(h)(z) = |\lambda\nu|^{\frac{k-2}{2}} \lambda^{k-2-j}\nu^j\Big(z - \frac{\mu}{\nu}\Big)^j\big(\mathbf{1}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} - \mathbf{1}_{D(\frac{\mu}{\nu}, -n_0+\mathrm{val}(\lambda/\nu)+1)}\big)$$

et on vérifie que (12) pour $h = z^j \mathbf{1}_{D(\infty,n_0)}$, $j \in \mathbb{Z}$, $j \le k-2$ est équivalent à :

$$\int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)-D(a,-n+1)} (z-a)^j \mu(z) \in C_\mu \alpha_0^{-j} p^{n(\frac{k-2}{2}-j)} \mathcal{O}_E$$

pour $a \in \mathbb{Q}_p$, $n \in \mathbb{Z}$ et $j \in \mathbb{Z}$, $j \le k-2$ où $C_\mu, \alpha_0 \in E$ sont des constantes avec $-1 \le \mathrm{val}(\alpha_0) < 0$. Si $0 \le j \le k-2$, on retrouve un bout de la condition (ii) car $\int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} (z-a)^j \mu(z) = 0$. Si $j < 0$, on écrit $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p) - D(a,-n+1) = D(\infty, -\mathrm{val}(a)+1) \amalg (\amalg_i D(a+x_i, -n+1))$ pour des x_i tels que $\mathrm{val}(a) \le \mathrm{val}(x_i) \le -n$. En décomposant $(z-a)^j = x_i^j(1 + \sum_{m \ge 1} *_m x_i^{-m}(z-(a+x_i))^m)$ où $*_m \in \mathbb{Z}$ et en utilisant la condition (ii) pour les disques $D(a+x_i, -n+1)$, on peut se ramener à la seule condition $\int_{D(\infty,n)} z^j \mu(z) \in \alpha_0^{-j} p^{n(\frac{k-2}{2}-j)} \mathcal{O}_E$ pour $n \in \mathbb{Z}$ et $j < 0$. On vérifie par une récurrence sur j qu'elle est équivalente à $\int_{D(\infty,n)} z^j \mu(z) \in C_\mu p^{n(\frac{k-2}{2}-j)} \mathcal{O}_E$ pour $n \in \mathbb{Z}$ et $j < 0$, i.e. à la condition (i) pour $j < 0$. Ceci achève la preuve. $\square$

Corollaire 3.2.3. — *Pour $k \ge 2$, le Banach $B(k)$ s'identifie topologiquement et de façon $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariante au Banach $\widetilde{B}(k)$ i.e. au quotient par les polynômes de degré au plus $k-2$ du Banach des fonctions $h : \mathbb{Q}_p \to E$ telles que $h|_{\mathbb{Z}_p}$ est de classe $\mathcal{C}^{\frac{k-2}{2}}$ et $z^{k-2}h(1/z)|_{\mathbb{Z}_p-\{0\}}$ se prolonge sur $\mathbb{Z}_p$ en une fonction de classe $\mathcal{C}^{\frac{k-2}{2}}$.*

Démonstration. — Soit $\widetilde{B}(k)^0$ une boule unité quelconque du Banach $\widetilde{B}(k)$. Via l'injection continue $\Sigma(k) \hookrightarrow \widetilde{B}(k)$ d'image dense, elle induit un $\mathcal{O}_E$-réseau ouvert $\Sigma(k)^0 \overset{\text{déf}}{=} \widetilde{B}(k)^0 \cap \Sigma(k)$ de $\Sigma(k)$ et $\widetilde{B}(k)^0$ s'identifie au complété $\varprojlim \Sigma(k)^0/p^n\Sigma(k)^0$. On montre comme dans [**4**],preuve de Prop.4.3.4 que le $\mathcal{O}_E$-module des morphismes $\mathcal{O}_E$-linéaires $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E}(\widetilde{B}(k)^0, \mathcal{O}_E) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E}(\Sigma(k)^0, \mathcal{O}_E)$ s'identifie au $\mathcal{O}_E$-module $\{\mu \in O(k), \int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} h(z)\mu(z) \in \mathcal{O}_E \ \forall\ h \in \Sigma(k)^0\}$. Ce dernier est compact dans $O(k)$ par [**26**],Lem.13.1(vi)+Prop.14.2 (et le fait que $\mathcal{O}_E$ est compact). On montre comme dans [**4**],Prop.4.3.4 que le Banach associé s'identifie au complété de $\Sigma(k)$ par rapport à $\Sigma^0(k)$, c'est-à-dire à $\widetilde{B}(k)$ par ce qui précède. Par ailleurs, ce module compact est contenu dans $O(k)^{\mathrm{b}}$ par le Lem.3.2.1 et le Th.3.2.2. Par [**27**],Lem.1.5(ii), il est donc commensurable dans $O(k)^{\mathrm{b}}$ à $O(k)^U$ pour un U comme au §3.1. Comme le Banach associé à $O(k)^U$ est $B(k)$, on a un isomorphisme topologique $B(k) \simeq \widetilde{B}(k)$ qui est l'identité sur $\Sigma(k)$. Par densité et continuité de l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, il est aussi $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariant. $\square$

3.3. Une formulation plus concrète de $O(k,\mathcal{L})^{\mathrm{b}}$ et $B(k,\mathcal{L})$.

— On donne une description explicite de $O(k,\mathcal{L})^{\mathrm{b}}$ et $B(k,\mathcal{L})$ pour $k > 2$. On conserve les notations du §3.1 et du §3.2. On suppose $k > 2$.

Lemme 3.3.1. — *Soit n et j des entiers > 0, $r \in \mathbb{R}^+$ tel que $r < j$ et $a \in \mathbb{Z}_p$. La fonction $(z-a)^j \log_{\mathcal{L}}(z-a)\mathbf{1}_{D(a,n)-D(a,n+1)}$ tend vers 0 dans le Banach $\mathcal{C}^r(\mathbb{Z}_p, E)$ quand n tend vers $+\infty$.*

Démonstration. — Par [**26**],Lem.9.9, il suffit de montrer que cette fonction tend vers 0 dans le Banach dual du Banach des distributions tempérées d'ordre r sur $\mathbb{Z}_p$, i.e. :

$$\sup_{\mu} \frac{\left|\int_{D(a,n)-D(a,n+1)}(z-a)^j \log_{\mathcal{L}}(z-a)\mu(z)\right|}{\|\mu\|_r} \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

En écrivant $D(a,n) - D(a,n+1) = \amalg_{u\in\mathbb{F}_p^\times} D(a+p^n[u], n+1)$ où $[\cdot]$ désigne le représentant de Teichmüller, un calcul donne pour $z \in D(a+p^n[u], n+1)$:

$$(z-a)^j \log_{\mathcal{L}}(z-a) = n\mathcal{L}(z-a)^j + (z-a)^j\log\left(1+\frac{z-(a+p^n[u])}{p^n[u]}\right).$$

Le terme avec un logarithme se développe pour $z \in D(a+p^n[u], n+1)$:

$$(z-a)^j\log\left(1+\frac{z-(a+p^n[u])}{p^n[u]}\right) = \sum_{m\geq 0} *_m p^{n(j-m)}(z-(a+p^n[u]))^m$$

où $*_m \in \mathcal{O}_E$. Pour $b \in \mathbb{Z}_p$, la somme $\sum_{m\geq 0} p^{-nm}(z-b)^m \mathbf{1}_{D(b,n+1)}$ converge dans $\mathcal{C}^r(\mathbb{Z}_p, E)$ pour tout $r \in \mathbb{R}^+$ de sorte que, pour μ tempérée :

$$(13) \quad \int_{D(a+p^n[u],n+1)} (z-a)^j\log\left(1+\frac{z-(a+p^n[u])}{p^n[u]}\right)\mu(z) = \\ \sum_{m\geq 0} *_m p^{n(j-m)} \int_{D(a+p^n[u],n+1)} (z-(a+p^n[u]))^m \mu(z).$$

Pour μ d'ordre r, on a par ailleurs pour tout $m \geq 0$:

$$\left| *_m p^{n(j-m)} \int_{D(a+p^n[u],n+1)} (z-(a+p^n[u]))^m \mu(z)\right| \leq \|\mu\|_r p^{n(r-j)} p^{r-m}$$

ce qui entraîne par (13) :

$$\left|\int_{D(a+p^n[u],n+1)} (z-a)^j\log\left(1+\frac{z-(a+p^n[u])}{p^n[u]}\right)\mu(z)\right| \leq p^r\|\mu\|_r p^{n(r-j)}.$$

En traitant de même le terme plus simple $n\mathcal{L}(z-a)^j$ et en sommant sur $u \in \mathbb{F}_p{}^\times$, on a finalement une constante $c_r \in |E^\times|$ telle que pour μ tempérée d'ordre r :

$$\left|\int_{D(a,n)-D(a,n+1)} (z-a)^j \log_{\mathcal{L}}(z-a)\mu(z)\right| \leq c_r\|\mu\|_r p^{n(r-j)}$$

d'où on déduit clairement le résultat puisque $r < j$. □

Notons $L(k,\mathcal{L})$ le sous-espace vectoriel du E-espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{Q}_p$ dans E engendré par les polynômes de degré au plus $k-2$ et les fonctions suivantes :

$$h(z) = \sum_{i\in I} \lambda_i (z-z_i)^{n_i} \log_{\mathcal{L}}(z-z_i)$$

où I est un ensemble fini, $\lambda_i \in E$, $z_i \in \mathbb{Q}_p$, $n_i \in \{\lfloor\frac{k-2}{2}\rfloor + 1, \dots, k-2\}$ et $\deg\big(\sum_{i\in I}\lambda_i(z-z_i)^{n_i}\big) < \frac{k-2}{2}$.

Lemme 3.3.2. — *L'espace $L(k,\mathcal{L})$ est un sous-espace vectoriel de $D(k)$ et est stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ dans $D(k)$.*

Démonstration. — Par l'application $h \mapsto (h_1, h_2)$ du §3.2, on a pour $j \in \mathbb{N}$ et n entier suffisamment grand :

$$\begin{aligned}
(z-a)^j \log_{\mathcal{L}}(z-a)\mathbf{1}_{D(a,n)} &\mapsto ((pz-a)^j \log_{\mathcal{L}}(pz-a)\mathbf{1}_{D(a/p,n-1)}, 0) \text{ si } a \in p\mathbb{Z}_p\\
(z-a)^j \log_{\mathcal{L}}(z-a)\mathbf{1}_{D(a,n)} &\mapsto \big(0, z^{k-2-j}(1-az)^j(\log_{\mathcal{L}}(1-az) -\\
&\qquad \log_{\mathcal{L}}(z))\mathbf{1}_{D(\frac{1}{a},n-2\mathrm{val}(a))}\big) \text{ si } a \in \mathbb{Q}_p - p\mathbb{Z}_p\\
z^j \log_{\mathcal{L}}(z)\mathbf{1}_{D(\infty,n)} &\mapsto (0, -z^{k-2-j}\log_{\mathcal{L}}(z)\mathbf{1}_{D(0,n)}).
\end{aligned}$$

Le Lem.3.3.1 entraîne que les fonctions de droite sont dans $\mathcal{C}^{\frac{k-2}{2}}(\mathbb{Z}_p, E)$ si $j > (k-2)/2$ pour les deux premières et $j < (k-2)/2$ pour la dernière. Vu la définition de $D(k)$ et $L(k,\mathcal{L})$, on en déduit facilement $L(k,\mathcal{L}) \subset D(k)$. La stabilité par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ est laissée en exercice au lecteur. □

On note $\widetilde{B}(k,\mathcal{L})$ le quotient de $D(k)$ par l'adhérence de $L(k,\mathcal{L})$ dans $D(k)$. Par le Lem.3.3.2 et le Cor.3.2.3, c'est un $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaire.

Théorème 3.3.3. — *Pour $k > 2$ et $\mathcal{L} \in E$, l'inclusion $O(k,\mathcal{L})^{\mathrm{b}} \subset O(k)^{\mathrm{b}}$ identifie topologiquement $O(k,\mathcal{L})^{\mathrm{b}}$ avec le sous-espace vectoriel de $O(k)^{\mathrm{b}}$ (muni de la topologie induite) des distributions μ telles que $\int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} h(z)\mu(z) = 0$ pour tout $h \in L(k,\mathcal{L})$.*

Démonstration. — Soit $\mu \in O(k)^{\mathrm{b}}$ satisfaisant les conditions de l'énoncé. On va d'abord étendre μ en une forme linéaire continue sur $C(k,\mathcal{L})$. Il suffit de définir $\int_{D(\infty,n)} z^j \log_{\mathcal{L}}(z)\mu(z)$ pour $j \in \{0,\cdots,k-2\}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Soit $\ell_j(z) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{i\in I}\lambda_i(z-z_i)^{n_i}\log_{\mathcal{L}}(z-z_i)$ avec des $\lambda_i \in E$, des $z_i \in \mathbb{Q}_p$ et des $n_i \in \{\lfloor\frac{k-2}{2}\rfloor+1,\dots,k-2\}$ en nombre fini tels que $\sum_{i\in I}\lambda_i(z-z_i)^{n_i} = -z^j$. Alors le Lem.3.3.1 entraîne $\ell_j(z) + z^j\log_{\mathcal{L}}(z)\mathbf{1}_{D(\infty,n)} \in D(k)$ et on pose :

$$\int_{D(\infty,n)} z^j \log_{\mathcal{L}}(z)\mu(z) \overset{\text{déf}}{=} \int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} \big(\ell_j(z) + z^j\log_{\mathcal{L}}(z)\mathbf{1}_{D(\infty,n)}\big)\mu(z) \tag{14}$$

où le membre de droite est bien défini par le Lem.3.2.1 et le Th.3.2.2. La condition sur μ montre que c'est indépendant du choix de ℓ_j et donne une forme linéaire bien définie sur $C(k,\mathcal{L})$ qui prolonge μ. La continuité résulte facilement de celle de μ et on note encore μ l'élément de $O(k,\mathcal{L})$ ainsi construit. Montrons $\mu \in O(k,\mathcal{L})^{\mathrm{b}}$. Comme dans la preuve du Th.3.2.2, on choisit un recouvrement U de $\mathbb{Q}_p$ dans $\mathbb{C}_p$ stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ et il suffit montrer qu'il existe une constante $c_\mu \in |E^\times|$ telle que $|\int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} g(h)(z)\mu(z)| \le c_\mu\|h\|_U$ $\forall g \in \mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)$, $\forall h \in C(k,\mathcal{L})_U$. Comme c'est déjà vrai pour $h \in C(k)_U$ car $\mu \in O(k)^{\mathrm{b}}$, on peut supposer $h(z) =$

$z^j \log_{\mathcal{L}}(z)\mathbf{1}_{D(\infty,n_0)}$, $0 \leq j \leq k-2$ et il suffit de montrer que $|\int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} g(h)(z)\mu(z)|$ est majoré indépendamment de $g \in B(\mathbb{Q}_p)$. Fixons ℓ_j comme précédemment tel que $h_j(z) \overset{\text{déf}}{=} \ell_j(z) + z^j \log_{\mathcal{L}}(z)\mathbf{1}_{D(\infty,n_0)} \in D(k)$. En utilisant (14), on voit que l'on a :

$$\int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} g(z^j \log_{\mathcal{L}}(z)\mathbf{1}_{D(\infty,n_0)})\mu(z) = \int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} g\big(h_j(z)\mathbf{1}_{D(\infty,n_0)}\big)\mu(z).$$

Puisque $\mu \in O(k)^{\mathrm{b}} \simeq \widetilde{B}(k)^\vee \subset D(k)^\vee$ (voir §3.2), on a $c_\mu \in |E^\times|$ tel que :

$$\left|\int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} g\big(h_j(z)\mathbf{1}_{D(\infty,n_0)}\big)\mu(z)\right| \leq c_\mu \|g\big(h_j(z)\mathbf{1}_{D(\infty,n_0)}\big)\|$$

où la norme à droite est une norme sur le Banach $\widetilde{B}(k)$. Or, $\widetilde{B}(k)$ est un $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaire par le Cor.3.2.3 de sorte que $\|g\big(h_j(z)\mathbf{1}_{D(\infty,n_0)}\big)\| \leq c\ \forall g \in \mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)$ pour une constante $c \in |E^\times|$ indépendante de g ce qui entraîne la majoration cherchée (par $c_\mu c$). Soit maintenant $\mu \in O(k,\mathcal{L})^{\mathrm{b}}$ et montrons que μ, vu dans $O(k)^{\mathrm{b}}$, annule $L(k,\mathcal{L})$. Comme dans la preuve du Th.3.2.2, on a en particulier la condition pour $h(z) = z^j \log_{\mathcal{L}}(z)\mathbf{1}_{D(\infty,n_0)}$, $0 \leq j \leq k-2$:

$$\left|\int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} g(h)(z)\mu(z)\right| \leq \|h\|_U\ \forall g \in \mathrm{B}(\mathbb{Q}_p). \tag{15}$$

L'action de $\mathbb{Q}_p^\times$ se faisant via un caractère unitaire, on peut supposer $g = \begin{pmatrix}\lambda & \mu\\ 0 & 1\end{pmatrix} \in \mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)$ et on a :

$$g(h)(z) = |\lambda|^{\frac{k-2}{2}} \lambda^{k-2-j}(z-\mu)^j \log_{\mathcal{L}}(z-\mu)(\mathbf{1}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} - \mathbf{1}_{D(\mu,-n_0+\mathrm{val}(\lambda)+1)}).$$

La condition (15) est alors équivalente après calcul à :

$$\int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)-D(a,-n+1)} (z-a)^j \log_{\mathcal{L}}(z-a)\mu(z) \in C_\mu p^{n(\frac{k-2}{2}-j)}\mathcal{O}_E \tag{16}$$

pour $a \in \mathbb{Q}_p$, $n \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq j \leq k-2$ ($C_\mu \in E$ est une constante). Supposons d'abord $j < \frac{k-2}{2}$ et $a = 0$, (16) entraîne alors :

$$\int_{D(\infty,n)} z^j \log_{\mathcal{L}}(z)\mu(z) \to 0 \text{ quand } n \to +\infty. \tag{17}$$

Soit $\sum_{i\in I} \lambda_i(z-z_i)^{n_i} \log_{\mathcal{L}}(z-z_i) \in L(k,\mathcal{L})$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction $h_n(z) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{i\in I} \lambda_i(z-z_i)^{n_i} \log_{\mathcal{L}}(z-z_i)\mathbf{1}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)-D(z_i,-n+1)}$ est à la fois dans $C(k,\mathcal{L})$ et dans $D(k)$ (par le Lem.3.3.1 et le Lem.3.3.2) de sorte qu'il y a *a priori* deux valeurs pour $\int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} h_n(z)\mu(z)$: la première en voyant μ dans $O(k,\mathcal{L})$ et la seconde en voyant μ dans $O(k)^{\mathrm{b}}$. Ces deux valeurs coïncident pour $\mu \in O(k,\mathcal{L})^{\mathrm{b}}$. En effet, soit $m \in \mathbb{N}$, alors $h_n(z)\mathbf{1}_{D(0,-m+1)} \in C(k)$ et les valeurs $\int_{D(0,-m+1)} h_n(z)\mu(z)$ sont donc les mêmes. En voyant μ dans $O(k,\mathcal{L})$, on a $\int_{D(0,-m+1)} h_n(z)\mu(z) \to \int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} h_n(z)\mu(z)$ dans E par (17) quand $m \to +\infty$. En voyant μ dans $O(k)^{\mathrm{b}}$, on a $\int_{D(0,-m+1)} h_n(z)\mu(z) \to \int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} h_n(z)\mu(z)$ dans E car $h_n(z)\mathbf{1}_{D(\infty,m)}$ tend vers 0 dans $D(k)$ quand $m \to +\infty$ (cela se déduit du Lem.3.3.1). Comme $n_i > \frac{k-2}{2}$, par (16) on a donc pour $n < 0$ en voyant μ dans $O(k)^{\mathrm{b}}$ (quitte à modifier C_μ) :

$$\int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} \sum_{i\in I} \lambda_i(z-z_i)^{n_i} \log_{\mathcal{L}}(z-z_i)\mathbf{1}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)-D(z_i,-n+1)}\mu(z) \in C_\mu p^{-n/2}\mathcal{O}_E.$$

Quand n tend vers $-\infty$, la fonction $(z-z_i)^{n_i}\log_{\mathcal{L}}(z-z_i)\mathbf{1}_{D(z_i,-n+1)}$ tend vers 0 dans $D(k)$ (encore le Lem.3.3.1) et l'intégrale de gauche tend donc dans E vers $\int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} \sum_{i\in I} \lambda_i(z-z_i)^{n_i}\log_{\mathcal{L}}(z-z_i)\mu(z)$. Or, le membre de droite tend clairement vers 0 quand n tend vers $-\infty$, d'où la nullité de cette intégrale. Tout ceci montre que $O(k,\mathcal{L})^{\mathrm{b}}$ est exactement le sous-espace vectoriel de $O(k)^{\mathrm{b}}$ des distributions μ telles que $\int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} h(z)\mu(z) = 0$ pour tout $h \in L(k,\mathcal{L})$. Par [**4**],Cor.4.2.3, la topologie de $O(k,\mathcal{L})^{\mathrm{b}}$ est induite par celle de $O(k)^{\mathrm{b}}$, ce qui achève la preuve. □

Corollaire 3.3.4. — *Pour $k > 2$ et $\mathcal{L} \in E$, le Banach $B(k,\mathcal{L})$ s'identifie topologiquement et de façon $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariante au Banach $\widetilde{B}(k,\mathcal{L})$ i.e. au quotient de $\widetilde{B}(k)$ par l'adhérence du sous-espace vectoriel des fonctions $h : \mathbb{Q}_p \to E$ de la forme :*

$$h(z) = \sum_{i\in I} \lambda_i(z-z_i)^{n_i}\log_{\mathcal{L}}(z-z_i)$$

où I est un ensemble fini, $\lambda_i \in E$, $z_i \in \mathbb{Q}_p$, $n_i \in \{\lfloor\frac{k-2}{2}\rfloor + 1, \ldots, k-2\}$ et $\deg\big(\sum_{i\in I}\lambda_i(z-z_i)^{n_i}\big) < \frac{k-2}{2}$.

Démonstration. — Par la définition de $\widetilde{B}(k,\mathcal{L})$, les résultats du §3.2 et [**28**],§1, le module compact tensorisé par E, $\widetilde{O}(k,\mathcal{L})^{\mathrm{b}}$, associé à $\widetilde{B}(k,\mathcal{L})$ est topologiquement isomorphe à $\{\mu \in O(k)^{\mathrm{b}}, \mu|_{L(k,\mathcal{L})} = 0\}$ muni de la topologie induite par celle de $O(k)^{\mathrm{b}}$. Par le Th.3.3.3, on a donc un isomorphisme topologique $\widetilde{O}(k,\mathcal{L})^{\mathrm{b}} \simeq O(k,\mathcal{L})^{\mathrm{b}}$ d'où le résultat par [**28**],Th.1.2. □

4. Arbre de Bruhat-Tits, symboles modulaires et invariant $\mathcal{L}$

On introduit ici le formalisme de [**14**] et [**25**] (légèrement étendu) que l'on utilise pour démontrer le Th.1.1.4 de l'introduction (Th.4.5.2 et Cor.4.5.3 ci-dessous).

4.1. Quelques rappels classiques. — On commence par réviser les symboles modulaires classiques associés aux formes modulaires.

On fixe une forme modulaire f parabolique normalisée de poids $k \geq 2$ nouvelle pour le groupe de congruence $\Gamma_1(M)$ de caractère $\chi : (\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$ (M entier ≥ 1). On suppose f vecteur propre des opérateurs de Hecke T_ℓ pour $\ell \nmid M$ (ou de manière équivalente pour tout ℓ puisque f est nouvelle) et on note $a_\ell \in$

$\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$ la valeur propre associée. Pour $\ell \nmid M$, rappelons que $T_\ell f \overset{\text{déf}}{=} \sum_i f\,|_{\delta_i}$ où $\Gamma_1(M)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \ell\end{pmatrix}\Gamma_1(M) = \amalg_i \Gamma_1(M)\delta_i$ et $S_\ell f \overset{\text{déf}}{=} \ell^{k-2} f\,|_{\sigma_\ell} = \ell^{k-2}\chi(\ell) f$ où $\sigma_\ell \in \Gamma_0(M)$, $\sigma_\ell \equiv \begin{pmatrix}\ell^{-1} & 0\\ 0 & \ell\end{pmatrix}$ mod. M.

On note E_f l'extension finie de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$ engendrée par les a_ℓ et les $\chi(\ell)$ pour $\ell \nmid M$ et O_f l'anneau des entiers de E_f. Pour $a \in \mathbb{Q}$ et $j \in \{0, \cdots, k-2\}$, on désigne par $\int_a^\infty f(z) z^j dz \in \mathbb{C}$ l'intégrale sur la droite verticale du demi-plan complexe supérieur issue de a. On rappelle le théorème classique suivant :

Théorème 4.1.1. — *Il existe $\Omega_f^\pm \in \mathbb{C}^\times$ tels que pour tout $r \in \mathbb{Q}$ et tout $j \in \{0, \cdots, k-2\}$:*

$$\frac{1}{2}\Big(2i\pi \int_r^\infty f(z) z^j dz \pm (-1)^j 2i\pi \int_{-r}^\infty f(z) z^j dz\Big) \in O_f \Omega_f^\pm \subset \mathbb{C}.$$

Démonstration. — Soit $\overline{f}$ la forme conjuguée de f i.e. ayant comme coefficients de Fourier les conjugués complexes de ceux de f et plongeons E_f dans $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ par $x \mapsto (x, \overline{x})$ où $\overline{x}$ est le conjugué de x. Les couples $(2i\pi \int_r^\infty f(z) z^j dz, 2i\pi \int_r^\infty \overline{f}(z) z^j dz)$ pour $r \in \mathbb{Q}$ et $j \in \{0, \cdots, k-2\}$ engendrent E_f-linéairement dans $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ un E_f-espace vectoriel V_f de dimension au plus 2. Cela se déduit par exemple des résultats de [**31**], en particulier de [**31**],Th.0.5, Cor.4.5 et preuve de Prop.5.7. L'involution E_f-linéaire $\iota : (x, y) \mapsto (\overline{y}, \overline{x})$ sur $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ préserve V_f et est différente de $\pm$Id. En effet, si par exemple $\iota = \mathrm{Id}$, on a pour $r \in \mathbb{Q}$ et $j \in \{0, \cdots, k-2\}$ en remarquant que $(-1)^j 2i\pi \int_{-r}^\infty f(z) z^j dz$ est le conjugué complexe de $2i\pi \int_r^\infty \overline{f}(z) z^j dz$:

$$\int_r^\infty f(z) z^j dz - (-1)^j \int_{-r}^\infty f(z) z^j dz = 0$$

et, si ψ est un caractère de Dirichlet primitif de niveau m tel que $\psi(-1) = (-1)^{j-1}$ et f_ψ désigne la forme tordue de f par ψ, la formule :

$$L(f_\psi, j+1) = \frac{(-2i\pi)^{j+1}}{j! m^{j+1}} \mathrm{Gauss}(\psi) \sum_{a \bmod.\ m} \overline{\psi}(a) \int_{-\frac{a}{m}}^\infty f(z)(mz+a)^j dz$$

entraîne alors $L(f_\psi, j+1) = 0$ pour tout $j \in \{0, \cdots, k-2\}$ ce qui est impossible si $f \neq 0$ (voir [**30**],§1). La preuve de $\iota \neq -\mathrm{Id}$ est similaire. Soit $V_f^\pm \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Ker}(\iota \pm \mathrm{Id})$, on a donc $1 \leq \dim_{E_f} V_f^\pm$ et $\dim_{E_f} V_f^+ + \dim_{E_f} V_f^- \leq 2$ d'où $\dim_{E_f} V_f^\pm = 1$ (et $\dim_{E_f} V_f = 2$). Cela donne l'assertion de l'énoncé avec E_f au lieu de O_f. Mais l'assertion avec O_f se déduit du théorème de Manin-Drinfeld (voir e.g. [**31**],Th.5.1). $\square$

Remarque 4.1.2. — Si $E_f \subset \mathbb{R}$ (par exemple si $\chi = 1$), Ω_f^+ (resp. Ω_f^-) est réel (resp. imaginaire pur).

On choisit $\Omega_f^\pm$ comme ci-dessus (on voit que $E_f\Omega_f^\pm$ est bien déterminé si $\Omega_f^\pm$ ne l'est pas) et, pour tout polynôme $P(z) \in E_f[z]$ de degré au plus $k-2$ et tout $r \in \mathbb{Q}$, on note :

$$\Big(\int_r^\infty f(z)P(z)dz\Big)^\pm \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{2i\pi}{2\Omega_f^\pm}\Big(\int_r^\infty f(z)P(z)dz \pm \int_{-r}^\infty f(z)P(-z)dz\Big) \in E_f.$$

Pour tous $r_1, r_2 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})^2$ et tout $P(z) \in E_f[z]$ (de degré $\leq k-2$), on note plus généralement :

$$\Big(\int_{r_1}^{r_2} f(z)P(z)dz\Big)^\pm \stackrel{\text{déf}}{=} \Big(\int_{r_1}^\infty f(z)P(z)dz\Big)^\pm - \Big(\int_{r_2}^\infty f(z)P(z)dz\Big)^\pm \in E_f.$$

Par le Th.4.1.1, on a $\big(\int_{r_1}^{r_2} f(z)P(z)dz\big)^\pm \in O_f$ si $P \in O_f[z]$.

Soit V un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel muni d'une action à gauche linéaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$. Comme au §2.4, on munit le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathrm{Hom}_{\Gamma_1(M)}(D_0, V)$ de l'action des opérateurs de Hecke $T_\ell\phi \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_i \delta_i^{-1}(\phi)$, $S_\ell\phi \stackrel{\text{déf}}{=} \sigma_\ell^{-1}\begin{pmatrix}\ell^{-1} & 0\\ 0 & \ell^{-1}\end{pmatrix}(\phi)$ et $w_\infty\phi \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}(\phi)$ où $\phi \in \mathrm{Hom}_{\Gamma_1(M)}(D_0, V)$ et $\ell \nmid M$.

À la forme f sont classiquement associés les symboles modulaires :

$$\phi_f^\pm \in \mathrm{Hom}_{\Gamma_1(M)}(D_0, (\mathrm{Sym}^{k-2}E_f^2)^\vee)$$

définis comme suit (via $\mathrm{Sym}^{k-2}E_f^2 \simeq \oplus_{0\leq j\leq k-2}E_fT^j$) :

$$\phi_f^\pm\big(\{r_2\} - \{r_1\}\big)(T^j) \stackrel{\text{déf}}{=} \Big(\int_{r_1}^{r_2} f(z)z^j dz\Big)^\pm.$$

La droite $E_f\phi_f^\pm \subset \mathrm{Hom}_{\Gamma_1(M)}(D_0, (\mathrm{Sym}^{k-2}E_f^2)^\vee)$ ne dépend pas du choix de $\Omega_f^\pm$.

Le lemme bien connu suivant se déduit d'un calcul simple et de l'isomorphisme d'Eichler-Shimura (via l'isomorphisme $\mathrm{Hom}_{\Gamma_1(M)}(D_0, (\mathrm{Sym}^{k-2}E_f^2)^\vee) \simeq H^1_c(Y_1(M), (\widetilde{\mathrm{Sym}}^{k-2}E_f^2)^\vee)$ Hecke-équivariant, cf. [**2**],Prop.4.2) :

Lemme 4.1.3. — *On a* $w_\infty\phi_f^\pm = \pm\phi_f^\pm$ *et :*

$$\mathrm{Hom}_{\Gamma_1(M)}(D_0, (\mathrm{Sym}^{k-2}E_f^2)^\vee)^f = E_f\phi_f^+ \oplus E_f\phi_f^-.$$

4.2. Arbre de Bruhat-Tits et symboles modulaires. — Lorsque f comme au §4.1 est “Steinberg en p”, on lui associe en suivant [**14**] et [**25**] une forme modulaire sur l'arbre de Bruhat-Tits et de nouveaux symboles modulaires.

On reprend la forme f du §4.1 et on suppose $M = Np$ avec $(N,p) = 1$ et χ trivial sur $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$. On note encore $\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$. On a dans ce cas (cf. [**22**],§I.12) :

$$a_p^2 = \chi(p)p^{k-2}. \tag{18}$$

Soit $W_p \overset{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} pu & v \\ pNw & pt \end{pmatrix}$ avec $u, v, w, t \in \mathbb{Z}$, $put - Nvw = 1$ et $pu \equiv 1\ (N)$, une autre formule importante dans ce cas est (cf. [**1**],§2) :

$$f\,|_{W_p} = -a_p f. \tag{19}$$

On note $\mathcal{BT}$ l'arbre de Bruhat-Tits de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$, $\mathcal{A}(\mathcal{BT})$ l'ensemble de ses arêtes orientées et $\mathcal{S}(\mathcal{BT})$ l'ensemble de ses sommets. On fixe un sommet central σ_0 correspondant au réseau $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ et on note α_0 l'arête orientée allant de σ_0 au sommet correspondant au réseau $\mathbb{Z}_p \oplus p\mathbb{Z}_p$. Le groupe $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$ agit à gauche sur $\mathcal{BT}$, $\mathcal{A}(\mathcal{BT})$ et $\mathcal{S}(\mathcal{BT})$. Si $\alpha \in \mathcal{A}(\mathcal{BT})$, $\overline{\alpha}$ désigne l'arête avec orientation opposée et $o(\alpha) \in \mathcal{S}(\mathcal{BT})$ le sommet origine de α. Il est commode de voir $\mathcal{A}(\mathcal{BT})$ comme l'ensemble des classes $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)/\mathrm{I}(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times$ avec $\alpha_0 = \mathrm{I}(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times$.

On pose :

$$\Gamma_1^p(N) \overset{\text{déf}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[1/p]),\ c \equiv 0 \text{ mod. } N,\ a \equiv 1 \text{ mod. } N \right\}.$$

On a $\Gamma_1(N) = \Gamma_1^p(N) \cap \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$, $\Gamma_1(N) \cap \Gamma_0(p) = \Gamma_1^p(N) \cap \mathrm{I}(\mathbb{Z}_p)$ et on voit que le groupe $\widetilde{\Gamma}_1^p(N)$ du §2.4 est le sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$ engendré par W_p et $\Gamma_1^p(N)$ et que W_p normalise $\Gamma_1^p(N)$. Pour $\alpha \in \mathcal{A}(\mathcal{BT})$, on note Γ_α son stabilisateur dans $\Gamma_1^p(N)$. Puisque $\widetilde{\Gamma}_1^p(N)$ agit transitivement sur $\mathcal{A}(\mathcal{BT})$ et puisque W_p normalise $\Gamma_1(N) \cap \Gamma_0(p)$ et $\Gamma_1^p(N)$, on voit que Γ_α est conjugué dans $\Gamma_1^p(N)$ à $\Gamma_{\alpha_0} = \Gamma_1(N) \cap \Gamma_0(p)$.

En suivant [**14**],Def.1.2 et [**25**],§2.1, on définit $S_k(\mathcal{BT}, \Gamma_1^p(N))$ comme le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions $F : \mathcal{A}(\mathcal{BT}) \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ telles que :

(i) $F(\gamma\alpha, \gamma z) = (cz + d)^k F(\alpha, z)$ pour tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_1^p(N)$

(ii) $F(\overline{\alpha}, z) = -F(\alpha, z)$ pour $\alpha \in \mathcal{A}(\mathcal{BT})$ et $\sum_{o(\alpha)=\sigma} F(\alpha, z) = 0$ pour $\sigma \in \mathcal{S}(\mathcal{BT})$

(iii) $F_\alpha \overset{\text{déf}}{=} F(\alpha, \cdot)$ est une forme parabolique sur $\mathcal{H}$ de poids k pour Γ_α.

On munit $S_k(\mathcal{BT}, \Gamma_1^p(N))$ d'une action à droite de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$ par :

$$(F\,|_g)(\alpha, z) \overset{\text{déf}}{=} \frac{\det(g)^{k-1}}{(cz + d)^k} F(g\alpha, gz)$$

(où $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$) ainsi qu'une action des opérateurs de Hecke T_ℓ et S_ℓ pour ℓ premier, $\ell \nmid Np$, par $T_\ell F \overset{\text{déf}}{=} \sum_i F|_{\delta_i}$ où $\Gamma_1^p(N) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \ell \end{pmatrix} \Gamma_1^p(N) = \amalg_i \Gamma_1^p(N)\delta_i$ pour les mêmes δ_i qu'en (5) et $S_\ell F \overset{\text{déf}}{=} \ell^{k-2} F|_{\sigma_\ell}$ pour le même σ_ℓ.

Soit $S_k(\Gamma_1(N) \cap \Gamma_0(p))^{p-\text{nouv}}$ le sous-$\mathbb{C}$-espace vectoriel de $S_k(\Gamma_1(N) \cap \Gamma_0(p))$ des formes nouvelles en p. Le principal intérêt de l'espace $S_k(\mathcal{BT}, \Gamma_1^p(N))$ réside dans la proposition suivante qui se démontre exactement comme [**14**],Lem.1.3 :

Proposition 4.2.1 ([14],[25]). — *L'application de* $S_k(\mathcal{BT}, \Gamma_1^p(N))$ *dans* $S_k(\Gamma_1(N) \cap \Gamma_0(p))$ *qui envoie* F *sur* F_{α_0} *induit un isomorphisme :*

$$S_k(\mathcal{BT}, \Gamma_1^p(N)) \xrightarrow{\sim} S_k(\Gamma_1(N) \cap \Gamma_0(p))^{p-\mathrm{nouv}}$$

compatible aux opérateurs de Hecke T_ℓ *et* S_ℓ *(pour* $(\ell, Np) = 1$*).*

Soit $F \in S_k(\mathcal{BT}, \Gamma_1^p(N))$ associé à f par la Prop.4.2.1, on a $T_\ell F = a_\ell F$ et $S_\ell F = \ell^{k-2}\chi(\ell)F$ pour $\ell \nmid Np$. La deuxième égalité se récrit :

(20) $$F(g\alpha, gz) = \chi(d)(cz+d)^k F(\alpha, z)$$

pour $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[1/p])$ tel que $c \equiv 0$ (N). On a aussi par (19) et la propriété (ii) de F :

(21) $$F\,|_{W_p} = a_p F.$$

Pour $\alpha \in \mathcal{A}(\mathcal{BT})$ et $r_1, r_2 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})^2$, considérons l'intégrale :

$$\int_{r_1}^{r_2} F(\alpha, z)(T-z)^{k-2} dz \in \mathrm{Sym}^{k-2}\mathbb{C}^2 \simeq \oplus_{0 \le j \le k-2} \mathbb{C}T^j.$$

On a $\alpha = \gamma\alpha_0$ ou bien $\overline{\alpha} = \gamma\alpha_0$ pour un $\gamma \in \Gamma_1^p(N)$. Dans le premier cas, un calcul donne dans $\mathrm{Sym}^{k-2}\mathbb{C}^2$:

(22) $$\int_{r_1}^{r_2} F(\alpha, z)(T-z)^{k-2} dz = \gamma\Big(\int_{\gamma^{-1}r_1}^{\gamma^{-1}r_2} F(\alpha_0, z)(T-z)^{k-2} dz\Big)$$

de sorte que, pour $j \in \{0, \cdots, k-2\}$, $\int_{r_1}^{r_2} F(\alpha, z)z^j dz$ est une $\mathbb{Z}[1/p]$-combinaison linéaire d'intégrales $\int_{\gamma^{-1}r_1}^{\gamma^{-1}r_2} f(z)z^i dz$ pour $i \in \{0, \cdots, k-2\}$ ce qui permet de définir $\big(\int_{r_1}^{r_2} F(\alpha, z)z^j dz\big)^\pm \in E_f$ par linéarité à partir des $\big(\int_{\gamma^{-1}r_1}^{\gamma^{-1}r_2} f(z)z^i dz\big)^\pm$. Le deuxième cas se ramène au premier en posant :

(23) $$\Big(\int_{r_1}^{r_2} F(\alpha, z)z^j dz\Big)^\pm \stackrel{\text{déf}}{=} -\Big(\int_{r_1}^{r_2} F(\overline{\alpha}, z)z^j dz\Big)^\pm.$$

Soit E une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$ contenant E_f et $\sqrt{p}$ si k est impair. À F on associe les symboles modulaires :

$$\phi_F^\pm \in \mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, (\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2 \otimes_E \mathrm{St})^\vee)$$

en posant pour $j \in \{0, \cdots, k-2\}$ et $\alpha \in \mathcal{A}(\mathcal{BT})$:

(24) $$\phi_F^\pm\big(\{r_2\} - \{r_1\}\big)(T^j \otimes [\alpha]) \stackrel{\text{déf}}{=} \Big(\int_{r_1}^{r_2} F(\alpha, z)z^j dz\Big)^\pm$$

où $[\alpha]$ désigne l'élément correspondant de $E[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)/\mathrm{I}(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times]$ (on rappelle que l'on a une surjection canonique $E[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)/\mathrm{I}(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times] \twoheadrightarrow \mathrm{St}$). L'harmonicité de F (propriété (ii) ci-dessus) montre que $\phi_F^\pm\big(\{r_2\} - \{r_1\}\big)(T^j \otimes [\alpha])$ ne dépend que de l'image de $[\alpha]$ dans St de sorte que $\phi_F^{\pm}\big(\{r_2\}-\{r_1\}\big) : \underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2\otimes_E \mathrm{St}\to E$ est bien défini. Un calcul analogue à (22) via l'identification $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariante :

$$(25)\qquad \begin{aligned}(\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2)^\vee &\xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2\otimes\varepsilon(\det)^{-(k-2)}\\ h &\mapsto \sum_{j=0}^{k-2}\binom{k-2}{j}h(z^j)(-1)^jT^{k-2-j}\end{aligned}$$

montre que $\phi_F^{\pm}$ commute bien à $\Gamma_1^p(N)$.

Pour tout $\alpha\in\mathcal{A}(\mathcal{BT})$ et tout $\phi\in\mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0,(\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2\otimes_E\mathrm{St})^\vee)$, on définit $\phi_\alpha\in\mathrm{Hom}_{\Gamma_\alpha}(D_0,(\mathrm{Sym}^{k-2}E^2)^\vee)$ par :

$$\phi_\alpha\big(\{r_2\}-\{r_1\}\big)(T^j)\overset{\text{déf}}{=}\phi\big(\{r_2\}-\{r_1\}\big)(T^j\otimes[\alpha]).$$

Lemme 4.2.2. — *$\phi_F^{\pm}$ est l'unique élément de* $\mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0,(\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2\otimes_E\mathrm{St})^\vee)$ *tel que* $(\phi_F^{\pm})_{\alpha_0}=\phi_f^{\pm}$. *De plus, on a* $w_\infty\phi_F^{\pm}=\pm\phi_F^{\pm}$ *et :*

$$\mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0,(\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2\otimes_E\mathrm{St})^\vee)^f=E\phi_F^+\oplus E\phi_F^-.$$

Démonstration. — L'unicité est conséquence des définitions, de l'égalité (23) et du fait que $\Gamma_1^p(N)$ agit transitivement sur les arêtes *non* orientées. Le reste découle alors de l'isomorphisme :

$$\mathrm{Hom}_{\Gamma_1(N)\cap\Gamma_0(p)}(D_0,(\mathrm{Sym}^{k-2}E^2)^\vee)^f\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_{\Gamma_1(Np)}(D_0,(\mathrm{Sym}^{k-2}E^2)^\vee)^f,$$

du Lem.4.1.3 et du fait que la flèche :

$$\mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0,(\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2\otimes_E\mathrm{St})^\vee)\to\mathrm{Hom}_{\Gamma_1(N)\cap\Gamma_0(p)}(D_0,(\mathrm{Sym}^{k-2}E^2)^\vee)$$

qui envoie ϕ sur ϕ_{α_0} commute aux opérateurs de Hecke. □

4.3. Espaces de distributions et symboles modulaires. — On compare les symboles modulaires à valeurs dans les espaces $O(k)$ et $O(k)^{\mathrm{b}}$, $O(k,\mathcal{L})$ et $O(k,\mathcal{L})^{\mathrm{b}}$ du §3. On conserve les notations précédentes. En particulier E est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$ contenant E_f et $\sqrt{p}$ si k est impair.

Lemme 4.3.1 (Manin). — *On a* $D_0=\mathbb{Z}[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})](\{\infty\}-\{0\})$.

Démonstration. — Un diviseur de D_0 s'écrit $\sum_{i\in I}n_i(\{\infty\}-\{r_i\})$ pour des r_i dans $\mathbb{Q}$ et des n_i dans $\mathbb{Z}$. Donc il suffit de montrer $\{\infty\}-\{r\}\in\mathbb{Z}[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})](\{\infty\}-\{0\})$ pour $r\in\mathbb{Q}$. Un résultat dû à Manin (cf. e.g. [**23**],Prop.1) dit qu'il existe $(g_j)_{j\in\{0,\cdots,n\}}\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et $(r_j)_{j\in\{1,\cdots,n+1\}}\in\mathbb{Q}$ tels que $r_{n+1}=r$, $g_0(\infty)=\infty$, $g_0(0)=r_1$, $g_j(\infty)=r_j$ et $g_j(0)=r_{j+1}$. On a alors :

$$\sum_{j=0}^n g_j(\{\infty\}-\{0\})=\{\infty\}-\{r_1\}+\sum_{j=1}^n(\{r_j\}-\{r_{j+1}\})=\{\infty\}-\{r\}.$$

□

Proposition 4.3.2. — *(i) Si $k > 2$, on a* $\mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, (\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2)^\vee) = 0$.
(ii) L'injection $O(k)^{\mathrm{b}} \hookrightarrow O(k)$ *et la surjection* $O(k) \twoheadrightarrow (\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2 \otimes_E \mathrm{St})^\vee$ *(cf. §3.1) induisent des isomorphismes :*

$$\mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(k)^{\mathrm{b}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(k)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, (\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2 \otimes_E \mathrm{St})^\vee).$$

(iii) Pour tout $\mathcal{L} \in E$, l'injection $O(k,\mathcal{L})^{\mathrm{b}} \hookrightarrow O(k,\mathcal{L})$ *(cf. §3.1) induit un isomorphisme :*

$$\mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(k,\mathcal{L})^{\mathrm{b}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(k,\mathcal{L})).$$

Démonstration. — On démontre (iii) en détail et on indique les modifications à apporter pour (i) et (ii). Il faut montrer la surjectivité. Puisque $\Gamma_1(N) \cap \Gamma_0(p)$ est d'indice fini dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, on a par le Lem.4.3.1 un nombre fini de diviseurs $(\{s_i\} - \{r_i\})_{i\in I} \in D_0$ tels que :

$$D_0 = \sum_{i\in I} \mathbb{Z}[\Gamma_1(N) \cap \Gamma_0(p)]\big(\{s_i\} - \{r_i\}\big). \tag{26}$$

Soit $\Phi \in \mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(k,\mathcal{L}))$, il faut montrer $\Phi(\{s_i\} - \{r_i\}) \in O(k,\mathcal{L})^{\mathrm{b}}$ pour tout $i \in I$. Soit $O^0 \subset O(k,\mathcal{L})$ le $\mathcal{O}_E$-module image inverse d'une boule unité de $C(k,\mathcal{L})_U^\vee$ (cf. §3.1). Quitte à choisir correctement U et la norme sur $C(k,\mathcal{L})_U^\vee$, on peut supposer O^0 stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times$ et contenant les distributions en nombre fini $\Phi(\{s_i\} - \{r_i\})$ et $W_p(\Phi(\{s_i\} - \{r_i\}))$. Vu la définition de $O(k,\mathcal{L})^{\mathrm{b}}$, il suffit de montrer que pour tout $i \in I$ et tout $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, $g(\Phi(\{s_i\} - \{r_i\})) \in O^0$. Puisque $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times\Gamma_1^p(N) \amalg \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times W_p\Gamma_1^p(N)$ et O^0 est stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times$, on peut se limiter à $g = \gamma$ et $g = W_p\gamma$ avec $\gamma \in \Gamma_1^p(N)$. Dans le premier cas, on a :

$$\gamma(\Phi(\{s_i\}-\{r_i\})) = \Phi(\{\gamma s_i\}-\{\gamma r_i\}) \in \sum_{j\in I} \mathbb{Z}[\Gamma_1(N)\cap\Gamma_0(p)]\big(\Phi(\{s_j\}-\{r_j\})\big) \subset O^0$$

en utilisant (26). Le deuxième cas est similaire puisque W_p normalise $\Gamma_1(N) \cap \Gamma_0(p)$. Le premier isomorphisme de (ii) se montre de la même manière et (i) résulte de (iii) et de $(\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2)^\vee \cap O(k,\mathcal{L})^{\mathrm{b}} = 0$ si $k > 2$ (cf. §3.1). Le deuxième isomorphisme de (ii) résulte de la même méthode appliquée à $(\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2 \otimes_E \mathrm{St})^\vee$ et de l'isomorphisme $O(k)^{\mathrm{b}} \xrightarrow{\sim} ((\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2 \otimes_E \mathrm{St})^\vee)^{\mathrm{b}}$ ([**34**],Th.17 pour k pair et [**19**],Th.4.1 pour k impair) où :

$$\big((\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2 \otimes_E \mathrm{St})^\vee\big)^{\mathrm{b}} \overset{\text{déf}}{=} \Big((\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2 \otimes_E \mathrm{St})^\vee \cap \mathrm{ind}_{\mathrm{I}(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}\mathcal{O}_E^2)^\vee\Big) \otimes_{\mathcal{O}_E} E$$

(voir [**4**],§4.6 pour plus de détails). □

On note $\Phi_F^\pm$ l'unique élément de $\mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(k))$ par le (ii) de la Prop.4.3.2 ayant pour image $\phi_F^\pm$ dans $\mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, (\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2 \otimes_E \mathrm{St})^\vee)$.

Corollaire 4.3.3. — *On a* $w_\infty \Phi_F^\pm = \pm \Phi_F^\pm$ *et :*

$$\mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(k))^f = E\Phi_F^+ \oplus E\Phi_F^-.$$

4.4. 1-cocycles et symboles modulaires. — Dans cette partie, on associe, suivant [**25**], deux classes de cohomologie aux symboles modulaires $\Phi_F^\pm$. On conserve les notations précédentes.

Soit V un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel muni d'une action à gauche linéaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$. On munit le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $H^1(\Gamma_1^p(N), \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0, V))$ d'une action des opérateurs T_ℓ, S_ℓ et w_∞ comme suit :

$$\begin{aligned}
(T_\ell c)(\gamma) &\overset{\text{déf}}{=} \sum_i \delta_i^{-1}(c(\gamma_i)) \\
(S_\ell c)(\gamma) &\overset{\text{déf}}{=} \ell^{2-k}\sigma_\ell^{-1}\big(c(\sigma_\ell \gamma \sigma_\ell^{-1})\big) \\
(w_\infty c)(\gamma) &\overset{\text{déf}}{=} \tau\big(c(\tau\gamma\tau)\big).
\end{aligned}$$

où c est un 1-cocycle $\Gamma_1^p(N) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0, V)$, $\tau \overset{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et où $\gamma, \gamma_i \in \Gamma_1^p(N)$ sont tels que $\delta_i^{-1}\gamma_i = \gamma\delta_j^{-1}$ (σ_ℓ et les δ_i sont les mêmes qu'au §4.2).

Lemme 4.4.1. — *On a les égalités :*

$$\mathrm{Hom}_{\Gamma_1(N)}(D_0, (\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2)^\vee)^f = 0 \tag{27}$$

$$H^1(\Gamma_1(N), \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0, (\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2)^\vee))^f = 0. \tag{28}$$

Démonstration. — Par [**2**],Prop.4.2, on a des isomorphismes commutant aux opérateurs de Hecke pour $i \geq 0$:

$$H^i(\Gamma_1(N), \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0, (\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2)^\vee)) \simeq H_c^{i+1}(Y_1(N), (\widetilde{\underline{\mathrm{Sym}}}^{k-2}E^2)^\vee) \tag{29}$$

et idem avec $\Gamma_1(N) \cap \Gamma_0(p)$ au lieu de $\Gamma_1(N)$. (27) résulte de (29) pour $i = 0$ et de l'isomorphisme d'Eichler-Shimura. (28) résulte de (29) pour $i = 1$ et du fait que $H_c^2(Y_1(N), (\widetilde{\underline{\mathrm{Sym}}}^{k-2}E^2)^\vee)$ n'a pas de valeurs propres "paraboliques" sous les opérateurs de Hecke (il est même nul pour $k > 2$). On peut aussi recopier la preuve de [**25**],§7.1 en remplaçant "pointes" par "pointes régulières" si k est impair. □

Comme dans [**14**],Cor.3.3 et [**25**],Prop.7.1, on déduit de ce qui précède :

Proposition 4.4.2. — *(i) On a* $\mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, (\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2)^\vee)^f = 0$.
(ii) On a un isomorphisme commutant à w_∞ *:*

$$\mathrm{Hom}_{\Gamma_1(N)\cap\Gamma_0(p)}(D_0, (\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2)^\vee)^f \xrightarrow{\sim} H^1(\Gamma_1^p(N), \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0, (\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2)^\vee))^f$$

qui envoie $\phi_f^{\pm}$ *sur la classe du* 1*-cocycle* $c_f^{\pm}$ *défini par :*

$$c_f^{\pm}(\gamma)(\{r_2\}-\{r_1\})(z^j) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{\alpha\in[\sigma_0,\gamma\sigma_0]} \Big(\int_{r_1}^{r_2} F(\alpha,z)z^j dz\Big)^{\pm}$$

où $[\sigma_0,\gamma\sigma_0]$ *est l'ensemble des arêtes orientées reliant le sommet central* σ_0 *à* $\gamma\sigma_0$*. En particulier la classe de* $c_f^{\pm}$ *est non nulle,* $w_\infty c_f^{\pm} = \pm c_f^{\pm}$ *et :*

$$H^1(\Gamma_1^p(N), \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0, (\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2)^\vee))^f = Ec_f^+ \oplus Ec_f^-.$$

Démonstration. — (i) et (ii) résultent de la deuxième suite exacte de [**29**],Prop.13 p.169 appliquée à $G = \Gamma_1^p(N)$ et $M = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0, (\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2)^\vee)$ et des égalités (27) et (28). Pour plus de détails, voir [**14**],§3.1 et [**25**],§7.3,§5.2. Notons que (i) pour $k>2$ découle aussi du (i) de la Prop.4.3.2. □

Soit $\mathcal{L}\in E$. Pour H une fonction rigide analytique E-rationnelle sur Ω (que l'on peut voir comme un élément de $O(2)$, cf. §3.1), rappelons qu'une intégrale de Coleman de H relativement à la détermination $\log_{\mathcal{L}}$ du logarithme p-adique est une primitive $\tilde{H}$ de H dans $O(2,\mathcal{L})$ (définie à addition d'une constante près) via la surjection $O(2,\mathcal{L}) \twoheadrightarrow O(2)$ (cf. §3.1). Si Q_1 et Q_2 sont deux points de Ω, $\tilde{H}(Q_2)-\tilde{H}(Q_1)$ ne dépend pas de la primitive choisie et se note $\int_{Q_1}^{Q_2} H(z)dz$.

Soit $\Phi \in \mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(k))$, $Q\in\Omega$ et définissons le 1-cocycle :

$$\begin{array}{rcl} c_{\mathcal{L},Q}(\Phi) : \Gamma_1^p(N) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0, (\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2)^\vee) \\ \gamma & \mapsto & c_{\mathcal{L},Q}(\Phi)(\gamma)(\{r_2\}-\{r_1\})(z^j) \overset{\text{déf}}{=} \displaystyle\int_Q^{\gamma Q} \Phi(\{r_2\}-\{r_1\})(z)z^j dz \end{array}$$

où $\Phi(\{r_2\}-\{r_1\})\in O(k)$ est vu comme fonction rigide analytique sur Ω. Via l'identification (25), on a :

$$(30)\quad c_{\mathcal{L},Q}(\Phi)(\gamma)(\{r_2\}-\{r_1\}) = \int_Q^{\gamma Q} \Phi(\{r_2\}-\{r_1\})(z)(T-z)^{k-2}dz.$$

Par [**33**],preuve du Th.4, le 1-cocycle $c_{0,Q}(\Phi_F^{\pm})$ (pour le choix $\mathcal{L}=0$) est le même lorsque $\chi=1$ que le 1-cocycle noté $\widetilde{lc}_{f,Q}$ dans [**25**],§5.1. On vérifie que la classe de $c_{\mathcal{L},Q}(\Phi)$ dans $H^1(\Gamma_1^p(N), \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0, (\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2)^\vee))$ ne dépend pas de Q et on la note simplement $c_{\mathcal{L}}(\Phi)$. En particulier, $c_0(\Phi_F^{\pm})$ est un élément de $H^1(\Gamma_1^p(N), \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0, (\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2)^\vee))^f$ et $w_\infty c_0(\Phi_F^{\pm}) = \pm c_0(\Phi_F^{\pm})$ ([**25**],§5.2).

Soit $\Phi \in \mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(k))$, $\sigma\in\mathcal{S}(\mathcal{BT})$ et définissons le 1-cocycle :

$$\begin{array}{rcl} c_{\infty,\sigma}(\Phi) : \Gamma_1^p(N) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0, (\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2)^\vee) \\ \gamma & \mapsto & c_{\infty,\sigma}(\Phi)(\gamma)(\{r_2\}-\{r_1\})(z^j) \overset{\text{déf}}{=} \displaystyle\sum_{\alpha\in[\sigma,\gamma\sigma]} \Phi(\{r_2\}-\{r_1\})(z^j\otimes[\alpha]) \end{array}$$

où $[\sigma, \gamma\sigma]$ est l'ensemble des arêtes orientées reliant σ à $\gamma\sigma$, $\Phi(\{r_2\}-\{r_1\}) \in O(k)$ est vu dans $(\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2 \otimes_E \mathrm{St})^\vee$ par la surjection $O(k) \twoheadrightarrow (\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2 \otimes_E \mathrm{St})^\vee$ (cf. §3.1) et où $[\alpha]$ est l'image de $\alpha \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)/\mathrm{I}(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times$ dans $E[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)/\mathrm{I}(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times]$. Le 1-cocycle $c_{\infty,\sigma}(\Phi_F^\pm)$ est le même lorsque $\chi = 1$ que le 1-cocycle noté $\widetilde{oc}_{f,s}$ dans [**25**],§5.1. La classe de $c_{\infty,\sigma}(\Phi)$ dans $H^1(\Gamma_1^p(N), \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0, (\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2)^\vee))$ ne dépend pas de σ et on la note simplement $c_\infty(\Phi)$. En particulier, on voit que $c_\infty(\Phi_F^\pm) = c_f^\pm$ dans $H^1(\Gamma_1^p(N), \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0, (\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2)^\vee))^f$ (cf. Prop.4.4.2).

Lemme 4.4.3. — *Il existe $\mathcal{L}^+(f) \in E$ (resp. $\mathcal{L}^-(f) \in E$) unique tel que :*

$$c_0(\Phi_F^+) = \mathcal{L}^+(f) c_\infty(\Phi_F^+)$$

(resp. avec $-$).

Démonstration. — C'est une conséquence directe de ce qui précède et du (ii) de la Prop.4.4.2. □

4.5. Invariant $\mathcal{L}$ et symboles modulaires. — On rassemble ce qui précède avec la suite exacte (9) du §3.1 pour étudier l'espace de symboles modulaires $\mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(k, \mathcal{L}))^f$.

Lemme 4.5.1. — *Pour tout $\Phi \in \mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(k))$, on a $c_{\mathcal{L}}(\Phi) = c_0(\Phi) + \mathcal{L} c_\infty(\Phi)$.*

Démonstration. — Si $Q \in \Omega$ se projette sur un sommet $\sigma_Q \in \mathcal{S}(\mathcal{BT})$ par la flèche de "réduction" (voir e.g. [**34**]), on a plus précisément $c_{\mathcal{L},Q}(\Phi) = c_{0,Q}(\Phi) + \mathcal{L} c_{\infty,\sigma_Q}(\Phi)$: en remarquant que $\Phi(\{r_2\} - \{r_1\})(z^j \otimes [\alpha])$ n'est autre que le résidu $\mathrm{res}_\alpha(z^j \Phi(\{r_2\} - \{r_1\})(z) dz)$ (cf. [**4**],§5.2), l'argument est le même que celui de [**4**],Prop.5.2.2. □

Le résultat qui suit est essentiel :

Théorème 4.5.2. — *(i) On suppose $k > 2$. Pour tout $\mathcal{L} \in E$, la surjection $O(k, \mathcal{L}) \twoheadrightarrow O(k)$ induit une injection :*

$$\mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(k, \mathcal{L})) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(k))$$

et on a :

$$\Phi_F^\pm \in \mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(k, \mathcal{L})) \Leftrightarrow \mathcal{L} = -\mathcal{L}^\pm(f).$$

(ii) On suppose $k = 2$. Pour tout $\mathcal{L} \in E$, la surjection $O(2, \mathcal{L}) \twoheadrightarrow O(2)$ induit une injection :

$$\mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(2, \mathcal{L}))^f \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(2))^f$$

et on a :

$$\Phi_F^\pm \in \mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(2, \mathcal{L}))^f \Leftrightarrow \mathcal{L} = -\mathcal{L}^\pm(f).$$

Démonstration. — Pour tout k, la suite exacte (9) donne lieu à une suite exacte courte $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$-équivariante :

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0, \underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2 \otimes \varepsilon(\det)^{-(k-2)}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0, O(k,\mathcal{L})) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0, O(k)) \to 0$$

et à un début de suite exacte longue commutant aux opérateurs de Hecke :

$$\begin{aligned}(31)\quad 0 &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, \underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2 \otimes \varepsilon(\det)^{-(k-2)}) \longrightarrow \\ &\mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(k,\mathcal{L})) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(k)) \xrightarrow{\delta_{\mathcal{L}}} \\ &H^1(\Gamma_1^p(N), \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0, \underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2 \otimes \varepsilon(\det)^{-(k-2)})).\end{aligned}$$

Calculons $\delta_{\mathcal{L}}$. Soit $\Phi \in \mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(k))$ et $\widetilde{\Phi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0, O(k,\mathcal{L}))$ relevant Φ, alors $\delta_{\mathcal{L}}(\Phi)$ est la classe du 1-cocycle $\gamma \mapsto \gamma(\widetilde{\Phi}) - \widetilde{\Phi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0, \underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2 \otimes \varepsilon(\det)^{-(k-2)})$. Pour $r_1, r_2 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})^2$ et $\gamma \in \Gamma_1^p(N)$, $\gamma(\widetilde{\Phi}(\{\gamma^{-1}r_2\} - \{\gamma^{-1}r_1\})) - \widetilde{\Phi}(\{r_2\} - \{r_1\})$ est un polynôme en z de degré au plus $k-2$ où $\widetilde{\Phi}(\{\gamma^{-1}r_2\} - \{\gamma^{-1}r_1\})$ et $\widetilde{\Phi}(\{r_2\} - \{r_1\})$ sont ici vus comme fonctions "$\log_{\mathcal{L}}$-rigides" de la variable $z \in \Omega$ (cf. §3.1). Changeant z en T, on a donc pour tout $z_0 \in \Omega$ l'égalité dans $\mathbb{C}_p[T]$:

$$\begin{aligned}(32)\quad \gamma(\widetilde{\Phi}(\{\gamma^{-1}r_2\} - \{\gamma^{-1}r_1\})) - \widetilde{\Phi}(\{r_2\} - \{r_1\}) = \\ \sum_{i=0}^{k-2} \gamma(\widetilde{\Phi}(\{\gamma^{-1}r_2\} - \{\gamma^{-1}r_1\}))^{(i)}(z_0)\frac{(T-z_0)^i}{i!} \\ - \sum_{i=0}^{k-2} \widetilde{\Phi}(\{r_2\} - \{r_1\})^{(i)}(z_0)\frac{(T-z_0)^i}{i!}\end{aligned}$$

où (i) en exposant est la dérivée i-ième par rapport à z. Mais par [**4**],Lem.5.1.4 (modulo la modification sur l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, cf. §3.1), on a dans $\mathrm{Sym}^{k-2}\mathbb{C}_p^2$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k-2} \gamma(\widetilde{\Phi}(\{\gamma^{-1}r_2\} - \{\gamma^{-1}r_1\}))^{(i)}(z_0)\frac{(T-z_0)^i}{i!} = \\ \gamma\left(\sum_{i=0}^{k-2} \widetilde{\Phi}(\{\gamma^{-1}r_2\} - \{\gamma^{-1}r_1\})^{(i)}(\gamma^{-1}z_0)\frac{(T-\gamma^{-1}z_0)^i}{i!}\right).\end{aligned}$$

Par (32) appliqué à $z_0 = \gamma z_Q$ pour $Q \in \Omega$ fixé, on a $\delta_{\mathcal{L}}(\Phi)(\gamma)(\{r_2\} - \{r_1\}) = X(\gamma)(\{r_2\} - \{r_1\}) - Y(\gamma)(\{r_2\} - \{r_1\})$ où $X(\gamma), Y(\gamma) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0, \underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2 \otimes \varepsilon(\det)^{-(k-2)})$ sont donnés par $X(\gamma) \overset{\text{déf}}{=} \gamma(\phi) - \phi$ avec $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0, \underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2 \otimes$

$\varepsilon(\det)^{-(k-2)})$, $\phi(\{r_2\}-\{r_1\}) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{i=0}^{k-2}\widetilde{\Phi}(\{r_2\}-\{r_1\})^{(i)}(z_Q)\frac{(T-z_Q)^i}{i!}$ et :

$$\begin{aligned} Y(\gamma)(\{r_2\}-\{r_1\}) &\overset{\text{déf}}{=} \sum_{i=0}^{k-2}\widetilde{\Phi}(\{r_2\}-\{r_1\})^{(i)}(\gamma z_Q)\frac{(T-\gamma z_Q)^i}{i!} \\ &\qquad\qquad -\sum_{i=0}^{k-2}\widetilde{\Phi}(\{r_2\}-\{r_1\})^{(i)}(z_Q)\frac{(T-z_Q)^i}{i!} \\ &= \frac{1}{(k-2)!}\int_Q^{\gamma Q}\Phi(\{r_2\}-\{r_1\})(z)(T-z)^{k-2}dz \\ &\overset{(30)}{=} \frac{1}{(k-2)!}c_{\mathcal{L},Q}(\Phi)(\gamma)(\{r_2\}-\{r_1\}) \end{aligned}$$

(la deuxième égalité résulte d'un calcul simple). Puisque $X(\gamma)$ est un cobord, on a finalement dans $H^1(\Gamma_1^p(N), \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0, \underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2 \otimes \varepsilon(\det)^{-(k-2)}))$ avec le Lem.4.5.1 :

$$\delta_{\mathcal{L}}(\Phi) = -\frac{1}{(k-2)!}c_{\mathcal{L}}(\Phi) = -\frac{1}{(k-2)!}(c_0(\Phi)+\mathcal{L}c_\infty(\Phi)).$$

Donc, par le Lem.4.4.3 et le fait que $c_\infty(\Phi_F^\pm) = c_f^\pm \neq 0$:

$$\delta_{\mathcal{L}}(\Phi_F^\pm) = 0 \Leftrightarrow c_0(\Phi_F^\pm) + \mathcal{L}c_\infty(\Phi_F^\pm) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{L} = -\mathcal{L}^\pm(f). \tag{33}$$

Si $k>2$, par le (i) de la Prop.4.3.2, le terme de gauche dans la suite exacte (31) est nul d'où la première injection et il est clair que $\Phi_F^\pm \in \mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(k,\mathcal{L}))$ si et seulement si $\mathcal{L} = -\mathcal{L}^\pm(f)$ par (33). Si $k=2$, (31) induit une autre suite exacte longue avec partout des f en exposant et on utilise le Cor.4.3.3, le (i) de la Prop.4.4.2 et encore (33) (noter que $\mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, E)$ est un E-espace vectoriel de dimension finie, de même que $\mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(2))^f$, et que si $0 \to V_1 \to V_2 \to V_3 \to 0$ est une suite exacte de E-espaces vectoriels de dimension finie sur laquelle agissent les opérateurs de Hecke avec $V_1^f = 0$, alors $V_2^f \xrightarrow{\sim} V_3^f$). □

Pour tout $\mathcal{O}_E$-module M muni d'une action de T_ℓ, S_ℓ et w_∞, on note $M^{f,\pm} \overset{\text{déf}}{=} \{x \in M^f \mid w_\infty x = \pm x\}$.

Corollaire 4.5.3. — *Soit $\mathcal{L} \in E$.*
(i) Si $\mathcal{L} \neq -\mathcal{L}^\pm(f)$, on a $\mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(k,\mathcal{L}))^{f,\pm} = 0$.
(ii) Si $\mathcal{L} = -\mathcal{L}^\pm(f)$, on a des isomorphismes :

$$\mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(k,\mathcal{L}))^{f,\pm} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(k))^{f,\pm} = E\Phi_F^\pm.$$

On va voir dans la suite que l'on a $\mathcal{L}^+(f) = \mathcal{L}^-(f)$.

5. Applications

On rassemble les énoncés du §2, du §3 et du §4, dont on conserve les notations, pour démontrer la Prop.1.1.5, le Cor.1.1.6, le Th.1.1.2 et le Cor.1.1.7 de l'introduction (Prop.5.1.1, Th.5.1.6, Th.5.1.7 et Cor.5.2.5 ci-dessous).

5.1. Applications à la cohomologie étale complétée. — On montre les principaux résultats de l'introduction.

On fixe une forme modulaire f comme au §4.2. On a alors :

$$\pi_p(f) = \mathrm{St} \otimes \mathrm{nr}(a_p^{-1})$$

où $\mathrm{nr}(\lambda)$ désigne le caractère non ramifié de $\mathbb{Q}_p^\times$ qui envoie p sur λ.

Proposition 5.1.1. — *(i) On a :*

$$\mathrm{Hom}_{\widetilde{\Gamma}_1^p(N)}\big(D_0, O(k) \otimes \mathrm{nr}(p^{-\frac{k-2}{2}} a_p)\big)^f = \mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(k))^f.$$

(ii) Soit $\mathcal{L} \in E$, on a :

$$\mathrm{Hom}_{\widetilde{\Gamma}_1^p(N)}\big(D_0, O(k,\mathcal{L}) \otimes \mathrm{nr}(p^{-\frac{k-2}{2}} a_p)\big)^f = \mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(k,\mathcal{L}))^f.$$

Démonstration. — Comme W_p normalise $\Gamma_1^p(N)$ dans $\widetilde{\Gamma}_1^p(N)$, il suffit de montrer (i) par le Cor.4.5.3. Il suffit pour cela de voir que tout $\Phi \in \mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(k))^f$ est automatiquement invariant par W_p à condition de tordre $O(k)$ par le caractère non ramifié $\mathrm{nr}(p^{-\frac{k-2}{2}} a_p)$. Par le Cor.4.3.3, il suffit donc de montrer $W_p(\Phi_F^\pm) = p^{\frac{k-2}{2}} a_p^{-1} \Phi_F^\pm$. Par le (ii) de la Prop.4.3.2 et le Cor.4.2.2, il suffit de faire de même avec $\phi_F^\pm$. On calcule à partir de (24) :

$$\begin{aligned}
W_p(\Phi_F^\pm)(\{r_2\}-\{r_1\})(T^j \otimes [\alpha]) &= \Phi_F^\pm(\{W_p^{-1}r_2\}-\{W_p^{-1}r_1\})(W_p^{-1}(T^j) \otimes [W_p^{-1}\alpha]) \\
&= p^{-\frac{k-2}{2}}\Big(\int_{W_p^{-1}r_1}^{W_p^{-1}r_2} F(W_p^{-1}\alpha, z)\frac{(W_pz)^j dz}{(pNwz+pt)^{2-k}}\Big)^\pm \\
&= p^{\frac{k-2}{2}} a_p^{-1}\Big(\int_{W_p^{-1}r_1}^{W_p^{-1}r_2} F(\alpha, W_pz)(W_pz)^j d(W_pz)\Big)^\pm \\
&= p^{\frac{k-2}{2}} a_p^{-1}\Big(\int_{r_1}^{r_2} F(\alpha, z) z^j dz\Big)^\pm \\
&= p^{\frac{k-2}{2}} a_p^{-1}\Phi_F^\pm(\{r_2\}-\{r_1\})(T^j \otimes [\alpha])
\end{aligned}$$

où l'on rappelle que $W_p = \begin{pmatrix} pu & v \\ pNw & pt \end{pmatrix}$ (cf. §4.2) et où l'on a utilisé (21) sous la forme :

$$F(W_p^{-1}\alpha, z) = \frac{p^{k-1}}{a_p} F(\alpha, W_pz)(pNwz+pt)^{-k}.$$

□

Dans la suite, on pose $\lambda \overset{\text{déf}}{=} p^{\frac{k-2}{2}} a_p^{-1}$.

Corollaire 5.1.2. — *(i) On a un isomorphisme :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(B(k) \otimes \mathrm{nr}(\lambda), \widehat{H}^1_c(K_1^p(N)) \otimes E\big)^f \quad \simeq \quad \mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(k))^f.$$

(ii) Soit $\mathcal{L} \in E$, on a des isomorphismes :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(B(k,\mathcal{L}) \otimes \mathrm{nr}(\lambda), \widehat{H}^1_c(K_1^p(N)) \otimes E\big)^f \quad \simeq \quad \mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(k,\mathcal{L}))^f.$$

Démonstration. — Il suffit de combiner la Prop.5.1.1 et le Th.2.4.2. □

Corollaire 5.1.3. — *On a $\mathcal{L}^+(f) = \mathcal{L}^-(f)$.*

Démonstration. — Si $\mathcal{L}^+(f) \neq \mathcal{L}^-(f)$, alors par le Cor.4.5.3, on a par exemple $\dim_E \mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(k, -\mathcal{L}^+(f)))^f = 1$ c'est-à-dire par le (ii) du Cor.5.1.2 :

$$\dim_E \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(B(k, -\mathcal{L}^+(f)) \otimes \mathrm{nr}(\lambda), (\widehat{H}^1_c(K_1^p(N)) \otimes E)^f\big) = 1.$$

Cet espace est muni d'une action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ qui agit via son action sur $(\widehat{H}^1_c(K_1^p(N)) \otimes E)^f$. Or, sur $\widehat{H}^1_c(K_1^p(N))$, donc sur l'espace ci-dessus, on a les relations d'Eichler-Shimura $\mathrm{Frob}_\ell^{-2} + T_\ell \mathrm{Frob}_\ell^{-1} + \ell S_\ell = 0$ pour $\ell \nmid Np$ où Frob_ℓ est un Frobenius arithmétique en ℓ. Comme la forme f est parabolique, on voit que l'espace ci-dessus ne peut être de dimension 1 d'où forcément $\mathcal{L}^+(f) = \mathcal{L}^-(f)$. □

On note $\widetilde{\mathcal{L}}(f) \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{L}^+(f) = \mathcal{L}^-(f)$ la valeur commune. On a en fait :

Théorème 5.1.4 ([3],[12],[13]). — *On a $\widetilde{\mathcal{L}}(f) = \mathcal{L}(f)$.*

Pour déduire ce résultat (lorsque $k > 2$) de [**12**] (et du Cor.5.2.4 ci-après), on renvoie à la preuve de [**17**],Th.7.10.1. Une autre méthode, lorsque k est pair, consiste à passer par les fonctions L. Il est montré dans [**14**],§3 pour $k = 2$, dans [**25**],§6,§7 pour $k > 2$ pair, et aussi (plus directement) dans [**16**],§5 pour tout k pair, que $\widetilde{\mathcal{L}}(f)$ mesure, à une période près, le rapport entre la dérivée en $k/2$ de la fonction L p-adique de f (convenablement tordue) et la valeur en $k/2$ de la fonction L complexe de f (idem). Or, il est montré dans [**20**] et [**32**] que ce même rapport est précisément l'invariant $\mathcal{L}(f)$ associé à f. On peut en déduire comme cela l'égalité du Th.5.1.4 pour k pair.

Comme le Th.5.1.4 est indépendant des méthodes de cet article, on conserve la valeur $\widetilde{\mathcal{L}}(f)$ dans la suite de cette partie. Du Cor.5.1.3 et du Cor.4.5.3, on déduit immédiatement :

Corollaire 5.1.5. — *Soit $\mathcal{L} \in E$.*
(i) Si $\mathcal{L} \neq -\widetilde{\mathcal{L}}(f)$, on a $\mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(k,\mathcal{L}))^f = 0$.
(ii) Si $\mathcal{L} = -\widetilde{\mathcal{L}}(f)$, on a :

$$\mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(k,\mathcal{L}))^f \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(k))^f = E\Phi_F^+ \oplus E\Phi_F^-.$$

Rappelons que $\widehat{H}^1_*$ signifie $\widehat{H}^1$ ou $\widehat{H}^1_{\mathrm{par}}$ ou $\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}$ (cf. §2.1).

Théorème 5.1.6. — *(i) Si $\mathfrak{L} \neq -\widetilde{\mathfrak{L}}(f)$, on a :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(B(k,\mathfrak{L}) \otimes \mathrm{nr}(\lambda), (\widehat{H}^1_*(K_1^p(N)) \otimes E)^f\big) = 0$$

(ii) Si $\mathfrak{L} = -\widetilde{\mathfrak{L}}(f)$, on a :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(B(k,\mathfrak{L}) \otimes \mathrm{nr}(\lambda), (\widehat{H}^1_*(K_1^p(N)) \otimes E)^f\big) \simeq \sigma(f)^\vee.$$

Démonstration. — Par le Lem.2.1.4, il suffit de démontrer le cas $* = \mathrm{c}$. Le (i) se déduit du (i) du Cor.5.1.5 et du (ii) du Cor.5.1.2. Par le (ii) du Cor.5.1.5 et le (ii) du Cor.5.1.2, on voit que la dimension (sur E) du membre de gauche dans (ii) est 2 et avec le (i) du Cor.5.1.2 qu'il est isomorphe à :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(B(k) \otimes \mathrm{nr}(\lambda), (\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(N)) \otimes E)^f\big).$$

Or, si B est un $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaire (sur E), on a une injection naturelle :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2 \otimes \mathrm{St}, B) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(B(k), B)$$

puisque $B(k)$ est la complétion unitaire “minimale” de $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2 \otimes \mathrm{St}$ (cf. §3.1) de sorte que l'espace en (ii) contient :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(\mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes \pi_p(f), (\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(N)) \otimes E)^f\big).$$

Via l'injection Ψ_E du §2.2 et en se débarrassant des $\mathrm{Sym}^{k-2}E^2$, cet espace contient :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(\pi_p(f), \varinjlim H^1_{\mathrm{c}}\big(Y(K_1^p(N)K(p^r)), (\widetilde{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2)^\vee\big)\big)$$

qui est exactement la représentation galoisienne $\sigma(f)^\vee$ puisque f est nouvelle. On conclut par un argument évident de dimensions. □

En passant aux vecteurs localement analytiques, on voit en particulier que $(\widehat{H}^1_*(K_1^p(N)) \otimes E)^f$ *contient* la représentation localement analytique $\Sigma(k, -\widetilde{\mathfrak{L}}(f))$ du §3.1 convenablement tordue.

Théorème 5.1.7. — *Soit $\mathfrak{L} \in E$.*
(i) On a $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(B(k,\mathfrak{L}) \otimes \mathrm{nr}(\lambda), \widehat{\pi}_p(f)\big) = 0$ si $\mathfrak{L} \neq -\widetilde{\mathfrak{L}}(f)$.
(ii) Si $k > 2$, on a $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(B(k, -\widetilde{\mathfrak{L}}(f)) \otimes \mathrm{nr}(\lambda), \widehat{\pi}_p(f)\big) = E$.

Démonstration. — Le (i) découle du (i) du Th.5.1.6. En notant + la partie sur laquelle la conjugaison complexe agit par l'identité, on a :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(B(k, -\widetilde{\mathfrak{L}}(f)) \otimes \mathrm{nr}(\lambda), (\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(N)) \otimes E)^{f,+}\big) = (\sigma(f)^\vee)^+ \simeq E$$

par le (ii) du Th.5.1.6. De plus, cet unique morphisme (à scalaire près) induit sur $\mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes \pi_p(f) \subset B(k, -\widetilde{\mathfrak{L}}(f)) \otimes \mathrm{nr}(\lambda)$ via Ψ_E l'unique plongement équivariant (à scalaire près) :

$$\iota : \mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes \pi_p(f) \hookrightarrow \mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes \big(\varinjlim H^1_{\mathrm{c}}\big(Y(K_1^p(N)K(p^r)), (\widetilde{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2)^\vee\big)\big)^{f,+}.$$

En définissant $\widehat{\pi}_p(f)$ via ce plongement (cf. Prop.2.2.3), on voit qu'il induit pour $k > 2$ un unique (à scalaire près) morphisme continu non nul comme en (ii) puisque, dans ce cas, $\mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes \pi_p(f)$ est dense dans $B(k, -\widetilde{\mathcal{L}}(f)) \otimes \mathrm{nr}(\lambda)$ (cf. §3.1). $\square$

Remarque 5.1.8. — Si $k = 2$, on a $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(B(2, \mathcal{L}) \otimes \mathrm{nr}(\lambda), \widehat{\pi}_p(f)\big) = 0$ pour tout $\mathcal{L} \in E$ car, dans ce cas, $\widehat{\pi}_p(f)$ est simplement à torsion près le $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaire $B(2)$.

Corollaire 5.1.9. — *L'unique (à multiplication par un scalaire non-nul près) entrelacement non nul $B(k, -\widetilde{\mathcal{L}}(f)) \otimes \mathrm{nr}(p^{\frac{k-2}{2}} a_p^{-1}) \to \widehat{\pi}_p(f)$ du Th.5.1.7 lorsque $k > 2$ est un isomorphisme topologique.*

Démonstration. — Il est clair que l'image de ce morphisme est dense dans $\widehat{\pi}_p(f)$. Comme $\widehat{\pi}_p(f)$ et $B(k, -\widetilde{\mathcal{L}}(f))$ sont admissibles (Prop.2.2.3 et [**12**],Th.5.24), ce morphisme est surjectif. Comme $B(k, -\widetilde{\mathcal{L}}(f))$ est topologiquement irréductible ([**12**],Cor.5.21), il est aussi injectif, et donc est un isomorphisme topologique. $\square$

5.2. Applications aux distributions p-adiques de Mazur, Tate et Teitelbaum.

— On montre comment, pour $k > 2$, l'invariant $\widetilde{\mathcal{L}}(f)$ précédent (qui est donc en fait égal à l'invariant $\mathcal{L}(f)$ par le Th.5.1.4) peut se voir directement sur les distributions p-adiques de Mazur, Tate et Teitelbaum associées à f dans [**22**] et convenablement prolongées de $\mathbb{Z}_p^\times$ à $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$.

On reprend la forme f du paragraphe précédent. On rappelle (Th.3.2.2) que $O(k)^{\mathrm{b}}$ est le E-espace vectoriel des distributions p-adiques tempérées d'ordre $(k-2)/2$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ avec un zéro d'ordre au moins $k-2$ à l'infini telles que $\int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} z^j \mu(z) = 0$ si $\mu \in O(k)^{\mathrm{b}}$ et $j \in \{0, \cdots, k-2\}$. On rappelle aussi les notations $D(\infty, n) \overset{\text{déf}}{=} \{z \in \mathbb{Q}_p \mid \mathrm{val}(z) \leq -n\}$ et $D(a, n) \overset{\text{déf}}{=} \{z \in \mathbb{Q}_p \mid \mathrm{val}(z - a) \geq n\}$ où $a \in \mathbb{Q}_p$ et $n \in \mathbb{Z}$. Le théorème qui suit et sa preuve sont de simples variantes de [**22**],§I.11 :

Théorème 5.2.1. — *Pour tout $c \in \mathbb{Z}$ tel que $(c, p) = 1$ et tout $\nu \in \mathbb{Z}/c\mathbb{Z}$, il existe une unique distribution $\mu^{\pm}_{f,c,\nu} \in O(k)^{\mathrm{b}}$ telle que pour tout $j \in \{0, \cdots, k-2\}$, tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $a \in \mathbb{Z}p^{\mathbb{Z}}$ tel que $\overline{a} = \nu$ dans $\mathbb{Z}/c\mathbb{Z}$:*

$$\int_{D(a,n)} z^j \mu^{\pm}_{f,c,\nu}(z) \overset{\text{déf}}{=} -\frac{1}{a_p^n}\Big(\int_{-\frac{a}{p^n c}}^{\infty} f(z)(a + p^n cz)^j dz\Big)^{\pm} \in E. \tag{34}$$

Démonstration. — Notons que $\big(\int_{-\frac{a}{p^n c}}^{\infty} f(z)(a + p^n cz)^j dz\big)^{\pm}$ dépend de a modulo $p^n c$ et donc en particulier de ν. Commençons par l'unicité de $\mu^{\pm}_{f,c,\nu}$. Soit $\mu \in O(k)^{\mathrm{b}}$ tel que $\int_{D(a,n)} z^j \mu(z) = 0$ pour $n \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{Z}p^{\mathbb{Z}}$. Pour $n \in \mathbb{Z}$ et $j \in \{0, \cdots, k-2\}$, on a aussi :

$$\int_{D(\infty,n)} z^j\mu(z) = \int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} z^j\mu(z) - \int_{D(0,-n+1)} z^j\mu(z) = 0-0=0$$

donc μ est nul contre toutes les fonctions localement polynômiales de degré (local) au plus $k-2$ de $\Sigma(k)$, c'est-à-dire $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2\otimes\mathrm{St}$ (cf. §3.1). Mais ces fonctions sont denses dans $B(k)$ d'où la nullité de μ (cf. §3.2) et l'unicité de $\mu^{\pm}_{f,c,\nu}\in O(k)^{\mathrm{b}}$. Montrons maintenant l'existence de $\mu^{\pm}_{f,c,\nu}$ et vérifions d'abord que $\mu^{\pm}_{f,c,\nu}$ est bien défini sur $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2\otimes\mathrm{St}$. Pour $n\in\mathbb{Z}$, soit a quelconque dans $\mathbb{Z}p^{\mathbb{Z}}$ tel que $\mathrm{val}(a)=-n+1$ et $\overline{a}=\nu$ dans $\mathbb{Z}/c\mathbb{Z}$ (de tels a existent), alors $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)=D(\infty,n)\amalg D(a,-n+1)$ de sorte que :

$$\int_{D(\infty,n)} z^j\mu^{\pm}_{f,c,\nu}(z) = -\int_{D(a,-n+1)} z^j\mu^{\pm}_{f,c,\nu}(z) \tag{35}$$

est bien défini pour $j\in\{0,\cdots,k-2\}$. Soit $a\in\mathbb{Z}p^{\mathbb{Z}}$ tel que $\overline{a}=\nu$ dans $\mathbb{Z}/c\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{Z}$ et $I_{a,n}\subset a+p^nc\mathbb{Z}$ un ensemble de p éléments $\{b\}$ tels que $\{b-a\}$ est un système de représentants de $p^nc\mathbb{Z}/p^{n+1}c\mathbb{Z}\simeq\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Alors $D(a,n)=\amalg_{b\in I_{a,n}}D(b,n+1)$ et un calcul immédiat utilisant :

$$\int_{\mp\frac{b}{p^{n+1}c}}^{\infty} f(z)\Big(z\pm\frac{b}{p^{n+1}c}\Big)^j dz = \frac{1}{p^{j+1}}\int_0^{\infty} f\Big(\frac{z}{p}\mp\frac{b}{p^{n+1}c}\Big)z^j dz$$

et $(T_pf)(z\mp\frac{a}{p^nc})=\frac{1}{p}\sum_{b\in I_{a,n}}f\big(\frac{z}{p}\mp\frac{b}{p^{n+1}c}\big)=a_pf(z\mp\frac{a}{p^nc})$ donne :

$$\int_{D(a,n)} z^j\mu^{\pm}_{f,c,\nu}(z) = \sum_{b\in I_{a,n}}\int_{D(b,n+1)} z^j\mu^{\pm}_{f,c,\nu}(z). \tag{36}$$

Soit $I_{\infty,n}\subset p^{-n}\mathbb{Z}$ un système de représentants de $\big(p^{-n}\mathbb{Z}/p^{-n+1}\mathbb{Z}\big)^{\times}$ dont la réduction dans $\mathbb{Z}/c\mathbb{Z}$ vaut ν, on a $D(\infty,n)=\big(\amalg_{b\in I_{\infty,n}}D(b,-n+1)\big)\amalg D(\infty,n+1)$ et le même calcul que précédemment combiné avec (35) donne encore :

$$\int_{D(\infty,n)} z^j\mu^{\pm}_{f,c,\nu}(z) = \int_{D(\infty,n+1)} z^j\mu^{\pm}_{f,c,\nu}(z) + \sum_{b\in I_{\infty,n}}\int_{D(b,-n+1)} z^j\mu^{\pm}_{f,c,\nu}(z). \tag{37}$$

Les égalités (36) et (37) assurent que $\mu^{\pm}_{f,c,\nu}$ est bien défini sur $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2\otimes\mathrm{St}\subset\Sigma(k)$. Pour savoir que $\mu^{\pm}_{f,c,\nu}$ se prolonge sur toutes les fonctions de $B(k)$, c'est-à-dire définit bien un élément de $O(k)^{\mathrm{b}}$, il suffit de montrer qu'il existe $C_{f,c,\nu}\in E$ tel que pour tout $j\in\{0,\cdots,k-2\}$, on a $\int_{D(\infty,n)}z^j\mu^{\pm}_{f,c,\nu}(z)\in C_{f,c,\nu}p^{n(\frac{k-2}{2}-j)}\mathcal{O}_E$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$ et $\int_{D(a,n)}(z-a)^j\mu^{\pm}_{f,c,\nu}(z)\in C_{f,c,\nu}p^{n(j-\frac{k-2}{2})}\mathcal{O}_E$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$ et tout $a\in\mathbb{Z}p^{\mathbb{Z}}$ (cf. §3.2). Cela résulte facilement de (34), du §4.1, de (35) et du fait que $\mathrm{val}(a_p)=\frac{k-2}{2}$ (cf. (18)). □

Il y a des relations dans $O(k)^{\mathrm{b}}$ entre les $\mu^{\pm}_{f,c,\nu}$, cf. Cor.5.2.3 ci-dessous.

Le résultat suivant, essentiellement dû à Darmon ($k=2$) et Orton ($k>2$, cf. [**25**],§6.3) mais dont on redonne une preuve, montre que l'on peut retrouver les distributions $\mu^{\pm}_{f,c,\nu}$ par une “spécialisation” convenable des symboles modulaires $\Phi^{\pm}_F \in \mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(k)^{\mathrm{b}})$ du §4.3 :

Proposition 5.2.2. — *Pour $c \in \mathbb{Z}$ tel que $(c,p)=1$ et pour $\nu \in \mathbb{Z}/c\mathbb{Z}$, on a dans $O(k)^{\mathrm{b}}$:*

$$\begin{pmatrix} c & \nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Big(\Phi^{\pm}_F\big(\{\infty\}-\{-\frac{\nu}{c}\}\big)\Big) = -\frac{1}{c^{k-2}}\mu^{\pm}_{f,c,\nu}$$

où l'on désigne encore par ν un relevé quelconque de ν dans $\mathbb{Z}$.

Démonstration. — Il suffit de montrer que $\begin{pmatrix} c & \nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\big(\phi^{\pm}_F(\{\infty\}-\{-\frac{\nu}{c}\})\big)$ coïncide avec $-\frac{1}{c^{k-2}}\mu^{\pm}_{f,c,\nu}$ sur $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2 \otimes_E \mathrm{St}$. Comme les deux distributions sont par construction nulles sur les polynômes de degré au plus $k-2$, on peut oublier le point à l'infini et se limiter à l'image dans $\Sigma(k)$ des fonctions de $C(k)$ de la forme $z^j\mathbf{1}_{D(a,n)}$ où $j\in\{0,\cdots,k-2\}$, $n\in\mathbb{Z}$, $a\in\mathbb{Z}p^{\mathbb{Z}}$ tel que $a\equiv \nu\ (c)$ et $\mathbf{1}_{D(a,n)}$ est la fonction caractéristique de $D(a,n)$. On laisse au lecteur le soin de vérifier que, par l'application $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2\otimes_E E[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)/\mathrm{I}(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^{\times}] \twoheadrightarrow \underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2\otimes_E \mathrm{St} \hookrightarrow \Sigma(k)$, $T^j\otimes[\alpha_0]\mapsto z^j\mathbf{1}_{D(0,0)}$ et $T^j\otimes\begin{pmatrix} p^n & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}[\alpha_0]\mapsto z^j\mathbf{1}_{D(a,n)}$. Supposons d'abord n impair. On a par (24) :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} c & \nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Big(\Phi^{\pm}_F\big(\{\infty\}-\{-\frac{\nu}{c}\}\big)\Big)\Big(T^j\otimes\begin{pmatrix} p^n & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}[\alpha_0]\Big) &= \\ \phi^{\pm}_F\big(\{\infty\}-\{-\frac{\nu}{c}\}\big)\Big(\begin{pmatrix} c & \nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}(T^j)\otimes\begin{pmatrix} c & \nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} p^n & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}[\alpha_0]\Big)& \\ =\frac{1}{c^{k-2}}\Big(\int_{-\frac{\nu}{c}}^{\infty}F(\alpha,z)(cz+\nu)^j dz\Big)^{\pm}&\end{aligned}$$

où :

$$\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} c & \nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} p^n & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\alpha_0 = \begin{pmatrix} p^n & \frac{a-\nu}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\alpha_0 = p^{-\frac{n+1}{2}}\begin{pmatrix} p^n & \frac{a-\nu}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}W_p\overline{\alpha}_0.$$

Les propriétés (20) et (ii) de F donnent :

$$F(\alpha,z) = -\frac{\chi(p)^{-\frac{n+1}{2}}\chi(p)p^{-\frac{k(n+1)}{2}}}{(-Nwz'+u)^k}F(\alpha_0,W_p^{-1}z') = -\chi(p)^{\frac{1-n}{2}}\frac{p^{k-1}}{p^{\frac{k(n+1)}{2}}}(f|_{W_p^{-1}})(z')$$

où $z' = \begin{pmatrix} p^n & \frac{a-\nu}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} z$ (noter que l'on utilise *ici* $a\equiv\nu\ (c)$). L'intégrale précédente vaut donc en utilisant (19) et (18) :

$$\frac{\chi(p)^{-\frac{1-n}{2}}p^{k-1}}{p^{\frac{k(n+1)}{2}}c^{k-2}a_p}\Big(\int_{-\frac{\nu}{c}}^{\infty}f(z')(cz+\nu)^j dz\Big)^{\pm} = \frac{p^{-n}}{c^{k-2}a_p^n}\Big(\int_{-\frac{\nu}{c}}^{\infty}f(z')(cz+\nu)^j dz\Big)^{\pm}.$$

On vérifie enfin par un changement de variables l'égalité :

$$\int_{-\frac{\nu}{c}}^{\infty} f(z')(cz+\nu)^j dz = p^n \int_{-\frac{a}{p^n c}}^{\infty} f(z)(a+p^n cz)^j dz$$

d'où la même égalité avec $\pm$ ce qui achève la preuve pour n impair au vu de (34). Pour n pair, l'introduction de W_p et l'usage de la formule (19) sont inutiles : on a un calcul analogue plus simple que l'on laisse au lecteur. $\square$

Corollaire 5.2.3. — *Soit $(c,c') \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ tel que $(c,p) = (c',p) = 1$ et $(\nu,\nu') \in \mathbb{Z}/c\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/c'\mathbb{Z}$ tel qu'il existe des relevés encore notés ν et ν' dans $\mathbb{Z}$ vérifiant $\nu/c = \nu'/c'$, alors dans $O(k)^{\mathrm{b}}$:*

$$\mu^{\pm}_{f,c,\nu} = \frac{c^{k-2}}{c'^{k-2}} \begin{pmatrix} \frac{c}{c'} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (\mu^{\pm}_{f,c',\nu'}).$$

Des résultats du §5.1, on déduit alors :

Corollaire 5.2.4. — *Supposons $k > 2$. Il existe un unique $\mathfrak{L} = -\widetilde{\mathfrak{L}}(f) \in E$ tel que, pour tout $c \in \mathbb{Z}$ tel que $(c,p) = 1$ et tout $\nu \in \mathbb{Z}/c\mathbb{Z}$, on a $\mu^{\pm}_{f,c,\nu} \in O(k,\mathfrak{L})^{\mathrm{b}} \subset O(k)^{\mathrm{b}}$.*

Démonstration. — Par le (ii) du Cor.5.1.5, le (iii) de la Prop.4.3.2 et la Prop.5.2.2, on a $\mu^{\pm}_{f,c,\nu} \in O(k,-\widetilde{\mathfrak{L}}(f))^{\mathrm{b}} \subset O(k)^{\mathrm{b}}$ pour tout $c \in \mathbb{Z}$ tel que $(c,p) = 1$ et tout $\nu \in \mathbb{Z}/c\mathbb{Z}$. Inversement, supposons $\mu^{\pm}_{f,c,\nu} \in O(k,\mathfrak{L})^{\mathrm{b}}$ pour tout c,ν. Soit $r \in \mathbb{Q}$, il est facile de trouver $\gamma \in \Gamma_1^p(N)$ et c,ν avec $(c,p) = 1$ tels que $\gamma(\{\infty\} - \{-\frac{\nu}{c}\}) = \{\infty\} - \{r\}$, d'où $\Phi^{\pm}_F(\{\infty\} - \{r\}) \in O(k,\mathfrak{L})^{\mathrm{b}}$ par la Prop.5.2.2 puisque $\Phi^{\pm}_F$ commute à $\Gamma_1^p(N)$. Donc $\Phi^{\pm}_F \in \mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(k,\mathfrak{L})^{\mathrm{b}})$ et $\mathfrak{L} = -\widetilde{\mathfrak{L}}(f)$ par le Cor.5.1.5. $\square$

Par le Th.3.3.3, on en déduit finalement :

Corollaire 5.2.5. — *Supposons $k > 2$ et soit E une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$ contenant E_f et $p^{k/2}$. Alors il existe un unique $\mathfrak{L} = -\widetilde{\mathfrak{L}}(f) \in E$ tel que, pour tout $c \in \mathbb{Z}$ tel que $(c,p) = 1$ et tout $\nu \in \mathbb{Z}/c\mathbb{Z}$, on a :*

$$\int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} h(z)\mu^{\pm}_{f,c,\nu}(z) = 0$$

pour toute fonction $h : \mathbb{Q}_p \to E$ de la forme :

$$h(z) = \sum_{i\in I} \lambda_i (z-z_i)^{n_i} \log_{\mathfrak{L}}(z-z_i)$$

où I est un ensemble fini, $\lambda_i \in E$, $z_i \in \mathbb{Q}_p$, $n_i \in \{\lfloor\frac{k-2}{2}\rfloor + 1, \ldots, k-2\}$ et $\deg\big(\sum_{i\in I} \lambda_i (z-z_i)^{n_i}\big) < \frac{k-2}{2}$.

Références

[1] Atkin O., Li W., *Twists of newforms and pseudo-eigenvalues of W-operators*, Inv. math. 48, 1978, 221-243.

[2] Ash A., Stevens G., *Modular forms in characteristic ℓ and special values of their L-functions*, Duke Math. J. 53, 1986, 849-868.

[3] Bertolini M., Darmon H., Iovita A., *Families of automorphic forms on definite quaternion algebras and Teitelbaum's conjecture*, ce volume.

[4] Breuil C., *Invariant $\mathcal{L}$ et série spéciale p-adique*, Ann. Scient. E.N.S. 37, 2004, 559-610.

[5] Breuil C., Berger L., *Sur quelques représentations potentiellement cristallines de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, à paraître à Astérisque.

[6] Breuil C., Emerton M., *Représentations p-adiques ordinaires de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *et compatibilité local-global*, ce volume.

[7] Breuil C., Mézard A., *Représentations semi-stables de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$*, demi-plan p-adique et réduction modulo p*, ce volume.

[8] Carayol H., *Sur les représentations ℓ-adiques associées aux formes modulaires de Hilbert*, Ann. Scient. E.N.S. 19, 1986, 409-468.

[9] Coleman R., Iovita A., *Hidden structures on semi-stable curves*, ce volume.

[10] Colmez P., *Invariants $\mathcal{L}$ et dérivées de valeurs propres de Frobenius*, ce volume.

[11] Colmez P., *Fonctions d'une variable p-adique*, à paraître à Astérisque.

[12] Colmez P., *Une correspondance de Langlands locale p-adique pour les représentations semi-stables de dimension* 2, prépublication 2004.

[13] Colmez P., *La série principale unitaire de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, à paraître à Astérisque.

[14] Darmon H., *Integration on $\mathcal{H}_p \times \mathcal{H}$ and arithmetic applications*, Annals of Maths 154, 2001, 589-639.

[15] Emerton M., *On the interpolation of systems of eigenvalues attached to automorphic Hecke eigenforms*, Inv. Math. 164, 2006, 1-84.

[16] Emerton M., *p-adic L-functions and unitary completions of representations of p-adic groups*, Duke Math. J. 130, 2005, 353-392.

[17] Emerton M., *A local-global compatibility in the p-adic Langlands programme for* $\mathrm{GL}_{2/\mathbb{Q}}$, Pure and Applied Math. Quarterly 2, 2006, 279-393.

[18] Emerton M., *Local-global compatibility in the p-adic Langlands program for* $\mathrm{GL}_{2/\mathbb{Q}}$, en préparation.

[19] Grosse-Klönne E., *Integral structures in automorphic line bundles on the p-adic upper half plane*, Math. Annalen. 329, 2004, 463-493.

[20] Greenberg R., Stevens G., *On the conjecture of Mazur, Tate and Teitelbaum*, Contemporary Math. 165, 1994, 183-211.

[21] Iovita A., Spiess M., *Derivatives of p-adic L-functions, Heegner cycles and monodromy modules attached to modular forms*, Inv. Math. 154, 2003, 333-384.

[22] Mazur B., Tate J., Teitelbaum J., *On p-adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer*, Inv. Math. 84, 1986, 1-48.

[23] Merel L., *Opérateurs de Hecke pour* $\Gamma_0(N)$ *et fractions continues*, Ann. Inst. Fourier 41, 1991, 519-537.

[24] Ohta M., *On cohomology groups attached to towers of algebraic curves*, J. Math. Soc. Japan 45, 1993, 131-183.

[25] Orton L., *An elementary proof of a weak exceptional zero conjecture*, Canad. J. Math. 56, 2004, 373-405.

[26] Schneider P., *Nonarchimedean Functional Analysis*, Springer-Verlag, 2001.

[27] Schneider P., Teitelbaum J., *Locally analytic distributions and p-adic representation theory, with applications to* GL_2, J. Amer. Math. Soc. 15, 2002, 443-468.

[28] Schneider P., Teitelbaum J., *Banach space representations and Iwasawa theory*, Israel J. Math. 127, 2002, 359-380.

[29] Serre J.-P., *Arbres, amalgames,* SL_2, Astérisque 46, Soc. Math. de France, 1977.

[30] Shimura G., *On the period of modular forms*, Math. Ann. 229, 1977, 211-221.

[31] Šokurov V., *Shimura integral of cusps forms*, Math. USSR Izv. 16, 1981, 603-646.

[32] Stevens G., *Coleman's* $\mathcal{L}$*-invariant and families of modular forms*, ce volume.

[33] Teitelbaum J., *Values of p-adic L-functions and a p-adic Poisson kernel*, Inv. math. 101, 1990, 395-410.

[34] Teitelbaum J., *Modular representations of* PGL_2 *and automorphic forms for Shimura curves*, Inv. math. 113, 1993, 561-580.

C. Breuil, C.N.R.S. & I.H.É.S., Le Bois-Marie, 35 route de Chartres, 91440 Bures-sur-Yvette, France • *E-mail :* breuil@ihes.fr