SUR UN PROBLÈME DE COMPATIBILITÉ LOCAL-GLOBAL MODULO p POUR GL_2

par

Christophe Breuil

avec un appendice par Lassina Dembélé

> « *Il tenente Simeoni aveva fatto un preventivo, aveva detto sei mesi. Ma sei mesi non sono bastati per la costruzione, né sei mesi, né otto, né dieci. (...) Quindici anni ci sono voluti, quindici lunghissimi anni che pure sono corsi via come un sogno.* »
>
> — Dino Buzzati, *Il deserto dei Tartari.*

Résumé. — Soit L une extension finie non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$. On s'intéresse au problème de savoir si certaines des représentations de $\mathrm{GL}_2(L)$ sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ associées dans [**11**] à une représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)$ de dimension 2 sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ générique peuvent apparaître dans des espaces de formes automorphes.

Table des matières

1. Introduction

Dans [**12**], Buzzard, Diamond et Jarvis formulent une conjecture de modularité étendant la conjecture de Serre de [**38**] au cas des représentations continues, irréductibles, totalement impaires $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}_p})$ où F est un corps de nombres totalement réel et p un nombre premier non ramifié dans F (cette hypothèse de non ramification est supprimée dans [**35**]). La conjecture, dans une de ses versions « faibles », stipule par exemple que le système de valeurs propres de Hecke issu des traces des éléments de Frobenius aux places où $\overline{\rho}$ est non ramifiée apparaît dans un espace de formes quaternioniques :

$$S^D(U,\overline{\mathbb{F}_p}) \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Fonctions}\big(D^\times\backslash(D\otimes_F \mathbb{A}_F^f)^\times/U,\overline{\mathbb{F}_p}\big) \tag{1}$$

pour un corps de quaternions D convenable de centre F ramifié aux places infinies et non ramifié aux places divisant p et un sous-groupe ouvert compact $U=\prod_\nu U_\nu$ de $(D\otimes_F\mathbb{A}_F^f)^\times$ ($\mathbb{A}_F^f$ désignant les adèles finis). Si $\prod_{\nu|p}U_\nu$ est pris normal dans $\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_F\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_p)$, ce dernier groupe agit non trivialement par translation à droite sur l'espace de fonctions (1). L'essentiel du travail de [**12**] consiste à formuler une version « forte » de la conjecture, ce qui revient à déterminer les représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_F\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_p)$ sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ qui apparaissent en *sous-objet* dans l'espace propre de Hecke $S^D(U,\overline{\mathbb{F}_p})[\overline{\rho}^\vee]$ ci-dessus (supposé non nul). Plus précisément, dans [**12**, Conj.4.7], d'une part il est conjecturé un isomorphisme :

$$\varinjlim_U \big(S^D(U,\overline{\mathbb{F}_p})[\overline{\rho}^\vee]\big) \simeq \otimes'_\nu \pi_\nu^D(\overline{\rho}^\vee) \tag{2}$$

où $\pi_\nu^D(\overline{\rho}^\vee)$ est une représentation lisse admissible de $(D\otimes_F F_\nu)^\times$ sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ (F_ν est le complété de F en ν) qui, lorsque $\nu\nmid p$, se déduit des travaux de Vignéras et Emerton ; d'autre part il est prédit la liste des représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{F_\nu})$ (mais sans leur multiplicité) apparaissant en sous-objet dans la $\mathrm{GL}_2(F_\nu)$-représentation $\pi_\nu^D(\overline{\rho}^\vee)$ lorsque $\nu|p$. Sous une hypothèse supplémentaire sur $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F_\nu)}$ (pour $\nu|p$) appelée « généricité » (voir §4, cela implique en particulier $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F_\nu)}$ Fontaine-Laffaille), il est communément admis que l'on peut rajouter à [**12**, Conj.4.7] le *bonus* que toutes les multiplicités des représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{F_\nu})$ apparaissant dans le socle de $\pi_\nu^D(\overline{\rho}^\vee)|_{\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{F_\nu})}$ sont égales à 1. Lorsque $F=\mathbb{Q}$, la conjecture [**12**, Conj.4.7] avec son bonus (plus précisément sa variante avec $\mathrm{GL}_2/\mathbb{Q}$ au lieu de $D/\mathbb{Q}$) a été (essentiellement) démontrée par Emerton ([**21**]) en utilisant les résultats du programme de Langlands p-adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ ([**16**], [**28**]) mais cette conjecture reste encore ouverte si $F\neq\mathbb{Q}$ malgré des progrès récents ([**24**], [**25**] pour p totalement ramifié dans F, [**26**] pour les groupes unitaires, voir aussi les travaux à venir de Gee-Kisin et Newton).

Lorsque $F_\nu\neq\mathbb{Q}_p$, la $\mathrm{GL}_2(F_\nu)$-représentation $\pi_\nu^D(\overline{\rho}^\vee)$ attendue dans (2) pour $\nu|p$ reste extrêmement mal comprise, même conjecturalement. En effet, connaître le $\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{F_\nu})$-socle de $\pi_\nu^D(\overline{\rho}^\vee)$ est *très loin* de suffire pour déterminer une unique représentation lisse admissible de longueur finie (ou irréductible) de $\mathrm{GL}_2(F_\nu)$.

Par ailleurs, les résultats de [**11**], [**27**] et [**36**] montrent que, dès que $F_\nu \neq \mathbb{Q}_p$, l'étude des représentations lisses admissibles irréductibles de $\mathrm{GL}_2(F_\nu)$ sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ devient très subtile. Le but de cet article est d'aller « un cran plus loin » que [**12**] dans la compréhension de $\pi_\nu^D(\overline{\rho}^\vee)$ sous l'hypothèse additionnelle que $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F_\nu)}$ est générique. En particulier, on conjecture que $\pi_\nu^D(\overline{\rho}^\vee)$ contient toujours une des représentations de $\mathrm{GL}_2(F_\nu)$ associées à $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F_\nu)}$ dans [**11**] (ce qui rentre dans le cadre de la « compatibilité local-global ») et, en supposant vraie [**12**, Conj.4.7] avec son bonus, on montre quelques cas partiels de cette conjecture de compatibilité local-global. Notre approche est de relier cette conjecture à un problème de nature un peu différente à première vue : celui de la compatibilité local-global pour les $\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{F_\nu})$-*types* (au sens de Bushnell-Kutzko) sur $\overline{\mathbb{Z}_p}$ plutôt que pour les $\mathrm{GL}_2(F_\nu)$-représentations sur $\overline{\mathbb{F}_p}$.

Rentrons plus en détail dans les énoncés de cet article.

(i) Compatibilité local-global pour les représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{F_\nu})$ *sur* $\overline{\mathbb{Z}_p}$

Soit $\pi = \otimes'_\nu \pi_\nu$ une composante irréductible de dimension infinie de $\varinjlim_U S^D(U, \overline{\mathbb{Q}_p})$ (avec des notations évidentes) et notons $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}_p})$ la représentation p-adique associée à π (convenablement normalisée, cf. §3) que l'on suppose absolument irréductible modulo p. En particulier, ρ admet à homothétie près un unique $\overline{\mathbb{Z}_p}$-réseau stable dont on note $\overline{\rho}$ la réduction dans $\overline{\mathbb{F}_p}$. Supposons qu'il existe $\nu|p$ tel que d'une part π_ν soit une série principale modérément ramifiée qui n'est pas non ramifiée et d'autre part $\overline{\rho}_\nu \overset{\text{déf}}{=} \overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F_\nu)}$ soit générique. Soit :

$$\sigma_\nu = \left(\mathrm{ind}_{I_\nu}^{\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{F_\nu})} \eta'_\nu \otimes \eta_\nu\right) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{Q}_p} \subset \pi_\nu \tag{3}$$

le type de Bushnell-Kutzko dans π_ν[1] (cf. l'appendice de Henniart dans [**9**]) où $\eta_\nu, \eta'_\nu : \mathscr{O}_{F_\nu}^\times \to \overline{\mathbb{Z}_p}^\times$ sont des caractères distincts se factorisant par $(\mathscr{O}_{F_\nu}/(p))^\times$. Notons $\overline{\eta}_\nu, \overline{\eta}'_\nu$ la réduction de ces caractères dans $\overline{\mathbb{F}_p}^\times$ et $f_\nu \overset{\text{déf}}{=} [F_\nu : \mathbb{Q}_p]$, la représentation $\mathrm{ind}_{I_\nu}^{\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{F_\nu})} \overline{\eta}'_\nu \otimes \overline{\eta}_\nu$ a génériquement 2^{f_ν} facteurs de Jordan-Hölder $\overline{\sigma}_J$ indexés par les parties[2] J de l'ensemble des plongements $\mathscr{S}$ de F_ν dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$. La $\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{F_\nu})$-représentation σ_ν possède donc beaucoup de $\overline{\mathbb{Z}_p}$-réseaux stables et, fixant un plongement $\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{F_\nu})$-équivariant $\sigma_\nu \hookrightarrow \pi$, on peut se demander quel est le $\overline{\mathbb{Z}_p}$-réseau induit par $\varinjlim_U S^D(U, \overline{\mathbb{Z}_p})$ sur σ_ν (on peut d'ailleurs se le demander pour n'importe quel type de Bushnell-Kutzko).

---

(1) Dans le corps du texte, $\eta'_\nu \otimes \eta_\nu$ est noté χ_ν^s et σ_ν est noté $\sigma(\chi_\nu^s)$.

(2) En général, il faut considérer un sous-ensemble, noté $\mathscr{P}_{\chi_\nu}$ dans le texte, de cet ensemble de parties, mais qui lui est égal génériquement.

Soit $\overline{\mathrm{inj}}_J$ l'enveloppe injective de $\overline{\sigma}_J$ dans la catégorie des représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{F_\nu}/(p))$ sur un $\overline{\mathbb{F}_p}$-espace vectoriel de dimension finie. Il existe à isomorphisme près une unique représentation inj_J de $\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{F_\nu}/(p))$ sur un $\overline{\mathbb{Z}_p}$-module libre de rang fini tel que $\mathrm{inj}_J \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{F}_p} \simeq \overline{\mathrm{inj}}_J$ ([**37**]). Soit ϕ_ν l'unique élément de σ_ν en (3) à support dans I_ν et envoyant la matrice identité sur 1, alors, pour chaque partie J de $\mathscr{S}$, il existe par [**37**] une injection équivariante unique (à multiplication près par un élément de $\overline{\mathbb{Z}_p}^\times$) :

$$\psi_J : \sigma_\nu \hookrightarrow \mathrm{inj}_J \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{Q}_p}$$

telle que $\psi_J(\phi_\nu) \in \mathrm{inj}_J$ et l'image de $\psi_J(\phi_\nu)$ dans $\overline{\mathrm{inj}}_J$ est non nulle. Soit $(v_J)_J$ des éléments de $\mathbb{Q}_{\geq 0}$, on note :

$$\sigma_\nu^0((v_J)_J) \overset{\text{déf}}{=} \bigcap_J \psi_J^{-1}\big(p^{v_J}\,\mathrm{inj}_J\big)$$

où $p^{v_J} \in \overline{\mathbb{Z}_p}$ est un élément quelconque de valuation v_J. Il s'agit d'un $\overline{\mathbb{Z}_p}$-réseau de σ_ν stable par $\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{F_\nu})$.

Théorème 1.1. — *Soit $\mathscr{V}$ l'ensemble des uplets $(v_J)_J$ de $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ vérifiant $v_\emptyset = 0$ et $0 \leq v_{J'} - v_J \leq |J'\backslash J|$ si $J \subseteq J'$. Alors l'application $(v_J)_J \mapsto \sigma_\nu^0((v_J)_J)$ induit une bijection entre $\mathscr{V}$ et l'ensemble des classes d'homothéties de réseaux stables par $\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{F_\nu})$ sur σ_ν.*

Dans le texte, on démontre ce théorème en calculant directement et explicitement les réseaux stables sur σ_ν (sans passer par les ψ_J), cf. §2.

Pour ν comme en (3), la représentation $\rho_\nu \overset{\text{déf}}{=} \rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F_\nu)}$ (ou plutôt le réseau induit sur cette représentation par l'unique réseau stable de ρ) et son dual de Cartier $\rho_\nu^\vee(1)$ (ibid.) deviennent Barsotti-Tate sur l'extension $F_\nu[\sqrt[q_\nu-1]{-p}]$ où $q_\nu \overset{\text{déf}}{=} p^{f_\nu}$. Un choix de plongement $F_\nu \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ permet d'identifier $\mathscr{S}$ à $\{0,\cdots,f_\nu-1\}$ en composant ce choix avec les puissances du Frobenius absolu. Le module de Dieudonné contravariant de la fibre spéciale du groupe p-divisible sur $\mathscr{O}_{F_\nu}[\sqrt[q_\nu-1]{-p}]$ dont la fibre générique est $\rho_\nu^\vee(1)$ est alors de la forme $M^0 \times M^1 \times \cdots \times M^{f_\nu-1}$ avec $M^j = \overline{\mathbb{Z}_p}e^j_{\eta_\nu} \oplus \overline{\mathbb{Z}_p}e^j_{\eta'_\nu}$ où $\mathrm{Gal}(F_\nu[\sqrt[q_\nu-1]{-p}]/F_\nu)$ agit sur $e^j_{\eta_\nu}$ (resp. $e^j_{\eta'_\nu}$) par le caractère η_ν (resp. η'_ν) et où le Frobenius φ envoie M^j sur M^{j+1}. En particulier, pour tout j on a $\varphi(e^j_{\eta_\nu}) = x_j e^{j+1}_{\eta_\nu}$ avec $0 \neq x_j \in \overline{\mathbb{Z}_p}$ et $v_j \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{val}(x_{f_\nu-1-j}) \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ est bien défini.

Conjecture 1.2. — *Les $\overline{\mathbb{Z}_p}$-réseaux induits par $\varinjlim_U S^D(U,\overline{\mathbb{Z}_p})$ sur σ_ν en (3) via les divers plongements $\sigma_\nu \hookrightarrow \pi \subset \varinjlim_U S^D(U,\overline{\mathbb{Q}_p})$ sont tous homothétiques au réseau $\sigma_\nu^0\big((\sum_{j\in J} v_j)_J\big)$*[(3)].

Cette conjecture prédit les réseaux sur le type $\sigma_\nu \subset \pi_\nu$ en termes de données provenant du réseau sur la représentation p-adique ρ_ν (les f_ν nombres rationnels v_j), elle entre donc dans le cadre du « programme de Langlands p-adique », la correspondance de Langlands classique ([**31**], [**29**]) prédisant dans ce contexte *seulement* le rationnel $\sum_{j\in\mathscr{S}} v_j$ (valuation de la valeur propre de φ^{f_ν}).

Notons $\mathscr{D}(\overline{\rho}_\nu)$ l'ensemble des représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{F_\nu})$ sur $\overline{\mathbb{F}_p}$, ou de manière équivalente de $\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{F_\nu}/(p))$ sur $\overline{\mathbb{F}_p}$, associé à $\overline{\rho}_\nu$ dans [**12**] (voir §4, ces représentations sont appelées poids de Serre de $\overline{\rho}_\nu$). Le résultat suivant montre que $\sigma_\nu^0\big((\sum_{j\in J} v_j)_J\big)$ est un candidat raisonnable pour être le réseau induit sur σ_ν par $\varinjlim S^D(U,\overline{\mathbb{Z}_p})$ (voir théorème 8.5).

Théorème 1.3. — *Le socle de la réduction $\overline{\sigma}_\nu^0\big((\sum_{j\in J} v_j)_J\big)$ de $\sigma_\nu^0\big((\sum_{j\in J} v_j)_J\big)$ sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ est la somme directe de tous les constituants de $\overline{\sigma}_\nu^0\big((\sum_{j\in J} v_j)_J\big)$ qui sont des poids de Serre de $\overline{\rho}_\nu$.*

On montre dans cet article le résultat très partiel suivant sur la conjecture 1.2.

Théorème 1.4. — *Supposons qu'il y a un ou deux constituants du semi-simplifié modulo p de σ_ν dans $\mathscr{D}(\overline{\rho}_\nu)$ et supposons soit que σ_ν est « suffisamment générique » (voir le (i) du théorème 10.3 pour la condition précise) soit que* [**12**, Conj.4.7] *est vraie pour $\overline{\rho}$, alors la conjecture 1.2 est vraie.*

On peut montrer qu'il y a toujours *au moins* un constituant du semi-simplifié modulo p de σ_ν (ou de manière équivalente de $\mathrm{ind}_{I_\nu}^{\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{F_\nu})}\overline{\eta}'_\nu \otimes \overline{\eta}_\nu$) dans $\mathscr{D}(\overline{\rho}_\nu)$, cf. corollaire 8.2. Lorsqu'il y en a exactement un et que $\overline{\rho}_\nu$ est semi-simple, le théorème 1.4 résulte d'une analyse poussée des calculs et résultats de Gee ([**24**]). C'est d'ailleurs cette analyse, et la description élégante ci-dessus du réseau induit sur σ_ν en terme du module de Dieudonné de $\rho_\nu^\vee(1)$ qui en a résulté, qui ont suggéré à l'auteur que cette description devait être valable dans tous les cas. La preuve du théorème 1.4 utilise d'une part une étude fine de la position dans $\mathrm{ind}_{I_\nu}^{\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{F_\nu})}\overline{\eta}'_\nu \otimes \overline{\eta}_\nu$ des constituants qui sont dans $\mathscr{D}(\overline{\rho}_\nu)$ (§4), d'autre part des calculs explicites de théorie de Hodge p-adique entière (§§6, 7 et 8). L'hypothèse sur le nombre (un ou deux) de constituants dans $\mathscr{D}(\overline{\rho}_\nu)$ (associée au résultat de compatibilité local-global classique de [**31**] et [**29**]) est une contrainte suffisamment restrictive

[(3)] Emerton, Gee et Savitt m'ont informé avoir très récemment obtenu une preuve de la conjecture 1.2 en utilisant des systèmes de Taylor-Wiles à coefficients dans certains des réseaux $\sigma_\nu^0((v_J)_J)$ et le calcul de déformations locales de [**10**, §5].

sur le réseau induit sur σ_ν pour que ce réseau ne dépende essentiellement plus dans ce cas que d'*un seul* rationnel au lieu de f_ν rationnels en général (cf. lemme 10.2), i.e. que de la représentation de Weil-Deligne de ρ_ν. Cela le force alors à être celui de la conjecture 1.2.

Il serait certainement intéressant de chercher si des énoncés analogues à 1.1, 1.2, 1.3 et 1.4 existent pour des types plus ramifiés que ceux considérés dans cet article.

(ii) Compatibilité local-global pour les représentations de $\mathrm{GL}_2(F_\nu)$ *sur* $\overline{\mathbb{F}_p}$

Soit $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}_p})$ irréductible et $\nu|p$ une place telle que $\overline{\rho}_\nu$ est générique. Soit $D_0(\overline{\rho}_\nu)$ la plus grande représentation pour l'inclusion de $\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{F_\nu}/(p))$ sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ dont le socle est $\oplus_{\tau_\nu \in \mathscr{D}(\overline{\rho}_\nu)}\tau_\nu$ et telle que les $\tau_\nu \in \mathscr{D}(\overline{\rho}_\nu)$ n'y apparaissent que dans ce socle. En admettant [**12**, Conj.4.7] et son bonus, il n'est pas difficile de montrer que $\pi_\nu^D(\overline{\rho}^\vee)|_{\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{F_\nu})}$ doit contenir $D_0(\overline{\rho}_\nu)$ (de manière unique à scalaire près), cf. proposition 9.3. Soit $I_{1,\nu} \subset \mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{F_\nu}/(p))$ le sous-groupe des matrices unipotentes supérieures modulo p, il découle alors des constructions de [**11**] que la $\mathrm{GL}_2(F_\nu)$-représentation $\pi_\nu^D(\overline{\rho}^\vee)$ contient une des représentations de [**11**] associées à $\overline{\rho}_\nu$ si et seulement si l'action de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix}$ à l'intérieur de $\pi_\nu^D(\overline{\rho}^\vee)$ (ou de $\varinjlim_U S^D(U, \overline{\mathbb{F}_p})$) laisse *stable* le sous-espace $D_0(\overline{\rho}_\nu)^{I_{1,\nu}}$ des $I_{1,\nu}$-invariants.

Soit $\nu|p$ et $U = \prod_{\nu'} U_{\nu'}$ un sous-groupe ouvert compact tel que $U_\nu = I_{1,\nu}$. Supposons que l'on peut choisir $U_{\nu'}$ pour $\nu' \neq \nu$ tel que $S^D(U, \overline{\mathbb{F}_p})[\overline{\rho}^\vee] \simeq \pi_\nu^D(\overline{\rho}^\vee)^{I_{1,\nu}}$. Alors un tel énoncé de stabilité découlerait d'un énoncé de multiplicité 1 pour les caractères de l'Iwahori I_ν en ν agissant sur $S^D(U, \overline{\mathbb{F}_p})[\overline{\rho}^\vee]$ parce que l'on aurait dans ce cas $D_0(\overline{\rho}_\nu)^{I_{1,\nu}} \xrightarrow{\sim} \pi_\nu^D(\overline{\rho}^\vee)^{I_{1,\nu}}$ (c'est une conséquence facile de la maximalité de la représentation $D_0(\overline{\rho}_\nu)$). Ce point de vue est exploré dans l'appendice B, dû à Lassina Dembélé, où plusieurs cas d'un tel énoncé de multiplicité 1 sont vérifiés par des calculs explicites sur ordinateur (voir sa conjecture B.1 sur la dimension de certains espaces $S^D(U, \overline{\mathbb{F}_p})[\overline{\rho}^\vee]$ qui est équivalente à la multiplicité 1 ci-dessus par [**11**, Prop.14.7] ou la remarque 4.5, et voir aussi les tables qui suivent ; notons que ces résultats de multiplicité 1 sont très intéressants indépendamment de l'énoncé de stabilité ci-dessus). Mais, en dehors du cas où l'ensemble $\mathscr{D}(\overline{\rho}_\nu)$ est un singleton, l'auteur de l'article ignore comment montrer cet énoncé de multiplicité 1 même en admettant la conjecture [**12**, Conj.4.7] et son bonus. Signalons que cette multiplicité 1 pour les caractères de l'Iwahori devient en général complètement fausse si l'on remplace *l'espace propre* $S^D(U, \overline{\mathbb{F}_p})[\overline{\rho}^\vee]$ par le *localisé* $S^D(U, \overline{\mathbb{F}_p})_{\overline{\rho}^\vee}$. De plus, les anneaux de déformations locales potentiellement cristallines correspondants ne sont en général pas des anneaux de séries formelles, ce qui rend semble-t-il difficilement applicables les techniques de multiplicité 1 issues des théorèmes $R = T$ à la Taylor-Wiles ([**19**], [**23**]).

Pour cette raison, l'auteur a essayé de déduire l'éventuelle stabilité de $D_0(\overline{\rho}_\nu)^{I_{1,\nu}}$ par $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix}$ d'un énoncé plus en amont sur les réseaux induits par les formes quaternioniques entières sur certains types de Bushnell-Kutzko en ν. Cet énoncé est la conjecture 1.2 ci-dessus, qui a effectivement pour conséquence le théorème suivant (voir théorème 10.1).

Théorème 1.5. — *Si la conjecture* [**12**, Conj.4.7] *et son bonus sont vrais pour* $\overline{\rho}$, *alors la conjecture 1.2 entraîne la stabilité de* $D_0(\overline{\rho}_\nu)^{I_{1,\nu}}$ *par la matrice* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(F_\nu)$ *à l'intérieur de* $\varinjlim_U S^D(U, \overline{\mathbb{F}_p})$.

Le théorème 1.5 découle essentiellement du théorème 1.3 et de la définition de $D_0(\overline{\rho}_\nu)$: comme le socle de $\overline{\sigma}_\nu^0\big((\sum_{j\in J} v_j)_J\big)$ est constitué de *tous* les constituants de $\overline{\sigma}_\nu^0\big((\sum_{j\in J} v_j)_J\big)$ qui sont dans $\mathscr{D}(\overline{\rho}_\nu)$, on a $\overline{\sigma}_\nu^0\big((\sum_{j\in J} v_j)_J\big) \subseteq D_0(\overline{\rho}_\nu)$ d'où on déduit facilement la propriété de stabilité de l'énoncé.

Enfin, on déduit des théorèmes 1.4 et 1.5 le résultat conditionnel suivant (voir corollaire 10.6) :

Corollaire 1.6. — *Supposons la conjecture* [**12**, Conj.4.7] *et son bonus vrais pour* $\overline{\rho}$[(4)] *et soit* $\nu|p$ *une place telle que ou bien* $|\mathscr{D}(\overline{\rho}_\nu)| \leq 2$, *ou bien* $f_\nu = 2$ *et* $\overline{\rho}_\nu$ *est irréductible, alors* $\pi_\nu^D(\overline{\rho}^\vee)$ *contient une des représentations de* $\mathrm{GL}_2(F_\nu)$ *associées à* $\overline{\rho}_\nu$ *dans* [**11**].

(iii) Organisation de l'article

Passons maintenant en revue les différents paragraphes de cet article. Les résultats locaux sont présentés dans les §§2, 4, 5, 6, 7, 8 et dans l'appendice A. Les résultats globaux sont présentés dans les §§3, 9, 10 et dans l'appendice B dû à Lassina Dembélé. Le §3, bien que de nature globale, a été volontairement placé juste après le §2 car il le suit naturellement (cf. ci-dessous).

Commençons par décrire le contenu des paragraphes locaux. Soit L une extension finie non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ et k_L son corps résiduel. Au §2, on démontre le théorème 1.1, i.e. on décrit tous les réseaux stables dans les séries principales en caractéristique 0 irréductibles $\sigma(\chi^s) = \mathrm{ind}_I^{\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{F_\nu})} \chi^s$ où $\chi^s = \eta' \otimes \eta$ est un caractère du sous-groupe d'Iwahori I. Ils sont tous de la forme $\oplus_J p^{v_J} \sigma_J$ où $(v_J)_J$ est comme dans le théorème 1.1 et σ_J est un certain sous-module explicite de $\sigma(\chi^s)$ qui se réduit modulo p sur le poids de Serre $\overline{\sigma}_J$ apparaissant dans le semi-simplifié de $\mathrm{ind}_I^{\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{F_\nu})} \overline{\chi}^s$. Fixons une représentation $\overline{\rho}$ générique. Au §4, on

(4)En vertu des résultats annoncés par Emerton, Gee et Savitt (voir la note de bas de page précédente), ces hypothèses suffisent pour la conclusion de ce corollaire.

détermine précisément les χ^s tels que $\mathrm{ind}_I^{\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{F_\nu})}\overline{\chi}^s$ a au moins un de ses constituants dans $\mathscr{D}(\overline{\rho})$. Pour ces χ^s, on montre que les poids de Serre de $\mathscr{D}(\overline{\rho})$ dans les constituants de $\mathrm{ind}_I^{\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{F_\nu})}\overline{\chi}^s$ sont les $\overline{\sigma}_J$ pour $J^{\min} \subseteq J \subseteq J^{\max}$ où $J^{\min}$, $J^{\max}$ sont déterminés en fonction de χ^s et $\overline{\rho}$. Au §5, on détermine les modules fortement divisibles comme en [**4**] avec donnée de descente $\eta \oplus \eta'$ et correspondant à des représentations de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)$ à poids de Hodge-Tate $(0,1)$ dans toutes les directions. Aux §§6,7, on détermine lesquels parmi ces modules fortement divisibles ont leur représentation de Galois associée qui a une réduction réductible non scindée lorsque celle-ci est supposée de plus générique. Au §8, on rappelle du §3 (cf. ci-dessous) comment associer à un module fortement divisible comme au §5 un réseau sur $\sigma(\chi^s)$ (un des réseaux du §2 donc) et on calcule la réduction modulo p de ce réseau lorsque la représentation galoisienne est résiduellement générique, en particulier on montre le théorème 1.3. Notons que l'on utilise dans les §§7 et 8 les résultats de l'appendice A qui relient la réduction modulo p des modules de Fontaine-Laffaille et celle des modules fortement divisibles comme au §5 lorsque leur représentation de Galois est résiduellement générique réductible. Ces résultats permettent au passage de déterminer explicitement l'ensemble de poids de Serre $\mathscr{D}(\overline{\rho})$ lorsque $\overline{\rho}$ est générique réductible non scindée, détermination qui restait conjecturale dans [**11**] (ce dernier point est démontré indépendamment et différemment dans [**14**] en utilisant [**13**]).

Venons-en maintenant au contenu des paragraphes globaux. On utilise librement les notations locales précédentes ainsi que les notations globales du début de l'introduction. Au §3, on définit certains réseaux, appelés réseaux « de Dieudonné », sur les types $\sigma(\chi^s)$ à partir de modules de Dieudonné avec donnée de descente $\eta \oplus \eta'$ en procédant comme indiqué juste avant la conjecture 1.2. Puis on formule la conjecture 1.2 de compatibilité local-global sur les types après avoir introduit les espaces de formes quaternioniques et on la démontre lorsque $F = \mathbb{Q}$. Au §9, on formule le problème de compatibilité local-global de cet article pour les représentations de $\mathrm{GL}_2(F_\nu)$, c'est-à-dire la stabilité de $D_0(\overline{\rho}_\nu)^{I_{1,\nu}}$ par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix}$, et on pose quelques questions supplémentaires lorsque $\overline{\rho}_\nu$ est semi-simple en liaison avec les « valeurs spéciales de paramètres » trouvées dans [**7**]. Au §10, on démontre les théorèmes 1.4, 1.5 et le corollaire 1.6. Enfin, dans l'appendice B, Lassina Dembélé énonce (dans un cadre un peu plus restrictif) la conjecture de multiplicité 1 pour les caractères de l'Iwahori mentionnée plus haut dans l'introduction, et en vérifie informatiquement plusieurs cas.

(iv) Notations

Nous achevons cette introduction avec quelques unes des notations utilisées dans l'article.

Une représentation irréductible d'un groupe quelconque s'entend au sens algébrique : pas de sous-espace strict invariant non nul.

Si H est un corps local, on note $\mathscr{O}_H$ son anneau d'entiers et k_H son corps résiduel.

Tout au long des parties purement locales de l'article, on travaille avec une extension *non ramifiée* L de $\mathbb{Q}_p$ dans une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}_p}$, même s'il peut arriver que l'hypothèse de non ramification soit inutile (par exemple au §2 ou au §3). On note $f \overset{\text{déf}}{=} [L:\mathbb{Q}_p]$ son degré et on pose $q \overset{\text{déf}}{=} p^f = |k_L|$. On note φ le Frobenius sur $\mathscr{O}_L = W(k_L)$ tel que $\varphi(a) \equiv a^p$ modulo p si $a \in \mathscr{O}_L$ et $[\cdot] : k_L \hookrightarrow \mathscr{O}_L$ l'application « représentant multiplicatif ». On note L^{nr} l'extension maximale non ramifiée de L (ou de $\mathbb{Q}_p$) dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$.

On rappelle que l'a un isomorphisme canonique :

$$\begin{aligned} \varkappa_f : \mathrm{Gal}(L[\sqrt[p^f-1]{-p}]/L) &\xrightarrow{\sim} k_L^\times \\ g &\longmapsto \overline{\frac{g(\sqrt[p^f-1]{-p})}{\sqrt[p^f-1]{-p}}}. \end{aligned} \tag{4}$$

On voit tout caractère de $k_L^\times$ comme un caractère de $\mathrm{Gal}(L[\sqrt[p^f-1]{-p}]/L)$ ou de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)$ ou de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L^{\mathrm{nr}})$ en le composant avec $\varkappa_f$ et les surjections sur $\mathrm{Gal}(L[\sqrt[p^f-1]{-p}]/L)$.

On normalise la valuation val par $\mathrm{val}(p) = 1$. On normalise les inverses des applications de réciprocité locales de telle sorte que les uniformisantes s'envoient sur les Frobenius géométriques.

On note ε le caractère cyclotomique p-adique et ω sa réduction modulo p.

Si F est un corps de nombres, on note $\mathbb{A}_F^f$ les adèles finis de F.

Les autres notations seront introduites dans l'article, au fur et à mesure des besoins.

Remerciements

Pour des discussions à différentes étapes de ce travail, l'auteur remercie K. Buzzard, X. Caruso, F. Diamond, M. Dimitrov, M. Emerton, T. Gee, F. Herzig, A. Mézard, V. Paškūnas et M. Schein. L'auteur remercie tout particulièrement L. Dembélé pour son appendice, ses tables et sa bonne volonté sans lesquels il n'aurait probablement pas eu l'énergie de rédiger le présent article, parfois technique. Il remercie aussi Y. Hu pour lui avoir fourni une version correcte de la preuve du (ii) de la proposition 4.4. Enfin, l'auteur est très reconnaissant envers le(s) rapporteur(s) anonyme(s) dont le travail et les nombreuses suggestions de grande qualité ont permis une amélioration significative de cet article, en particulier de découvrir et corriger quelques erreurs dans la version initiale.

2. Quelques types modérés et leurs réseaux

On détermine tous les réseaux stables sur un type non trivial dans une série principale modérément ramifiée.

On note E une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ telle que $|\operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(L,E)| = [L:\mathbb{Q}_p]$ et on fixe un plongement $\iota : L \hookrightarrow E$. On note $K \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_L)$, $I \subset K$ le sous-groupe d'Iwahori des matrices triangulaires supérieures modulo p, $I_1 \subset I$ le sous-groupe des matrices unipotentes supérieures modulo p et $T \subset I$ le sous-groupe des matrices diagonales.

Soit $\eta, \eta' : k_L^\times \to \mathscr{O}_E^\times$ deux caractères multiplicatifs et $\chi \overset{\text{déf}}{=} \eta \otimes \eta' : I \to \mathscr{O}_E^\times$ le caractère :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ pc & d \end{pmatrix} \mapsto \eta(\overline{a})\eta'(\overline{d}) \tag{5}$$

où $\overline{a}$ (resp. $\overline{d}$) est la réduction modulo p de a (resp. d). On note $\chi^s \overset{\text{déf}}{=} \eta' \otimes \eta$. On suppose $\eta \neq \eta'$ et on note $c_\chi = \sum_{j=0}^{f-1} c_{\chi,j} p^j \in \{0, \cdots, q-1\}$ avec $c_{\chi,j} \in \{0, \cdots, p-1\}$ l'unique entier tel que $\eta(\overline{a})\eta'^{-1}(\overline{a}) = \iota([\overline{a}])^{c_\chi}$. La condition $\eta \neq \eta'$ est équivalente à $c_\chi \notin \{0, q-1\}$.

On note $\sigma(\chi^s)$ le E-espace vectoriel $\operatorname{ind}_I^K \chi^s$ des fonctions $f : K \to E$ telles que $f(kk') = \chi^s(k) f(k')$ si $k \in I$, $k' \in K$ muni de l'action à gauche de K par translation à droite sur les fonctions (notons que cette action se factorise par $\mathrm{GL}_2(k_L)$). On rappelle que l'on a un entrelacement $\sigma(\chi^s) \xrightarrow{\sim} \sigma(\chi)$ et que, puisque $\eta \neq \eta'$, $\sigma(\chi^s)$ et $\sigma(\chi)$ sont irréductibles. La représentation $\sigma(\chi^s)$ admet un $\mathscr{O}_E$-réseau stable naturel induit par les fonctions sur K à valeurs dans $\mathscr{O}_E$. On le note $\sigma^0(\chi^s)$. Nous allons décrire tous les réseaux stables de $\sigma(\chi^s)$ (à homothétie près) comme « modifications » du réseau $\sigma^0(\chi^s)$.

On identifie l'ensemble $\{0, \cdots, f-1\}$ à l'ensemble des plongements $\mathscr{S} \overset{\text{déf}}{=} \{\tau : L \hookrightarrow E\}$ en envoyant j sur $\iota \circ \varphi^j$. Rien dans ce qui suit ne dépend du choix de ι mais il est assez agréable de remplacer $\mathscr{S}$ par $\{0, \cdots, f-1\}$. On note $\mathscr{P}_\chi$ l'ensemble des parties J de $\{0, \cdots, f-1\}$ vérifiant les conditions :

(i) si $j \in J$ et $j-1 \notin J$ alors $c_{\chi,j} \neq p-1$

(ii) si $j \notin J$ et $j-1 \in J$ alors $c_{\chi,j} \neq 0$

où l'on adopte la convention $j-1 = f-1$ si $j=0$. Notons que $\mathscr{P}_\chi$ contient toujours $J = \emptyset$ et $J = \mathscr{S}$. Par [**11**, §4], les facteurs de Jordan-Hölder de $\overline{\sigma}(\chi^s) \overset{\text{déf}}{=} \sigma^0(\chi^s) \otimes_{\mathscr{O}_E} k_E \simeq \operatorname{ind}_I^K(\chi^s \otimes_{\mathscr{O}_E} k_E)$ sont paramétrés par les éléments de $\mathscr{P}_\chi$ (cf. aussi ci-dessous).

Lemme 2.1. — *(i) Si $J, J' \in \mathscr{P}_\chi$, alors $J \cap J' \in \mathscr{P}_\chi$ et $J \cup J' \in \mathscr{P}_\chi$.*
(ii) On a $J \in \mathscr{P}_\chi$ si et seulement si $\mathscr{S} \backslash J \in \mathscr{P}_{\chi^s}$.

(iii) Si $J \in \mathscr{P}_\chi$, alors il existe une suite croissante pour l'inclusion $J_0 \subsetneq J_1 \subsetneq \cdots \subsetneq J_{f-1} \subsetneq J_f$ telle que $J_j \in \mathscr{P}_\chi$, $|J_j| = j$ et J est un des J_j.

Démonstration. — (i) est élémentaire. (ii) découle de [**11**, Thm.2.4(ii)] et (iii) découle de [**11**, Cor.5.6(i)] combiné avec [**11**, Thm.2.4]. Les assertions (ii) et (iii) peuvent aussi se démontrer directement par de la combinatoire élémentaire. □

Soit $\phi \in \sigma^0(\chi^s)$ l'unique fonction (à valeurs dans $\mathscr{O}_E$) à support dans I telle que $\phi(u) = 1$ pour $u \in I_1$. En particulier ϕ est I_1-invariante dans $\sigma^0(\chi^s)$ et T agit sur ϕ via le caractère $\chi^s|_T$. Pour $0 \leq j \leq q-1$, on pose :

$$f_j \overset{\text{déf}}{=} \sum_{\lambda \in k_L} \iota([\lambda]^j) \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \phi \in \sigma^0(\chi^s).$$

Les f_j sont des vecteurs propres sous l'action de T (pour le caractère $[\overline{a}^{-1}\overline{d}]^j \chi|_T$) et on a :

$$\begin{aligned} \sigma^0(\chi^s) &= (\oplus_{j=0}^{q-1} \mathscr{O}_E f_j) \oplus \mathscr{O}_E \phi \\ &= \Big(\bigoplus_{\substack{j=0 \\ j \neq c_\chi}}^{q-2} \mathscr{O}_E f_j \Big) \oplus \mathscr{O}_E \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} f_0 \oplus \mathscr{O}_E \phi \oplus \mathscr{O}_E \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \phi. \end{aligned}$$

De plus $Ef_0 \oplus E\phi$ est le sous-espace de $\sigma(\chi^s)$ des vecteurs I_1-invariants.

Lemme 2.2. — *Il existe un unique entrelacement $\alpha : \sigma(\chi^s) \overset{\sim}{\to} \sigma(\chi)$ tel que $\alpha(f_0) = q\phi$ et $\alpha(\phi) = f_0$ (où ϕ, f_0 sont relatifs à l'induite qui les contient).*

Démonstration. — Tout entrelacement α entre les deux induites induit un isomorphisme sur les vecteurs I_1-invariants et respecte l'action de T. Puisque $\chi \neq \chi^s$, il envoie donc f_0 sur un multiple de ϕ et réciproquement. Quitte à multiplier par un scalaire convenable, on peut donc supposer $\alpha(\phi) = f_0$. L'unicité d'un tel α est alors claire puisque les représentations sont irréductibles. Reste à vérifier $\alpha(f_0) = q\phi$. On a (l'action de K se factorisant par $\mathrm{GL}_2(k_L)$, on ne se préoccupe plus des Teichmüller dans les matrices) :

$$\begin{aligned}
\alpha(f_0) &= \alpha\Big(\sum_{\lambda\in k_L}\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\phi\Big)=\sum_{\lambda,\mu\in k_L}\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\phi=\sum_{\lambda,\mu\in k_L}\begin{pmatrix}1+\lambda\mu & \lambda\\ \mu & 1\end{pmatrix}\phi\\
&= \sum_{\substack{\lambda,\mu\in k_L\\ 1+\lambda\mu=0}}\begin{pmatrix}0 & \lambda\\ \mu & 1\end{pmatrix}\phi+\sum_{\substack{\lambda,\mu\in k_L\\ 1+\lambda\mu\neq 0}}\begin{pmatrix}1+\lambda\mu & \lambda\\ \mu & 1\end{pmatrix}\phi\\
&= \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\sum_{\lambda\neq 0}\begin{pmatrix}-\lambda^{-1} & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\phi+\sum_{\substack{\mu\neq 0\\ 1+\lambda\mu\neq 0}}\begin{pmatrix}1+\lambda\mu & 0\\ \mu & (1+\lambda\mu)^{-1}\end{pmatrix}\phi+\sum_{\lambda\in k_L}\phi\\
&= \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\Big(\sum_{\lambda\neq 0}\eta(-\lambda)^{-1}\eta'(\lambda)\Big)\phi+\\
&\qquad\qquad \sum_{\substack{\mu\neq 0\\ 1+\lambda\mu\neq 0}}\eta(1+\lambda\mu)\eta'(1+\lambda\mu)^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{\mu}{1+\lambda\mu} & 1\end{pmatrix}\phi+q\phi\\
&= 0+0+q\phi=q\phi
\end{aligned}$$

où l'avant-dernière égalité résulte de $\sum_{x\in k_L^\times}\eta(x)^{-1}\eta'(x)=0$ puisque $\eta\neq\eta'$. $\square$

Si $J\in\mathscr{P}_\chi$, on note $F_J\subseteq\{0,\cdots,p-1\}^f$ l'ensemble des f-uplets $(s_j)_j=(s_0,\cdots,s_{f-1})$ où les s_j vérifient les conditions :

$$\begin{cases}0\leq s_j\leq c_{\chi,j} & \text{si} \quad j\notin J \text{ et } j-1\notin J\\ 0\leq s_j\leq c_{\chi,j}-1 & \text{si} \quad j\notin J \text{ et } j-1\in J\\ c_{\chi,j}\leq s_j\leq p-1 & \text{si} \quad j\in J \text{ et } j-1\in J\\ c_{\chi,j}+1\leq s_j\leq p-1 & \text{si} \quad j\in J \text{ et } j-1\notin J.\end{cases}$$

Notons que $\{0,\cdots,p-1\}^f$ est « presque » l'union disjointe des F_J pour $J\in\mathscr{P}_\chi$, la seule exception étant que $(c_{\chi,j})_j\in F_\emptyset\cap F_{\mathscr{S}}$.

À l'aide des F_J, on définit les sous-$\mathscr{O}_E$-modules facteurs directs suivants de $\sigma^0(\chi^s)$ (stables sous l'action de T) :

$$\begin{aligned}
\sigma_\emptyset &\overset{\text{déf}}{=} \Big(\bigoplus_{(s_j)_j\in F_\emptyset\setminus\{(c_{\chi,j})_j\}}\mathscr{O}_E f_{\sum_j s_jp^j}\Big)\oplus\mathscr{O}_E\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}f_0\\
\sigma_{\mathscr{S}} &\overset{\text{déf}}{=} \Big(\bigoplus_{(s_j)_j\in F_{\mathscr{S}}\setminus\{(c_{\chi,j})_j,(p-1,\cdots,p-1)\}}\mathscr{O}_E f_{\sum_j s_jp^j}\Big)\oplus\mathscr{O}_E\phi\oplus\mathscr{O}_E\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\phi\\
\sigma_J &\overset{\text{déf}}{=} \bigoplus_{(s_j)_j\in F_J}\mathscr{O}_E f_{\sum_j s_jp^j}\quad \text{si}\quad J\neq\emptyset,\mathscr{S}.
\end{aligned}$$

En particulier, on a $\sigma^0(\chi^s)=\bigoplus_{J\in\mathscr{P}_\chi}\sigma_J$. Notons que le lemme 2.2, le (ii) du lemme 2.1 et la commutation de α à T impliquent $\sigma_J\otimes_{\mathscr{O}_E}E=\alpha^{-1}(\sigma_{\mathscr{S}\setminus J}\otimes_{\mathscr{O}_E}E)$. Un point important dans la suite est que, par [**11**, Lem.2.7], la T-représentation

$\sigma_J \otimes_{\mathscr{O}_E} k_E$ est en fait stable par K dans un quotient convenable de $\overline{\sigma}(\chi^s)$ et est alors une K-représentation irréductible (i.e. un poids de Serre). Si l'on note $\overline{\sigma}_J$ ce poids de Serre, c'est-à-dire l'image de $\sigma_J \otimes_{\mathscr{O}_E} k_E$ dans ce quotient, alors la paramétrisation précédente des constituants de $\overline{\sigma}(\chi^s)$ par $\mathscr{P}_\chi$ n'est autre que $J \mapsto \overline{\sigma}_J$ ([**11**, §2]).

Soit $\mathbb{Q}_E \overset{\text{déf}}{=} \{\mathrm{val}(x), x \in E^\times\} \subset \mathbb{Q}$, si $v \in \mathbb{Q}_E$, on désigne dans la suite par p^v un quelconque élément de $E^\times$ de valuation v (son choix n'aura pas d'importance).

Proposition 2.3. — *Tout $\mathscr{O}_E$-réseau de $\sigma(\chi^s)$ stable par K est de la forme $\bigoplus_{J \in \mathscr{P}_\chi} p^{v_J}\sigma_J$ pour des $v_J \in \mathbb{Q}_E$ convenables.*

Démonstration. — Soit $R \subset \sigma(\chi^s)$ un réseau stable. Montrons d'abord que l'on a :

$$(6)\quad R = \Big(\bigoplus_{\substack{j=0\\ j\neq c_\chi}}^{q-2} \mathscr{O}_E p^{v_j} f_j\Big) \oplus \mathscr{O}_E p^{w_0}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} f_0 \oplus \mathscr{O}_E p^{w_1}\phi \oplus \mathscr{O}_E p^{w_2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\phi$$

pour des $v_j, w_i \in \mathbb{Q}_E$ convenables. Les sous-espaces isotypiques de $\sigma(\chi^s)$ pour l'action de T sont les Ef_j pour $1 \leq j \leq q-2$, $j \neq c_\chi$ et les sous-espaces $V_0 \overset{\text{déf}}{=} Ef_0 \oplus E\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\phi$, $V_1 \overset{\text{déf}}{=} E\phi \oplus E\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} f_0$. Puisque T agit via un quotient de cardinal premier à p, R est somme directe des réseaux qu'il induit sur ces sous-espaces. En faisant agir la matrice $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, on voit que la seule assertion non triviale à vérifier est que $R \cap V_0$ est de la forme $\mathscr{O}_E p^{v_0} f_0 \oplus \mathscr{O}_E p^{w_2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\phi$. Soit $af_0 + b\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\phi \in R$ $(a, b \in E)$. Nous allons montrer $af_0 \in R$ et $b\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\phi \in R$ ce qui démontrera (6). On a d'abord :

$$\sum_{\lambda \in k_L} \iota([\lambda]^j)\begin{pmatrix}1 & [\lambda]\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Big(af_0 + b\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\phi\Big) = \begin{cases} bf_j & \text{si } \ 1 \leq j \leq q-2\\ (aq+b)f_0 & \text{si } \ \quad j = 0\end{cases}$$

d'où $(aq+b)f_0 \in R$ et $bf_j \in R$ si $1 \leq j \leq q-2$. Nous allons distinguer trois cas.
Premier cas : $\mathrm{val}(b) \leq \mathrm{val}(a)$.
De $(aq+b)f_0 \in R$ on déduit $bf_0 \in R$ d'où aussi $af_0 \in R$ et $b\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\phi \in R$.
Deuxième cas : $\mathrm{val}(a) + f \leq \mathrm{val}(b)$.
L'image de R par l'entrelacement α (lemme 2.2) est un réseau stable de $\sigma(\chi)$ qui contient $aq\phi + b\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} f_0$ et donc aussi $bf_0 + aq\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\phi$. Comme $\mathrm{val}(aq) \leq \mathrm{val}(b)$, le premier cas appliqué à $\alpha(R)$ implique $bf_0 \in \alpha(R)$ et $aq\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\phi \in$

$\alpha(R)$. En appliquant α^{-1} puis $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on en déduit $af_0 \in R$ et $b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \phi \in R$.
Troisième cas : $\mathrm{val}(a) < \mathrm{val}(b) < \mathrm{val}(a) + f$.
De $(aq + b)f_0 \in R$ on déduit $bf_0 \in R$. Nous allons montrer que $b\phi \in R$. On a $\frac{b^2}{a}\phi \in R$ puisque $bf_0 \in R$ et $af_0 + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \phi \in R$. On en déduit $\frac{b^2}{a}\sigma^0(\chi^s) \subseteq R$ puisque $\mathrm{val}(\frac{b^2}{a}) > \mathrm{val}(b)$ et $bf_j \in R$ pour $0 \leq j \leq q-2$. Par ailleurs, on déduit facilement de [**11**, Lem.2.7(i)] :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} f_0 - \eta(-1)f_{c_\chi} - (-1)^{c_\chi}\phi \in p\sigma^0(\chi^s). \tag{7}$$

Si $\mathrm{val}(b) \leq \mathrm{val}(a)+1$, c'est-à-dire $\mathrm{val}(\frac{b^2}{a}) \leq \mathrm{val}(pb)$, on a $pb\sigma^0(\chi^s) \subseteq \frac{b^2}{a}\sigma^0(\chi^s) \subseteq R$ et en multipliant (7) par b on obtient $b\phi \in R$. Si $\mathrm{val}(b) > \mathrm{val}(a) + 1$, alors $\mathrm{val}(\frac{b^2}{ap}) > \mathrm{val}(b)$ d'où $\frac{b^2}{ap}f_j \in R$ si $0 \leq j \leq q-2$. Comme $\frac{b^2}{a}\sigma^0(\chi^s) \subseteq R$, on obtient $\frac{b^2}{ap}\phi \in R$ en multipliant (7) par $\frac{b^2}{ap}$. On en déduit $\frac{b^2}{ap}\sigma^0(\chi^s) \subseteq R$. Si $\mathrm{val}(a) + 1 < \mathrm{val}(b) \leq \mathrm{val}(a) + 2$, alors $\mathrm{val}(\frac{b^2}{ap}) \leq \mathrm{val}(pb)$ et on a $pb\sigma^0(\chi^s) \subseteq \frac{b^2}{ap}\sigma^0(\chi^s) \subseteq R$. En multipliant (7) par b on obtient encore $b\phi \in R$. Si $\mathrm{val}(b) > \mathrm{val}(a) + 2$, alors $\mathrm{val}(\frac{b^2}{ap^2}) > \mathrm{val}(b)$ et on obtient $\frac{b^2}{ap^2}\phi \in R$ en multipliant (7) par $\frac{b^2}{ap^2}$ et en utilisant $\frac{b^2}{ap}\sigma^0(\chi^s) \subseteq R$: une récurrence dont on laisse les détails au lecteur permet de conclure que l'on a toujours $b\phi \in R$, donc aussi $b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \phi \in R$ et $af_0 \in R$. Ceci achève la preuve de (6).
Montrons maintenant que les puissances de p sont constantes « sur » $R \cap (\sigma_J \otimes_{\mathscr{O}_E} E)$. Soit $J \neq \emptyset, \mathscr{S}$. Choisissons f_j dans σ_J tel que v_j est minimum (avec v_j comme en (6)) et soit $f_{j'}$ dans σ_J. Comme $\sigma_J \otimes_{\mathscr{O}_E} k_E$ est une K-représentation irréductible dans un quotient convenable de $\overline{\sigma}(\chi^s)$, il existe $h \in \mathscr{O}_E[K]$ tel que $hf_j = f_{j'} \oplus x$ où $x \in \big(\bigoplus_{i\neq j,j',c_\chi,q-1} \mathscr{O}_E f_i\big) \oplus \mathscr{O}_E \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} f_0 \oplus \mathscr{O}_E\phi \oplus \mathscr{O}_E \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \phi$. Par (6), on en déduit $p^{v_j}f_{j'} \in R$ puisque $p^{v_j}hf_j \in R$, d'où $v_{j'} = v_j$ puisque $v_j \leq v_{j'}$. La preuve lorsque $J = \emptyset$ ou $\mathscr{S}$ est la même. $\square$

Pour $J \in \mathscr{P}_\chi$, il existe à homothétie près un unique réseau stable $\sigma_J^0(\chi^s)$ de $\sigma(\chi^s)$ (défini sur $W(\mathbb{F}_q) \subset \mathscr{O}_E$) tel que $\mathrm{soc}_K(\sigma_J^0(\chi^s) \otimes_{\mathscr{O}_E} k_E) \simeq \sigma_J \otimes_{\mathscr{O}_E} k_E$. Cela découle du fait que $\sigma_J \otimes_{\mathscr{O}_E} k_E$ intervient avec multiplicité 1 dans $\overline{\sigma}(\chi^s)$ et des propriétés du triangle cde (voir [**37**, §15.4], ce fait m'a été signalé par Paškūnas). Notons que, par [**11**, Thm.2.4] et le lemme 2.2, on a $\sigma_\emptyset^0(\chi^s) \cong \sigma^0(\chi^s)$ et $\sigma_{\mathscr{S}}^0(\chi^s) \cong \sigma^1(\chi^s) \overset{\text{déf}}{=} q\alpha^{-1}(\sigma^0(\chi))$ (α est l'entrelacement du lemme 2.2).

Théorème 2.4. — *Soit $J\in\mathscr{P}_\chi$ et $\langle K\cdot\sigma_J\rangle$ le sous $\mathscr{O}_E$-module de $\sigma^0(\chi^s)$ engendré par σ_J sous l'action de K. On a :*

$$\langle K\cdot\sigma_J\rangle \;=\; \bigoplus_{J'\in\mathscr{P}_\chi} p^{|J'|-|J\cap J'|}\sigma_{J'} \tag{8}$$

$$\sigma^0_J(\chi^s) \;\cong\; \bigoplus_{J'\in\mathscr{P}_\chi} p^{|J\cap J'|}\sigma_{J'}. \tag{9}$$

Démonstration. — On va démontrer (8) et (9) en même temps. Comme $\sigma(\chi^s)$ est irréductible, $\langle K\cdot\sigma_J\rangle$ est un réseau stable de $\sigma(\chi^s)$. De la structure de la représentation $\overline{\sigma}(\chi^s)$ ([**11**, Thm.2.4(iii)] et [**11**, Lem.2.7(ii)]) et de la proposition 2.3 on déduit (sachant que $\sigma^0(\chi^s)$ et les σ_J sont définis sur $W(\mathbb{F}_q)\subseteq\mathscr{O}_E$, comme le lecteur peut le vérifier aisément) :

$$\langle K\cdot\sigma_J\rangle = \Big(\bigoplus_{J'\subseteq J}\sigma_{J'}\Big)\oplus\Big(\bigoplus_{J'\nsubseteq J}p^{n_{J,J'}}\sigma_{J'}\Big) \tag{10}$$

pour des entiers $n_{J,J'}\geq 1$. Comme $\sigma^1(\chi^s)$ est un réseau stable de $\sigma(\chi^s)$, on a par la proposition 2.3 (sachant que $\sigma^0(\chi^s)$, $\sigma^0(\chi)$ et l'entrelacement α sont définis sur $W(\mathbb{F}_q)\subseteq\mathscr{O}_E$) :

$$\sigma^1(\chi^s)=\bigoplus_{J\in\mathscr{P}_\chi}p^{n_J}\sigma_J$$

pour des entiers n_J tels que $n_\emptyset=0$ et $n_{\mathscr{S}}=f$. De $\sigma_J\otimes_{\mathscr{O}_E}E=\alpha^{-1}(\sigma_{\mathscr{S}\backslash J}\otimes_{\mathscr{O}_E}E)$, de la structure de la représentation $\sigma^1(\chi^s)\otimes_{\mathscr{O}_E}k_E\cong\sigma^0(\chi)\otimes_{\mathscr{O}_E}k_E$ ([**11**, Thm.2.4]) et de la proposition 2.3 on déduit :

$$\langle K\cdot p^{n_J}\sigma_J\rangle = \Big(\bigoplus_{J'\supseteq J}p^{n_{J'}}\sigma_{J'}\Big)\oplus\Big(\bigoplus_{J'\nsupseteq J}p^{m_{J,J'}}p^{n_{J'}}\sigma_{J'}\Big) \tag{11}$$

pour des entiers $m_{J,J'}\geq 1$. Si $J'\supsetneq J$, (11) puis (10) fournissent $n_{J'}-n_J=n_{J,J'}\geq 1$. Ainsi la fonction $J\mapsto n_J$ est strictement croissante pour l'inclusion. Comme $n_\emptyset=0$ et $n_{\mathscr{S}}=f$, par le (iii) du lemme 2.1 on voit que l'on a forcément $n_J=|J|$. Par (11) et (10), on obtient donc pour $J\in\mathscr{P}_\chi$:

$$\langle K\cdot\sigma_J\rangle = \Big(\bigoplus_{J'\subseteq J}\sigma_{J'}\Big)\oplus\Big(\bigoplus_{J'\supsetneq J}p^{|J'\backslash J|}\sigma_{J'}\Big)\oplus\Big(\bigoplus_{\substack{J'\nsubseteq J\\ J'\nsupseteq J}}p^{n_{J,J'}}\sigma_{J'}\Big) \tag{12}$$

pour des entiers $n_{J,J'}\geq 1$.

Fixons $J'\in\mathscr{P}_\chi$. Par la proposition 2.3, on a $\sigma^0_{J'}(\chi^s)=\bigoplus_{J''\in\mathscr{P}_\chi}p^{w_{J''}}\sigma_{J''}$ pour des $w_{J''}\in\mathbb{Z}$ (rappelons que le réseau est défini sur $W(\mathbb{F}_q)$) et on peut supposer $w_\emptyset=0$ de sorte que $w_{J''}\geq 0$ par (12) appliqué à $\langle K\cdot p^{w_{J''}}\sigma_{J''}\rangle$ (sinon, on aurait $p^{-1}\sigma_\emptyset\subset\langle K\cdot p^{w_{J''}}\sigma_{J''}\rangle\subseteq\sigma^0_{J'}(\chi^s)$). Soit $J\in\mathscr{P}_\chi$ et $I(J',J)\subseteq\sigma^0_{J'}(\chi^s)\otimes_{\mathscr{O}_E}k_E$ la sous-K-représentation de co-socle $(p^{w_J}\sigma_J)\otimes_{\mathscr{O}_E}k_E$ (cette représentation est bien définie puisque $\overline{\sigma}(\chi^s)$, donc $\sigma^0_{J'}(\chi^s)\otimes_{\mathscr{O}_E}k_E$, n'a pas de multiplicité >1 dans ses facteurs irréductibles). Puisque $I(J',J)$ a socle $(p^{w_{J'}}\sigma_{J'})\otimes_{\mathscr{O}_E}k_E$ et co-socle

$(p^{w_J}\sigma_J)\otimes_{\mathscr{O}_E} k_E$, il existe une suite $(J_n)_{0\leq n\leq N}$ d'éléments distincts de $\mathscr{P}_\chi$ telle que $J_0=J'$, $J_N=J$ et telle que pour tout n une extension non scindée :

$$0\longrightarrow (p^{w_{J_n}}\sigma_{J_n})\otimes_{\mathscr{O}_E} k_E\longrightarrow *\longrightarrow (p^{w_{J_{n+1}}}\sigma_{J_{n+1}})\otimes_{\mathscr{O}_E} k_E\longrightarrow 0$$

apparaît en sous-quotient de $I(J',J)$. Par [**11**, Cor.5.6(i)], cela entraîne ou bien $J_n\subset J_{n+1}$ et $|J_{n+1}\backslash J_n|=1$, ou bien $J_{n+1}\subset J_n$ et $|J_n\backslash J_{n+1}|=1$. Comme $\sigma_\emptyset\otimes_{\mathscr{O}_E} k_E$ engendre $(p^{w_{J'}}\sigma_{J'})\otimes_{\mathscr{O}_E} k_E$ dans $\sigma^0_{J'}(\chi^s)\otimes_{\mathscr{O}_E} k_E$, par (12) appliqué à $\langle K\cdot\sigma_\emptyset\rangle$ on doit avoir $w_{J'}=|J'|$. Comme $(p^{w_{J_{n+1}}}\sigma_{J_{n+1}})\otimes_{\mathscr{O}_E} k_E$ engendre $(p^{w_{J_n}}\sigma_{J_n})\otimes_{\mathscr{O}_E} k_E$ dans $\sigma^0_{J'}(\chi^s)\otimes_{\mathscr{O}_E} k_E$, par (12) appliqué à $\langle K\cdot p^{w_{J_{n+1}}}\sigma_{J_{n+1}}\rangle$ on doit avoir $w_{J_{n+1}}=w_{J_n}$ si $J_n\subset J_{n+1}$ ou $w_{J_{n+1}}=w_{J_n}-1$ si $J_{n+1}\subset J_n$. Comme il doit y avoir *au moins* $|J'\backslash J\cap J'|$ valeurs de n pour lesquelles $J_{n+1}\subset J_n$ (puisque les J_n « vont » de J' à J dans $\mathscr{P}_\chi$), on voit que l'on a au final $w_J\leq w_{J'}-|J'\backslash J\cap J'|=|J'|-|J'|+|J\cap J'|=|J\cap J'|$. Comme $(p^{w_J}\sigma_J)\otimes_{\mathscr{O}_E} k_E$ engendre $(p^{|J'|}\sigma_{J'})\otimes_{\mathscr{O}_E} k_E$ dans $\sigma^0_{J'}(\chi^s)\otimes_{\mathscr{O}_E} k_E$, par (12) appliqué à $\langle K\cdot p^{w_J}\sigma_J\rangle$ on obtient $w_J+n_{J,J'}=|J'|$ pour $J'\nsubseteq J$, $J'\nsupseteq J$, soit $n_{J,J'}\geq |J'|-|J'\cap J|$.

Notons $\widetilde{\sigma}^0_J(\chi^s)\overset{\text{déf}}{=}\bigoplus_{J'\in\mathscr{P}_\chi}p^{|J\cap J'|}\sigma_{J'}$. Nous allons montrer que $\widetilde{\sigma}^0_J(\chi^s)\cong\sigma^0_J(\chi^s)$. Par l'unicité de $\sigma^0_J(\chi^s)$ il suffit de montrer que (i) $\widetilde{\sigma}^0_J(\chi^s)$ est stable par K et (ii) sa réduction a un socle isomorphe à $\sigma_J\otimes_{\mathscr{O}_E} k_E$. Pour (i), il suffit de montrer pour tout $J'\in\mathscr{P}_\chi$ l'inclusion $\langle K\cdot p^{|J\cap J'|}\sigma_{J'}\rangle\subseteq\widetilde{\sigma}^0_J(\chi^s)$. Mais elle découle facilement de (12) appliqué à $\langle K\cdot p^{|J\cap J'|}\sigma_{J'}\rangle$ et des minorations ci-dessus sur les $n_{J',J''}$. Pour (ii), il suffit de montrer que, pour tout $J'\in\mathscr{P}_\chi$, $(p^{|J\cap J'|}\sigma_{J'})\otimes_{\mathscr{O}_E} k_E$ engendre $(p^{|J|}\sigma_J)\otimes_{\mathscr{O}_E} k_E$ dans $\widetilde{\sigma}^0_J(\chi^s)\otimes_{\mathscr{O}_E} k_E$. Par (12) appliqué à $\langle K\cdot p^{|J\cap J'|}\sigma_{J'}\rangle$, on voit que $(p^{|J\cap J'|}\sigma_{J'})\otimes_{\mathscr{O}_E} k_E$ engendre $(p^{|J\cap J'|}\sigma_{J\cap J'})\otimes_{\mathscr{O}_E} k_E$ dans $\widetilde{\sigma}^0_J(\chi^s)\otimes_{\mathscr{O}_E} k_E$. Donc on peut supposer $J'=J\cap J'$, i.e. $J'\subseteq J$. Mais par (12) appliqué à $\langle K\cdot p^{|J'|}\sigma_{J'}\rangle$ on voit que $(p^{|J'|}\sigma_{J'})\otimes_{\mathscr{O}_E} k_E$ engendre $(p^{|J'|}p^{|J\backslash J'|}\sigma_J)\otimes_{\mathscr{O}_E} k_E=(p^{|J|}\sigma_J)\otimes_{\mathscr{O}_E} k_E$ dans $\widetilde{\sigma}^0_J(\chi^s)\otimes_{\mathscr{O}_E} k_E$.

On termine enfin la preuve. Il suffit de reprendre l'argument ci-dessus : on avait $w_J+n_{J,J'}=|J'|$ qui donne maintenant $n_{J,J'}=|J'|-|J\cap J'|$ puisque $w_J=|J\cap J'|$ par ce qui précède. $\square$

On note $\mathscr{V}_\chi$ l'ensemble des uplets $(v_J)_{J\in\mathscr{P}_\chi}$ vérifiant les conditions :

(i) $v_J\in\mathbb{Q}_E$ et $v_\emptyset=0$

(ii) si $J\subseteq J'$, alors $0\leq v_{J'}-v_J\leq |J'\backslash J|$.

On a toujours $0\leq v_J\leq |J|$.

Définition 2.5. — *À tout uplet $v=(v_J)_J$ de $\mathscr{V}_\chi$, on associe le $\mathscr{O}_E$-réseau de $\sigma(\chi^s)$:*

$$\sigma^0_v(\chi^s)\overset{\text{déf}}{=}\bigoplus_{J\in\mathscr{P}_\chi}p^{v_J}\sigma_J.$$

Si $J\in\mathscr{P}_\chi$, par (9) on a en particulier $\sigma^0_{(|J\cap J'|)_{J'}}(\chi^s)=\sigma^0_J(\chi^s)$. Par exemple $\sigma^0_{(0)_J}(\chi^s)=\sigma^0_\emptyset(\chi^s)=\sigma^0(\chi^s)$ et $\sigma^0_{(|J|)_J}(\chi^s)=\sigma^0_{\mathscr{S}}(\chi^s)=\sigma^1(\chi^s)=q\alpha^{-1}(\sigma^0(\chi))$.

Remarque 2.6. — En utilisant (9), on peut vérifier que $\sigma_v^0(\chi^s)$ admet la description alternative $\sigma_v^0(\chi^s) = \bigcap_J \psi_J^{-1}\big(p^{v_J}\,\mathrm{inj}_J\big)$ avec inj_J et ψ_J comme dans l'introduction.

Corollaire 2.7. — *(i) Pour tout $v \in \mathscr{V}_\chi$, les $\mathscr{O}_E$-réseaux $\sigma_v^0(\chi^s)$ sont stables par K dans $\sigma(\chi^s)$.*
(ii) Tout $\mathscr{O}_E$-réseau de $\sigma(\chi^s)$ stable par K est homothétique à $\sigma_v^0(\chi^s)$ pour un et un seul $v \in \mathscr{V}_\chi$.

Démonstration. — (i) Par (8), on a :

$$\langle K\cdot p^{v_J}\sigma_J\rangle = \bigoplus_{J'\in\mathscr{P}_\chi} p^{v_J - v_{J'} + |J'| - |J\cap J'|}p^{v_{J'}}\sigma_{J'}$$

et il suffit donc de montrer $v_J - v_{J'} + |J'| - |J\cap J'| \geq 0$. Puisque $J\cap J' \subseteq J$, on a par le (i) du lemme 2.1 et la condition (ii) sur les v_J :

$$v_{J\cap J'} \leq v_J \leq v_{J\cap J'} + |J\backslash J\cap J'|$$

et des inégalités similaires en échangeant J et J'. On en déduit :

$$|J\cap J'| - |J'| \leq v_J - v_{J'} \leq |J| - |J\cap J'|$$

d'où en particulier l'inégalité recherchée. Passons à (ii). Soit $R\subset\sigma(\chi^s)$ un réseau stable. Par la proposition 2.3, on a $R = \oplus_{J\in\mathscr{P}_\chi}p^{v_J}\sigma_J$ pour des $v_J \in \mathbb{Q}_E$ et, à homothétie près, on peut supposer $v_\emptyset = 0$. Puisque R est stable par K, on doit avoir $\langle K\cdot p^{v_J}\sigma_J\rangle \subseteq \oplus_{J'\in\mathscr{P}_\chi}p^{v_{J'}}\sigma_{J'}$ pour tout $J\in\mathscr{P}_\chi$. Par (8), on obtient $v_J + |J'| - |J\cap J'| \geq v_{J'}$. En échangeant J et J', on a de même $v_{J'} + |J| - |J\cap J'| \geq v_J$. Maintenant supposons $J\subseteq J'$ i.e. $J\cap J' = J$. La première inégalité donne $v_{J'} - v_J \leq |J'\backslash J|$ et la deuxième $0 \leq v_{J'} - v_J$. □

3. Réseaux de la théorie globale et réseaux de Dieudonné

On définit certains réseaux sur $\sigma(\chi^s)$ (§2) appelés réseaux de Dieudonné et on conjecture que les réseaux induits par les espaces de formes quaternioniques entières sont des réseaux de Dieudonné donnés par la théorie de Hodge p-adique entière.

On conserve les notations du §2. On rappelle que tout $\mathscr{O}_E$-réseau stable de $\sigma(\chi^s)$ est homothétique à un réseau $\sigma_v^0(\chi^s)$ pour un unique $v\in\mathscr{V}_\chi$ (corollaire 2.7).

Définition 3.1. — *On dit qu'un $\mathscr{O}_E$-réseau stable $\sigma_v^0(\chi^s)$ de $\sigma(\chi^s)$ ($v\in\mathscr{V}_\chi$) est un réseau de Dieudonné si $v = (v_J)_J$ est tel que $v_{J\cup J'} = v_J + v_{J'} - v_{J\cap J'}$ pour tous $J, J' \in \mathscr{P}_\chi$.*

Par exemple, les réseaux stables $\sigma_J^0(\chi^s)$ (cf. (9)) sont tous des réseaux de Dieudonné puisque l'on a $v_{J'} = |J \cap J'| = \sum_{j \in J'} |J \cap \{j\}| = \sum_{j \in J'} v_{\{j\}}$. Le lemme qui suit m'a été signalé par le rapporteur.

Lemme 3.2. — *Soit $\sigma_v^0(\chi^s)$ un réseau de Dieudonné dans $\sigma(\chi^s)$ ($v \in \mathscr{V}_\chi$). Alors il existe un unique f-uplet $(v_0, \cdots, v_{f-1})$ d'éléments de $\mathbb{Q}_E \cap [0,1]$ tel que $v_J = \sum_{j \in J} v_j$ pour tout $J \in \mathscr{P}_\chi$.*

Démonstration. — Pour $j \in \{0, \cdots, f-1\}$ soit $J_j \in \mathscr{P}_\chi$ la plus petite partie telle que $j \in J_j$ (J_j existe car $\mathscr{P}_\chi$ est stable par intersection par le (i) du lemme 2.1). Par le (iii) du lemme 2.1 on a alors $J_j \backslash \{j\} \in \mathscr{P}_\chi$. L'unicité dans l'énoncé résulte du fait que l'on doit avoir $v_j = v_{J_j} - v_{J_j \backslash \{j\}}$. Pour l'existence, posons $v_j \overset{\text{déf}}{=} v_{J_j} - v_{J_j \backslash \{j\}} \in \mathbb{Q}_E \cap [0,1]$. On montre que $v_J = \sum_{j \in J} v_j$ par récurrence sur $|J|$. C'est trivialement vrai pour $J = \emptyset$ puisque $v_\emptyset = 0$ par définition. Soit $J \in \mathscr{P}_\chi$ et $j \in J$ tel que $J \backslash \{j\} \in \mathscr{P}_\chi$ (un tel j existe par le (iii) du lemme 2.1). Par minimalité de J_j on a $J_j \subseteq J$ et donc $J = J_j \cup (J \backslash \{j\})$. Par récurrence on a $v_{J \backslash \{j\}} = \sum_{j' \in J \backslash \{j\}} v_{j'}$. Par la condition dans la définition 3.1 on a $v_J = v_{J_j} + v_{J \backslash \{j\}} - v_{J_j \backslash \{j\}} = v_j + \sum_{j' \in J \backslash \{j\}} v_{j'}$. $\square$

De tels uplets $(v_0, \cdots, v_{f-1})$ s'obtiennent naturellement à partir de modules de Dieudonné avec donnée de descente, comme on l'explique maintenant.

Définition 3.3. — *On appelle $\mathscr{O}_E$-module de Dieudonné un $\mathscr{O}_L \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathscr{O}_E$-module libre de rang fini M muni d'un endomorphisme injectif $\varphi : M \to M$ tel que :*
(i) si $a \in \mathscr{O}_L$, $b \in \mathscr{O}_E$, $m \in M$, $\varphi((a \otimes b)m) = (\varphi(a) \otimes b)\varphi(m)$
(ii) $pM \subseteq \varphi(M)$.

Les $\mathscr{O}_E$-modules de Dieudonné forment une catégorie additive en un sens évident. Le résultat principal sur ces structures, bien connu et dû à Dieudonné, est que la catégorie des groupes p-divisibles G sur k_L munis d'une injection de $\mathbb{Z}_p$-algèbres $\mathscr{O}_E \hookrightarrow \mathrm{End}_{k_L}(G)$ est anti-équivalente à la catégorie des $\mathscr{O}_E$-modules de Dieudonné.

On a un isomorphisme :

$$\mathscr{O}_L \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathscr{O}_E \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_E \times \cdots \times \mathscr{O}_E,\ a \otimes b \mapsto (\iota(a)b, \iota(\varphi^{-1}(a))b, \cdots, \iota(\varphi^{1-f}(a))b)$$

(rappelons que $\iota : L \hookrightarrow E$ a été fixé au §2) qui permet d'écrire tout $\mathscr{O}_E$-module de Dieudonné M sous la forme $M = M^0 \times M^1 \times \cdots \times M^{f-1}$ où $M^j \overset{\text{déf}}{=} (0, \cdots, 1, \cdots, 0)M$ avec 1 en position j. L'injection φ envoie alors M^j dans M^{j+1} (avec la convention usuelle « $(f-1)+1 = 0$ »). De plus la condition (ii) de la définition 3.3 est équivalente à $pM^{j+1} \subseteq \varphi(M^j)$ pour tout j.

Supposons M muni d'une action $\mathscr{O}_L \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathscr{O}_E$-linéaire de $\mathrm{Gal}(L[\sqrt[p^f-1]{-p}]/L)$ qui commute à φ (une telle action est parfois appelée donnée de descente). Cela revient, pour chaque j, à munir M^j d'une action $\mathscr{O}_E$-linéaire de $\mathrm{Gal}(L[\sqrt[p^f-1]{-p}]/L)$, ces actions commutant à φ. Puisque, par (4), ce groupe de Galois est de cardinal premier à p, toute action de $\mathrm{Gal}(L[\sqrt[p^f-1]{-p}]/L)$ sur un $\mathscr{O}_E$-module libre de rang fini est une somme de caractères. En particulier, pour chaque j, $\mathrm{Gal}(L[\sqrt[p^f-1]{-p}]/L)$ agit sur M^j par une somme de caractères qui ne dépendent pas de j (car on peut passer de M^j à M^{j+1} par φ).

Définition 3.4. — *On appelle $\mathscr{O}_E$-module de Dieudonné de type $\chi = \eta \otimes \eta'$ (χ comme au §2) tout $\mathscr{O}_E$-module de Dieudonné qui est libre de rang 2 sur $\mathscr{O}_L \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathscr{O}_E$ muni d'une action $\mathscr{O}_L \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathscr{O}_E$-linéaire de $\mathrm{Gal}(L[\sqrt[p^f-1]{-p}]/L)$ commutant à φ et telle que, sur un (ou de manière équivalente tout) M^j, l'action est donnée par $\eta \circ \varkappa_f \oplus \eta' \circ \varkappa_f$.*

Soit M un $\mathscr{O}_E$-module de Dieudonné de type χ. On peut écrire $M^j = \mathscr{O}_E e_\eta^j \oplus \mathscr{O}_E e_{\eta'}^j$ pour tout j où l'action de $\mathrm{Gal}(L[\sqrt[p^f-1]{-p}]/L)$ sur e_η^j (resp. $e_{\eta'}^j$) se fait par le caractère $\eta \circ \varkappa_f$ (resp. $\eta' \circ \varkappa_f$). Comme $\eta \neq \eta'$, les vecteurs e_η^j et $e_{\eta'}^j$ sont uniquement déterminés à multiplication près par un élément de $\mathscr{O}_E^\times$. L'action de $\mathrm{Gal}(L[\sqrt[p^f-1]{-p}]/L)$ commutant avec φ, on a donc $\varphi(e_\eta^j) = x_j e_\eta^{j+1}$ pour $j \in \{0, \cdots, f-1\}$ où $x_j \in \mathscr{O}_E$ est tel que $\mathrm{val}(x_j)$ est bien défini. De plus la condition $pM^{j+1} \subseteq \varphi(M^j)$ implique $p\mathscr{O}_E e_\eta^{j+1} \subseteq \mathscr{O}_E x_j e_\eta^{j+1}$. On voit donc que l'on a $0 \leq \mathrm{val}(x_j) \leq 1$ pour tout j. On associe à M le uplet de rationnels :

$$(v_j)_j \overset{\text{déf}}{=} (\mathrm{val}(x_{f-1-j}))_j. \tag{13}$$

Par le début de ce paragraphe, on peut associer au uplet $(v_j)_j$ un réseau de Dieudonné sur $\sigma(\chi^s)$ que l'on note $\sigma_\eta^0(\chi^s)$ (en fait, $\sigma_\eta^0(\chi^s)$ dépend aussi de M, pas seulement de η et χ). En remplaçant η par η', on obtient de même un réseau de Dieudonné $\sigma_{\eta'}^0(\chi)$ sur $\sigma(\chi)$.

Lemme 3.5. — *Soit M un $\mathscr{O}_E$-module de Dieudonné de type χ. Supposons $\varphi(\bigwedge^2_{\mathscr{O}_L \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathscr{O}_E} M) = p \bigwedge^2_{\mathscr{O}_L \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathscr{O}_E} M$, alors on a :*

$$\alpha(\sigma_\eta^0(\chi^s)) = p^{\sum_{j=0}^{f-1} v_j} \sigma_{\eta'}^0(\chi)$$

où α est l'entrelacement du lemme 2.2.

Démonstration. — Avec les notations précédentes, soit $x'_j \in \mathscr{O}_E$ tel que $\varphi(e_{\eta'}^j) = x'_j e_{\eta'}^{j+1}$ et $v'_j \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{val}(x'_{f-1-j'})$. La condition de l'énoncé est équivalente à $x_j x'_j \mathscr{O}_E = p\mathscr{O}_E$ pour tout j i.e. $v_j + v'_j = 1$. Comme $\sigma_J \otimes_{\mathscr{O}_E} E = \alpha^{-1}(\sigma_{\mathscr{S}\setminus J} \otimes_{\mathscr{O}_E} E)$ et $q\alpha^{-1}(\sigma^0(\chi)) = q\alpha^{-1}(\oplus_{J \in \mathscr{P}_\chi} \sigma_{\mathscr{S}\setminus J}) = \oplus_{J \in \mathscr{P}_\chi} p^{|J|} \sigma_J$ (voir preuve du théorème 2.4), on a :

$$\begin{aligned}
\alpha^{-1}(\sigma^0_{\eta'}(\chi)) &= \bigoplus_{J\in\mathscr{P}_\chi} p^{|J|-f+\sum_{j\notin J} v'_j}\sigma_J \\
&= \bigoplus_{J\in\mathscr{P}_\chi} p^{\sum_{j\notin J}(v'_j-1)}\sigma_J \\
&= \bigoplus_{J\in\mathscr{P}_\chi} p^{-\sum_{j\notin J} v_j}\sigma_J \\
&= p^{-\sum_{j=0}^{f-1} v_j} \bigoplus_{J\in\mathscr{P}_\chi} p^{\sum_{j\in J} v_j}\sigma_J
\end{aligned}$$

d'où $p^{\sum_{j=0}^{f-1} v_j}\alpha^{-1}(\sigma^0_{\eta'}(\chi)) = \sigma^0_\eta(\chi^s)$. $\square$

Remarque 3.6. — Les x_j et x'_j ne sont définis qu'à multiplication près par un élément de $\mathscr{O}_E^\times$ mais les produits $\Pi_j x_j$ et $\Pi_j x'_j$ eux sont bien définis car il s'agit des valeurs propres de φ^f sur M.

On fixe maintenant F un corps totalement réel extension finie de $\mathbb{Q}$ et on note $\mathscr{O}_F$ son anneau d'entiers. Si ν est une place finie quelconque de F, on note F_ν le complété local en ν, ϖ_ν une uniformisante de $\mathscr{O}_{F_\nu}$ et $q_\nu = p^{f_\nu}$ le cardinal du corps résiduel k_{F_ν}.

Soit D un corps de quaternions de centre F ramifié aux places infinies. On note Σ l'ensemble (fini) des places finies où D est ramifié. On fixe $\mathscr{O}_D$ un ordre maximal de D et pour chaque place $\nu\notin\Sigma$ un isomorphisme de $\mathscr{O}_{F_\nu}$-algèbres $\mathscr{O}_D\otimes_{\mathscr{O}_F}\mathscr{O}_{F_\nu}\simeq \mathrm{M}_2(\mathscr{O}_{F_\nu})$.

Soit A une $\mathbb{Z}_p$-algèbre, $\psi : F^\times\backslash(\mathbb{A}_F^f)^\times\to A^\times$ un caractère localement constant et $U\subset (D\otimes_F\mathbb{A}_F^f)^\times$ un sous-groupe ouvert compact tel que $\psi|_{U\cap(\mathbb{A}_F^f)^\times}=1$. On note $S^D_\psi(U,A)$ le A-module des fonctions :

$$f : D^\times\backslash(D\otimes_F\mathbb{A}_F^f)^\times/U\to A$$

telles que $f(xg)=\psi(x)f(g)$ si $x\in(\mathbb{A}_F^f)^\times$, $g\in(D\otimes_F\mathbb{A}_F^f)^\times$. On note :

$$S^D_\psi(A)\overset{\text{déf}}{=}\varinjlim_U S^D_\psi(U,A)$$

la limite inductive étant prise sur les sous-groupes ouverts compacts U précédents. Le A-module $S^D_\psi(A)$ est naturellement muni d'une action A-linéaire lisse de $(D\otimes_F\mathbb{A}_F^f)^\times$ par $(gf)(g')\overset{\text{déf}}{=}f(g'g)$, $g,g'\in(D\otimes_F\mathbb{A}_F^f)^\times$.

La théorie de Jacquet-Langlands dit que $S^D_\psi(\overline{\mathbb{Q}_p})$ est une représentation semi-simple de $(D\otimes_F\mathbb{A}_F^f)^\times$ sur $\overline{\mathbb{Q}_p}$, somme directe de caractères et de représentations irréductibles de dimension infinie $\pi=\otimes'_\nu\pi_\nu$ apparaissant avec multiplicité 1 où ν parcourt les places finies de F et où π_ν est une représentation lisse admissible irréductible de $(D\otimes_F F_\nu)^\times$ sur $\overline{\mathbb{Q}_p}$ de caractère central ψ_ν ($\otimes'$ est le produit tensoriel restreint et $\psi=\prod_\nu \psi_\nu$). En particulier π_ν est une représentation irréductible de $\mathrm{GL}_2(F_\nu)$ de dimension infinie si $\nu\notin\Sigma$ et est une représentation irréductible de $(D\otimes_F F_\nu)^\times$ de dimension finie si $\nu\in\Sigma$.

Soit $\pi=\otimes'_\nu\pi_\nu$ une composante irréductible de dimension infinie de $S^D_\psi(\overline{\mathbb{Q}_p})$ et choisissons une extension finie suffisamment grosse E de $\mathbb{Q}_p$ telle que π se réalise dans $S^D_\psi(E)$. Si $\nu\notin\Sigma$ est une place finie première à p où $\pi_\nu^{\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{F_\nu})}\neq 0$, on note $a_\nu\in\mathscr{O}_E$ la valeur propre de l'opérateur de Hecke $\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{F_\nu})\begin{pmatrix}\varpi_\nu & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{F_\nu})$ agissant sur $\pi_\nu^{\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{F_\nu})}$. Par les travaux de divers mathématiciens (voir [**41**]), il existe une unique représentation continue absolument irréductible :

$$\rho:\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)\to\mathrm{GL}_2(E)$$

telle que $\det(\rho)=\psi\varepsilon$, ρ est non ramifiée aux places ν comme ci-dessus et, si ν est une telle place et Fr_ν un Frobenius arithmétique en ν, $\mathrm{trace}(\rho(\mathrm{Fr}_\nu))=\psi_\nu(\varpi_\nu)^{-1}a_\nu$ (et $\det(\rho(\mathrm{Fr}_\nu))=\psi_\nu(\varpi_\nu)^{-1}q_\nu$). De manière équivalente, on a $\mathrm{trace}(\rho(\mathrm{Fr}_\nu^{-1}))=q_\nu^{-1}a_\nu$ et $\det(\rho(\mathrm{Fr}_\nu^{-1}))=q_\nu^{-1}\psi_\nu(\varpi_\nu)$, ou encore, en notant $\rho^\vee(1)$ le dual de Cartier de ρ, $\det(\rho^\vee(1))=\psi^{-1}\varepsilon$ et $\mathrm{trace}(\rho^\vee(1)(\mathrm{Fr}_\nu))=a_\nu$. On note ρ_ν la restriction de ρ à un sous-groupe de décomposition en une place finie ν. On suppose dans la suite que ρ est absolument irréductible modulo p, ce qui assure que ρ possède un unique $\mathscr{O}_E$-réseau stable par Galois (à homothétie près).

Le sous-$\mathscr{O}_E$-module $S^D_\psi(\mathscr{O}_E)$ de $S^D_\psi(E)$ est stable par $(D\otimes_F\mathbb{A}^f_F)^\times$. Puisque $D^\times\backslash(D\otimes_F\mathbb{A}^f_F)^\times/U$ est un ensemble fini, le $\mathscr{O}_E$-module $S^D_\psi(U,\mathscr{O}_E)$ est un $\mathscr{O}_E$-réseau dans $S^D_\psi(U,E)$ et $S^D_\psi(\mathscr{O}_E)$ est donc un sous-$\mathscr{O}_E$-module générateur de $S^D_\psi(E)$. Puisque $S^D_\psi(\mathscr{O}_E)$ est inclus dans le $\mathscr{O}_E$-module des fonctions sur $D^\times\backslash(D\otimes_F\mathbb{A}^f_F)^\times$ à valeurs dans $\mathscr{O}_E$, il ne contient pas de E-droite. On voit donc que $S^D_\psi(\mathscr{O}_E)$ est un $\mathscr{O}_E$-réseau stable de $S^D_\psi(E)$. En particulier, chaque représentation $\pi=\otimes'_\nu\pi_\nu$ est munie d'un $\mathscr{O}_E$-réseau invariant π^0 induit.

Supposons maintenant que D est non ramifié en une place ν divisant p. Fixons un plongement $\mathrm{GL}_2(F_\nu)$-équivariant $\xi_\nu:\pi_\nu\hookrightarrow\pi$ et notons π^0_{ν,ξ_ν} le $\mathscr{O}_E$-réseau stable de π_ν induit par π^0. Une des questions fondamentales du programme de Langlands p-adique (dans ce contexte restreint du moins) est de comprendre le complété :

$$(\varprojlim_n \pi^0_{\nu,\xi_\nu}\otimes_{\mathscr{O}_E}\mathscr{O}_E/p^n)\otimes_{\mathscr{O}_E}E$$

avec son action induite de $\mathrm{GL}_2(F_\nu)$ (qui, en fait, ne dépend pas du choix de ξ_ν[5]), tout en le reliant si possible à la théorie de Hodge p-adique de la représentation galoisienne ρ. La réponse n'est connue pour l'instant que lorsque $F_\nu=\mathbb{Q}_p$ (voir

(5) Car les réseaux π^0_{ν,ξ_ν} sont tous commensurables, comme il suit du fait que $\xi_\nu(v_\nu)=v_\nu\otimes v^\nu$ pour un $v^\nu\in\otimes'_{\nu'\neq\nu}\pi_{\nu'}$ et de l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^{f,\nu}_F)$ qui préserve π^0 et commute à $\mathrm{GL}_2(F_\nu)$.

[**21**]) et ne permet pas une généralisation à $F_\nu \neq \mathbb{Q}_p$. Notre objectif ici est bien plus modeste. Supposons $q_\nu > 2$ et notons :

$$\sigma_\nu \subset \pi_\nu \tag{14}$$

le $\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{F_\nu})$-type alors défini dans l'appendice de [**9**]. C'est une représentation lisse irréductible de dimension finie de $\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{F_\nu})$ sur E qui apparaît avec multiplicité 1 dans π_ν et qui en général a beaucoup de facteurs de Jordan-Hölder modulo p et donc en général possède beaucoup de classes d'homothéties de $\mathscr{O}_E$-réseaux stables par $\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{F_\nu})$.

Question 3.7. — *Quel est le $\mathscr{O}_E$-réseau σ^0_{ν,ξ_ν} induit par π^0_{ν,ξ_ν} (ou par $S^D_\psi(\mathscr{O}_E)$ via le plongement ξ_ν) sur σ_ν ?*

Supposons F non ramifié en ν. On va s'intéresser à cette question dans le cas le plus simple : celui où π_ν est une série principale modérément ramifiée. Il s'agit donc, à torsion près par un caractère modérément ramifié de $F_\nu^\times$, soit d'une série principale non ramifiée, soit de la représentation de Steinberg, soit d'une série principale modérément ramifiée qui n'est pas non ramifiée. On autorise $q_\nu = 2$ dans ce qui suit (toutes les séries principales modérément ramifiées sont dans ce cas non ramifiées).

(i) Si c'est une série principale non ramifiée (à torsion près), le type σ_ν dans π_ν en (14) a dimension 1, et admet donc à homothétie près un unique $\mathscr{O}_E$-réseau (stable) que l'on note $\sigma^0_\nu(\rho_\nu)$ (cette notation prend plus de sens ci-dessous).

(ii) Si c'est la représentation de Steinberg (à torsion près), alors σ_ν en (14) est (à torsion près) l'inflation de $\mathrm{GL}_2(k_{F_\nu})$ à $\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{F_\nu})$ de la représentation de Steinberg de $\mathrm{GL}_2(k_{F_\nu})$, qui est absolument irréductible modulo p. Il n'y a donc qu'un seul $\mathscr{O}_E$-réseau stable à homothétie près sur σ_ν que l'on note encore $\sigma^0_\nu(\rho_\nu)$.

(iii) Si c'est une série principale modérément ramifiée qui n'est pas non ramifiée (à torsion près), alors σ_ν en (14) est isomorphe à $\sigma(\chi^s_\nu)$ pour un caractère modérément ramifié $\chi_\nu = \eta_\nu \otimes \eta'_\nu$ avec $\eta_\nu \neq \eta'_\nu$ comme au §2. On a $\eta_\nu\eta'_\nu = \psi_\nu|_{\mathscr{O}^\times_{F_\nu}}$. Par ailleurs, on sait par la compatibilité local-global de [**31**] et [**29**] que la restriction à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F_\nu)$ de l'unique $\mathscr{O}_E$-réseau galoisien sur le dual de Cartier $\rho^\vee(1)$ de ρ est le module de Tate d'un groupe p-divisible sur l'anneau des entiers de $F_\nu[\sqrt[q_\nu-1]{-p}]$ et que le module de Dieudonné contravariant M_ν de la fibre spéciale de ce groupe p-divisible est un $\mathscr{O}_E$-module de Dieudonné de type χ_ν. De plus l'égalité $\det(\rho) = \psi\varepsilon$ entraîne facilement $\varphi(\bigwedge^2_{\mathscr{O}_{F_\nu}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathscr{O}_E} M_\nu) = p\bigwedge^2_{\mathscr{O}_{F_\nu}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathscr{O}_E} M_\nu$. Par le lemme 3.5 et ce qui le précède, on peut donc associer à M_ν un $\mathscr{O}_E$-réseau de Dieudonné sur σ_ν que l'on note $\sigma^0_\nu(\rho_\nu)$, bien défini à homothétie près, à savoir le réseau :

$$\sigma^0_{\eta_\nu}(\chi^s_\nu) = \bigoplus_{J\in\mathscr{P}_\chi} (\Pi_{j\in J} x_{f_\nu-1-j})\sigma_J \tag{15}$$

(avec les notations du §2) où $\varphi(e^j_{\eta_\nu}) = x_j e^{j+1}_{\eta_\nu}$ et l'action de $\mathrm{Gal}(F_\nu[\sqrt[q_\nu-1]{-p}]/F_\nu)$ sur $e^j_{\eta_\nu}$ se fait par η_ν (composé avec l'isomorphisme (4) pour $L = F_\nu$). La notation $\sigma^0_\nu(\rho_\nu)$ devient ainsi claire puisque ce réseau est défini à partir du réseau sur la représentation p-adique ρ_ν.

Conjecture 3.8. — *Soit π une composante irréductible de $S^D_\psi(E)$ de dimension infinie telle que ρ est absolument irréductible modulo p. Soit ν une place divisant p où D et F sont non ramifiés. Si π_ν est une série principale modérément ramifiée, alors les $\mathscr{O}_E$-réseaux σ^0_{ν,ξ_ν} sur σ_ν sont tous homothétiques à $\sigma^0_\nu(\rho_\nu)$*[(6)]*.*

La signification de la conjecture est qu'aux places $\nu|p$ où π_ν est modérément ramifiée, alors le réseau sur le type σ_ν induit par la cohomologie entière, c'est-à-dire par la théorie globale, est déterminé par le réseau induit sur la représentation galoisienne p-adique ρ_ν. En particulier, il ne devrait dépendre ni de D ni de ξ_ν. En fait, comme on vient de le voir, la conjecture est non triviale seulement si π_ν est une série principale modérément ramifiée qui n'est pas non ramifiée à torsion près. Seul un « petit morceau » de la représentation p-adique ρ_ν est alors utilisé pour décrire le réseau conjectural induit, mais il serait déjà impossible, pour $F_\nu \neq \mathbb{Q}_p$, de reconstituer ce réseau sur σ_ν à partir seulement de la représentation de Weil-Deligne associée à ρ_ν. En ce sens la conjecture 3.8 s'inscrit donc vraiment dans le « programme de Langlands p-adique ».

Remarque 3.9. — On pourrait facilement formuler la conjecture 3.8 sans l'hypothèse F_ν non ramifié puisque, côté GL_2, tout se passe sur le groupe $\mathrm{GL}_2(k_{F_\nu})$ et, côté Galois, la filtration de Hodge n'intervient pas.

Proposition 3.10. — *La conjecture 3.8 est vraie si $F = \mathbb{Q}$.*

Démonstration. — Notons que $\nu = p$ ici. On suppose que π_p est une série principale modérément ramifiée qui n'est pas non ramifiée à torsion près sinon il n'y a rien à montrer. Dans ce cas le module de Dieudonné contravariant M_p ci-dessus est donné par $M_p = \mathscr{O}_E e_{\eta_p} \oplus \mathscr{O}_E e_{\eta'_p}$ avec $\varphi(e_{\eta_p}) = x e_{\eta_p}$ et $\varphi(e_{\eta'_p}) = x' e_{\eta'_p}$ pour $x, x' \in \mathscr{O}_E$ tels que $\mathrm{val}(x) + \mathrm{val}(x') = 1$. On a par ailleurs en utilisant [**31**] et avec les conventions qui précèdent :

$$\pi_p = \mathrm{ind}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}_{B(\mathbb{Q}_p)} \widehat{\eta}_p|\cdot| \otimes \widehat{\eta}'_p \simeq \mathrm{ind}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}_{B(\mathbb{Q}_p)} \widehat{\eta}'_p|\cdot| \otimes \widehat{\eta}_p$$

(induites paraboliques lisses non tordues) où $|\cdot|$ est le caractère $x \mapsto p^{-\mathrm{val}(x)}$, $\widehat{\eta}_p|_{\mathbb{Z}_p^\times} = \eta_p$, $\widehat{\eta}'_p|_{\mathbb{Z}_p^\times} = \eta'_p$, $\widehat{\eta}_p(p) = x$, $\widehat{\eta}'_p(p) = x'$. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix}$ préserve le réseau π^0_{p,ξ_p} pour tout plongement ξ_p et aussi le sous-espace $\pi_p^{I_1} = \sigma_p^{I_1} =$

(6) Emerton, Gee et Savitt m'ont informé avoir une preuve de cette conjecture, voir la note de bas de page dans la conjecture 1.2 de l'introduction.

$\mathrm{ind}_I^K\,\eta'_p\otimes\eta_p$, donc induit un automorphisme de $(\sigma^0_{p,\xi_p})^{I_1}$. Soit $\phi, f_0\in\mathrm{ind}_I^K\,\eta'_p\otimes\eta_p$ comme au §2, un calcul facile dans $\mathrm{ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\,\widehat{\eta}'_p|\cdot|\otimes\widehat{\eta}_p$ donne :

$$\begin{pmatrix}0&1\\p&0\end{pmatrix}\phi=\frac{\widehat{\eta}'_p(p)}{p}f_0\quad\text{ou encore}\quad\begin{pmatrix}0&1\\p&0\end{pmatrix}f_0=\widehat{\eta}_p(p)\phi=x\phi$$

ce qui entraîne $\sigma^0_{p,\xi_p}\simeq\sigma_\emptyset\oplus x\sigma_{\mathscr{S}}$ (voir §2) qui est par définition le réseau $\sigma^0_p(\rho_p)$. $\square$

D'autres cas non triviaux de la conjecture 3.8 seront démontrés au §10 (théorème 10.3).

4. Poids de Serre et types modérés

Pour une représentation de dimension 2 générique fixée de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)$ sur k_E, on détermine le nombre et la position des poids de Serre associés dans la représentation $\overline{\sigma}(\chi^s)=\sigma^0(\chi^s)\otimes_{\mathscr{O}_E}k_E$ (§2).

On conserve les notations du §2 et on dit qu'un caractère $\chi: I\to\mathscr{O}_E^\times$ est modéré s'il s'agit d'un caractère comme en (5). On suppose que k_E contient une extension quadratique de k_L. On note $\widetilde{\omega}_f$ le caractère composé $k_L^\times\overset{[\cdot]}{\hookrightarrow}\mathscr{O}_L^\times\overset{\iota}{\hookrightarrow}\mathscr{O}_E^\times$ et ω_f la réduction de $\widetilde{\omega}_f$ dans $k_E^\times$. On note encore $\widetilde{\omega}_f$ et ω_f les caractères de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)$ ou de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L^{\mathrm{nr}})$ obtenus en composant $\widetilde{\omega}_f$ et ω_f avec le caractère $\varkappa_f$ en (4). Enfin, on note $\omega_{2f}:\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L^{\mathrm{nr}})\to k_E^\times$ un caractère tel que $\omega_{2f}^{q+1}=\omega_f$.

On définit une application bijective δ de l'ensemble des parties J de $\{0,\cdots,f-1\}$ dans lui-même en posant $j\in\delta(J)$ si et seulement si $j+1\in J$ (autrement dit $\delta(J)$ est le translaté d'un cran à gauche de J). On appelle poids de Serre une représentation irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_L)$, ou de $\mathrm{GL}_2(k_L)$, sur k_E. Si σ est un poids de Serre, alors σ^{I_1} est de dimension 1 et on note $[\sigma^{I_1}]$ le représentant multiplicatif du caractère donnant l'action de I sur σ^{I_1}.

Si $s_0,\cdots,s_{f-1}$ sont f entiers dans $\{0,\cdots,p-1\}$, on note $(s_0,\cdots,s_{f-1})$ le poids de Serre :

$$(\mathrm{Sym}^{s_0}k_E^2)\otimes_{k_E}(\mathrm{Sym}^{s_1}k_E^2)^{\varphi}\otimes_{k_E}\cdots\otimes_{k_E}(\mathrm{Sym}^{s_{f-1}}k_E^2)^{\varphi^{f-1}}$$

où par définition $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ agit sur $(\mathrm{Sym}^{s_j}k_E^2)^{\varphi^j}$ via $\begin{pmatrix}a^{p^j}&b^{p^j}\\c^{p^j}&d^{p^j}\end{pmatrix}$ puis le plongement ω_f.

On fixe $\overline{\rho}:\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)\to\mathrm{GL}_2(k_E)$ une représentation continue générique (voir [**11**, Def.11.7]), c'est-à-dire une représentation de la forme (i) ou (ii) ci-dessous :

(i) $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L^{\mathrm{nr}})} \cong \begin{pmatrix} \omega_f^{\sum_{j=0}^{f-1}(r_j+1)p^j} & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \theta$ avec $0 \leq r_j \leq p-3$ et $(r_j) \notin \{(0,\cdots,0),(p-3,\cdots,p-3)\}$

(ii) $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L^{\mathrm{nr}})} \cong \begin{pmatrix} \omega_{2f}^{\sum_{j=0}^{f-1}(r_j+1)p^j} & 0 \\ 0 & \omega_{2f}^{q\sum_{j=0}^{f-1}(r_j+1)p^i} \end{pmatrix} \otimes \theta$ avec $1 \leq r_0 \leq p-2$ et $0 \leq r_j \leq p-3,\ j>0$

pour un caractère θ de l'inertie qui s'étend à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)$. Si $p=2$ il n'y a pas de représentations génériques, et si $p=3$ il n'y a pas de représentations génériques réductibles. La présence de l'hypothèse de généricité dans un énoncé suppose donc implicitement $p>2$.

À une telle représentation générique $\overline{\rho}$ est associé dans [**12**] un ensemble $\mathscr{D}(\overline{\rho})$ de poids de Serre. On rappelle brièvement la définition de cet ensemble en suivant la description de [**11**, §11].

Soit $(x_0,\cdots,x_{f-1})$ f variables (formelles) et $\lambda=(\lambda_0(x_0),\cdots,\lambda_{f-1}(x_{f-1}))$ où $\lambda_i(x_i)\in\mathbb{Z}\pm x_i$. On convient que $x_f=x_0$ et $\lambda_f(x_f)=\lambda_0(x_0)$ dans tout ce qui suit. On pose :

$$e(\lambda) \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{2}\Big(\sum_{j=0}^{f-1}p^j(x_j-\lambda_j(x_j))\Big) \text{ si } \lambda_{f-1}(x_{f-1})\in\mathbb{Z}+x_{f-1}$$

$$e(\lambda) \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{2}\Big(p^f-1+\sum_{j=0}^{f-1}p^j(x_j-\lambda_j(x_j))\Big) \text{ sinon.}$$

Notons $\mathscr{I}\mathscr{D}(x_0,\cdots,x_{f-1})$ l'ensemble des λ tels que :

(i) si $j\neq 0$, $\lambda_j(x_j)\in\{x_j,x_j+1,p-3-x_j,p-2-x_j\}$ (resp. $\lambda_0(x_0)\in\{x_0,x_0-1,p-2-x_0,p-1-x_0\}$)

(ii) si $j\neq 0$, $j<f-1$ et $\lambda_j(x_j)\in\{x_j,x_j+1\}$ (resp. $0<f-1$ et $\lambda_0(x_0)\in\{x_0-1,x_0\}$) alors $\lambda_{j+1}(x_{j+1})\in\{x_{j+1},p-2-x_{j+1}\}$

(iii) si $j\neq 0$, $j<f-1$ et $\lambda_j(x_j)\in\{p-2-x_j,p-3-x_j\}$ (resp. $0<f-1$ et $\lambda_0(x_0)\in\{p-2-x_0,p-1-x_0\}$) alors $\lambda_{j+1}(x_{j+1})\in\{p-3-x_{j+1},x_{j+1}+1\}$

(iv) si $\lambda_{f-1}(x_{f-1})\in\{p-2-x_{f-1},p-3-x_{f-1}\}$, alors $\lambda_0(x_0)\in\{p-1-x_0,x_0-1\}$

(v) si $\lambda_{f-1}(x_{f-1})\in\{x_{f-1},x_{f-1}+1\}$, alors $\lambda_0(x_0)\in\{x_0,p-2-x_0\}$.

Si $\overline{\rho}$ est générique irréductible on a $\mathscr{D}(\overline{\rho}) \overset{\text{déf}}{=} \{(\lambda_0(r_0),\cdots,\lambda_{f-1}(r_{f-1}))\otimes \det^{e(\lambda)(r_0,\cdots,r_{f-1})}\theta, \lambda\in\mathscr{I}\mathscr{D}(x_0,\cdots,x_{f-1})\}$.

Si $\overline{\rho}$ est générique réductible, la définition de $\mathscr{D}(\overline{\rho})$ est un peu plus subtile. Notons d'abord $\mathscr{R}\mathscr{D}(x_0,\cdots,x_{f-1})$ l'ensemble des λ tels que :

(i) $\lambda_j(x_j)\in\{x_j,x_j+1,p-3-x_j,p-2-x_j\}$

(ii) si $\lambda_j(x_j)\in\{x_j,x_j+1\}$ alors $\lambda_{j+1}(x_{j+1})\in\{x_{j+1},p-2-x_{j+1}\}$

(iii) si $\lambda_j(x_j)\in\{p-2-x_j,p-3-x_j\}$ alors $\lambda_{j+1}(x_{j+1})\in\{p-3-x_{j+1},x_{j+1}+1\}$

et récrivons :

$$\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L^{\mathrm{nr}})}\cong\begin{pmatrix}\omega_f^{\sum_{j=0}^{f-1}(s_j+1)p^{-j}} & *\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

où $s_j\overset{\text{déf}}{=}r_{f-j}$. Les conditions sur les r_j impliquent que le k_E-espace vectoriel des extensions entre les deux caractères de $\overline{\rho}$ (avec le caractère non ramifié en quotient) est de dimension f, d'où on déduit facilement qu'il existe un objet M de la catégorie de Fontaine-Laffaille muni d'une action linéaire de k_E tel que $\overline{\rho}\simeq\mathrm{Hom}_{\mathrm{Fil}^{\cdot},\varphi_{\cdot}}(M,A_{\mathrm{cris}}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{F}_p)$ (avec des notations évidentes, cela se déduit par exemple de [**22**, Prop.6.6] et de (16) ci-dessous). En particulier, M est un $k_L\otimes_{\mathbb{F}_p}k_E$-module libre de rang 2 et on peut écrire $M=M^0\times\cdots\times M^{f-1}$ avec $M^j=k_Ee^j\oplus k_Ef^j$, $\mathrm{Fil}^0M^j=M^j$, $\mathrm{Fil}^1M^j=\mathrm{Fil}^{s_j+1}M^j=k_Ef^j$, $\mathrm{Fil}^{s_j+2}M^j=0$ et :

$$\left\{\begin{array}{ccc}\varphi(e^j) & = & \alpha_{j+1}e^{j+1}\\ \varphi_{s_j+1}(f^j) & = & \beta_{j+1}(f^{j+1}+\mu_{j+1}e^{j+1})\end{array}\right.\tag{16}$$

où $j\in\{0,\cdots,f-1\}$, $\alpha_j,\beta_j\in k_E^\times$, $\mu_j\in k_E$. Notons que l'on a bien $s_j+1<p-1$. Les α_j,β_j,μ_j ne sont pas uniquement déterminés mais la nullité ou non de μ_j pour tout j est indépendante du choix de la base $(e^j,f^j)_j$ comme ci-dessus. On associe à $\overline{\rho}$ le sous-ensemble $\mathscr{D}(x_0,\cdots,x_{f-1})$ de $\mathscr{RD}(x_0,\cdots,x_{f-1})$ des λ tels que $\lambda_j(x_j)\in\{p-2-x_j,p-3-x_j\}$ implique $\mu_{f-j}=0$. Notons que $\mathscr{D}(x_0,\cdots,x_{f-1})=\mathscr{RD}(x_0,\cdots,x_{f-1})$ si et seulement si $\overline{\rho}$ est scindée. On a alors par la proposition A.3 ou par le résultat principal de [**14**] :

$$\mathscr{D}(\overline{\rho})=\{(\lambda_0(r_0),\cdots,\lambda_{f-1}(r_{f-1}))\otimes\det{}^{e(\lambda)(r_0,\cdots,r_{f-1})},\lambda\in\mathscr{D}(x_0,\cdots,x_{f-1})\}.$$

On note dans la suite :

$$J_{\overline{\rho}}\overset{\text{déf}}{=}\{j\mid\exists\,\lambda\in\mathscr{D}(x_0,\cdots,x_{f-1})\text{ avec }\lambda_j(x_j)\in\{p-3-x_j,x_j+1\}\}\tag{17}$$

de sorte que :

$$\delta(J_{\overline{\rho}})=\{f-j\mid\mu_j=0\}.\tag{18}$$

Remarque 4.1. — Voir la preuve de la proposition A.3 pour la définition originelle de $\mathscr{D}(\overline{\rho})$ donnée dans [**12**].

On note maintenant $\mathscr{PRD}(x_0,\cdots,x_{f-1})$ l'ensemble des λ tels que :

(i) $\lambda_j(x_j)\in\{x_j,x_j+1,x_j+2,p-3-x_j,p-2-x_j,p-1-x_j\}$

(ii) si $\lambda_j(x_j)\in\{x_j,x_j+1,x_j+2\}$ alors $\lambda_{j+1}(x_{j+1})\in\{x_{j+1},x_{j+1}+2,p-2-x_{j+1}\}$

(iii) si $\lambda_j(x_j)\in\{p-1-x_j,p-2-x_j,p-3-x_j\}$ alors $\lambda_{j+1}(x_{j+1})\in\{p-1-x_{j+1},p-3-x_{j+1},x_{j+1}+1\}$.

Autrement dit les uplets de $\mathscr{PRD}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ sont de la forme :

$$\cdots, p-2-x_j, \left\{\begin{array}{l} p-3-x_{j+1} \\ p-1-x_{j+1} \end{array}\right., \cdots, \left\{\begin{array}{l} p-3-x_{j+l-1} \\ p-1-x_{j+l-1} \end{array}\right., x_{j+l}+1,$$
$$\left\{\begin{array}{l} x_{j+l+1} \\ x_{j+l+1}+2 \end{array}\right., \cdots, \left\{\begin{array}{l} x_{j+l+l'-1} \\ x_{j+l+l'-1}+2 \end{array}\right., p-2-x_{j+l+l'}, \cdots$$

pour des entiers positifs $l, l', \cdots$ arbitraires où une accolade veut dire l'un des deux termes au choix (noter les deux cas extrêmes $\left\{\begin{array}{l} x_j \\ x_j+2 \end{array}\right.$ pour tout j ou $\left\{\begin{array}{l} p-3-x_j \\ p-1-x_j \end{array}\right.$ pour tout j).

Pour $\overline{\rho}$ générique réductible, on note $\mathscr{PD}(x_0, \cdots, x_{f-1}) \subseteq \mathscr{PRD}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ le sous-ensemble des λ tels que $\lambda_j(x_j) \in \{p-3-x_j, x_j+2\}$ implique $j \in J_{\overline{\rho}}$. On a $\overline{\rho}$ scindée si et seulement si $J_{\overline{\rho}} = \{0, \cdots, f-1\}$ si et seulement si $\mathscr{PD}(x_0, \cdots, x_{f-1}) = \mathscr{PRD}(x_0, \cdots, x_{f-1})$.

On note $\mathscr{PID}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ l'ensemble des λ tels que :

(i) si $j \neq 0$, $\lambda_j(x_j) \in \{x_j, x_j+1, x_j+2, p-3-x_j, p-2-x_j, p-1-x_j\}$ (resp. $\lambda_0(x_0) \in \{x_0, x_0-1, x_0+1, p-2-x_0, p-1-x_0, p-x_0\}$)

(ii) si $j \neq 0$, $j < f-1$ et $\lambda_j(x_j) \in \{x_j, x_j+1, x_j+2\}$ (resp. $0 < f-1$ et $\lambda_0(x_0) \in \{x_0-1, x_0, x_0+1\}$) alors $\lambda_{j+1}(x_{j+1}) \in \{x_{j+1}, x_{j+1}+2, p-2-x_{j+1}\}$

(iii) si $j \neq 0$, $j < f-1$ et $\lambda_j(x_j) \in \{p-1-x_j, p-2-x_j, p-3-x_j\}$ (resp. $0 < f-1$ et $\lambda_0(x_0) \in \{p-2-x_0, p-1-x_0, p-x_0\}$) alors $\lambda_{j+1}(x_{j+1}) \in \{p-3-x_{j+1}, p-1-x_{j+1}, x_{j+1}+1\}$

(iv) si $\lambda_{f-1}(x_{f-1}) \in \{p-1-x_{f-1}, p-2-x_{f-1}, p-3-x_{f-1}\}$, alors $\lambda_0(x_0) \in \{p-1-x_0, x_0-1, x_0+1\}$

(v) si $\lambda_{f-1}(x_{f-1}) \in \{x_{f-1}, x_{f-1}+1, x_{f-1}+2\}$, alors $\lambda_0(x_0) \in \{x_0, p-2-x_0, p-x_0\}$.

Autrement dit $\mathscr{PID}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ est défini comme $\mathscr{PRD}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ mais où $p-2-x_0$ est remplacé par $\left\{\begin{array}{l} p-2-x_0 \\ p-x_0 \end{array}\right.$, $\left\{\begin{array}{l} p-3-x_0 \\ p-1-x_0 \end{array}\right.$ par $p-1-x_0$, x_0+1 par $\left\{\begin{array}{l} x_0-1 \\ x_0+1 \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{l} x_0 \\ x_0+2 \end{array}\right.$ par x_0. Ces définitions très combinatoires vont trouver leur raison d'être dans la (preuve de la) proposition 4.2 ci-dessous.

Si $\overline{\rho}$ est générique réductible, on pose :

$$\mathscr{P}(\overline{\rho}) = \{(\lambda_0(r_0), \cdots, \lambda_{f-1}(r_{f-1})) \otimes \det^{e(\lambda)(r_0, \cdots, r_{f-1})}\theta, \lambda \in \mathscr{PD}(x_0, \cdots, x_{f-1})\}$$

et si ρ est générique irréductible on pose :

$$\mathscr{P}(\overline{\rho}) = \{(\lambda_0(r_0), \cdots, \lambda_{f-1}(r_{f-1})) \otimes \det^{e(\lambda)(r_0, \cdots, r_{f-1})}\theta, \lambda \in \mathscr{PID}(x_0, \cdots, x_{f-1})\}.$$

On peut vérifier que deux λ distincts donnent toujours deux éléments distincts de $\mathscr{P}(\overline{\rho})$, on a donc une bijection entre $\mathscr{P}\mathscr{D}(x_0,\cdots,x_{f-1})$ (resp. $\mathscr{P}\mathscr{I}\mathscr{D}(x_0,\cdots,x_{f-1})$) et $\mathscr{P}(\overline{\rho})$.

Proposition 4.2. — *L'ensemble des caractères modérés $\chi : I \to \mathscr{O}_E^\times$ tels que $\overline{\sigma}(\chi^s)$ contient en sous-quotient un poids de Serre de $\mathscr{D}(\overline{\rho})$ est exactement l'ensemble des caractères $[\sigma^{I_1}]$ pour $\sigma \in \mathscr{P}(\overline{\rho})$.*

Démonstration. — Rappelons que, si $\chi \neq \chi^s$, il existe un unique poids de Serre σ tel que $\chi = [\sigma^{I_1}]$ et ce poids de Serre est le socle de $\overline{\sigma}(\chi^s)$ ([**11**, §2]). Comme, dans les deux ensembles de l'énoncé, les caractères χ sont tels que $\chi \neq \chi^s$, il est équivalent de montrer que l'ensemble des poids de Serre σ tels que l'unique $\overline{\sigma}(\chi^s)$ de socle σ contient en sous-quotient un poids de Serre de $\mathscr{D}(\overline{\rho})$ est exactement l'ensemble $\mathscr{P}(\overline{\rho})$. Soit $\mathscr{P}\mathscr{S}(x_0,\cdots,x_{f-1}) \subset \mathscr{P}\mathscr{R}\mathscr{D}(x_0,\cdots,x_{f-1})$ le sous-ensemble des λ tels que $\lambda(x_j) \in \{x_j, x_j+1, p-2-x_j, p-1-x_j\}$ pour tout i et supposons d'abord $\overline{\rho}$ réductible. Il résulte immédiatement de la structure des constituants de $\overline{\sigma}(\chi^s)$ ([**11**, Lem.2.2]) que l'un d'entre eux est dans $\mathscr{D}(\overline{\rho})$ si et seulement s'il existe $\lambda = (\lambda_j(x_j))_j \in \mathscr{P}\mathscr{S}(x_0,\cdots,x_{f-1})$ et $\mu = (\mu_j(x_j))_j \in \mathscr{D}(x_0,\cdots,x_{f-1})$ tels que :

$$\sigma = \big(\lambda_1(\mu_1(r_1)),\cdots,\lambda_{f-1}(\mu_{f-1}(r_{f-1}))\big) \otimes \det{}^{e(\mu)(r_0,\cdots,r_{f-1})+e(\lambda)(\mu(r_0),\cdots,\mu(r_{f-1}))}\theta.$$

Mais un calcul immédiat montre d'une part que les uplets de la forme $\lambda \circ \mu = (\lambda_j(\mu_j(x_j)))_j$ pour λ, μ comme ci-dessus sont *exactement* les uplets de $\mathscr{P}\mathscr{D}(x_0,\cdots,x_{f-1})$ (c'est en fait l'origine de la définition ci-dessus de $\mathscr{P}\mathscr{D}(x_0,\cdots,x_{f-1})$!), d'autre part que :

$$e(\mu)(x_0,\cdots,x_{f-1})+e(\lambda)(\mu(x_0),\cdots,\mu(x_{f-1})) \equiv e(\lambda\circ\mu)(x_0,\cdots,x_{f-1}) \bmod q-1.$$

On en déduit la proposition dans le cas réductible. Le cas irréductible est complètement analogue avec $\mathscr{P}\mathscr{I}\mathscr{D}(x_0,\cdots,x_{f-1})$. $\square$

Si χ, $\mathscr{P}_\chi$ sont comme au §2, on rappelle que $\sigma^0(\chi^s) = \bigoplus_{J\in\mathscr{P}_\chi}\sigma_J$ et que les facteurs de Jordan-Hölder de $\overline{\sigma}(\chi^s)$ sont en bijection avec les éléments de $\mathscr{P}_\chi$ par $J \mapsto \overline{\sigma}_J$ (cf. §2).

Proposition 4.3. — *Soit $\chi : I \to \mathscr{O}_E^\times$ un caractère modéré tel que $\chi^s \neq \chi$ et soit $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L) \to \mathrm{GL}_2(k_E)$ une représentation continue générique. Si $\overline{\sigma}(\chi^s)$ contient au moins un poids de Serre de $\mathscr{D}(\overline{\rho})$ comme sous-quotient, alors il existe un unique couple $(J^{\min}, J^{\max}) \in \mathscr{P}_\chi \times \mathscr{P}_\chi$ (dépendant de χ et $\overline{\rho}$) vérifiant $J^{\min} \subseteq J^{\max}$ tel que les facteurs de Jordan-Hölder de $\overline{\sigma}(\chi^s)$ qui sont des poids de Serre pour $\overline{\rho}$ sont exactement les $\overline{\sigma}_J$ pour $J^{\min} \subseteq J \subseteq J^{\max}$ (et tous ces J sont dans $\mathscr{P}_\chi$). De plus $|J^{\max}\backslash J^{\min}|$ est un entier pair si $\overline{\rho}$ est réductible scindée, impair si $\overline{\rho}$ est irréductible et on a $J^{\max}\backslash J^{\min} \subseteq \delta(J_{\overline{\rho}})$ si $\overline{\rho}$ est réductible non scindée.*

Démonstration. — Par la proposition 4.2, on a $\chi = [\sigma^{I_1}]$ pour un unique $\sigma \in \mathscr{P}(\overline{\rho})$ correspondant à un unique $\lambda \in \mathscr{P}\mathscr{D}(x_0,\cdots,x_{f-1})$ ou $\mathscr{P}\mathscr{I}\mathscr{D}(x_0,\cdots,x_{f-1})$

suivant $\overline{\rho}$ réductible ou irréductible (notons que $\sigma = (c_{\chi,0}, \cdots, c_{\chi,f-1}) \otimes \overline{\eta}'(\det)$ avec les notations du §2). Si $\overline{\rho}$ est réductible on pose :

$$(19)\quad \begin{cases} J^{\min} \overset{\text{déf}}{=} \delta\big(\{j \mid \lambda_j(x_j) \in \{p-1-x_j, x_j+2\} \text{ ou } \\ \qquad\qquad (\lambda_j(x_j) = x_j+1 \text{ et } j \notin J_{\overline{\rho}})\}\big) \\ J^{\max} \overset{\text{déf}}{=} \delta\big(\{j \mid \lambda_j(x_j) \notin \{p-3-x_j, x_j\} \text{ et } \\ \qquad\qquad j \in J_{\overline{\rho}} \text{ si } \lambda_j(x_j) = p-2-x_j\}\big) \end{cases}$$

et si $\overline{\rho}$ est irréductible :

$$(20)\quad \begin{cases} J^{\min} \overset{\text{déf}}{=} \delta\big(\{j \mid j \neq 0 \text{ et } \lambda_j(x_j) \in \{p-1-x_j, x_j+2\} \text{ ou } \\ \qquad\qquad j = 0 \text{ et } \lambda_0(x_0) \in \{p-x_0, x_0+1\}\}\big) \\ J^{\max} \overset{\text{déf}}{=} \delta\big(\{j \mid j \neq 0 \text{ et } \lambda_j(x_j) \notin \{p-3-x_j, x_j\} \text{ ou } \\ \qquad\qquad j = 0 \text{ et } \lambda_0(x_0) \notin \{p-2-x_0, x_0-1\}\}\big). \end{cases}$$

Supposons $\overline{\rho}$ réductible. Il est évident sur leur définition que l'on a toujours $J^{\min} \subseteq J^{\max}$ et $J^{\max}\backslash J^{\min} \subseteq \delta(J_{\overline{\rho}})$. Si $\lambda_j(x_j) \in \{x_j, x_j+1, p-3-x_j, p-2-x_j\}$ alors $c_{\chi,j} = \lambda_j(r_j) \neq p-1$ car $\overline{\rho}$ est générique. De même si $\lambda_j(x_j) \in \{x_j+1, x_j+2, p-2-x_j, p-1-x_j\}$ alors $c_{\chi,j} = \lambda_j(r_j) \neq 0$. Cela entraîne facilement que tout $J \subseteq \mathscr{S}$ tel que $J^{\min} \subseteq J \subseteq J^{\max}$ est dans $\mathscr{P}_\chi$. Montrons que, si $J \not\subseteq J^{\max}$, alors $\overline{\sigma}_J \notin \mathscr{D}(\overline{\rho})$. Soit $j-1 \in J\backslash J^{\max}$. Comme $j-1 \notin J^{\max}$, on a soit $\lambda_j(x_j) \in \{p-3-x_j, x_j\}$ soit $\lambda_j(x_j) = p-2-x_j$ et $j \notin J_{\overline{\rho}}$. Comme $j-1 \in J$, on a soit $p-1-\lambda_j(r_j)$ soit $\lambda_j(r_j)-1$ qui apparaît dans le poids de Serre $\overline{\sigma}_J$ (cela découle de la structure des constituants de $\overline{\sigma}(\chi^s)$). Si $\lambda_j(x_j) \in \{p-3-x_j, x_j\}$, on voit que ni $p-1-\lambda_j(r_j)$ ni $\lambda_j(r_j)-1$ ne peuvent être dans un poids de Serre de $\mathscr{D}(\overline{\rho})$ (sauf peut-être si $r_j \in \{\frac{p-1}{2}, \frac{p-3}{2}, \frac{p-5}{2}\}$ mais une analyse plus poussée montre que cela ne peut quand même conduire à $\overline{\sigma}_J \in \mathscr{D}(\overline{\rho})$). Si $\lambda_j(x_j) = p-2-x_j$, on voit que $p-1-\lambda_j(r_j) = r_j+1$ et $\lambda_j(r_j)-1 = p-3-r_j$, et aucun des deux ne peut être dans un poids de Serre de $\mathscr{D}(\overline{\rho})$ puisque $j \notin J_{\overline{\rho}}$ (la valeur particulière $r_j = \frac{p-3}{2}$ ne pouvant de même conduire à un poids de Serre de $\mathscr{D}(\overline{\rho})$). Montrons que, si $J \subsetneq J^{\min}$, alors $\overline{\sigma}_J \notin \mathscr{D}(\overline{\rho})$. Soit $j-1 \in J^{\min}$, $j-1 \notin J$. Comme $j-1 \in J^{\min}$, on a $\lambda_j(x_j) \in \{p-1-x_j, x_j+2\}$ ou $\lambda_j(x_j) = x_j+1$ et $j \notin J_{\overline{\rho}}$. Comme $j-1 \notin J$, on a soit $p-2-\lambda_j(r_j)$ soit $\lambda_j(r_j)$ qui apparaît dans le poids de Serre $\overline{\sigma}_J$. Dans tous les cas, on voit comme précédemment qu'il ne peut s'agir d'un poids de Serre de $\mathscr{D}(\overline{\rho})$. Donc, si $\overline{\sigma}(\chi^s)$ possède au moins un poids de Serre $\overline{\sigma}_J$ qui est dans $\mathscr{D}(\overline{\rho})$, on doit avoir $J^{\min} \subseteq J \subseteq J^{\max}$. On laisse au lecteur le soin de vérifier qu'alors tout J entre $J^{\min}$ et $J^{\max}$ vérifie $\overline{\sigma}_J \in \mathscr{D}(\overline{\rho})$. Enfin, si $\overline{\rho}$ est scindée, on a :

$$|J^{\max}\backslash J^{\min}| = |\mathscr{S}\backslash\{j \mid \lambda_j(x_j) \in \{p-3-x_j, x_j, p-1-x_j, x_j+2\}\}|$$

c'est-à-dire $|J^{\max}\backslash J^{\min}| = |\{j \mid \lambda_j(x_j) = p-2-x_j \text{ ou } \lambda_j(x_j) = x_j+1\}|$ qui est pair car il y a par définition autant de $p-2-x_j$ que de x_j+1 dans un uplet de $\mathscr{PRD}(x_0, \cdots, x_{f-1})$. Ceci achève la preuve dans le cas $\overline{\rho}$ réductible. La preuve pour $\overline{\rho}$ irréductible est analogue et laissée au lecteur. □

L'énoncé 4.3 était déjà connu de Diamond (dans le cas $\overline{\rho}$ semi-simple au moins).

Proposition 4.4. — *Soit* $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L) \to \mathrm{GL}_2(k_E)$ *une représentation continue générique.*
(i) Supposons $\overline{\rho}$ *scindée (resp. irréductible). Alors pour chaque couple* $(J^{\min}, J^{\max})$ *de parties de* $\mathscr{S}$ *telles que* $J^{\min} \subseteq J^{\max}$ *et* $|J^{\max}\backslash J^{\min}|$ *est pair (resp.* $|J^{\max}\backslash J^{\min}|$ *est impair), il existe exactement deux caractères modérés distincts* $\chi : I \to \mathscr{O}_E^\times$ *tels que les constituants de* $\overline{\sigma}(\chi^s)$ *qui sont dans* $\mathscr{D}(\overline{\rho})$ *sont exactement les* $\overline{\sigma}_J$ *pour* $J^{\min} \subseteq J \subseteq J^{\max}$.
(ii) Supposons $\overline{\rho}$ *réductible non scindée. Alors pour chaque couple* $(J^{\min}, J^{\max})$ *de parties de* $\mathscr{S}$ *telles que* $J^{\min} \subseteq J^{\max}$ *et* $J^{\max}\backslash J^{\min} \subseteq \delta(J_{\overline{\rho}})$*, il existe un unique caractère modéré* $\chi : I \to \mathscr{O}_E^\times$ *tels que les constituants de* $\overline{\sigma}(\chi^s)$ *qui sont dans* $\mathscr{D}(\overline{\rho})$ *sont exactement les* $\overline{\sigma}_J$ *pour* $J^{\min} \subseteq J \subseteq J^{\max}$.

Démonstration. — On ne donne la preuve que pour $\overline{\rho}$ réductible, laissant le cas $\overline{\rho}$ irréductible au lecteur.
(i) Supposons $\overline{\rho}$ scindée. Fixons $J^{\min} \subseteq J^{\max}$ et reprenons les notations de la preuve de la proposition 4.3. Si $J^{\min} = J^{\max}$, il y a deux $\lambda \in \mathscr{PRD}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ distincts vérifiant (19) : l'un où $\lambda_j(x_j) = p-1-x_j$ si $j \in \delta^{-1}(J^{\min})$ et $\lambda_j(x_j) = p-3-x_j$ si $j \notin \delta^{-1}(J^{\min})$, l'autre où $\lambda_j(x_j) = x_j+2$ si $j \in \delta^{-1}(J^{\min})$ et $\lambda_j(x_j) = x_j$ si $j \notin \delta^{-1}(J^{\min})$. Supposons $J^{\min} \subsetneq J^{\max}$. L'ensemble $\delta^{-1}(J^{\max}\backslash J^{\min})$ correspond aux indices où $\lambda_j(x_j) \in \{p-2-x_j, x_j+1\}$ (voir preuve de la proposition 4.3). Comme les $p-2-x_j$ et les x_j+1 se suivent alternativement dans λ, on voit qu'il y a exactement deux façons de les distribuer de la sorte sur les indices de $\delta^{-1}(J^{\max}\backslash J^{\min})$ (on utilise ici que $|J^{\max}\backslash J^{\min}|$ est pair). Les $p-1-x_j$ se distribuent alors uniquement sur les indices de $\delta^{-1}(J^{\min})$ de telle sorte qu'ils soient entre un $p-2-x_{j_1}$ et un $x_{j_2}+1$, $j_1 < j_2$, et les x_j+2 sur les indices de $\delta^{-1}(J^{\min})$ de telle sorte qu'ils soient entre un $x_{j_1}+1$ et un $p-2-x_{j_2}$, $j_1 < j_2$. Puis on « finit de remplir » en distribuant sur les indices restants les $p-3-x_j$ de telle sorte qu'ils soient entre un $p-2-x_{j_1}$ et un $x_{j_2}+1$, $j_1 < j_2$, et les x_j de telle sorte qu'ils soient entre un $x_{j_1}+1$ et un $p-2-x_{j_2}$, $j_1 < j_2$. Au final, on voit qu'il y a donc deux $\lambda \in \mathscr{PRD}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ distincts vérifiant (19). Ces deux λ correspondent à deux poids de Serre distincts $\sigma \in \mathscr{P}(\overline{\rho})$ tels que $\chi = [\sigma]^{I_1}$ est comme dans la proposition 4.3.
(ii) (La preuve qui suit est due à Y. Hu.) Par les propositions 4.2 et 4.3, il s'agit de montrer que pour $(J^{\min}, J^{\max})$ comme dans l'énoncé, il existe un unique $\lambda \in \mathscr{PD}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} J^{\min} & = & \delta\big(\{j \mid \lambda_j(x_j) \in \{p-1-x_j, x_j+2\} \text{ ou} \\ & & \qquad\qquad (\lambda_j(x_j) = x_j+1 \text{ et } j \notin J_{\overline{\rho}})\}\big) \\ J^{\max} & = & \delta\big(\{j \mid \lambda_j(x_j) \notin \{p-3-x_j, x_j\} \text{ et} \\ & & \qquad\qquad j \in J_{\overline{\rho}} \text{ si } \lambda_j(x_j) = p-2-x_j\}\big). \end{array}\right. \tag{21}$$

Prouvons d'abord l'unicité. On déduit facilement de (21) et de la définition de $J_{\overline{\rho}}$ les relations suivantes (notons que cela couvre tous les cas grâce à l'hypothèse

$\delta^{-1}(J^{\max}\backslash J^{\min}) \subseteq J_{\overline{\rho}})$:

$$\begin{array}{llll} & j\in\delta^{-1}(J^{\min})\cap J_{\overline{\rho}} & \Rightarrow & \lambda_j(x_j)\in\{p-1-x_j,x_j+2\}\\ & j\in\delta^{-1}(J^{\min})\backslash J_{\overline{\rho}} & \Rightarrow & \lambda_j(x_j)\in\{p-1-x_j,x_j+1\}\\ (22) & j\in\delta^{-1}(J^{\max}\backslash J^{\min}) & \Rightarrow & \lambda_j(x_j)\in\{p-2-x_j,x_j+1\}\\ & j\in J_{\overline{\rho}}\backslash\delta^{-1}(J^{\max}) & \Rightarrow & \lambda_j(x_j)\in\{p-3-x_j,x_j\}\\ & j\notin J_{\overline{\rho}}\cup\delta^{-1}(J^{\max}) & \Rightarrow & \lambda_j(x_j)\in\{p-2-x_j,x_j\}.\end{array}$$

D'après la définition de $\mathscr{P}\mathscr{D}(x_0,\cdots,x_{f-1})$, on en déduit que pour $j\notin J_{\overline{\rho}}$:

$$(23)\qquad\left\{\begin{array}{lll}\lambda_{j-1}(x_{j-1}) & \in & \{p-1-x_{j-1},p-2-x_{j-1},p-3-x_{j-1}\}\ \text{si}\\ & & \hfill j\in\delta^{-1}(J^{\min})\backslash J_{\overline{\rho}}\\ \lambda_{j-1}(x_{j-1}) & \in & \{x_{j-1},x_{j-1}+1,x_{j-1}+2\}\ \text{si}\ j\notin\delta^{-1}(J^{\max})\cup J_{\overline{\rho}}.\end{array}\right.$$

Notons de plus que chaque sous-ensemble de $\{x_j,x_j+1,x_j+2,p-1-x_j,p-2-x_j,p-3-x_j\}$ apparaissant sur le coté droit de (22) consiste en un élément de la forme $x_j+\cdot$ et un de la forme $p-\cdot-x_j$. Fixons maintenant $j\notin J_{\overline{\rho}}$ ce qui est possible puisque $\overline{\rho}$ est réductible non scindée (et donc $J_{\overline{\rho}}\subsetneq\mathscr{S}$). Alors $\lambda_{j-1}(x_{j-1})$ est uniquement déterminé par $J_{\overline{\rho}}$, $J^{\min}$ et $J^{\max}$ suivant les 5 cas dans (22) pour $j-1$ et les 2 cas dans (23) pour j. Puis, $\lambda_{j-1}(x_{j-1})$ étant connu, $\lambda_{j-2}(x_{j-2})$ est uniquement déterminé par (22) et la définition de $\mathscr{P}\mathscr{D}(x_0,\cdots,x_{f-1})$. De même, $\lambda_{j-3}(x_{j-3}),\lambda_{j-4}(x_{j-4}),\cdots,\lambda_{j+1}(x_{j+1})$ sont aussi uniquement déterminés, ainsi que $\lambda_j(x_j)$ lui-même par la définition de $\mathscr{P}\mathscr{D}(x_0,\cdots,x_{f-1})$. Prouvons maintenant l'existence de λ tel que la condition (21) soit satisfaite. On remarque que cette condition est en fait *équivalente* aux relations dans (22) (par exemple, (22) implique que $j\in\delta^{-1}(J^{\min})=(\delta^{-1}(J^{\min}\cap J_{\overline{\rho}}))\cup(\delta^{-1}(J^{\min})\backslash J_{\overline{\rho}})$ si et seulement si $\lambda_j(x_j)\in\{p-1-x_j,x_j+2\}$ ou $\lambda_j(x_j)=x_j+1$ mais $j\notin J_{\overline{\rho}}$). Pour définir λ, soit $j\notin J_{\overline{\rho}}$. On définit $\lambda_{j-1}(x_{j-1})$ comme l'unique élément de $\{x_{j-1},x_{j-1}+1,x_{j-1}+2,p-1-x_{j-1},p-2-x_{j-1},p-3-x_{j-1}\}$ vérifiant à la fois (22) (pour $j-1$) et (23). On définit de la même façon $\lambda_{j-2}(x_{j-2}),\lambda_{j-3}(x_{j-3}),\cdots,\lambda_{j+1}(x_{j+1})$ et on pose (rappelons que $j\notin J_{\overline{\rho}}$ donc $j\notin\delta^{-1}(J^{\max}\backslash J^{\min})$) :

$$\begin{array}{lclclcl}\lambda_j(x_j) & \overset{\text{déf}}{=} & p-1-x_j & \text{si} & j\in\delta^{-1}(J^{\min})\backslash J_{\overline{\rho}} & \text{et} & \lambda_{j+1}(x_{j+1})\in B\\ \lambda_j(x_j) & \overset{\text{déf}}{=} & x_j+1 & \text{si} & j\in\delta^{-1}(J^{\min})\backslash J_{\overline{\rho}} & \text{et} & \lambda_{j+1}(x_{j+1})\in A\\ \lambda_j(x_j) & \overset{\text{déf}}{=} & p-2-x_j & \text{si} & j\notin\delta^{-1}(J^{\max})\cup J_{\overline{\rho}} & \text{et} & \lambda_{j+1}(x_{j+1})\in B\\ \lambda_j(x_j) & \overset{\text{déf}}{=} & x_j & \text{si} & j\notin\delta^{-1}(J^{\max})\cup J_{\overline{\rho}} & \textit{et} & \lambda_{j+1}(x_{j+1})\in A\end{array}$$

où l'on a noté $A\overset{\text{déf}}{=}\{x_{j+1},x_{j+1}+2,p-2-x_{j+1}\}$ et $B\overset{\text{déf}}{=}\{p-1-x_{j+1},p-3-x_{j+1},x_{j+1}+1\}$. C'est bien l'élément cherché. □

Remarque 4.5. — (i) Tous les J de la proposition 4.4 qui sont entre $J^{\min}$ et $J^{\max}$ sont automatiquement dans $\mathscr{P}_\chi$.

(ii) Soit $\overline{\rho}$ générique semi-simple, $(J^{\min},J^{\max})$ deux parties de $\mathscr{S}$ telles que $J^{\min}\subseteq J^{\max}$ et λ_0,λ_1 les deux uplets de $\mathscr{P}\mathscr{R}\mathscr{D}(x_0,\cdots,x_{f-1})$ ou $\mathscr{P}\mathscr{I}\mathscr{D}(x_0,\cdots,x_{f-1})$ associés à $\overline{\rho}$ et $(J^{\min},J^{\max})$ par le (i) de la proposition 4.4. On vérifie facilement que l'on a $\lambda_i(x_0,\cdots,x_{f-1})=\lambda_{1-i}(p-3-x_0,\cdots,p-3-x_{f-1})$ si $\overline{\rho}$ est scindée et $\lambda_i(x_0,x_1,\cdots,x_{f-1})=\lambda_{1-i}(p-1-x_0,p-3-x_1,\cdots,p-3-x_{f-1})$ si $\overline{\rho}$ est

irréductible ($i \in \{0,1\}$). Si l'on suppose $J^{\min} = \emptyset$ et $J^{\max} = \mathscr{S}$, le (i) de la proposition 4.4 est alors dû à Diamond et contenu dans [**20**, Th.0.1].
(iii) Les propositions 4.3 et 4.4 permettent une nouvelle preuve (bien que basée sur les mêmes formules) de [**11**, Prop.14.7] donnant la dimension des invariants sous I_1 de la K-représentation $D_0(\overline{\rho})$ de [**11**, §13]. De manière équivalente par les propriétés de $D_0(\overline{\rho})$, cela revient à calculer le nombre de caractères modérés χ tels que $\overline{\sigma}(\chi^s)$ contient au moins un poids de Serre de $\mathscr{D}(\overline{\rho})$ comme sous-quotient (voir preuve de [**11**, Cor.13.6]). Par les propositions ci-dessus, cela revient à compter les paires $(J^{\min}, J^{\max})$ convenables (et à multiplier par 2 si $\overline{\rho}$ est semi-simple). Par exemple, si $\overline{\rho}$ est réductible non scindée, $|J_{\overline{\rho}}| = d$ et $i \in \{0, \cdots, d\}$, il y a $\binom{d}{i}$ parties $J^{\max}\backslash J^{\min}$ de $\delta(J_{\overline{\rho}})$ de cardinal i et 2^{f-i} parties $J^{\min}$ d'un ensemble à $f-i$ éléments, de sorte que les paires $(J^{\min}, J^{\max})$ comme au (ii) de la proposition 4.4 sont au nombre de $\sum_{i=0}^{d}\binom{d}{i}2^{f-i} = 2^{f-d}(\sum_{i=0}^{d}\binom{d}{i}2^{d-i}) = 2^{f-d}3^d$ qui est bien la formule de [**11**, Prop.14.7].

5. Groupes p-divisible et réseaux de Dieudonné

Lorsque $p > 2$, on calcule les modules fortement divisibles de tous les groupes p-divisibles sur l'anneau des entiers de $L[\sqrt[p^f-1]{-p}]$ avec donnée de descente de type $\sigma(\chi^s)$.

On suppose $p > 2$ et on conserve les notations des §§2, 3 et 4. On suppose de plus $|\operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(L[\sqrt[p^{2f}-1]{-p}], E)| = [L[\sqrt[p^{2f}-1]{-p}] : \mathbb{Q}_p]$. On pose $e \overset{\text{déf}}{=} p^f - 1$ et on définit S comme le complété p-adique de l'enveloppe aux puissances divisées de $\mathscr{O}_E[u]$ par rapport à l'idéal $(u^e+p)\mathscr{O}_E[u]$ compatibles avec les puissances divisées sur l'idéal $p\mathscr{O}_E[u]$. On note $\mathrm{Fil}^1 S$ le complété p-adique de l'idéal engendré par $\frac{(u^e+p)^i}{i!}$ pour $i \geq 1$ et $\mathrm{Fil}^p S$ celui de l'idéal engendré par $\frac{(u^e+p)^i}{i!}$ pour $i \geq p$. On munit S d'un Frobenius $\mathscr{O}_E$-linéaire p-adiquement continu φ défini par $\varphi(u^i) = u^{pi}$. Il est tel que $\varphi(\mathrm{Fil}^1 S) \subseteq pS$.

On rappelle ([**4, 32**]) qu'un groupe p-divisible G sur $\mathscr{O}_L[\sqrt[e]{-p}]$ muni d'une injection de $\mathscr{O}_E$ dans son anneau d'endomorphismes peut se décrire comme un $\mathscr{O}_E$-module fortement divisible :

$$\big(\mathcal{M} = \mathcal{M}^0 \times \cdots \times \mathcal{M}^{f-1}, \mathrm{Fil}^1\mathcal{M} = \mathrm{Fil}^1\mathcal{M}^0 \times \cdots \times \mathrm{Fil}^1\mathcal{M}^{f-1}, \varphi\big)$$

où $\mathcal{M}^j$ est un S-module libre de rang fini, $\mathrm{Fil}^1\mathcal{M}^j \subseteq \mathcal{M}^j$ un sous-S-module contenant $(\mathrm{Fil}^1 S)\mathcal{M}^j$ tel que $\mathcal{M}^j/\mathrm{Fil}^1\mathcal{M}^j$ est sans p-torsion et $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ une application semi-linéaire par rapport au Frobenius sur S envoyant $\mathcal{M}^j$ dans $\mathcal{M}^{j+1}$ (avec « $(f-1)+1=0$ »), telle que $\varphi(\mathrm{Fil}^1\mathcal{M}^j) \subseteq p\mathcal{M}^{j+1}$ et $\varphi(\mathrm{Fil}^1\mathcal{M}^j)$ engendre $p\mathcal{M}^{j+1}$ sur S pour tout j. On pose $\varphi_1 \overset{\text{déf}}{=} \frac{\varphi}{p}|_{\mathrm{Fil}^1\mathcal{M}}$.

Définition 5.1. — *On appelle $\mathscr{O}_E$-module fortement divisible de type $\chi = \eta \otimes \eta'$ (χ comme au §2) tout $\mathscr{O}_E$-module fortement divisible $\mathcal{M}$ tel que, pour tout j, $\mathcal{M}^j$*

est libre de rang 2 sur S, $\varphi(\bigwedge_S^2 \mathcal{M}^j)$ engendre $p\bigwedge_S^2 \mathcal{M}^{j+1}$ sur S et $\mathcal{M}^j$ est muni d'une action $\mathscr{O}_E$-linéaire de $\mathrm{Gal}(L[\sqrt[e]{-p}]/L)$ *telle que :*

(i) $g(u^i m) = (\widetilde{\omega}_f(g)^{p^{-j}} u)^i g(m)$, $g \in \mathrm{Gal}(L[\sqrt[e]{-p}]/L)$, $m \in \mathcal{M}^j$

(ii) *l'action de* $\mathrm{Gal}(L[\sqrt[e]{-p}]/L)$ *préserve* $\mathrm{Fil}^1\mathcal{M}^j$ *et commute à* φ

(iii) *sur chaque $\mathcal{M}^j$ il existe une S-base sur laquelle l'action de* $\mathrm{Gal}(L[\sqrt[e]{-p}]/L)$ *est donnée par $\eta \circ \varkappa_f \oplus \eta' \circ \varkappa_f$.*

Pour plus de détails sur ces modules fortement divisibles avec donnée de descente modérément ramifiée, on renvoie à [**24**, §3.2] et à [**33**]. Noter que l'hypothèse $\varphi(\bigwedge_S^2 \mathcal{M}^j)$ engendre $p\bigwedge_S^2 \mathcal{M}^{j+1}$ sur S pour tout j est équivalente au fait que la représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)$ de rang 2 sur $\mathscr{O}_E$ associée au module de Tate du groupe p-divisible correspondant à $\mathcal{M}$ a comme poids de Hodge-Tate $(0,1)$ dans toutes les directions de $\mathscr{S}$.

On rappelle que $c_\chi = \sum_{i=0}^{f-1} c_{\chi,i} p^i \in \{1, \cdots, e-1\}$ est l'unique entier tel que $\eta = \widetilde{\omega}_f^{c_\chi} \eta'$. Comme $\widetilde{\omega}_f^e = 1$, on a aussi $\eta' = \widetilde{\omega}_f^{e-c_\chi}\eta$. On pose :

$$c_\chi^{(j)} \overset{\text{déf}}{=} \sum_{i=0}^{f-1} c_{\chi,[i-j]} p^i \tag{24}$$

où $[i-j] \overset{\text{déf}}{=} i-j$ si $i \geq j$ et $[i-j] \overset{\text{déf}}{=} f+i-j$ sinon (donc $c_\chi^{(0)} = c_\chi$).

Proposition 5.2. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathscr{O}_E$-module fortement divisible de type χ et notons $\widetilde{S} \overset{\text{déf}}{=} S/\mathrm{Fil}^p S$ et $\widetilde{\mathrm{Fil}}^1\mathcal{M}^j \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Fil}^1\mathcal{M}^j/(\mathrm{Fil}^p S)\mathcal{M}^j$. Il existe $(\widehat{e}_\eta^j, \widehat{e}_{\eta'}^j) \in \mathcal{M}^j \times \mathcal{M}^j$ pour tout $j \in \{0, \cdots, f-1\}$ tel que :*

(i) $\mathcal{M}^j = S\widehat{e}_\eta^j \oplus S\widehat{e}_{\eta'}^j$, $\forall\ j$

(ii) $\mathrm{Gal}(L[\sqrt[e]{-p}]/L)$ *agit sur $\widehat{e}_\eta^j$ (resp. $\widehat{e}_{\eta'}^j$) par $\eta \circ \varkappa_f$ (resp. $\eta' \circ \varkappa_f$) $\forall\ j$*

(iii) *il existe $a_j \in \mathscr{O}_E$ pour tout j, $\alpha, \alpha' \in \mathscr{O}_E^\times$ et $\lambda, \lambda' \in \mathscr{O}_E$ tels que l'une des trois situations suivantes est vraie :*

$$cas\ \mathrm{I}_\eta\ :\ \begin{cases} \widetilde{\mathrm{Fil}}^1 \mathcal{M}^j & = \ \widetilde{S}(\widehat{e}_\eta^j + a_j u^{c_\chi^{(j)}} \widehat{e}_{\eta'}^j) \oplus \widetilde{S}(u^e+p)\widehat{e}_{\eta'}^j \\ \varphi_1(\widehat{e}_\eta^j + a_j u^{c_\chi^{(j)}} \widehat{e}_{\eta'}^j) & = \ \widehat{e}_\eta^{j+1} \\ \varphi_1((u^e+p)\widehat{e}_{\eta'}^j) & = \ \widehat{e}_{\eta'}^{j+1} \end{cases}$$

$$cas\ \mathrm{I}_{\eta'}\ :\ \begin{cases} \widetilde{\mathrm{Fil}}^1 \mathcal{M}^j & = \ \widetilde{S}(u^e+p)\widehat{e}_\eta^j \oplus \widetilde{S}(\widehat{e}_{\eta'}^j + a_j u^{e-c_\chi^{(j)}} \widehat{e}_\eta^j) \\ \varphi_1((u^e+p)\widehat{e}_\eta^j) & = \ \widehat{e}_\eta^{j+1} \\ \varphi_1(\widehat{e}_{\eta'}^j + a_j u^{e-c_\chi^{(j)}} \widehat{e}_\eta^j) & = \ \widehat{e}_{\eta'}^{j+1} \end{cases}$$

$$cas\ \mathrm{II}\ :\ \begin{cases} 0 < \mathrm{val}(a_j) < 1 & \\ \widetilde{\mathrm{Fil}}^1 \mathcal{M}^j & = \ \widetilde{S}(a_j\widehat{e}_\eta^j + u^{c_\chi^{(j)}} \widehat{e}_{\eta'}^j) \oplus \widetilde{S}(-\frac{p}{a_j}\widehat{e}_{\eta'}^j + u^{e-c_\chi^{(j)}} \widehat{e}_\eta^j) \\ \varphi_1(a_j\widehat{e}_\eta^j + u^{c_\chi^{(j)}} \widehat{e}_{\eta'}^j) & = \ \widehat{e}_\eta^{j+1} \\ \varphi_1(-\frac{p}{a_j}\widehat{e}_{\eta'}^j + u^{e-c_\chi^{(j)}} \widehat{e}_\eta^j) & = \ \widehat{e}_{\eta'}^{j+1} \end{cases}$$

avec φ_1 modifié comme suit si $j = f-1$:

$$cas\ \mathrm{I}_\eta\ :\ \begin{cases} \varphi_1(\widehat{e}_\eta^{f-1} + a_{f-1} u^{c_\chi^{(f-1)}} \widehat{e}_{\eta'}^{f-1}) & = \ \alpha(\widehat{e}_\eta^0 + \lambda u^{pc_\chi^{(f-1)}} \widehat{e}_{\eta'}^0) \\ \varphi_1((u^e+p)\widehat{e}_{\eta'}^{f-1}) & = \ \alpha'(\widehat{e}_{\eta'}^0 + \lambda' u^{p(e-c_\chi^{(f-1)})} \widehat{e}_\eta^0) \end{cases}$$

$$cas\ \mathrm{I}_{\eta'}\ :\ \begin{cases} \varphi_1((u^e+p)\widehat{e}_\eta^{f-1}) & = \ \alpha(\widehat{e}_\eta^0 + \lambda u^{pc_\chi^{(f-1)}} \widehat{e}_{\eta'}^0) \\ \varphi_1(\widehat{e}_{\eta'}^{f-1} + a_{f-1} u^{e-c_\chi^{(f-1)}} \widehat{e}_\eta^{f-1}) & = \ \alpha'(\widehat{e}_{\eta'}^0 + \lambda' u^{p(e-c_\chi^{(f-1)})} \widehat{e}_\eta^0) \end{cases}$$

$$cas\ \mathrm{II}\ :\ \begin{cases} \varphi_1(a_{f-1}\widehat{e}_\eta^{f-1} + u^{c_\chi^{(f-1)}} \widehat{e}_{\eta'}^{f-1}) & = \ \alpha(\widehat{e}_\eta^0 + \lambda u^{pc_\chi^{(f-1)}} \widehat{e}_{\eta'}^0) \\ \varphi_1(-\frac{p}{a_{f-1}}\widehat{e}_{\eta'}^{f-1} + u^{e-c_\chi^{(f-1)}} \widehat{e}_\eta^{f-1}) & = \ \alpha'(\widehat{e}_{\eta'}^0 + \lambda' u^{p(e-c_\chi^{(f-1)})} \widehat{e}_\eta^0). \end{cases}$$

De plus, on peut prendre $\lambda = \lambda' = 0$ s'il existe $j \in \{0, \cdots, f-1\}$ tel que $c_{\chi,j} \notin \{0, 1, p-2, p-1\}$.

Démonstration. — Fixons d'abord une S-base $(\widehat{e}_\eta^0, \widehat{e}_{\eta'}^0)$ de $\mathcal{M}^0$ satisfaisant (ii). La décomposition de $\mathcal{M}^0/(\mathrm{Fil}^1 S)\mathcal{M}^0$ en sous-espaces isotypiques pour l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)$ est donnée par :

$$\mathcal{M}^0 = (\mathrm{Fil}^1 S)\mathcal{M}^0 \oplus \bigoplus_{j=0}^{e-c_\chi^{(0)}-1} \big(\mathscr{O}_E u^j \widehat{e}_\eta^0 \oplus \mathscr{O}_E u^{j+c_\chi^{(0)}} \widehat{e}_{\eta'}^0\big) \oplus \bigoplus_{j=0}^{c_\chi^{(0)}-1} \big(\mathscr{O}_E u^j \widehat{e}_{\eta'}^0 \oplus \mathscr{O}_E u^{j+e-c_\chi^{(0)}} \widehat{e}_\eta^0\big).$$

Puisque $\mathrm{Fil}^1\mathcal{M}^0$ est stable par $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)$, $\mathrm{Fil}^1\mathcal{M}^0/(\mathrm{Fil}^1 S)\mathcal{M}^0$ a aussi une décomposition analogue en sous-espaces isotypiques pour l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)$. En utilisant de plus que $u^i x \in \mathrm{Fil}^1\mathcal{M}^0$ si et seulement si $x \in \mathrm{Fil}^1\mathcal{M}^0$ et que $\varphi(\bigwedge_S^2 \mathcal{M}^0)$ engendre $p\bigwedge_S^2 \mathcal{M}^1$ sur S, on en déduit facilement qu'il existe $(a_0, a_0') \in \mathscr{O}_E^2$ tel que :

$$\mathrm{Fil}^1\mathcal{M}^0 = (\mathrm{Fil}^1 S)\mathcal{M}^0 \oplus \bigoplus_{j=0}^{e-c_\chi^{(0)}-1} \mathscr{O}_E u^j \widehat{f}_\eta^0 \oplus \bigoplus_{j=0}^{c_\chi^{(0)}-1} \mathscr{O}_E u^j \widehat{f}_{\eta'}^0$$

où $\widehat{f}_\eta^0 \in \{a_0\widehat{e}_\eta^0 \oplus u^{c_\chi^{(0)}}\widehat{e}_{\eta'}^0, \widehat{e}_\eta^0 \oplus a_0 u^{c_\chi^{(0)}}\widehat{e}_{\eta'}^0\}$, $\widehat{f}_{\eta'}^0 \in \{a_0'\widehat{e}_{\eta'}^0 \oplus u^{e-c_\chi^{(0)}}\widehat{e}_\eta^0, \widehat{e}_{\eta'}^0 \oplus a_0' u^{e-c_\chi^{(0)}}\widehat{e}_\eta^0\}$ et $\widehat{f}_\eta^0$, $\widehat{f}_{\eta'}^0$ vérifient dans $\bigwedge_S^2 \mathcal{M}^0$:

$$S\widehat{f}_\eta^0 \wedge \widehat{f}_{\eta'}^0 \subseteq S(u^e + p)\widehat{e}_\eta^0 \wedge \widehat{e}_{\eta'}^0. \tag{25}$$

En calculant $\widehat{f}_\eta^0 \wedge \widehat{f}_{\eta'}^0$ dans chacun des cas ci-dessus, on voit que l'inclusion (25) laisse comme possibilités :

cas I_η : $\widehat{f}_\eta^0 = \widehat{e}_\eta^0 \oplus a_0 u^{c_\chi^{(0)}}\widehat{e}_{\eta'}^0$ et $\widehat{f}_{\eta'}^0 = -pa_0\widehat{e}_{\eta'}^0 \oplus u^{e-c_\chi^{(0)}}\widehat{e}_\eta^0$ avec $a_0 \in \mathscr{O}_E$
cas $\mathrm{I}_{\eta'}$: $\widehat{f}_\eta^0 = -pa_0'\widehat{e}_\eta^0 \oplus u^{c_\chi^{(0)}}\widehat{e}_{\eta'}^0$ et $\widehat{f}_{\eta'}^0 = \widehat{e}_{\eta'}^0 \oplus a_0' u^{e-c_\chi^{(0)}}\widehat{e}_\eta^0$ avec $a_0' \in \mathscr{O}_E$
cas II : $\widehat{f}_\eta^0 = a_0\widehat{e}_\eta^0 \oplus u^{c_\chi^{(0)}}\widehat{e}_{\eta'}^0$ et $\widehat{f}_{\eta'}^0 = -\frac{p}{a_0}\widehat{e}_{\eta'}^0 \oplus u^{e-c_\chi^{(0)}}\widehat{e}_\eta^0$ avec $0<\mathrm{val}(a_0)<1$.

Comme $-pa_0\widehat{e}_{\eta'}^0 \oplus u^{e-c_\chi^{(0)}}\widehat{e}_\eta^0 = -a_0(u^e+p)\widehat{e}_{\eta'}^0 + u^{e-c_\chi^{(0)}}(\widehat{e}_\eta^0 \oplus a_0 u^{c_\chi^{(0)}}\widehat{e}_{\eta'}^0)$, on voit que le cas I_η ci-dessus correspond bien à $\mathrm{Fil}^1\mathcal{M}^0$ comme dans le cas I_η de l'énoncé, et de même pour le cas $\mathrm{I}_{\eta'}$. Ayant fixé une S-base $(\widehat{e}_\eta^0, \widehat{e}_{\eta'}^0)$ de $\mathcal{M}^0$ comme en (ii), on voit donc qu'il y a trois possibilités pour $\mathrm{Fil}^1\mathcal{M}^0$: les trois cas I_η, $\mathrm{I}_{\eta'}$ et II de l'énoncé. Changeant de notations, posons :

$$\begin{aligned} \text{cas } \mathrm{I}_\eta : \ (\widehat{f}_\eta^0, \widehat{f}_{\eta'}^0) &\overset{\text{déf}}{=} (\widehat{e}_\eta^0 \oplus a_0 u^{c_\chi^{(0)}}\widehat{e}_{\eta'}^0, (u^e+p)\widehat{e}_{\eta'}^0) \\ \text{cas } \mathrm{I}_{\eta'} : \ (\widehat{f}_\eta^0, \widehat{f}_{\eta'}^0) &\overset{\text{déf}}{=} ((u^e+p)\widehat{e}_\eta^0, \widehat{e}_{\eta'}^0 \oplus a_0 u^{e-c_\chi^{(0)}}\widehat{e}_\eta^0) \end{aligned}$$

où a_0' est maintenant noté a_0 dans le cas $\mathrm{I}_{\eta'}$. Si $f > 1$, soit $\widehat{e}_\eta^1 \overset{\text{déf}}{=} \varphi_1(\widehat{f}_\eta^0)$ et $\widehat{e}_{\eta'}^1 \overset{\text{déf}}{=} \varphi_1(\widehat{f}_{\eta'}^0)$, alors $(\widehat{e}_\eta^1, \widehat{e}_{\eta'}^1)$ est une S-base de $\mathcal{M}^1$ satisfaisant (ii) et, par le même raisonnement que précédemment, on a de même trois cas I_η, $\mathrm{I}_{\eta'}$ ou II pour $\mathrm{Fil}^1\mathcal{M}^1$. Partant de $(\widehat{e}_\eta^0, \widehat{e}_{\eta'}^0)$ comme en (ii), on voit donc que l'on peut choisir des bases $(\widehat{e}_\eta^j, \widehat{e}_{\eta'}^j)$ de $\mathcal{M}^j$ pour $0 \le j \le f-1$ satisfaisant (ii) et telles que l'énoncé (iii) est vérifié si $j < f-1$. Pour $j = f-1$, on a seulement *a priori* par la commutation à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/L)$:

$$\begin{aligned} \varphi_1(\widehat{f}_\eta^{f-1}) &= \alpha_0(\widehat{e}_\eta^0 + \widehat{g}_{\eta,0}) \\ \varphi_1(\widehat{f}_{\eta'}^{f-1}) &= \alpha_0'(\widehat{e}_{\eta'}^0 + \widehat{g}_{\eta',0}) \end{aligned}$$

où $\alpha_0, \alpha_0' \in \mathscr{O}_E^\times$, $\widehat{g}_{\eta,0} \in \mathcal{M}_\eta^0 \cap (u, \frac{u^{ei}}{i!})\mathcal{M}^0$ et $\widehat{g}_{\eta',0} \in \mathcal{M}_{\eta'}^0 \cap (u, \frac{u^{ei}}{i!})\mathcal{M}^0$, $\mathcal{M}_\eta^0$ (resp. $\mathcal{M}_{\eta'}^0$) désignant le sous-$\mathscr{O}_E$-module de $\mathcal{M}^0$ sur lequel $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/L)$ agit par multiplication par le caractère η (resp. η'). On remplace alors la S-base $(\widehat{e}_\eta^0, \widehat{e}_{\eta'}^0)$ par la S-base $(\widehat{e}_\eta^0 + \widehat{g}_{\eta,0}, \widehat{e}_{\eta'}^0 + \widehat{g}_{\eta',0})$ (satisfaisant encore (ii)) ce qui amène à modifier les éléments $(\widehat{f}_\eta^0, \widehat{f}_{\eta'}^0)$ (pour qu'ils aient la forme voulue dans cette nouvelle base) et donc aussi

$(\widehat{e}^1_\eta, \widehat{e}^1_{\eta'})$, et ainsi de suite avec tous les $(\widehat{e}^j_\eta, \widehat{e}^j_{\eta'})$ et $(\widehat{f}^j_\eta, \widehat{f}^j_{\eta'})$. On obtient au bout d'un tour dans les nouvelles bases après calcul :

$$\begin{array}{rcl}\varphi_1(\widehat{f}^{f-1}_\eta) & = & \alpha_1(\widehat{e}^0_\eta + \varpi_E\widehat{g}_{\eta,1} + \lambda_1 u^{pc^{(f-1)}_\chi}\widehat{e}^0_{\eta'}) \\ \varphi_1(\widehat{f}^{f-1}_{\eta'}) & = & \alpha'_1(\widehat{e}^0_{\eta'} + \varpi_E\widehat{g}_{\eta',1} + \lambda'_1 u^{p(e-c^{(f-1)}_\chi)}\widehat{e}^0_\eta)\end{array}$$

où ϖ_E est une uniformisante de $\mathscr{O}_E$, $\alpha_1 - \alpha_0 \in \varpi_E\mathscr{O}_E$, $\alpha'_1 - \alpha'_0 \in \varpi_E\mathscr{O}_E$, $\widehat{g}_{\eta,1} \in \mathcal{M}^0_\eta \cap (u, \frac{u^{ei}}{i!})\mathcal{M}^0$, $\widehat{g}_{\eta',1} \in \mathcal{M}^0_{\eta'} \cap (u, \frac{u^{ei}}{i!})\mathcal{M}^0$ et $\lambda_1, \lambda'_1 \in \mathscr{O}_E$. Quitte à modifier $\widehat{g}_{\eta,1}$ et $\widehat{g}_{\eta',1}$, on peut récrire :

$$\begin{array}{rcl}\varphi_1(\widehat{f}^{f-1}_\eta) & = & \alpha_1\big(\widehat{e}^0_\eta + \varpi_E\widehat{g}_{\eta,1} + \lambda_1 u^{pc^{(f-1)}_\chi}(\widehat{e}^0_{\eta'} + \varpi_E\widehat{g}_{\eta',1})\big) \\ \varphi_1(\widehat{f}^{f-1}_{\eta'}) & = & \alpha'_1\big(\widehat{e}^0_{\eta'} + \varpi_E\widehat{g}_{\eta',1} + \lambda'_1 u^{p(e-c^{(f-1)}_\chi)}(\widehat{e}^0_\eta + \varpi_E\widehat{g}_{\eta,1})\big)\end{array}$$

et en remplaçant $(\widehat{e}^0_\eta, \widehat{e}^0_{\eta'})$ par $(\widehat{e}^0_\eta + \varpi_E\widehat{g}_{\eta,1}, \widehat{e}^0_{\eta'} + \varpi_E\widehat{g}_{\eta',1})$ on obtient au bout du deuxième tour :

$$\begin{array}{rcl}\varphi_1(\widehat{f}^{f-1}_\eta) & = & \alpha_2(\widehat{e}^0_\eta + \varpi_E^2\widehat{g}_{\eta,2} + \lambda_2 u^{pc^{(f-1)}_\chi}\widehat{e}^0_{\eta'}) \\ \varphi_1(\widehat{f}^{f-1}_{\eta'}) & = & \alpha'_2(\widehat{e}^0_{\eta'} + \varpi_E^2\widehat{g}_{\eta',2} + \lambda'_2 u^{p(e-c^{(f-1)}_\chi)}\widehat{e}^0_\eta)\end{array}$$

où $\alpha_2 - \alpha_1 \in \varpi_E^2\mathscr{O}_E$, $\alpha'_2 - \alpha'_1 \in \varpi_E^2\mathscr{O}_E$, $\widehat{g}_{\eta,2} \in \mathcal{M}^0_\eta \cap (u, \frac{u^{ei}}{i!})\mathcal{M}^0$, $\widehat{g}_{\eta',2} \in \varpi_E(\mathcal{M}^0_{\eta'} \cap (u, \frac{u^{ei}}{i!})\mathcal{M}^0)$ et $\lambda_2 - \lambda_1 \in \varpi_E\mathscr{O}_E$, $\lambda'_2 - \lambda'_1 \in \varpi_E\mathscr{O}_E$. En itérant cet algorithme, on voit qu'il converge vers une forme comme dans l'énoncé. Supposons maintenant $c_{\chi,0} \notin \{0, 1, p-2, p-1\}$. On a $u^{pc^{(f-1)}_\chi} = u^{ec_{\chi,0}}u^{c^{(0)}_\chi}$ et $u^{p(e-c^{(f-1)}_\chi)} = u^{e(p-1-c_{\chi,0})}u^{e-c^{(0)}_\chi}$. En écrivant $u^{ec_{\chi,0}} = ((u^e + p) - p)^{c_{\chi,0}} \in (\mathrm{Fil}^1 S)^2 + p\mathrm{Fil}^1 S + p^2 S$, $u^{e(p-1-c_{\chi,0})} = ((u^e + p) - p)^{p-1-c_{\chi,0}} \in (\mathrm{Fil}^1 S)^2 + p\mathrm{Fil}^1 S + p^2 S$, on voit qu'en remplaçant la S-base $(\widehat{e}^0_\eta, \widehat{e}^0_{\eta'})$ après le premier tour par la S-base $(\widehat{e}^0_\eta + \varpi_E\widehat{g}_{\eta,1} + \lambda_1 u^{pc^{(f-1)}_\chi}\widehat{e}^0_{\eta'}, \widehat{e}^0_{\eta'} + \varpi_E\widehat{g}_{\eta',1} + \lambda'_1 u^{p(e-c^{(f-1)}_\chi)}\widehat{e}^0_\eta)$ on obtient au bout du deuxième tour des λ_2, λ'_2 dans $\varpi_E\mathscr{O}_E$ (et pas seulement $\mathscr{O}_E$), c'est-à-dire quitte à changer $\widehat{g}_{\eta,2}$ et $\widehat{g}_{\eta',2}$:

$$\begin{array}{rcl}\varphi_1(\widehat{f}^{f-1}_\eta) & = & \alpha_2(\widehat{e}^0_\eta + \varpi_E\widehat{g}_{\eta,2}) \\ \varphi_1(\widehat{f}^{f-1}_{\eta'}) & = & \alpha'_2(\widehat{e}^0_{\eta'} + \varpi_E\widehat{g}_{\eta',2}).\end{array}$$

En itérant cela, on voit bien que l'on a au final $\lambda = \lambda' = 0$ dans l'énoncé. Enfin, si l'on a $c_{\chi,j} \notin \{0, 1, p-2, p-1\}$ pour un autre j (pas forcément $j = 0$), il suffit de reprendre ce raisonnement en modifiant le plongement fixé ι pour que j se retrouve « en 0 » (le raisonnement ne dépendant bien sûr pas du choix de ι). □

Corollaire 5.3. — *Soit $\mathcal{M} = \prod_j \mathcal{M}^j$ un $\mathscr{O}_E$-module fortement divisible de type χ, G le groupe p-divisible correspondant et M son $\mathscr{O}_E$-module de Dieudonné contravariant. Alors M est un $\mathscr{O}_E$-module de Dieudonné de type χ tel que $\varphi(\bigwedge^2_{\mathscr{O}_L\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathscr{O}_E} M) = p\bigwedge^2_{\mathscr{O}_L\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathscr{O}_E} M$ et, si $(v_j)_j$ est le uplet de rationnels associé à*

M en (13), on a :

$$\begin{array}{rll} v_j = 1 & \textit{si} & \mathcal{M}^{f-1-j} \textit{ est de type } \mathrm{I}_\eta \\ v_j = 0 & \textit{si} & \mathcal{M}^{f-1-j} \textit{ est de type } \mathrm{I}_{\eta'} \\ v_j = 1 - \mathrm{val}(a_{f-1-j}) & \textit{si} & \mathcal{M}^{f-1-j} \textit{ est de type } \mathrm{II}. \end{array}$$

Démonstration. — Le $\mathscr{O}_E$-module de Dieudonné M n'est autre que $\mathcal{M} \otimes_S \mathscr{O}_E$ où la flèche $S \to \mathscr{O}_E$ est la surjection de $\mathscr{O}_E$-algèbres qui envoie u et ses puissances (divisées) sur 0. On déduit alors trivialement la première assertion, puis la valeur de v_j par la proposition 5.2. □

Pour $\mathcal{M}$ comme dans la proposition 5.2 posons :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} J^{\min} & \stackrel{\text{déf}}{=} & \{f-1-j \mid \mathcal{M}^j \text{ est de type } \mathrm{I}_\eta\} \\ J^{\max} & \stackrel{\text{déf}}{=} & J^{\min} \amalg \{f-1-j \mid \mathcal{M}^j \text{ est de type II}\}. \end{array} \right. \tag{26}$$

Avec (26), on voit que l'on a :

$$\begin{array}{rll} v_j = 1 & \text{si} & j \in J^{\min} \\ v_j = 0 & \text{si} & j \in \mathscr{S} \backslash J^{\max} \\ 0 < v_j < 1 & \text{si} & j \in J^{\max} \backslash J^{\min}. \end{array} \tag{27}$$

En général, les a_j et α, α' de la proposition 5.2 ne sont pas uniquement déterminés (même lorsque $\lambda = \lambda' = 0$).

Proposition 5.4. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathscr{O}_E$-module fortement divisible de type χ comme dans la proposition 5.2. On suppose qu'il existe $j \in \{0, \cdots, f-1\}$ tel que $c_{\chi,j} \notin \{0, 1, p-2, p-1\}$ de sorte que l'on peut supposer $\lambda = \lambda' = 0$. Soit $(J^{\min}, J^{\max})$ comme en (26).*
(i) Pour tout j, $\mathrm{val}(a_j)$ est uniquement déterminé.
(ii) Si $|J^{\max} \backslash J^{\min}|$ est pair, alors α et α' sont uniquement déterminés.
(iii) Si $|J^{\max} \backslash J^{\min}|$ est impair, on peut supposer $\alpha = 1$ et α' est alors uniquement déterminé.

Démonstration. — Notons I_η (resp. $\mathrm{I}_{\eta'}$, resp. II) l'ensemble des $j \in \{0, \cdots, f-1\}$ tels que $\mathcal{M}^j$ est de type I_η (resp. $\mathrm{I}_{\eta'}$, resp. II) et soit $(\widehat{h}^j_\eta, \widehat{h}^j_{\eta'})_j$, $(b_j)_j, \beta, \beta'$ (au lieu de $(\widehat{e}^j_\eta, \widehat{e}^j_{\eta'})_j$, $(a_j)_j, \alpha, \alpha'$) une autre description de $\mathcal{M}$ comme dans la proposition 5.2 (avec $\lambda = \lambda' = 0$). Supposons d'abord que l'on a $\widehat{h}^j_\eta = \alpha_j \widehat{e}^j_\eta$ et $\widehat{h}^j_{\eta'} = \alpha'_j \widehat{e}^j_{\eta'}$ pour des $\alpha_j, \alpha'_j \in \mathscr{O}_E^\times$. Les relations de commutations avec φ_1 montrent alors que l'on a pour tout $j < f-1$:

$$\left\{ \begin{array}{llllll} \text{si } j \in \mathrm{I}_\eta & \text{alors} & b_j = a_j \frac{\alpha_j}{\alpha'_j}, & \alpha_{j+1} = \alpha_j & \text{et} & \alpha'_{j+1} = \alpha'_j \\ \text{si } j \in \mathrm{I}_{\eta'} & \text{alors} & b_j = a_j \frac{\alpha'_j}{\alpha_j}, & \alpha_{j+1} = \alpha_j & \text{et} & \alpha'_{j+1} = \alpha'_j \\ \text{si } j \in \mathrm{II} & \text{alors} & b_j = a_j \frac{\alpha'_j}{\alpha_j}, & \alpha_{j+1} = \alpha'_j & \text{et} & \alpha'_{j+1} = \alpha_j \end{array} \right.$$

et, pour $j = f-1$:

$$\left\{\begin{array}{llll} \text{si } f-1 \in \mathrm{I}_\eta & \text{alors} & b_{f-1} = a_{f-1}\frac{\alpha_{f-1}}{\alpha'_{f-1}}, & \beta\alpha_0 = \alpha\alpha_{f-1} \quad \text{et} \quad \beta'\alpha'_0 = \alpha'\alpha'_{f-1} \\ \text{si } f-1 \in \mathrm{I}_{\eta'} & \text{alors} & b_{f-1} = a_{f-1}\frac{\alpha'_{f-1}}{\alpha_{f-1}}, & \beta\alpha_0 = \alpha\alpha_{f-1} \quad \text{et} \quad \beta'\alpha'_0 = \alpha'\alpha'_{f-1} \\ \text{si } f-1 \in \mathrm{II} & \text{alors} & b_{f-1} = a_{f-1}\frac{\alpha'_{f-1}}{\alpha_{f-1}}, & \beta\alpha_0 = \alpha\alpha'_{f-1} \quad \text{et} \quad \beta'\alpha'_0 = \alpha'\alpha_{f-1}. \end{array}\right.$$

Comme $\alpha_j, \alpha'_j \in \mathscr{O}_E^\times$, on voit que $\mathrm{val}(b_j) = \mathrm{val}(a_j)$ pour tout j. Si $|J^{\max}\backslash J^{\min}|$ est pair, on a $\beta\alpha_0 = \alpha\alpha_0$ et $\beta'\alpha'_0 = \alpha'\alpha'_0$ ce qui entraîne $\beta = \alpha$ et $\beta' = \alpha'$. Si $|J^{\max}\backslash J^{\min}|$ est impair, on a $\beta\alpha_0 = \alpha\alpha'_0$ et $\beta'\alpha'_0 = \alpha'\alpha_0$. En choisissant α_0 et α'_0 tels que $\alpha_0 = \alpha\alpha'_0$, on voit que l'on peut se ramener à $\beta = 1$ et $\beta' = \alpha\alpha'$ (de sorte que, si $\alpha = 1$, on a $\beta' = \alpha'$). En général, par la commutation à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)$ on a seulement $\widehat{h}^j_\eta = \alpha_j(\widehat{e}^j_\eta + \widehat{g}^j_{\eta,0})$ et $\widehat{h}^j_{\eta'} = \alpha'_j(\widehat{e}^j_{\eta'} + \widehat{g}^j_{\eta',0})$ où $\widehat{g}^j_{\eta,0} \in \mathcal{M}^j_\eta \cap (u, \frac{u^{ei}}{i!})\mathcal{M}^j$, $\widehat{g}^j_{\eta',0} \in \mathcal{M}^j_{\eta'} \cap (u, \frac{u^{ei}}{i!})\mathcal{M}^j$ (les notations sont comme dans la preuve de la proposition 5.2). Supposons d'abord $c_{\chi,0} \notin \{0, 1, p-2, p-1\}$. Par ce qui précède on peut remplacer $\widehat{h}^0_\eta$ par $\alpha_0^{-1}\widehat{h}^0_\eta$, $\widehat{h}^0_{\eta'}$ par ${\alpha'_0}^{-1}\widehat{h}^0_{\eta'}$ et les $\widehat{h}^j_\eta$, $\widehat{h}^j_{\eta'}$ en conséquence. En partant de la S-base $(\widehat{e}^0_\eta + \widehat{g}_{\eta,0}, \widehat{e}^0_{\eta'} + \widehat{g}_{\eta',0})$ et en reprenant l'algorithme dans la preuve de la proposition 5.2 (dans le cas $c_{\chi,0} \notin \{0, 1, p-2, p-1\}$), on voit que l'on a $\beta = \alpha_n$, $\beta' = \alpha'_n$ et $\widehat{h}^0_\eta \in \widehat{e}^0_\eta + \varpi_E^n\mathcal{M}^0_\eta \cap (u, \frac{u^{ei}}{i!})\mathcal{M}^0$, $\widehat{h}^0_{\eta'} \in \widehat{e}^0_{\eta'} + \varpi_E^n\mathcal{M}^0_{\eta'} \cap (u, \frac{u^{ei}}{i!})\mathcal{M}^0$ pour tout entier n, c'est-à-dire $\widehat{h}^0_\eta = \widehat{e}^0_\eta$ et $\widehat{h}^0_{\eta'} = \widehat{e}^0_{\eta'}$. On a donc aussi $\widehat{h}^j_\eta = \widehat{e}^j_\eta$ et $\widehat{h}^j_{\eta'} = \widehat{e}^j_{\eta'}$ pour tout j. Quitte à « décaler 0 » ceci reste vrai lorsque $c_{\chi,j} \notin \{0, 1, p-2, p-1\}$ pour (au moins) un j. Ainsi il n'y a pas d'autre changement de base que ceux considérés ci-dessus en multipliant par des unités dans $\mathscr{O}_E$. Cela achève la preuve. □

Remarque 5.5. — (i) Il n'est pas vrai que l'on peut toujours se ramener à $\lambda = \lambda' = 0$ dans la proposition 5.2. Le lecteur pourra considérer par exemple le cas $L = \mathbb{Q}_p$, $c_\chi = 1$ et :

$$\left\{\begin{array}{lll} \varphi_1(\widehat{e}^0_\eta + a_0u\widehat{e}^0_{\eta'}) & = & \widehat{e}^0_\eta + \lambda u^e u\widehat{e}^0_{\eta'} \\ \varphi_1((u^e + p)\widehat{e}^0_{\eta'}) & = & \widehat{e}^0_{\eta'} \end{array}\right.$$

(où $\lambda \neq 0$) en notant que $u^e u = u^p = u^{pc_\chi}$.

(ii) Lorsque $c_{\chi,0} \notin \{0, 1\}$ (resp. $c_{\chi,0} \notin \{p-2, p-1\}$), en procédant comme dans la preuve de la proposition 5.2 on voit que l'on peut se ramener à $\lambda = 0$ (resp. $\lambda' = 0$) : remplacer au bout du premier tour $(\widehat{e}^0_\eta, \widehat{e}^0_{\eta'})$ par $(\widehat{e}^0_\eta + \varpi_E\widehat{g}_{\eta,1} + \lambda_1u^{pc_\chi^{(f-1)}}\widehat{e}^0_{\eta'}, \widehat{e}^0_{\eta'} + \varpi_E\widehat{g}_{\eta',1})$ (resp. $(\widehat{e}^0_\eta + \varpi_E\widehat{g}_{\eta,1}, \widehat{e}^0_{\eta'} + \varpi_E\widehat{g}_{\eta',1} + \lambda'_1u^{p(e-c_\chi^{(f-1)})}\widehat{e}^0_\eta)$) et itérer...

(iii) Pour les $j \in \mathrm{II}$ on a toujours que $\mathrm{val}(a_j)$ est uniquement déterminé même si $(\lambda, \lambda') \neq (0, 0)$, comme il résulte par exemple du corollaire 5.3. Ceci est faux en général pour $j \notin \mathrm{II}$ lorsque $(\lambda, \lambda') \neq (0, 0)$ (cf. (i) ci-dessus par exemple).

(iv) On montre dans la section suivante (voir proposition 7.1) qu'en plus des cas où il existe j avec $c_{\chi,j} \notin \{0, 1, p-2, p-1\}$, l'algorithme à la fin de la preuve de la proposition 5.2 converge encore vers $(\lambda, \lambda') = (0, 0)$ au moins lorsque (le dual de Cartier de) la réduction modulo ϖ_E de la représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)$ de rang 2 sur $\mathscr{O}_E$ associée au module de Tate du groupe p-divisible correspondant à

$\mathcal{M}$ est générique. La preuve de la proposition 5.4 reste aussi valable dans ce cas résiduellement générique.

6. Les cas résiduellement génériques et réductibles I

On montre un lemme technique important sur les $\mathscr{O}_E$-modules fortement divisibles de type χ dont la représentation galoisienne résiduelle associée est réductible et générique.

On suppose $p > 2$ et on conserve les notations du §5. Si $\mathcal{M}$ est un $\mathscr{O}_E$-module fortement divisible de type χ, on note ρ le dual de Cartier de la représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)$ associée au module de Tate du groupe p-divisible correspondant à $\mathcal{M}$ et $\overline{\rho} \overset{\text{déf}}{=} \rho \otimes_{\mathscr{O}_E} k_E$. On note également $\overline{S} \overset{\text{déf}}{=} S \otimes_{\mathscr{O}_E} k_E$, $\overline{\mathcal{M}} \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{M} \otimes_{\mathscr{O}_E} k_E$, $\overline{x}$ l'image dans $\overline{\mathcal{M}}$ de $x \in \mathcal{M}$ et $\mathrm{Fil}^1\overline{\mathcal{M}}$ l'image dans $\overline{\mathcal{M}}$ de $\mathrm{Fil}^1\mathcal{M}$. L'application $\varphi_1 : \mathrm{Fil}^1\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ induit une application encore notée $\varphi_1 : \mathrm{Fil}^1\overline{\mathcal{M}} \to \overline{\mathcal{M}}$. On rappelle que l'on a :

$$\overline{\rho} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fil}^1,\varphi_1}(\overline{\mathcal{M}}, \widehat{A}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}_p)^\vee(1) \tag{28}$$

où l'on renvoie à [**32**, §3] pour plus de détails sur le membre de droite. Rappelons juste que l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)$ sur $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fil}^1,\varphi_1}(\overline{\mathcal{M}}, \widehat{A}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}_p)$ est définie par $(gf)(m) \overset{\text{déf}}{=} g(f(\overline{g}^{-1}m))$ où $m \in \overline{\mathcal{M}}$ et $\overline{g}$ est l'image de g dans $\mathrm{Gal}(L[\sqrt[e]{-p}]/L)$.

On fixe $\mathcal{M}$ un $\mathscr{O}_E$-module fortement divisible de type χ avec une base $(\widehat{e}^j_\eta, \widehat{e}^j_{\eta'})_j$ comme dans la proposition 5.2. On note I_η (resp. $\mathrm{I}_{\eta'}$, II) l'ensemble des $j \in \{0, \cdots, f-1\}$ tels que $\mathcal{M}^j$ est de type I_η (resp. $\mathrm{I}_{\eta'}$, II). On note $\overline{\eta}$ (resp. $\overline{\eta}'$) l'image de η (resp. η') par la surjection $\mathscr{O}_E^\times \twoheadrightarrow k_E^\times$. Enfin, l'égalité suivante sera utile dans les calculs $(0 \leq d \leq j \leq f-1)$:

$$c_\chi^{(j)} - p^d c_\chi^{(j-d)} = -e(c_{\chi,f-j} + pc_{\chi,f+1-j} + \cdots + p^{d-1}c_{\chi,f+d-1-j}). \tag{29}$$

Lemme 6.1. — *Soit $\mathcal{M}$ comme ci-dessus et supposons que $\overline{\mathcal{M}}$ contient un sous-φ_1-module filtré (avec filtration induite) de rang 1 facteur direct comme $\overline{S}$-module et stable par $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)$ (au sens de [**33**]).*
(i) Ce sous-module est de la forme $\prod_{j=0}^{f-1}\overline{S}\widetilde{e}^j_{\eta_j}$ où $\eta_j \in \{\eta, \eta'\}$ et :

$$\begin{array}{rclll} \widetilde{e}^j_{\eta_j} & = & \overline{e}^j_\eta + \lambda_j u^{pc_\chi^{(j-1)}}\overline{e}^j_{\eta'} & si & \eta_j = \eta \\ \widetilde{e}^j_{\eta_j} & = & \overline{e}^j_{\eta'} + \lambda_j u^{p(e-c_\chi^{(j-1)})}\overline{e}^j_\eta & si & \eta_j = \eta' \end{array}$$

pour un $\lambda_j \in k_E$.
(ii) Soit $h_j \in \{0, \cdots, e\}$ le plus petit entier tel que $u^{h_j}\widetilde{e}^j_{\eta_j} \in \mathrm{Fil}^1\overline{\mathcal{M}}$, on a :

$$\left\{\begin{array}{rclcl} h_j & \in & \{0,e\} & \textit{si et seulement si} & \eta_{j+1} = \eta_j \\ h_j & = & e - c_\chi^{(j)} & \textit{si} & \eta_j = \eta \textit{ et } \eta_{j+1} = \eta' \\ h_j & = & c_\chi^{(j)} & \textit{si} & \eta_j = \eta' \textit{ et } \eta_{j+1} = \eta \end{array}\right. \tag{30}$$

(en particulier $h_j \in \{c_\chi^{(j)}, e - c_\chi^{(j)}\}$ si et seulement si $\eta_{j+1} \neq \eta_j$).

Démonstration. — Soit $\overline{\mathcal{M}}^j \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{M}^j \otimes_{\mathscr{O}_E} k_E$ et $\overline{\mathcal{M}}^j_\eta$ (resp. $\overline{\mathcal{M}}^j_{\eta'}$) la composante $\overline{\eta}$-isotypique (resp. $\overline{\eta}'$-isotypique) de $\overline{\mathcal{M}}^j$. On a :

$$\overline{\mathcal{M}}^j_\eta = \big(\oplus_{i\geq 0} k_E \gamma_i(u^e)\overline{e}^j_\eta\big) \oplus \big(\oplus_{i\geq 0} k_E\gamma_i(u^e)u^{c_\chi^{(j)}}\overline{e}^j_{\eta'}\big)$$

et une égalité analogue pour $\overline{\mathcal{M}}^j_{\eta'}$ avec $u^{e-c_\chi^{(j)}}$ à la place de $u^{c_\chi^{(j)}}$ ($\gamma_i(u^e)$ est la i-ième puissance divisée de u^e). Comme $\varphi_1(\gamma_i(u^e)\overline{e}^{j-1}_\eta) = \varphi_1(\gamma_i(u^e)u^{c_\chi^{(j-1)}}\overline{e}^{j-1}_{\eta'}) = 0$ si $i > 1$ (car $p > 2$), un examen de l'opérateur φ_1 sur $\overline{\mathcal{M}}^{j-1}_\eta \cap \mathrm{Fil}^1\overline{\mathcal{M}}$ à partir des différents cas de la proposition 5.2 montre que, dans tous les cas, on a $\varphi_1(\overline{\mathcal{M}}^{j-1}_\eta \cap \mathrm{Fil}^1\overline{\mathcal{M}}) = k_E\overline{e}^j_\eta \oplus k_E u^{pc_\chi^{(j-1)}}\overline{e}^j_{\eta'}$. De même, on trouve $\varphi_1(\overline{\mathcal{M}}^{j-1}_{\eta'} \cap \mathrm{Fil}^1\overline{\mathcal{M}}) = k_E\overline{e}^j_{\eta'} \oplus k_E u^{p(e-c_\chi^{(j-1)})}\overline{e}^j_\eta$. On en déduit (i). Le (ii) est alors immédiat à partir de (29) pour $d = 1$ et de la proposition 5.2. □

Remarque 6.2. — Le lemme 6.1 est en fait un cas particulier de [**33**, §3].

Le lemme, technique mais important, qui suit est le résultat principal de ce paragraphe.

Lemme 6.3. — *On conserve les notations et hypothèses du lemme 6.1 et on suppose de plus que la représentation $\overline{\rho}$ associée à $\overline{\mathcal{M}}$ en (28) est générique.*
(i) On a les inégalités suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lllllll} 2 & \leq & c_{\chi,f-j} & \leq & p-1 & si & h_j = 0 \ \ et \ \ \eta_j = \eta \\ 0 & \leq & c_{\chi,f-j} & \leq & p-3 & si & h_j = 0 \ \ et \ \ \eta_j = \eta' \\ 2 & \leq & c_{\chi,f-j} & \leq & p-1 & si & h_j = e \ \ et \ \ \eta_j = \eta' \\ 0 & \leq & c_{\chi,f-j} & \leq & p-3 & si & h_j = e \ \ et \ \ \eta_j = \eta \\ 1 & \leq & c_{\chi,f-j} & \leq & p-2 & si & h_j \in \{c_\chi^{(j)}, e - c_\chi^{(j)}\}. \end{array}\right. \tag{31}$$

(ii) On a $u^{h_j}\overline{e}^j_{\eta_j} \in \mathrm{Fil}^1\overline{\mathcal{M}}$ et $\varphi_1(u^{h_j}\widetilde{e}^j_{\eta_j}) = \varphi_1(u^{h_j}\overline{e}^j_{\eta_j})$ pour tout j.
(iii) Les η_j satisfont la récurrence :

$$\left\{\begin{array}{lllllll} \eta_{j+1} & = & \eta_j & si & j \in \mathrm{I}_\eta \cup \mathrm{I}_{\eta'} & et & \overline{a}_j = 0 \\ \eta_{j+1} & = & \eta' & si & j \in \mathrm{I}_\eta & et & \overline{a}_j \neq 0 \\ \eta_{j+1} & = & \eta & si & j \in \mathrm{I}_{\eta'} & et & \overline{a}_j \neq 0 \\ \eta_{j+1} & = & \eta' & si & j \in \mathrm{II} & et & \eta_j = \eta \\ \eta_{j+1} & = & \eta & si & j \in \mathrm{II} & et & \eta_j = \eta'. \end{array}\right. \tag{32}$$

Démonstration. — (i) On calcule explicitement la restriction à l'inertie de la représentation (réductible) $\overline{\rho}$ dans le cas où le sous-objet du lemme 6.1 est tel que $\eta_0 = \eta$, laissant le cas strictement analogue $\eta_0 = \eta'$ au lecteur. Soit $0 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_{2t-1} < j_{2t} \leq f - 1$ les indices j tels que $\eta_{j+1} \neq \eta_j$ (notons qu'il y en a forcément un nombre pair) et $\overline{\mathcal{N}} \subset \overline{\mathcal{M}}$ le sous-φ_1-module filtré de rang 1 du lemme 6.1. Par [**33**, Ex.3.7] appliqué à $d = f$ on obtient :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Fil}^1,\varphi_1}(\overline{\mathcal{N}}, \widehat{A}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}_p)^\vee(1)|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L^{\mathrm{nr}})} = \overline{\eta}\omega_f^{\frac{1}{e}\sum_{j=0}^{f-1} p^{f-j}h_j}.$$

Posons $h \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{e}\sum_{j=0}^{f-1} p^{f-j}h_j$, en utilisant (30) et (29) on déduit :

$$(33) \quad h = \Big(\sum_{j\notin\{j_s, 1\le s\le 2t\}} p^{f-j}\frac{h_j}{e}\Big) + \Big(\sum_{s=1}^{t} p^{f-j_{2s-1}}\Big) - \sum_{s=1}^{t}\big(p^{f-1-j_{2s-1}}c_{\chi,f-1-j_{2s-1}} + \cdots + p^{f-j_{2s}}c_{\chi,f-j_{2s}}\big)$$

ce qui entraîne $h \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ car, par (30), $\frac{h_j}{e} \in \{0,1\}$ si $j \notin \{j_s, 1 \le s \le 2t\}$. On a donc :

$$\begin{aligned}\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L^{\mathrm{nr}})} &\simeq \begin{pmatrix}\overline{\eta}\omega_f^h & * \\ 0 & \overline{\eta}'\omega_f^{-h}\omega\end{pmatrix} \\ &\simeq \begin{pmatrix}\omega_f^{c_\chi+2h}\omega^{-1} & * \\ 0 & 1\end{pmatrix} \otimes \overline{\eta}'\omega_f^{-h}\omega.\end{aligned}$$

Soit $J \overset{\text{déf}}{=} \amalg_{1\le s\le t}\{j_{2s-1}, j_{2s-1}+1, \cdots, j_{2s}\}$ et $(s_j)_j \in \{0, \cdots, p-1\}^f$ tel que $c_\chi + 2h - \sum_{j=0}^{f-1} p^j = \sum_{j=0}^{f-1} s_j p^j$. Un calcul utilisant (33) donne $\sum_{j=0}^{f-1} s_j p^j \equiv \sum_{j=0}^{f-1}(r_j+1)p^j$ modulo e où :

$$(34) \quad \begin{cases} r_{f-j} \overset{\text{déf}}{=} c_{\chi,f-j} - 2 + 2\frac{h_j}{e} & \text{si } j \notin J \\ r_{f-j} \overset{\text{déf}}{=} p - 3 - c_{\chi,f-j} + 2\frac{h_j}{e} & \text{si } j \in J \setminus \{j_s, 1 \le s \le 2t\} \\ r_{f-j} \overset{\text{déf}}{=} p - 2 - c_{\chi,f-j} & \text{si } j \in \{j_{2s}, 1 \le s \le t\} \\ r_{f-j} \overset{\text{déf}}{=} c_{\chi,f-j} - 1 & \text{si } j \in \{j_{2s-1}, 1 \le s \le t\} \end{cases}$$

(on convient que $r_f = r_0$ et $c_{\chi,f} = c_{\chi,0}$). Par l'hypothèse de généricité de $\overline{\rho}$ (§4) on a $1 \le s_j \le p-2$ avec $(s_j)_j \ne (1)_j, (p-2)_j$. Comme $0 \le c_{\chi,f-j} \le p-1$ pour tout j et $\frac{h_j}{e} \in \{0,1\}$ pour tout $j \notin \{j_s, 1 \le s \le 2t\}$, on a $r_j + 1 \in \{-1, \cdots, p\}$ pour tout j. On en déduit $s_j - (r_j+1) \in \{-(p-1), \cdots, p-1\}$ pour tout j avec $(s_j - (r_j+1))_j \ne (-(p-1))_j, (p-1)_j$. Comme $\sum_{j=0}^{f-1}(s_j - (r_j+1))p^j$ est divisible par e, on a en fait $\sum_{j=0}^{f-1}(s_j - (r_j+1))p^j = 0$ qui implique $s_j = r_j + 1$ pour tout j (car $s_j - (r_j+1)$ n'est divisible par p que s'il est nul). On a donc $0 \le r_j \le p-3$ pour tout j c'est-à-dire $1 \le c_{\chi,f-j} \le p-2$ si $j \in \{j_s, 1 \le s \le 2t\}$, $2 \le c_{\chi,f-j} \le p-1$ si $h_j = 0$ et $j \notin J$ ou si $h_j = e$ et $j \in J \setminus \{j_s, 1 \le s \le 2t\}$, et $0 \le c_{\chi,f-j} \le p-3$ si $h_j = e$ et $j \notin J$ ou si $h_j = 0$ et $j \in J \setminus \{j_s, 1 \le s \le 2t\}$. Cela correspond exactement à l'énoncé (i).

(ii) On vérifie les cas $\eta_j = \eta$ laissant les cas analogues $\eta_j = \eta'$ au lecteur. Si $j \in \mathrm{I}_{\eta'}$, alors $h_j = e$ et l'assertion découle de $pc_\chi^{(j-1)} + e = e(c_{\chi,f-j}+1) + c_\chi^{(j)}$ et de $u^{c_\chi^{(j)}}\overline{e}_{\eta'}^j \in \mathrm{Fil}^1\overline{\mathcal{M}}$. Si $j \in \mathrm{II}$, alors $h_j = e - c_\chi^{(j)}$ et l'assertion découle de

$pc_\chi^{(j-1)}+e-c_\chi^{(j)}=(ec_{\chi,f-j})+e$ et de $c_{\chi,f-j}>0$ par (i). Si $j\in \mathrm{I}_\eta$ et $\overline{a}_j\neq 0$, alors $h_j=e-c_\chi^{(j)}$ ou $h_j=0$, ce dernier cas n'arrivant que lorsque $c_{\chi,f-j}=0$. Par (i), cela est impossible et on a $h_j=e-c_\chi^{(j)}$. On conclut comme avant. Si $j\in \mathrm{I}_\eta$ et $\overline{a}_j=0$, alors $h_j=0$ ou $h_j=e-c_\chi^{(j)}$, ce dernier cas n'arrivant que lorsque $c_{\chi,f-j}=0$. Par (i), cela est impossible et on a $h_j=0$. Comme alors $c_{\chi,f-j}>1$ par (i), on a $u^{pc_\chi^{(j-1)}}\overline{e}^j_{\eta'}=u^{e(c_{\chi,f-j}-1)+c_\chi^{(j)}}u^e\overline{e}^j_{\eta'}\in u^{e(c_{\chi,f-j}-1)+c_\chi^{(j)}}\mathrm{Fil}^1\overline{\mathcal{M}}$, d'où $\varphi_1(u^{pc_\chi^{(j-1)}}\overline{e}^j_{\eta'})=0$ et $\varphi_1(\widetilde{e}^j_\eta)=\varphi_1(\overline{e}^j_\eta)$.
(iii) Pour $\eta_j=\eta$ cela découle des valeurs de h_j (suivant le type de $\mathcal{M}^j$) trouvées au (ii) et du (ii) du lemme 6.1. Le cas $\eta_j=\eta'$ est analogue. □

Remarque 6.4. — Si $p=3$, il n'y a pas de $\overline{\rho}$ générique réductible, et donc le lemme 6.3 est vide dans ce cas. Néanmoins, si l'on relâche la contrainte $(r_j)\neq(0,\cdots,0)$ dans l'hypothèse de généricité de $\overline{\rho}$ (notons que $p-3=0$ ici !), le lemme 6.3 est encore valable tel quel. En effet, la seule différence dans la preuve se situe pour la partie (i), où il faut maintenant considérer les deux possibilités $(r_{f-j}+1)\in\{(-1,\cdots,-1),(p,\cdots,p)\}$ (les seules pouvant conduire au cas nouveau autorisé pour $\overline{\rho}$). Mais les égalités (34) (toujours valables) montrent que, pour chacune de ces possibilités, on doit avoir $\{j_s, 1\leq s\leq 2t\}=\emptyset$, et donc $J=\emptyset$ et $r_{f-j}+1=c_{\chi,f-j}-1+2\frac{h_j}{e}$ pour tout j. Or $(c_{\chi,f-j}-1+2\frac{h_j}{e})\in\{(-1,\cdots,-1),(p,\cdots,p)\}$ si et seulement si soit $c_{\chi,f-j}=h_j=0$ pour tout j soit $c_{\chi,f-j}=p-1$ et $h_j=e$ pour tout j. Comme $\chi\neq\chi^s$, ces possibilités sont exclues.

7. Les cas résiduellement génériques et réductibles II

On montre d'abord que les $\mathscr{O}_E$-modules fortement divisibles de type χ dont la représentation galoisienne résiduelle associée est générique sont tels que $\lambda=\lambda'=0$ dans la proposition 5.2. On montre ensuite que, si de plus l'un des a_j est une *unité*, alors cette représentation résiduelle est *réductible non scindée* (ce dernier énoncé aura une réciproque dans le (i) du théorème 8.1 sous l'hypothèse de généricité).

On conserve toutes les notations de la section précédente. Soit L' l'unique extension quadratique non ramifiée de L dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$. Fixons $\iota':L'\hookrightarrow E$ qui se restreint sur le plongement ι fixé au §2 et, comme au §2, identifions l'ensemble $\{0,\cdots,2f-1\}$ à l'ensemble des plongements $L'\hookrightarrow E$ en envoyant j sur $\iota'\circ\varphi^{-j}$. En remplaçant L par L', e par $e'\overset{\text{déf}}{=}p^{2f}-1=(1+q)e$ et $\sqrt[e]{-p}$ par $\sqrt[e']{-p}$ tel que $\sqrt[e']{-p}^{1+q}=\sqrt[e]{-p}$, on a une notion de $\mathscr{O}_E$-modules fortement divisibles $\mathcal{M}'=\mathcal{M}'^0\times\cdots\times\mathcal{M}'^{2f-1}$ comme au §5 où chaque $\mathcal{M}'^j$ est un module libre de rang fini sur $S'\overset{\text{déf}}{=}$ complété p-adique de $\mathscr{O}_E[u',\frac{u'^{e'i}}{i!}]$ (ces modules correspondent donc à des groupes p-divisibles G' sur $\mathscr{O}_{L'}[\sqrt[e']{-p}]$ munis d'une injection de $\mathscr{O}_E$ dans leur anneau d'endomorphismes). Si $\mathcal{M}$ est un $\mathscr{O}_E$-module fortement divisible de type χ, on peut lui associer le $\mathscr{O}_E$-module fortement divisible $\mathcal{M}'$ de type

$\chi' \overset{\text{déf}}{=} \eta\circ\mathrm{Norme}_{k_{L'}/k_L}\otimes\eta'\circ\mathrm{Norme}_{k_{L'}/k_L}$ suivant : $\big(\mathcal{M}' = \mathcal{M}'^0\times\cdots\times\mathcal{M}'^{2f-1}, \mathrm{Fil}^1\mathcal{M}' = \mathrm{Fil}^1\mathcal{M}'^0 \times \cdots \times \mathrm{Fil}^1\mathcal{M}'^{2f-1}, \varphi_1\big)$ avec $(\mathcal{M}'^j, \mathrm{Fil}^1\mathcal{M}'^j, \varphi_1)$ et $(\mathcal{M}'^{f+j}, \mathrm{Fil}^1\mathcal{M}'^{f+j}, \varphi_1)$ comme $(\mathcal{M}^j, \mathrm{Fil}^1\mathcal{M}^j, \varphi_1)$ mais en remplaçant partout u par u'^{1+q} (notons que $c_{\chi',j} = c_{\chi',f+j} = c_{\chi,j}$ et $c_{\chi'}^{(j)} = c_{\chi'}^{(f+j)} = (1+q)c_{\chi}^{(j)}$ pour tout $j \in \{0,\cdots,f-1\}$). On voit facilement sur (28) pour $\overline{\mathcal{M}}$ et $\overline{\mathcal{M}}' \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{M}' \otimes_{\mathscr{O}_E} k_E$ que la représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L')$ associée à $\overline{\mathcal{M}}'$ est la *restriction* de la représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)$ associée à $\overline{\mathcal{M}}$ (en utilisant par exemple que $\overline{\mathcal{M}}$ peut-être vu comme un module sur $k_L[u, \frac{u^{ei}}{i!}]\otimes_{\mathbb{F}_p} k_E$ et que $\overline{\mathcal{M}}'$ en est l'extension des scalaires à $k_{L'}[u', \frac{u'^{e'i}}{i!}]\otimes_{\mathbb{F}_p} k_E$ via $u \mapsto u'^{1+q}$).

Proposition 7.1. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathscr{O}_E$-module fortement divisible de type χ. Supposons que la représentation $\overline{\rho}$ associée à $\overline{\mathcal{M}}$ en (28) est générique, alors on peut supposer $\lambda = \lambda' = 0$ dans la description de la proposition 5.2.*

Démonstration. — Par la proposition 5.2, on peut supposer $c_{\chi,j} \in \{0, 1, p-2, p-1\}$ pour tout j. Fixons une base $(\widehat{e}_\eta^j, \widehat{e}_{\eta'}^j)_j$ de $\mathcal{M}$ comme dans cette proposition. En reprenant sa preuve, on voit qu'il suffit de montrer que si l'on modifie $(\widehat{e}_\eta^0, \widehat{e}_{\eta'}^0)$ en $(\widehat{e}_\eta^0 + \lambda u^{pc_\chi^{(f-1)}}\widehat{e}_{\eta'}^0, \widehat{e}_{\eta'}^0 + \lambda' u^{p(e-c_\chi^{(f-1)})}\widehat{e}_\eta^0)$ pour des λ, λ' quelconques dans $\mathscr{O}_E$, alors au bout d'un tour on a modifié $(\varphi_1(\widehat{f}_\eta^{f-1}), \varphi_1(\widehat{f}_{\eta'}^{f-1}))$ par un élément dans $(\varpi_E p^l\mathcal{M}_\eta^0, \varpi_E p^l\mathcal{M}_{\eta'}^0)$ où $l \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Min}(\mathrm{val}(\lambda), \mathrm{val}(\lambda'))$ (cf. §2 pour p^l). Il suffit de le montrer avec $l = 0$ et donc de vérifier que si l'on modifie $(\overline{e}_\eta^0, \overline{e}_{\eta'}^0)$ en $(\overline{e}_\eta^0 + \lambda u^{pc_\chi^{(f-1)}}\overline{e}_{\eta'}^0, \overline{e}_{\eta'}^0 + \lambda' u^{p(e-c_\chi^{(f-1)})}\overline{e}_\eta^0)$ pour des λ, λ' quelconques dans k_E, alors on ne modifie pas $(\varphi_1(\overline{f}_\eta^{f-1}), \varphi_1(\overline{f}_{\eta'}^{f-1}))$. Il suffit de le démontrer dans les deux cas $(\lambda \neq 0, \lambda' = 0)$ et $(\lambda = 0, \lambda' \neq 0)$. En procédant comme dans la preuve du lemme 6.1, on voit que, pour chaque j, soit on modifie $\overline{e}_\eta^j$ en $\overline{e}_\eta^j + \lambda u^{pc_\chi^{(j-1)}}\overline{e}_{\eta'}^i$, soit on modifie $\overline{e}_{\eta'}^j$ en $\overline{e}_{\eta'}^j + \lambda u^{p(e-c_\chi^{(j-1)})}\overline{e}_\eta^i$ (pour un $\lambda \in k_E$). Nous allons en fait supposer que $(\varphi_1(\overline{f}_\eta^{f-1}), \varphi_1(\overline{f}_{\eta'}^{f-1}))$ *peut* être modifié en changeant soit $\overline{e}_\eta^0$ en $\overline{e}_\eta^0 + \lambda u^{pc_\chi^{(f-1)}}\overline{e}_{\eta'}^0$, soit $\overline{e}_{\eta'}^0$ en $\overline{e}_\eta^0 + \lambda u^{p(e-c_\chi^{(f-1)})}\overline{e}_{\eta'}^0$ (pour λ convenable dans k_E) et montrer que cela implique $\overline{\rho}$ *non* générique.

Soit $\mathcal{M}'$ le $\mathscr{O}_E$-module fortement divisible « sur $\mathscr{O}_{L'}$ » associé à $\mathcal{M}$ ci-dessus. Comme $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L')}$ est réductible (même si $\overline{\rho}$ ne l'est pas), la méthode de l'adhérence schématique ([**30**, §2]) combinée avec l'équivalence de catégorie de [**4**] comme généralisée dans [**33**, §1] montre que $\overline{\mathcal{M}}'$ contient un sous-φ_1-module filtré de rang 1 facteur direct stable par $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L')$. Si $p > 3$, la $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)$-représentation $\overline{\rho}$ est générique si et seulement si sa restriction $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L')}$ est générique et on peut alors appliquer les résultats du lemme 6.3 à $\overline{\mathcal{M}}'$. Si $p = 3$, $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L')}$ n'est pas générique mais on vérifie facilement qu'elle est dans le cas $(r_j) = (0, \cdots, 0)$ (voir §4) et la remarque 6.4 montre que l'on peut encore appliquer les résultats du lemme 6.3 à $\overline{\mathcal{M}}'$.

Revenons à $\overline{\mathcal{M}}$ et montrons d'abord que l'ensemble II est vide. S'il n'est pas vide, alors $j \in$ II implique $c_{\chi,f-j} \in \{0, p-1\}$. En effet, si $c_{\chi,f-j} \in \{1, p-2\}$, ou bien $\overline{e}_\eta^j$ est modifié en $\overline{e}_\eta^j + \lambda u^e u^{c_\chi^{(j)}} \overline{e}_{\eta'}^j$, ou bien $\overline{e}_{\eta'}^j$ est modifié en $\overline{e}_{\eta'}^j + \lambda u^e u^{e-c_\chi^{(j)}} \overline{e}_\eta^j$ et dans les deux cas cela ne change pas $(\overline{e}_\eta^{j+1}, \overline{e}_{\eta'}^{j+1})$ lorsque $j \in$ II et donc pas non plus $(\varphi_1(\overline{f}_\eta^{f-1}), \varphi_1(\overline{f}_{\eta'}^{f-1}))$. Maintenant regardons $\overline{\mathcal{M}}'$: on a aussi en particulier $j \in$ II et $c_{\chi',2f-j} = c_{\chi,f-j} \in \{0, p-1\}$. On applique alors le lemme 6.1 et (31) à $\overline{\mathcal{M}}'$ qui donnent $h_j \in \{c_{\chi'}^{(j)}, e' - c_{\chi'}^{(j)}\}$ et $1 \leq c_{\chi',2f-j} \leq p-2$ ce qui est une contradiction.

Supposons d'abord $c_{\chi,f-1} = 0$, ce qui implique $f > 1$ (puisque $c_\chi \neq 0$) et $(\overline{e}_\eta^1, \overline{e}_{\eta'}^1)$ modifié en $(\overline{e}_\eta^1 + \lambda u^{c_\chi^{(1)}} \overline{e}_{\eta'}^1, \overline{e}_{\eta'}^1)$ (avec $\lambda \neq 0$). Comme $(\varphi_1(\overline{f}_\eta^1), \varphi_1(\overline{f}_{\eta'}^1))$ est modifié par hypothèse, la seule possibilité qui reste par ce qui précède (et un calcul facile) est $1 \in \mathrm{I}_{\eta'}$ avec $\overline{a}_1 \neq 0$. De plus, pour que la modification sur $(\overline{e}_\eta^0, \overline{e}_{\eta'}^0)$ induise la modification ci-dessus sur $(\overline{e}_\eta^1, \overline{e}_{\eta'}^1)$, on vérifie que l'on est forcément dans l'un des deux cas suivants : $c_{\chi,0} = 1$ et $0 \in \mathrm{I}_\eta$ ou bien $c_{\chi,0} = p-1$, $0 \in \mathrm{I}_\eta$ et $\overline{a}_0 \neq 0$. On considère maintenant $\overline{\mathcal{M}}'$ où l'on a donc un sous-module de rang 1 comme dans les lemmes 6.1 et 6.3. Si $\eta_1 = \eta'$, alors on a $h_1 = c_{\chi'}^{(1)}$ (puisque $1 \in \mathrm{I}_{\eta'}$ et $\overline{a}_1 \neq 0$) et (31) implique en particulier $c_{\chi',2f-1} = c_{\chi,f-1} \geq 1$ ce qui est impossible. On a donc $\eta_1 = \eta$. Si $\eta_0 = \eta'$, on a $h_0 = e'$ et $\eta_1 = \eta'$ (puisque $0 \in \mathrm{I}_\eta$) ce qui est impossible. On a donc aussi $\eta_0 = \eta$. Si $c_{\chi',0} = c_{\chi,0} = p-1$, alors $h_0 = e' - c_{\chi'}^{(0)}$ (puisque $0 \in \mathrm{I}_\eta$ et $\overline{a}_0 \neq 0$) et (31) implique en particulier $c_{\chi',0} \leq p-2$ ce qui est impossible. On a donc $c_{\chi',0} = c_{\chi,0} = 1$. Si $\overline{a}_0 = 0$, alors $h_0 = 0$ et (31) implique en particulier $c_{\chi',0} \geq 2$ ce qui est impossible. On a donc $\overline{a}_0 \neq 0$ et $h_0 = e' - c_{\chi'}^{(0)}$, ce qui implique $\eta_1 = \eta'$ et est encore impossible. Finalement, on ne peut donc avoir $c_{\chi,f-1} = 0$. Des considérations analogues que l'on laisse au lecteur montrent que l'on ne peut avoir non plus $c_{\chi,f-1} = 1$ (noter que $f = 1$ doit être considéré ici, cf. le (i) de la remarque 5.5). Enfin, les cas $c_{\chi,f-1} \in \{p-1, p-2\}$ sont symétriques. □

Si $\mathcal{M}$ un $\mathscr{O}_E$-module fortement divisible de type χ dont la représentation $\overline{\rho}$ associée est générique, on supposera toujours dans la suite que $\lambda = \lambda' = 0$. On note $\mathrm{I}_\eta^\times$ (resp. $\mathrm{I}_{\eta'}^\times$) l'ensemble des $j \in \{0, \cdots, f-1\}$ tels que $\mathcal{M}^j$ est de type I_η (resp. $\mathrm{I}_{\eta'}$) avec $a_j \in \mathscr{O}_E^\times$. Noter que c'est un ensemble bien défini par la proposition 5.4 et le (iv) de la remarque 5.5.

Proposition 7.2. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathscr{O}_E$-module fortement divisible de type χ tel que la représentation $\overline{\rho}$ associée à $\mathcal{M}$ est générique. Supposons $\mathrm{I}_\eta^\times \cup \mathrm{I}_{\eta'}^\times \neq \emptyset$. Alors $\overline{\rho}$ est réductible et $\overline{\mathcal{M}}$ contient un sous-φ_1-module filtré de rang 1 comme au lemme 6.1.*

Démonstration. — Considérons le $\mathscr{O}_E$-module fortement divisible $\mathcal{M}'$ de type χ' associé à $\mathcal{M}$. On a vu dans la preuve de la proposition 7.1 que l'on pouvait appliquer les résultats du lemme 6.3 à $\overline{\mathcal{M}}'$. Par les lemmes 6.1 et 6.3, on a donc trois suites $(\eta'_j)_{0\leq j\leq 2f-1}$, $(\widetilde{e}^j_{\eta'_j})_{0\leq j\leq 2f-1}$ et $(h'_j)_{0\leq j\leq 2f-1}$ qui vérifient les propriétés de ces lemmes. Soit j le plus grand entier dans $\{0,\cdots,f-1\}$ tel que $j\in \mathrm{I}^\times_\eta\cup\mathrm{I}^\times_{\eta'}$ (un tel j existe par hypothèse). Comme $j\in \mathrm{I}^\times_\eta\cup\mathrm{I}^\times_{\eta'}$, η'_{j+1} est alors fixé indépendamment de η'_j par la récurrence (32). Comme tout i tel que $j+1\leq i\leq f-1$ est dans $(\mathrm{I}_\eta\setminus\mathrm{I}^\times_\eta)\cup(\mathrm{I}_{\eta'}\setminus\mathrm{I}^\times_{\eta'})$ ou dans II, par cette même récurrence on voit que $\eta'_i=\eta'_{i+f}$ pour tout $i\in\{j+1,\cdots,f\}$ (avec $\eta'_{2f}=\eta'_0$). En particulier, pour $i=f$ on a $\eta'_f=\eta'_{2f}=\eta'_0$. En remplaçant partout u'^{1+q} par u dans l'expression de $\widetilde{e}^j_{\eta'_j}$ et en posant $\eta_j\overset{\text{déf}}{=}\eta'_j$ pour $0\leq j\leq f-1$, on obtient une suite $(\widetilde{e}^j_{\eta_j})_{0\leq j\leq f-1}$ de vecteurs de $\overline{\mathcal{M}}$ dont il est clair qu'elle est comme dans le lemme 6.1. En particulier, $\overline{\rho}$ est réductible. $\square$

Proposition 7.3. — *On conserve les notations et hypothèses de la proposition 7.2. Soit $J_{\overline{\rho}}$ comme en (17), alors on a :*

$$J_{\overline{\rho}}=\{f-j\mid \mathrm{val}(a_j)>0\}. \tag{35}$$

En particulier, $\overline{\rho}$ est non scindée.

Démonstration. — On remarque d'abord que $J_{\overline{\rho}}=J_{\overline{\rho}^\vee(1)}$ car les représentations $\overline{\rho}$ et $\overline{\rho}^\vee(1)$ sont isomorphes à torsion près. On va déterminer $J_{\overline{\rho}^\vee(1)}$, ce qui permettra de travailler avec le foncteur contravariant de l'appendice A plutôt qu'avec son dual de Cartier. Par le (i) de la proposition A.2 et un calcul explicite, $\overline{\mathcal{M}}$ provient du φ-module de type $\overline{\chi}$ (cf. définition A.1) $\mathfrak{D}=\mathfrak{D}^0\times\cdots\times\mathfrak{D}^{f-1}$ où $\mathfrak{D}^j=k_E((u))\mathfrak{e}^j_\eta\oplus k_E((u))\mathfrak{e}^j_{\eta'}$, $\mathrm{Gal}(L_\infty[\sqrt[e]{-p}]/L_\infty)$ agit sur $\mathfrak{e}^j_\eta$ (resp. $\mathfrak{e}^j_{\eta'}$) par le caractère $\overline{\eta}\circ\varkappa_f$ (resp. $\overline{\eta}'\circ\varkappa_f$) et si $j\neq f-1$:

$$\begin{cases}\varphi(\mathfrak{e}^{j-1}_\eta) &= u^e\mathfrak{e}^j_\eta-a_ju^{c^{(j)}_\chi}\mathfrak{e}^j_{\eta'}\\ \varphi(\mathfrak{e}^{j-1}_{\eta'}) &= \mathfrak{e}^j_{\eta'}\end{cases}\qquad \text{si}\quad j\in\mathrm{I}_\eta$$
$$\begin{cases}\varphi(\mathfrak{e}^{j-1}_\eta) &= \mathfrak{e}^j_\eta\\ \varphi(\mathfrak{e}^{j-1}_{\eta'}) &= u^e\mathfrak{e}^j_{\eta'}-a_ju^{e-c^{(j)}_\chi}\mathfrak{e}^j_\eta\end{cases}\qquad \text{si}\quad j\in\mathrm{I}_{\eta'}$$
$$\begin{cases}\varphi(\mathfrak{e}^{j-1}_\eta) &= u^{c^{(j)}_\chi}\mathfrak{e}^j_{\eta'}\\ \varphi(\mathfrak{e}^{j-1}_{\eta'}) &= u^{e-c^{(j)}_\chi}\mathfrak{e}^j_\eta\end{cases}\qquad \text{si}\quad j\in\mathrm{II}.$$

Pour $j=f-1$, on a une description analogue de $\mathfrak{D}^{f-2}$ faisant intervenir en plus α et α' que l'on laisse au lecteur. Rappelons que, par le (ii) de la proposition A.2, $\mathfrak{D}$ permet de retrouver $\overline{\rho}^\vee(1)|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L_\infty)}$. Soit $\mathfrak{e}^j\overset{\text{déf}}{=}\mathfrak{e}^j_\eta$ et $\mathfrak{f}^j\overset{\text{déf}}{=}u^{c^{(j)}_\chi}\mathfrak{e}^j_{\eta'}$, le groupe $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L_\infty)$ agit sur chacun de ces vecteurs par le caractère $\overline{\eta}$. En écrivant les matrices de φ ci-dessus dans la nouvelle base $(\mathfrak{e}^j,\mathfrak{f}^j)_j$, on se rend compte qu'elles ne font intervenir que des puissances de u^e sur lesquelles la donnée de descente agit trivialement. En remplaçant u^e par u, l'isomorphisme (46) de l'appendice A nous dit que le φ-module $\prod_j(k_E((u))\mathfrak{e}^j\oplus k_E((u))\mathfrak{f}^j)$ obtenu suivant (sans donnée de descente) permet de retrouver $(\overline{\rho}^\vee(1)\otimes\overline{\eta})|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L_\infty)}$:

$$\begin{array}{ll}\left\{\begin{array}{rcl}\varphi(\mathfrak{e}^{j-1}) & = & u\mathfrak{e}^j-a_j\mathfrak{f}^j\\ \varphi(\mathfrak{f}^{j-1}) & = & u^{c_{\chi,f-j}}\mathfrak{f}^j\end{array}\right. & \text{si}\quad j\in \mathrm{I}_\eta\\ \left\{\begin{array}{rcl}\varphi(\mathfrak{e}^{j-1}) & = & \mathfrak{e}^j\\ \varphi(\mathfrak{f}^{j-1}) & = & u^{c_{\chi,f-j}+1}(\mathfrak{f}^j-a_j\mathfrak{e}^j)\end{array}\right. & \text{si}\quad j\in \mathrm{I}_{\eta'}\\ \left\{\begin{array}{rcl}\varphi(\mathfrak{e}^{j-1}) & = & \mathfrak{f}^j\\ \varphi(\mathfrak{f}^{j-1}) & = & u^{c_{\chi,f-j}+1}\mathfrak{e}^j\end{array}\right. & \text{si}\quad j\in \mathrm{II}\end{array}$$

(où $j\neq f-1$ et avec des équations analogues pour $j=f-1$ tenant compte de α et α'). Par la proposition 7.2, $\overline{\mathcal{M}}$ contient un sous-objet $\overline{\mathcal{N}}$ comme dans le lemme 6.1. On suppose que $\overline{\mathcal{N}}$ vérifie $\eta_0=\eta$ et on laisse le cas $\eta_0=\eta'$ (strictement analogue) au lecteur. On va calculer le module de Fontaine-Laffaille de $\overline{\rho}^\vee(1)\otimes\overline{\eta}\omega_f^h\omega^{-1}$ (h est défini juste avant (33)), qui est bien une représentation de Fontaine-Laffaille car générique et telle que :

$$\overline{\rho}^\vee(1)\otimes\overline{\eta}\omega_f^h\omega^{-1}|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L^{\mathrm{nr}})}\simeq\begin{pmatrix}\omega_f^{c_\chi+2h}\omega^{-1} & *\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Cela permettra de déterminer $J_{\overline{\rho}^\vee(1)\otimes\overline{\eta}\omega_f^h\omega^{-1}}=J_{\overline{\rho}^\vee(1)}$. Un calcul utilisant (33) donne $\omega_f^h\omega^{-1}=\omega_f^{\sum_{j=0}^{f-1}w_jp^j}$ avec (on utilise les notations de la preuve du lemme 6.3 et on convient que $w_f=w_0$ et $c_{\chi,f}=c_{\chi,0}$) :

$$(36)\qquad \left\{\begin{array}{rclcccl}w_{f-j} & = & p-2+\frac{h_j}{e} & \text{si} & j & \notin & J\\ w_{f-j} & = & p-2-c_{\chi,f-j}+\frac{h_j}{e} & \text{si} & j & \in & J\setminus\{j_s,1\leq s\leq 2t\}\\ w_{f-j} & = & p-2-c_{\chi,f-j} & \text{si} & j & \in & \{j_{2s},1\leq s\leq t\}\\ w_{f-j} & = & p-1 & \text{si} & j & \in & \{j_{2s-1},1\leq s\leq t\}\end{array}\right.$$

et notons que les quatre cas dans (36) correspondent dans l'ordre aux quatre cas (puisque $\eta_0=\eta$ et en revenant à la définition de J) :

$$(37)\qquad \begin{array}{l}\eta_j=\eta_{j+1}=\eta \text{ et soit } j\in\mathrm{I}_{\eta'} \text{ avec } h_j=e \text{ soit } j\in\mathrm{I}_\eta\setminus\mathrm{I}_\eta^\times \text{ avec } h_j=0\\ \eta_j=\eta_{j+1}=\eta' \text{ et soit } j\in\mathrm{I}_{\eta} \text{ avec } h_j=e \text{ soit } j\in\mathrm{I}_{\eta'}\setminus\mathrm{I}_{\eta'}^\times \text{ avec } h_j=0\\ \eta_j=\eta',\ \eta_{j+1}=\eta \text{ et } j\in\mathrm{II}\cup\mathrm{I}_{\eta'}^\times\\ \eta_j=\eta,\ \eta_{j+1}=\eta' \text{ et } j\in\mathrm{II}\cup\mathrm{I}_{\eta}^\times.\end{array}$$

Tordre par $\omega_f^{w_{f-j}p^{f-j}}$ côté Galois revient à multiplier $\varphi(\mathfrak{e}^{j-1})$ et $\varphi(\mathfrak{f}^{j-1})$ par $u^{w_{f-j}}$ côté φ-modules. En utilisant (36) et (37), on peut donc calculer le φ-module donnant la représentation $(\overline{\rho}^\vee(1)\otimes\overline{\eta}\omega_f^h\omega^{-1})|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L_\infty)}$. En exprimant ce φ-module dans les bases $(\frac{1}{u}\mathfrak{e}^{j-1},\frac{1}{u}\mathfrak{f}^{j-1})$ si $\eta_j=\eta$ et $(\mathfrak{e}^{j-1},\frac{1}{u}\mathfrak{f}^{j-1})$ si $\eta_j=\eta'$, un calcul explicite montre qu'il provient comme dans la preuve de la proposition A.3 de l'unique module de Fontaine-Laffaille $M=M^0\times\cdots\times M^{f-1}$ avec $M^j=k_Ee^j\oplus k_Ef^j$

comme suit :

$$\begin{array}{ll}
\begin{cases} \varphi(e^j) = e^{j+1} \\ \varphi_{c_{\chi,f-j}-1}(f^j) = f^{j+1} \end{cases} & \text{si} \quad j \in \mathrm{I}_\eta \setminus \mathrm{I}_\eta^\times \text{ et } \eta_j = \eta \\
\begin{cases} \varphi(e^j) = e^{j+1} - a_j f^{j+1} \\ \varphi_{c_{\chi,f-j}}(f^j) = f^{j+1} \end{cases} & \text{si} \quad j \in \mathrm{I}_\eta^\times \text{ et } \eta_j = \eta \\
\begin{cases} \varphi(e^j) = e^{j+1} \\ \varphi_{c_{\chi,f-j}+1}(f^j) = f^{j+1} - a_j e^{j+1} \end{cases} & \text{si} \quad j \in \mathrm{I}_{\eta'} \text{ et } \eta_j = \eta \\
\begin{cases} \varphi(e^j) = f^{j+1} \\ \varphi_{c_{\chi,f-j}}(f^j) = e^{j+1} \end{cases} & \text{si} \quad j \in \mathrm{II} \text{ et } \eta_j = \eta \\
\begin{cases} \varphi_{p-2-c_{\chi,f-j}}(e^j) = e^{j+1} \\ \varphi(f^j) = f^{j+1} \end{cases} & \text{si} \quad j \in \mathrm{I}_{\eta'} \setminus \mathrm{I}_{\eta'}^\times \text{ et } \eta_j = \eta' \\
\begin{cases} \varphi_{p-1-c_{\chi,f-j}}(e^j) = e^{j+1} \\ \varphi(f^j) = f^{j+1} - a_j e^{j+1} \end{cases} & \text{si} \quad j \in \mathrm{I}_{\eta'}^\times \text{ et } \eta_j = \eta' \\
\begin{cases} \varphi_{p-c_{\chi,f-j}}(e^j) = e^{j+1} - a_j f^{j+1} \\ \varphi(f^j) = f^{j+1} \end{cases} & \text{si} \quad j \in \mathrm{I}_\eta \text{ et } \eta_j = \eta' \\
\begin{cases} \varphi_{p-1-c_{\chi,f-j}}(e^j) = f^{j+1} \\ \varphi(f^j) = e^{j+1} \end{cases} & \text{si} \quad j \in \mathrm{II} \text{ et } \eta_j = \eta'
\end{array}$$

(on a supposé $j < f-1$, le cas $j = f-1$ est analogue en tenant compte de α et α'). En suivant l'image de φ, on voit que M contient le sous-objet de Fontaine-Laffaille $\prod_{j=0}^{f-1} k_E \widetilde{e}^j$ suivant ($j > 0$) :

$$\widetilde{e}^j = \begin{cases}
e^j & \text{si} \quad \eta_{j-1} = \eta \quad \text{et} \quad j-1 \notin \mathrm{I}_\eta^\times \cup \mathrm{II} \\
e^j - a_{j-1} f^j & \text{si} \quad \eta_{j-1} = \eta \quad \text{et} \quad j-1 \in \mathrm{I}_\eta^\times \\
f^j & \text{si} \quad \eta_{j-1} = \eta \quad \text{et} \quad j-1 \in \mathrm{II} \\
f^j & \text{si} \quad \eta_{j-1} = \eta' \quad \text{et} \quad j-1 \notin \mathrm{I}_{\eta'}^\times \cup \mathrm{II} \\
f^j - a_{j-1} e^j & \text{si} \quad \eta_{j-1} = \eta' \quad \text{et} \quad j-1 \in \mathrm{I}_{\eta'}^\times \\
e^j & \text{si} \quad \eta_{j-1} = \eta' \quad \text{et} \quad j-1 \in \mathrm{II}
\end{cases}$$

(la définition de $\widetilde{e}^0$ est analogue en tenant compte éventuellement de α et α'). Avec les notations de (16), on vérifie que $\mu_j = 0$ si et seulement si $\mathrm{val}(a_{j-1}) > 0$. Explicitons l'un des cas. Soit $\widetilde{f}^j \in \{e^j, f^j\}$ qui engendre le sous-espace $\mathrm{Fil}^{\cdot} M^j$ de M^j (donc $\widetilde{f}^j = f^j$ si $\eta_j = \eta$ et $\widetilde{f}^j = e^j$ si $\eta_j = \eta'$) et considérons le cas $j \in \mathrm{I}_\eta^\times$ et $\eta_j = \eta$. Par (37) on a $\eta^{j+1} = \eta'$ et donc $\widetilde{f}^j = f^j$ et $\widetilde{f}^{j+1} = e^{j+1}$. Comme $\widetilde{e}^{j+1} = e^{j+1} - a_j f^{j+1}$, on a $\varphi_{c_{\chi,f-j}}(\widetilde{f}^j) = f^{j+1} = a_j^{-1}(\widetilde{f}^{j+1} - \widetilde{e}^{j+1})$ et en particulier $\mu_{j+1} \neq 0$. Par (18), on a bien que $J_{\overline{\rho}^\vee(1)}$ est comme dans l'énoncé. □

8. Les théorèmes locaux

On détermine la réduction modulo p des réseaux de Dieudonné provenant des $\mathscr{O}_E$-modules fortement divisibles de type χ dont la représentation galoisienne associée en (28) est générique. En particulier on montre que cette réduction a exactement pour socle les poids de Serre de $\overline{\rho}$ qui apparaissent dans le semi-simplifié modulo p de $\sigma(\chi^s)$.

Comme au §2, on fixe $\chi = \eta \otimes \eta' : I \to \mathscr{O}_E^\times$ un caractère modéré tel que $\chi^s \neq \chi$ et on conserve toutes les notations des paragraphes précédents, en particulier celles des §§6, 7 et des preuves qu'ils contiennent. On rappelle que, pour $J \in \mathscr{P}_\chi$, $\overline{\sigma}_J$ désigne l'unique facteur de Jordan-Hölder de $\overline{\sigma}(\chi^s) = \sigma^0(\chi^s) \otimes_{\mathscr{O}_E} k_E$ correspondant à J (voir §2).

Théorème 8.1. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathscr{O}_E$-module fortement divisible de type χ tel que la représentation $\overline{\rho}$ associée à $\overline{\mathcal{M}}$ en (28) est générique.*
(i) La représentation $\overline{\rho}$ est scindée (resp. irréductible, resp. réductible non scindée) si et seulement si $\mathrm{val}(a_j) > 0$ *pour tout j et* $|\mathrm{II}|$ *est pair (resp.* $\mathrm{val}(a_j) > 0$ *pour tout j et* $|\mathrm{II}|$ *est impair, resp.* $\mathrm{val}(a_j) = 0$ *pour au moins un j).*
(ii) Les facteurs de Jordan-Hölder de $\overline{\sigma}(\chi^s)$ qui sont des poids de Serre pour $\overline{\rho}$ sont exactement les $\overline{\sigma}_J$ pour $J^{\min} \subseteq J \subseteq J^{\max}$ avec $(J^{\min}, J^{\max})$ comme en (26) (en particulier tous ces J sont dans $\mathscr{P}_\chi$).

Démonstration. — On va démontrer (i) et (ii) en même temps. Notons que, pour (ii), par les propositions 4.2 et 4.3 il suffit de montrer d'une part que $(c_{\chi,j}) \otimes \eta'(\det) \in \mathscr{P}(\overline{\rho})$ (cf. §4) et d'autre part que $J^{\min}$ et $J^{\max}$ en (26) s'obtiennent à partir de $\overline{\rho}$ par les formules (19) et (20).
Premier cas : on suppose d'abord que tous les $a_j \in \mathscr{O}_E$ apparaissant dans $\mathrm{Fil}^1\mathcal{M}$ (cf. proposition 5.2) sont de valuation > 0, et donc nuls dans $\overline{\mathcal{M}}$.
Premier sous-cas : $|\mathrm{II}|$ est pair.
On définit par la récurrence (32) deux suites $(\eta_j)_{0 \leq j \leq f-1}$ et $(\eta'_j)_{0 \leq j \leq f-1}$ d'éléments de $\{\eta, \eta'\}$ telles que $\eta_0 \overset{\text{déf}}{=} \eta$ et $\eta'_0 \overset{\text{déf}}{=} \eta'$ (noter que $\mathrm{I}_\eta^\times = \mathrm{I}_{\eta'}^\times = \emptyset$). Comme $|\mathrm{II}|$ est pair, on a $\eta_{(f-1)+1} = \eta_0$, $\eta'_{(f-1)+1} = \eta'_0$, et sur les formules de la proposition 5.2 (réduites modulo p et avec $\lambda = \lambda' = 0$) on voit que $\overline{\mathcal{M}}$ est la somme directe des deux φ_1-modules filtrés de rang 1 stables par $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/L)$:

$$\overline{\mathcal{M}} = \prod_{j=0}^{f-1} \overline{S}\overline{e}^j_{\eta_j} \oplus \prod_{j=0}^{f-1} \overline{S}\overline{e}^j_{\eta'_j}.$$

La même preuve que pour le (i) du lemme 6.3 donne (avec les mêmes notations) :

$$\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/L^{\mathrm{nr}})} \simeq \left(\omega_f^{\sum_{j=0}^{f-1}(r_j+1)p^j} \oplus 1\right) \otimes \overline{\eta}'\omega_f^{-h}\omega$$

et $\overline{\rho}$ est donc scindée. Si on explicite les égalités (34) donnant les r_j, on trouve sachant qu'ici $\{j_s, 1 \leq s \leq 2t\} = \mathrm{II}$:

$$(38)\qquad \begin{cases} r_{f-j} &= c_{\chi,f-j} - 2 & \text{si} & j \in \mathrm{I}_\eta & \text{et} & \eta_j = \eta \\ r_{f-j} &= p-1-c_{\chi,f-j} & \text{si} & j \in \mathrm{I}_\eta & \text{et} & \eta_j = \eta' \\ r_{f-j} &= c_{\chi,f-j} & \text{si} & j \in \mathrm{I}_{\eta'} & \text{et} & \eta_j = \eta \\ r_{f-j} &= p-3-c_{\chi,f-j} & \text{si} & j \in \mathrm{I}_{\eta'} & \text{et} & \eta_j = \eta' \\ r_{f-j} &= c_{\chi,f-j} - 1 & \text{si} & j \in \mathrm{II} & \text{et} & \eta_j = \eta \\ r_{f-j} &= p-2-c_{\chi,f-j} & \text{si} & j \in \mathrm{II} & \text{et} & \eta_j = \eta'. \end{cases}$$

Définissons un f-uplet $\lambda = (\lambda_0(x_0), \cdots, \lambda_{f-1}(x_{f-1}))$ en posant $\lambda_{f-j}(x_{f-j}) \overset{\text{déf}}{=} x_{f-j}+2$ si $j \in \mathrm{I}_\eta$ et $\eta_j = \eta$, $\lambda_{f-j}(x_{f-j}) \overset{\text{déf}}{=} p-1-x_{f-j}$ si $j \in \mathrm{I}_\eta$ et $\eta_j = \eta'$, etc. de sorte que $(\lambda_j(r_j)) = (c_{\chi,j})$. Les relations de récurrence (32) sur les η_j impliquent facilement que $\lambda \in \mathscr{PRD}(x_0, \cdots, x_{f-1})$. Un calcul explicite de h en (33) donne :

$$-h + \sum_{j=0}^{f-1} p^{f-j} = \sum_{\eta_j=\eta'} p^{f-j}(c_{\chi,f-j} + 0 \text{ ou } 1) + \sum_{\substack{j\in \mathrm{I}_\eta \\ \eta_j=\eta}} p^{f-j}$$

avec 1 si $j \in \mathrm{I}_{\eta'} \cup \mathrm{II}$ et 0 si $j \in \mathrm{I}_\eta$. On vérifie alors que $-h + \sum_{j=0}^{f-1} p^{f-j}$ est congru à $e(\lambda)(r_0, \cdots, r_{f-1})$ modulo $p^f - 1$ (notons que $\lambda_{f-1}(x_{f-1}) \in \mathbb{Z} + x_{f-1} \Leftrightarrow \eta_1 = \eta \Leftrightarrow 0 \notin \mathrm{II} \Leftrightarrow \lambda_0(r_0) \in \{c_{\chi,0}, c_{\chi,0}+2\}$ de sorte que $e(\lambda)(r_0, \cdots, r_{f-1}) \equiv \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{f-1} p^{f-j}(r_{f-j} - \lambda_{f-j}(r_{f-j}))$ modulo $p^f - 1$). Ainsi on a l'égalité entre poids de Serre :

$$(\lambda_j(r_j)) \otimes \det{}^{e(\lambda)(r_0,\cdots,r_{f-1})}\det{}^{-h}\omega(\det) = (c_{\chi,j})$$

c'est-à-dire $(c_{\chi,j}) \otimes \eta'(\det) \in \mathscr{P}(\overline{\rho})$. Par la proposition 4.2, on en déduit que $\overline{\sigma}(\chi^s)$ contient toujours un poids de Serre de $\overline{\rho}$. On peut donc appliquer la proposition 4.3 et la comparaison entre les formules (19) et les formules (26) montre immédiatement que l'on trouve exactement les mêmes ensembles.

Deuxième sous-cas : $|\mathrm{II}|$ est impair.

On reprend les notations de la preuve de la proposition 7.2. En particulier, $\mathcal{M}$ « se restreint sur $\mathscr{O}_{L'}$ » en $\mathcal{M}' \simeq \mathcal{M}'^0 \times \cdots \times \mathcal{M}'^{2f-1}$ tel que, dans $\mathcal{M}'$, le nombre de cas II devient pair. Comme dans la preuve du (i) du lemme 6.3 on a :

$$\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L^{\mathrm{nr}})} \simeq \left(\omega_{2f}^{c_{\chi'}+h'} \oplus \omega_{2f}^{-h'+\sum_{j=0}^{2f-1} p^j}\right) \otimes \overline{\eta}'$$

où ω_{2f} est défini comme ω_f mais avec ι' au lieu de ι et où h' est donné par (33). On note $0 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_{2t'-1} < j_{2t'} \leq 2f-1$ les indices $j \in \mathrm{II}$, i.e. par (32) tels que $\eta_{j+1} \neq \eta_j$ (en partant de $\eta_0 = \eta$). On a $0 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_{t'} \leq f-1$ et $j_{s+t'} = j_s$ si $1 \leq s \leq t'$. En se souvenant que $t' = |\mathrm{II}|$ est impair et que $c_{\chi',j} = c_{\chi',f+j} = c_{\chi,j}$ (si $j < f$), on trouve après calcul que l'entier $-h' + \sum_{j=0}^{2f-1} p^j$

est congru modulo $1+p^f$ à :

$$-\sum_{0\leq j<f-j_{t'}} p^j(c_{\chi,j}\pm 1) \;+\; \sum_{f-j_{t'}\leq j<f-j_{t'-1}} p^j(c_{\chi,j}\pm 1) \;-\; \sum_{f-j_{t'-1}\leq j<f-j_{t'-2}} p^j(c_{\chi,j}\pm 1) \;+\;\cdots$$
$$\cdots - \sum_{f-j_2\leq j<f-j_1} p^j(c_{\chi,j}\pm 1) + \sum_{f-j_1\leq j<f} p^j(c_{\chi,j}\pm 1)$$

avec $+1$ si $f-j\in \mathrm{I}_{\eta'}\cup \mathrm{II}$ et -1 si $f-j\in \mathrm{I}_\eta$ $(0\leq j\leq f-1)$. Cela donne que $-h'+\sum_{j=0}^{2f-1}p^j$ est congru modulo $1+p^f$ à $\sum_{j=0}^{f-1}(r_j+1)p^j$ où les r_j sont comme en (38) pour $j\neq 0$ et pour $j=0$:

$$\begin{cases} r_0 &= \quad p-c_{\chi,0} \quad \text{si} \quad 0\in \mathrm{I}_\eta \\ r_0 &= \; p-2-c_{\chi,0} \quad \text{si} \quad 0\in \mathrm{I}_{\eta'} \\ r_0 &= \; p-1-c_{\chi,0} \quad \text{si} \quad 0\in \mathrm{II}. \end{cases}$$

Les bornes (31) sur les $c_{\chi',2f-j}=c_{\chi,f-j}$ pour $0\leq j\leq f-1$ impliquent que $\sum_{j=0}^{f-1}(r_j+1)p^j$ n'est pas divisible par $1+q=1+p^f$ et donc que $\overline{\rho}$ est irréductible de la forme :

$$\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L^{\mathrm{nr}})} \;\simeq\; \big(\omega_{2f}^{\sum_{j=0}^{f-1}(r_j+1)p^j}\oplus \omega_{2f}^{q\sum_{j=0}^{f-1}(r_j+1)p^j}\big)\otimes \overline{\eta}'\omega_f^{*}$$

où $*$ est un entier convenable. On vérifie alors comme dans le premier sous-cas que $(c_{\chi,j})\otimes \eta'(\det)\in \mathscr{P}(\overline{\rho})$ et que (26) donne bien les mêmes $J^{\min}$ et $J^{\max}$ que (20).

Deuxième cas : on suppose qu'au moins un des $a_j\in \mathscr{O}_E$ apparaissant dans $\mathrm{Fil}^1\mathcal{M}$ est de valuation nulle. L'assertion (i) dans ce cas est contenue dans les propositions 7.2 et 7.3. Par la proposition 7.2, $\overline{\mathcal{M}}$ contient en facteur direct un sous-φ_1-module filtré $\prod_{j=0}^{f-1}\overline{S}\widetilde{e}_{\eta_j}^{j}$. On a comme dans la preuve du (i) du lemme 6.3 (et en supposant $\eta_0=\eta$ comme dans cette preuve, le cas $\eta_0=\eta'$ étant analogue) :

$$\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L^{\mathrm{nr}})} \;\simeq\; \begin{pmatrix}\omega_f^{\sum_{j=0}^{f-1}(r_j+1)p^j} & * \\ 0 & 1\end{pmatrix}\otimes \overline{\eta}'\omega_f^{-h}\omega$$

et si on explicite les égalités (34), on trouve :

$$\begin{cases} r_{f-j} &= \quad c_{\chi,f-j}-2 \quad \text{si} \quad j\in \mathrm{I}_\eta\setminus \mathrm{I}_\eta^\times \quad \text{et} \quad \eta_j=\eta \\ r_{f-j} &= \; p-1-c_{\chi,f-j} \quad \text{si} \quad j\in \mathrm{I}_\eta \quad \text{et} \quad \eta_j=\eta' \\ r_{f-j} &= \quad c_{\chi,f-j} \quad \text{si} \quad j\in \mathrm{I}_{\eta'} \quad \text{et} \quad \eta_j=\eta \\ r_{f-j} &= \; p-3-c_{\chi,f-j} \quad \text{si} \quad j\in \mathrm{I}_{\eta'}\setminus \mathrm{I}_{\eta'}^\times \quad \text{et} \quad \eta_j=\eta' \\ r_{f-j} &= \quad c_{\chi,f-j}-1 \quad \text{si} \quad j\in \mathrm{I}_\eta^\times\cup \mathrm{II} \quad \text{et} \quad \eta_j=\eta \\ r_{f-j} &= \; p-2-c_{\chi,f-j} \quad \text{si} \quad j\in \mathrm{I}_{\eta'}^\times\cup \mathrm{II} \quad \text{et} \quad \eta_j=\eta'. \end{cases}$$

On définit $\lambda=(\lambda_j(x_j))$ comme dans le premier cas et on vérifie avec (32) que $\lambda\in \mathscr{PRD}(x_0,\cdots,x_{f-1})$. Par la proposition 7.3, l'ensemble $J_{\overline{\rho}}$ associé à $\overline{\rho}$ en (17) est aussi donné par (35), ce qui implique $\lambda\in \mathscr{PD}(x_0,\cdots,x_{f-1})$. Enfin, un calcul analogue donne $(c_{\chi,j})\otimes \eta'(\det)\in \mathscr{P}(\overline{\rho})$ et la comparaison entre les formules (26) et les formules (19) (en utilisant (17) = (35)) montre encore que l'on trouve bien les mêmes ensembles. $\square$

En particulier le corollaire suivant (démontré dans la preuve) mérite d'être énoncé à part.

Corollaire 8.2. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathscr{O}_E$-module fortement divisible de type χ tel que la représentation $\overline{\rho}$ associée à $\overline{\mathcal{M}}$ en (28) est générique. Alors $\overline{\sigma}(\chi^s)$ contient toujours au moins un poids de Serre associé à $\overline{\rho}$.*

Remarque 8.3. — (i) Le corollaire 8.2 était déjà connu pour $\overline{\rho}$ semi-simple mais sans hypothèse de généricité (voir [**24**, Prop.3.5.4]).
(ii) Les cas particuliers du théorème 8.1 formés des $\mathcal{M}$ tels que $\mathrm{II} = \emptyset$ (et donc $J^{\min} = J^{\max}$) sont essentiellement déjà traités dans [**24**].

Lemme 8.4. — *Soit $(J^{\min}, J^{\max})$ deux parties de $\mathscr{S}$ telles que $J^{\min} \subseteq J^{\max}$. Pour tout $J \in \mathscr{P}_\chi$ tel que $J^{\min} \subseteq J \subseteq J^{\max}$ et tel que $\overline{\sigma}_J = (s_0, \cdots, s_{f-1}) \otimes \det^*$ avec $0 \leq s_j \leq p-2$, il existe une unique représentation $\overline{\sigma}_J(J^{\min}, J^{\max})$ de $\mathrm{GL}_2(k_L)$ sur k_E dont le socle est $\overline{\sigma}_J$ et dont les constituants sont les $\overline{\sigma}_{J'}$ pour $J \backslash J^{\min} \subseteq J' \subseteq J \amalg \mathscr{S} \backslash J^{\max}$ et $J' \in \mathscr{P}_\chi$.*

Démonstration. — Par [**11**, Prop.13.1], il existe une unique représentation $\overline{\sigma}_J^{\max}$ de $\mathrm{GL}_2(k_L)$ sur k_E dont le socle est $\overline{\sigma}_J$, dont les autres constituants sont distincts de $\overline{\sigma}_J$ et qui est maximale pour ces propriétés. Soit $J' \in \mathscr{P}_\chi$ tel que $J \backslash J^{\min} \subseteq J' \subseteq J \amalg \mathscr{S} \backslash J^{\max}$, alors par [**11**, Lem.3.2] $\overline{\sigma}_{J'}$ est un constituant irréductible de l'enveloppe injective $\mathrm{inj}_{\mathrm{GL}_2(k_L)} \overline{\sigma}_J$ (car, en notant $\overline{\sigma}_{J'} = (s'_0, \cdots, s'_{f-1}) \otimes \det^*$, on passe de $(s_0, \cdots, s_{f-1})$ à $(s'_0, \cdots, s'_{f-1})$ par une succession de séquences $p - 2 - s_\cdot, \cdots, p-2-s_\cdot \pm 1, \cdots, s_\cdot \pm 1$). Comme $0 \leq s_j \leq p-2$ pour tout j, [**11**, Cor.3.12] montre qu'il existe une unique représentation $I(\overline{\sigma}_J, \overline{\sigma}_{J'})$ de $\mathrm{GL}_2(k_L)$ sur k_E de socle $\overline{\sigma}_J$ et de co-socle $\overline{\sigma}_{J'}$ dont tous les constituants sont distincts. La représentation $I(\overline{\sigma}_J, \overline{\sigma}_{J'})$ est donc aussi l'unique sous-représentation de $\overline{\sigma}_J^{\max}$ de co-socle $\overline{\sigma}_{J'}$. Par [**11**, Cor.4.11] les constituants de cette représentation sont les $\overline{\sigma}_{J''}$ pour $J \cap J' \subseteq J'' \subseteq J \cup J'$ et $J'' \in \mathscr{P}_\chi$. En particulier ces J'' vérifient encore $J \backslash J^{\min} \subseteq J'' \subseteq J \amalg \mathscr{S} \backslash J^{\max}$. La somme des sous-représentations $I(\overline{\sigma}_J, \overline{\sigma}_{J'})$ dans $\overline{\sigma}_J^{\max}$ pour tous les J' comme dans l'énoncé donne la représentation cherchée, unique par construction. (Notons que, si $\widetilde{J} \overset{\text{déf}}{=} (J \backslash J^{\min}) \cup (\mathscr{S} \backslash J^{\max}) \in \mathscr{P}_\chi$, alors $\overline{\sigma}_J(J^{\min}, J^{\max}) = I(\overline{\sigma}_J, \overline{\sigma}_{\widetilde{J}})$.) $\square$

Théorème 8.5. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathscr{O}_E$-module fortement divisible de type χ, G le groupe p-divisible correspondant, M le $\mathscr{O}_E$-module de Dieudonné de type χ associé à G (voir corollaire 5.3) et $\sigma_\eta^0(\chi^s)$ le $\mathscr{O}_E$-réseau de Dieudonné sur $\sigma(\chi^s)$ associé à M au §3. Supposons la représentation $\overline{\rho}$ associée à $\overline{\mathcal{M}}$ en (28) générique. Alors on a avec les notations du lemme 8.4 :*

$$\sigma_\eta^0(\chi^s) \otimes_{\mathscr{O}_E} k_E = \bigoplus_{J^{\min} \subseteq J \subseteq J^{\max}} \overline{\sigma}_J(J^{\min}, J^{\max})$$

où $J^{\min} \subseteq J^{\max}$ sont les éléments de $\mathscr{P}_\chi$ définis en (26). En particulier :

$$\mathrm{soc}_K(\sigma_\eta^0(\chi^s) \otimes_{\mathscr{O}_E} k_E) = \bigoplus_{J \mid \overline{\sigma}_J \in \mathscr{D}(\overline{\rho})} \overline{\sigma}_J.$$

Démonstration. — Rappelons que $\sigma_\eta^0(\chi^s)$ dépend de M (et pas seulement de η et χ). Notons que l'hypothèse de généricité implique $p > 2$. La deuxième assertion découle de la première, du théorème 8.1 et de la définition de $\overline{\sigma}_J(J^{\min}, J^{\max})$. Montrons la première assertion. Par (8) on a dans $\sigma_\eta^0(\chi^s)$ pour tout $J' \in \mathscr{P}_\chi$ avec les v_j comme dans le corollaire 5.3 :

$$\begin{aligned}
\langle K \cdot p^{\sum_{j\in J'} v_j} \sigma_{J'} \rangle &= \bigoplus_{J'' \in \mathscr{P}_\chi} p^{|J''| - |J' \cap J''| + \sum_{j \in J'} v_j - \sum_{j \in J''} v_j} (p^{\sum_{j\in J''} v_j} \sigma_{J''}) \\
&= \bigoplus_{J'' \in \mathscr{P}_\chi} p^{\sum_{j \in J' \backslash J' \cap J''} v_j + \sum_{j \in J'' \backslash J' \cap J''} (1 - v_j)} (p^{\sum_{j\in J''} v_j} \sigma_{J''})
\end{aligned}$$

où l'on convient qu'une somme est nulle lorsque son ensemble d'indices est vide. Notons que l'image de $\langle K \cdot p^{\sum_{j\in J'} v_j} \sigma_{J'} \rangle$ dans $\sigma_\eta^0(\chi^s) \otimes_{\mathscr{O}_E} k_E$ est l'unique sous-représentation de $\sigma_\eta^0(\chi^s) \otimes_{\mathscr{O}_E} k_E$ de co-socle $\overline{\sigma}_{J'}$. Si on pose :

$$w_{J',J''} \overset{\text{déf}}{=} \sum_{j \in J' \backslash J' \cap J''} v_j + \sum_{j \in J'' \backslash J' \cap J''} (1 - v_j),$$

les J'' tels que $\overline{\sigma}_{J''}$ apparaît dans cette sous-représentation de $\sigma_\eta^0(\chi^s) \otimes_{\mathscr{O}_E} k_E$ sont exactement ceux tels que $w_{J',J''} = 0$. Mais on voit avec (27) que $w_{J',J''} = 0$ si et seulement si $J' \backslash J' \cap J'' \subseteq \mathscr{S} \backslash J^{\max}$ et $J'' \backslash J' \cap J'' \subseteq J^{\min}$. De manière équivalente, $w_{J',J''} = 0$ si et seulement si J'' s'obtient à partir de J' en rajoutant des éléments de $J^{\min}$ et en enlevant des éléments de $\mathscr{S} \backslash J^{\max}$. Pour $J \in \mathscr{P}_\chi$ posons :

$$\mathscr{P}_{\chi,J} \overset{\text{déf}}{=} \{J' \in \mathscr{P}_\chi \mid (J' \cup J^{\min}) \backslash (J' \cap \mathscr{S} \backslash J^{\max}) = J\},$$

on a une partition $\mathscr{P}_\chi = \amalg_{J^{\min} \subseteq J \subseteq J^{\max}} \mathscr{P}_{\chi,J}$ et par ce qui précède $w_{J',J''} = 0$ implique que J' et J'' sont dans le même $\mathscr{P}_{\chi,J}$. De plus chaque $\mathscr{P}_{\chi,J}$ (pour $J^{\min} \subseteq J \subseteq J^{\max}$) contient un unique J' tel que $w_{J',J''} = 0$ implique $J'' = J'$, à savoir $J' = J$ (qui est toujours dans $\mathscr{P}_\chi$). On voit donc finalement que $\sigma_\eta^0(\chi^s) \otimes_{\mathscr{O}_E} k_E$ est une somme directe indexée par les J entre $J^{\min}$ et $J^{\max}$ de représentations de K sur k_E (se factorisant par $\mathrm{GL}_2(k_L)$) de socle isomorphe à $\overline{\sigma}_J$ et dont les constituants sont les $\overline{\sigma}_{J'}$ pour J' parcourant $\mathscr{P}_{\chi,J}$. Comme $\mathscr{P}_{\chi,J}$ s'identifie trivialement aux J' de $\mathscr{P}_\chi$ tels que $J \backslash J^{\min} \subseteq J' \subseteq J \amalg \mathscr{S} \backslash J^{\max}$, le résultat découle du lemme 8.4, en remarquant que $\overline{\sigma}_J \in \mathscr{D}(\overline{\rho})$ vérifie bien l'hypothèse du lemme 8.4 par généricité de $\overline{\rho}$. $\square$

9. Un problème de compatibilité local-global modulo p I

On énonce le problème de compatibilité local-global principal de cet article qui précise les conjectures de [**12**] : les « diagrammes » associés à une représentation galoisienne générique en [**11**] apparaissent-ils dans les espaces $S_\psi^D(k_E)$ du §3 ?

On reprend les notations du §3 et on suppose que D et F sont non ramifiés en toutes les places divisant p. On note E une extension finie quelconque de $\mathbb{Q}_p$ telle que $|\operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(F_\nu, E)| = [F_\nu, \mathbb{Q}_p]$ pour tout $\nu|p$. On fixe une représentation continue irréductible totalement impaire :

$$\overline{\rho} : \operatorname{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F) \to \operatorname{GL}_2(k_E)$$

telle que $\overline{\rho}_\nu \stackrel{\text{déf}}{=} \overline{\rho}|_{\operatorname{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F_\nu)}$ est générique au sens du §4 pour toute place ν de F divisant p (cela implique en particulier $p > 2$). On note $\psi = \prod_\nu \psi_\nu : F^\times\backslash(\mathbb{A}_F^f)^\times \to k_E^\times$ l'unique caractère tel que $\det(\overline{\rho}) = \psi\omega$ via la réciprocité du corps de classes telle que normalisée dans l'introduction.

Soit $U = \prod_\nu U_\nu \subset (D \otimes_F \mathbb{A}_F^f)^\times$ un sous-groupe ouvert compact tel que $\psi|_{U\cap(\mathbb{A}_F^f)^\times} = 1$ et S un ensemble fini de places finies de F contenant Σ, les places divisant p, les places où $\overline{\rho}$ est ramifiée et les places où U_ν n'est pas maximal. Pour $\nu \notin S$, on note $a_\nu \stackrel{\text{déf}}{=} \psi(\operatorname{Fr}_\nu)^{-1}\operatorname{trace}(\overline{\rho}_\nu(\operatorname{Fr}_\nu)) = q_\nu \operatorname{trace}(\overline{\rho}_\nu(\operatorname{Fr}_\nu^{-1})) \in k_E$ (voir §3, Fr_ν est un Frobenius arithmétique en ν). On note $T_\psi^S(U, k_E)$ la sous-algèbre commutative de $\operatorname{End}_{k_E}\big(S_\psi^D(U, k_E)\big)$ engendrée par les opérateurs de Hecke :

$$T_\nu \stackrel{\text{déf}}{=} \operatorname{GL}_2(\mathscr{O}_{F_\nu}) \begin{pmatrix} \varpi_\nu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \operatorname{GL}_2(\mathscr{O}_{F_\nu})$$

pour $\nu \notin S$, $\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^\vee}^S$ l'idéal de $T_\psi^S(U, k_E)$ engendré par les opérateurs $T_\nu - a_\nu$ pour $\nu \notin S$ et on pose :

$$S_\psi^D(U, k_E)[\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^\vee}^S] \stackrel{\text{déf}}{=} \{f \in S_\psi^D(U, k_E) \mid Tf = 0 \ \forall\ T \in \mathfrak{m}_{\overline{\rho}^\vee}^S\}.$$

Par [**12**, Lem.4.6], le sous-espace $S_\psi^D(U, k_E)[\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^\vee}^S]$ ne dépend pas de S comme ci-dessus, et on le note $S_\psi^D(U, k_E)[\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^\vee}]$. Enfin on note :

$$S_\psi^D(k_E)[\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^\vee}] \stackrel{\text{déf}}{=} \varinjlim_U S_\psi^D(U, k_E)[\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^\vee}].$$

Rappelons la conjecture suivante ([**12**, Conj.4.7]) :

Conjecture 9.1 ([**12**]). — *Supposons $S_\psi^D(k_E)[\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^\vee}] \neq 0$. Avec les notations précédentes, il existe un isomorphisme $(D \otimes_F \mathbb{A}_F^f)^\times$-équivariant :*

$$S_\psi^D(k_E)[\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^\vee}] \simeq \otimes'_\nu \pi_\nu^D(\overline{\rho}^\vee)$$

*où, dans le produit tensoriel restreint de droite, $\pi_\nu^D(\overline{\rho}^\vee)$ si $\nu \nmid p$ est la représentation lisse admissible de $(D \otimes_F F_\nu)^\times$ associée à $\overline{\rho}_\nu^\vee$ en [**12**, §4] (basée sur les travaux de Vignéras et Emerton) et où $\pi_\nu^D(\overline{\rho}^\vee)$ si $\nu|p$ est une* *représentation lisse admissible de* $(D\otimes_F F_\nu)^\times \simeq \mathrm{GL}_2(F_\nu)$ *dont le* $\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{F_\nu})$*-socle est* $\oplus_{\sigma_\nu\in\mathscr{D}(\overline{\rho}_\nu)}\sigma_\nu$.

En fait, la conjecture de [**12**, Conj.4.7] est énoncée sans l'hypothèse de généricité sur $\overline{\rho}_\nu$ pour $\nu|p$ mais est du coup légèrement moins précise puisqu'elle demande que le socle de $\pi_\nu^D(\overline{\rho}^\vee)$ soit constitué des poids de Serre de $\mathscr{D}(\overline{\rho}_\nu)$ avec éventuellement des multiplicités >1.

À ce jour, à la connaissance de l'auteur, aucun cas de la conjecture 9.1 n'est complètement connu lorsque l'un des F_ν pour $\nu|p$ n'est pas $\mathbb{Q}_p$, même en autorisant d'éventuelles multiplicités >1 (noter néanmoins les résultats de multiplicité 1 de [**15**] et de [**8**] dans ce contexte). Soit $\mathscr{D}(\overline{\rho}_p)\overset{\text{déf}}{=}\{\otimes_{\nu|p}\sigma_\nu,\sigma_\nu\in\mathscr{D}(\overline{\rho}_\nu)\}$. Dans [**24**] (complété par [**1**], [**2**]), Gee montre que, si $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}\left(\overline{\mathbb{Q}}/F(\sqrt[p]{1})\right)}$ est irréductible (+ une hypothèse technique si $p=5$) et si $S_\psi^D(k_E)[\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^\vee}]\neq 0$, le $\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_F\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_p)$-socle de $S_\psi^D(U,k_E)[\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^\vee}]$ (pour U suffisamment petit) est formé des poids de Serre « réguliers » de $\mathscr{D}(\overline{\rho}_p)$ (avec des multiplicités inconnues ≥ 1), et éventuellement de poids de Serre « non réguliers ». (Récemment Gee et Kisin, et indépendamment Newton, ont annoncé avoir une preuve que ce socle était exactement formé des poids de Serre de $\mathscr{D}(\overline{\rho}_p)$, toujours avec d'éventuelles multiplicités. Signalons aussi les résultats de Barnet-Lamb, Gee, Geraghty, Liu et Savitt dans le contexte analogue des groupes unitaires compacts ([**3**], [**26**]).)

Notons que, si $\pi_\nu^D(\overline{\rho}^\vee)$ ne dépend par définition que de $\overline{\rho}_\nu^\vee$ pour $\nu\nmid p$, cela n'est absolument pas clair pour $\nu|p$ (du moins lorsque $F\neq\mathbb{Q}$). Nous allons d'abord « pousser un cran plus loin » la conjecture 9.1 pour les places $\nu|p$ en utilisant les constructions de [**11**], puis donner au §10 quelques résultats très partiels en faveur de cette conjecture « renforcée ».

Fixons une place ν de F divisant p et, suivant les notations de [**11**], soit $D_0(\overline{\rho}_\nu)$ la plus grande représentation (pour l'inclusion) de $\mathrm{GL}_2(k_{F_\nu})$ sur k_E dont le socle est $\oplus_{\sigma_\nu\in\mathscr{D}(\overline{\rho}_\nu)}\sigma_\nu$ et telle que les $\sigma_\nu\in\mathscr{D}(\overline{\rho}_\nu)$ n'apparaissent pas ailleurs que dans le socle (comme facteurs de Jordan-Hölder). Le fait qu'une telle représentation existe est montré dans [**11**, Prop.13.1], de même le fait qu'elle se décompose sous la forme :

$$D_0(\overline{\rho}_\nu)=\oplus_{\sigma_\nu\in\mathscr{D}(\overline{\rho}_\nu)}D_{0,\sigma_\nu}(\overline{\rho}_\nu)$$

où $\mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_2(k_{F_\nu})}D_{0,\sigma_\nu}(\overline{\rho}_\nu)=\sigma_\nu$.

Lemme 9.2. — *Soit* $U\subseteq U'\subset(D\otimes_F\mathbb{A}_F^f)^\times$ *deux sous-groupes ouverts compacts tels que* $\psi|_{U\cap(\mathbb{A}_F^f)^\times}=1$ *et tels que* U *est normal dans* U'. *Soit* $R'\subseteq R$ *deux représentations de* U'/U *sur des* k_E*-espaces vectoriels de dimension finie telles que :*

(i) R' *contient* $\mathrm{soc}_{U'/U}R$

(ii) R' *est contenue dans* $S_\psi^D(U,k_E)[\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^\vee}]$

(iii) R/R' *et* $\mathrm{soc}_{U'/U}\, S_\psi^D(U,k_E)[\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^\vee}]$ *n'ont pas de composante irréductible en commun.*

Si U *est assez petit, la restriction à* R' *induit un isomorphisme :*

$$\mathrm{Hom}_{U'/U}\big(R, S_\psi^D(U,k_E)[\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^\vee}]\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{U'/U}\big(R', S_\psi^D(U,k_E)[\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^\vee}]\big) \tag{39}$$

en particulier R *est contenue dans* $S_\psi^D(U,k_E)[\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^\vee}]$.

Démonstration. — Soit $V \overset{\text{déf}}{=} S_\psi^D(U,k_E)$ et fixons un ensemble fini de place S comme précédemment tel que $V[\mathfrak{m}^S_{\overline{\rho}^\vee}] = V[\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^\vee}]$. Pour toute U'/U-représentation R de dimension finie, on fait agir les opérateurs de Hecke sur $\mathrm{Hom}_{U'/U}(R,V)$ par leur action sur V. Si U est assez petit, il est alors standard que toute suite exacte $0 \to R' \to R \to R'' \to 0$ de U'/U-représentations de dimension finie donne lieu à une suite exacte compatible à l'action des opérateurs de Hecke :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{U'/U}(R'',V)_{\mathfrak{m}^S_{\overline{\rho}^\vee}} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{U'/U}(R,V)_{\mathfrak{m}^S_{\overline{\rho}^\vee}} \longrightarrow& \\ \mathrm{Hom}_{U'/U}(R',V)_{\mathfrak{m}^S_{\overline{\rho}^\vee}} &\longrightarrow 0. \end{aligned} \tag{40}$$

Soit $R' \subseteq R$ comme dans l'énoncé. On a par (iii) :

$$\mathrm{Hom}_{U'/U}\big(R/R', V[\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^\vee}]\big) = \mathrm{Hom}_{U'/U}\big(R/R',V\big)[\mathfrak{m}^S_{\overline{\rho}^\vee}] = 0,$$

d'où aussi :

$$\mathrm{Hom}_{U'/U}(R/R',V)_{\mathfrak{m}^S_{\overline{\rho}^\vee}} = 0 \tag{41}$$

car $W[\mathfrak{m}^S_{\overline{\rho}^\vee}] = 0$ si et seulement si $W_{\mathfrak{m}^S_{\overline{\rho}^\vee}} = 0$. Appliquant (40) à la suite exacte :

$$0 \longrightarrow R' \longrightarrow R \longrightarrow R/R' \longrightarrow 0,$$

on a avec (41) un isomorphisme compatible à Hecke :

$$\mathrm{Hom}_{U'/U}(R,V)_{\mathfrak{m}^S_{\overline{\rho}^\vee}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{U'/U}(R',V)_{\mathfrak{m}^S_{\overline{\rho}^\vee}}$$

d'où l'isomorphisme de l'énoncé en prenant des deux côtés les vecteurs propres sous Hecke. Par (ii), il existe $f \in \mathrm{Hom}_{U'/U}(R',V)[\mathfrak{m}^S_{\overline{\rho}^\vee}]$ qui est une injection. Soit $g \in \mathrm{Hom}_{U'/U}(R,V)[\mathfrak{m}^S_{\overline{\rho}^\vee}]$ l'unique élément s'envoyant sur f. Si g n'est pas injectif, alors $\ker(g) \cap \mathrm{soc}_{U'/U} R \neq 0$. Comme $\ker(g) \cap \mathrm{soc}_{U'/U} R \subseteq \ker(g) \cap R'$ par (i), on a donc $0 \neq \ker(g) \cap R' = \ker(f)$ ce qui est impossible. L'injection g donne l'inclusion (39) cherchée. □

Proposition 9.3. — *Si la conjecture 9.1 est vraie, alors pour tout* $\nu|p$ *il existe une injection* $\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{F_\nu})$*-équivariante unique à scalaire près :*

$$D_0(\overline{\rho}_\nu) \hookrightarrow \pi_\nu^D(\overline{\rho}^\vee).$$

En particulier, on a une injection $(D \otimes_F \mathbb{A}_F^{f,p})^\times \times \mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p)$*-équivariante :*

$$\big(\otimes'_{\nu\nmid p}\, \pi_\nu^D(\overline{\rho}^\vee)\big) \otimes \big(\otimes_{\nu|p} D_0(\overline{\rho}_\nu)\big) \hookrightarrow S_\psi^D(k_E)[\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^\vee}].$$

Démonstration. — Soient $U = \prod_\nu U_\nu \subset U' = \prod_\nu U'_\nu$ deux sous-groupes ouverts compacts de $(D \otimes_F \mathbb{A}_F^f)^\times$ tels que $\psi|_{U\cap(\mathbb{A}_F^f)^\times} = 1$, $U_\nu = U'_\nu$ si $\nu \nmid p$, $U_\nu \stackrel{\text{déf}}{=} \ker(\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{F_\nu}) \twoheadrightarrow \mathrm{GL}_2(k_{F_\nu}))$ et $U'_\nu \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{F_\nu})$ si $\nu|p$. En particulier U est normal dans U' et $U'/U \simeq \mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p)$. Si l'on suppose vrai l'énoncé 9.1, on a en particulier un isomorphisme U'/U-équivariant :

$$S_\psi^D(U, k_E)[\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^\vee}] \simeq \otimes'_\nu \pi_\nu^D(\overline{\rho}^\vee)^{U_\nu}$$

et notons que l'espace de gauche, donc celui de droite, est de dimension finie sur k_E. En prenant quelques U_ν suffisamment petits pour $\nu \nmid p$, les U'/U-représentations de dimension finie :

$$\begin{aligned} R' &\stackrel{\text{déf}}{=} \big(\otimes'_{\nu\nmid p}\, \pi_\nu^D(\overline{\rho}^\vee)^{U_\nu}\big) \otimes \big(\oplus_{\sigma\in\mathscr{D}(\overline{\rho}_p)}\sigma\big) \\ R &\stackrel{\text{déf}}{=} \big(\otimes'_{\nu\nmid p}\, \pi_\nu^D(\overline{\rho}^\vee)^{U_\nu}\big) \otimes \big(\otimes_{\nu|p} D_0(\overline{\rho}_\nu)\big), \end{aligned}$$

vérifient bien les hypothèses (i), (ii) et (iii) du lemme 9.2. Par ce lemme, on obtient une injection U'/U-équivariante :

$$R = \big(\otimes'_{\nu\nmid p}\, \pi_\nu^D(\overline{\rho}^\vee)^{U_\nu}\big) \otimes \big(\otimes_{\nu|p} D_0(\overline{\rho}_\nu)\big) \hookrightarrow \big(\otimes'_{\nu\nmid p}\, \pi_\nu^D(\overline{\rho}^\vee)^{U_\nu}\big) \otimes \big(\otimes_{\nu|p}\, \pi_\nu^D(\overline{\rho}^\vee)^{U_\nu}\big).$$

En considérant l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{F_\nu})$ pour une seule place $\nu|p$, on voit qu'il doit exister une injection $\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{F_\nu})$-équivariante $D_0(\overline{\rho}_\nu) \hookrightarrow \pi_\nu^D(\overline{\rho}^\vee)$, unique à scalaire près par la conjecture 9.1 et les propriétés de $D_0(\overline{\rho}_\nu)$. Ceci achève la preuve. $\square$

Pour $\nu|p$ soit $I_{1,\nu} \subset \mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{F_\nu})$ le sous-groupe des matrices unipotentes supérieures modulo p. Si la conjecture 9.1 est vraie, alors par la proposition 9.3 la $\mathrm{GL}_2(F_\nu)$-représentation $\pi_\nu^D(\overline{\rho}^\vee)$ pour $\nu|p$ contient la $\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{F_\nu})$-représentation $D_0(\overline{\rho}_\nu)$ de manière unique, mais il n'est pas du tout clair en général si, à l'intérieur de $\pi_\nu^D(\overline{\rho}^\vee)$ (ou de $S_\psi^D(k_E)$), l'action de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix}$ préserve le sous-k_E-espace vectoriel $D_0(\overline{\rho}_\nu)^{I_{1,\nu}}$.

Conjecture 9.4. — *On conserve les notations précédentes. À l'intérieur de $S_\psi^D(k_E)$ pour tout $\nu|p$, l'action de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(F_\nu)$ préserve le sous-k_E-espace vectoriel $D_0(\overline{\rho}_\nu)^{I_{1,\nu}}$*[(7)].

Si les conjectures 9.1 et 9.4 sont vraies, alors en particulier $\pi_\nu^D(\overline{\rho}^\vee)$ contient une des représentations de $\mathrm{GL}_2(F_\nu)$ associées à $\overline{\rho}_\nu$ dans [**11**].

Si $x \in k_E^\times$ et $\nu|p$, notons μ_x le caractère non ramifiée de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F_\nu)$ envoyant un Frobenius arithmétique Fr_ν sur x^{-1}. Notons F_{ν^2} l'unique extension quadratique non ramifiée de F_ν dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$ et fixons des plongements $\iota_\nu : F_\nu \hookrightarrow E$ pour tout $\nu|p$, ce qui permet de définir pour chaque ν le caractère $\omega_{f_\nu} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F_\nu) \to k_E^\times$

(7) En vertu du théorème 10.1 et de résultats récents de Emerton, Gee et Savitt (cf. les notes de bas de page précédentes), cette conjecture ne dépend plus que de la conjecture 9.1.

comme au §4. Supposons également que k_E contient le corps résiduel $k_{F_{\nu^2}}$ pour chaque $\nu|p$. Comme $\det(\overline{\rho}_\nu) = \psi_\nu\omega$, on peut écrire $\overline{\rho}_\nu$ sous l'une des deux formes suivantes (cf. §4) :

(i) $\overline{\rho}_\nu \cong \begin{pmatrix} \omega_{f_\nu}^{\sum_{j=0}^{f_\nu-1}(r_{\nu,j}+1)p^j}\mu_{\alpha_\nu} & * \\ 0 & \mu_{\alpha_\nu^{-1}} \end{pmatrix} \otimes \theta_\nu$ avec $\alpha_\nu \in k_E^\times$, $0 \leq r_{\nu,j} \leq p-3$ et $(r_{\nu,j}) \notin \{(0,\cdots,0),(p-3,\cdots,p-3)\}$

(ii) $\overline{\rho}_\nu \cong \left(\mathrm{ind}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F_{\nu^2})}^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F_\nu)} \omega_{2f_\nu}^{\sum_{j=0}^{f_\nu-1}(r_{\nu,j}+1)p^j}\mu_{-1}\right) \otimes \theta_\nu$ avec $1 \leq r_{0,\nu} \leq p-2$ et $0 \leq r_{\nu,j} \leq p-3,\ j>0$

où $\theta_\nu : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F_\nu) \to k_E^\times$ est tel que $\theta_\nu^2 = \psi_\nu\omega_{f_\nu}^{-\sum_{j=0}^{f_\nu-1} r_{\nu,j}p^j}$ (ω_{2f_ν} est défini comme ω_{f_ν} à partir d'un plongement quelconque $k_{F_{\nu^2}} \hookrightarrow k_E$ étendant le plongement $\overline{\iota}_\nu : k_{F_\nu} \hookrightarrow k_E$ induit par ι_ν). Si $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix}$ préserve $D_0(\overline{\rho}_\nu)^{I_{1,\nu}}$ et si $\overline{\rho}_\nu$ est semi-simple, il est défini dans [**7**] une application k_E-linéaire bijective :

$$S_\nu : \bigoplus_{\sigma_\nu\in\mathscr{D}(\overline{\rho}_\nu)} \sigma_\nu^{I_{1,\nu}} \longrightarrow \bigoplus_{\sigma_\nu\in\mathscr{D}(\overline{\rho}_\nu)} \sigma_\nu^{I_{1,\nu}}$$

qui envoie un vecteur de base v_ν de $\sigma_\nu^{I_{1,\nu}}$ sur :

$$S(v_\nu) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{\lambda\in k_\nu} \overline{\iota}_\nu(\lambda^{s_\nu}) \begin{pmatrix} p & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v_\nu$$

où s_ν est l'unique entier entre 0 et $q_\nu - 1$ tel que $0 \neq S(v_\nu) \in {\sigma'}_\nu^{I_{1,\nu}}$ pour un σ'_ν (unique) dans $\mathscr{D}(\overline{\rho}_\nu)$ (voir [**7**, §4] pour plus de détails). De plus l'application induite $\sigma_\nu \mapsto \sigma'_\nu$ est une permutation sur les poids de Serre de $\mathscr{D}(\overline{\rho}_\nu)$ que l'on peut décomposer en cycles $c_{\nu,1},\cdots,c_{\nu,n_\nu}$ (la numérotation est arbitraire). On note $d_{\nu,i} \geq 1$ la longueur du cycle $c_{\nu,i}$. Pour tout i et tout $\sigma_\nu \in c_{\nu,i}$, on a donc un isomorphisme $S^{d_{\nu,i}} : \sigma_\nu^{I_{1,\nu}} \to \sigma_\nu^{I_{1,\nu}}$ qui, comme $\dim_{k_E}\sigma_\nu^{I_{1,\nu}} = 1$, est la multiplication par un élément $x_{\nu,i} \in k_E^\times$ qui ne dépend pas de σ_ν dans $c_{\nu,i}$. On peut de plus montrer que, pour chaque couple de poids de Serre $\sigma_\nu = (\lambda_j(r_{\nu,j})) \otimes \det^*$ et $\sigma'_\nu = (\lambda'_j(r_{\nu,j})) \otimes \det^{*'}$ de $c_{\nu,i}$ (voir §4 pour la notation) tels que la permutation ci-dessus envoie σ_ν sur σ'_ν, le nombre des j tels que l'un seulement de $\lambda_j(x_j)$ et $\lambda'_j(x_j)$ est dans $\{p-3-x_j, p-2-x_j, p-1-x_j\}$ ne dépend que de $c_{\nu,i}$ et pas des poids de Serre σ_ν, σ'_ν (cf. [**7**, §5 et §6]). On note $h_{\nu,i}$ cet entier. Lorsque $\overline{\rho}_\nu$ est scindée et $\sigma_\nu = (\lambda_j(r_{\nu,j})) \otimes \det^* \in c_{\nu,i}$, on pose enfin :

$$\ell_{\nu,i} \overset{\text{déf}}{=} \text{ nombre des } j \text{ tels que } \lambda_j(x_j) \in \{p-3-x_j, p-2-x_j\}$$

qui ne dépend encore que de $c_{\nu,i}$.

Question 9.5. — *On conserve les notations précédentes et on suppose vraies les conjectures 9.1 et 9.4. Soit $\nu|p$ tel que $\overline{\rho}_\nu$ est semi-simple.*

(i) Si $\overline{\rho}_\nu$ est réductible scindée, est-il vrai que l'on a :

$$x_{\nu,i} = (-1)^{\frac{d_{\nu,i}h_{\nu,i}}{2f_\nu}\sum_{j=0}^{f_\nu-1} r_{\nu,j}}\alpha_\nu^{(f_\nu-2\ell_{\nu,i})\frac{d_{\nu,i}}{f_\nu}}\theta_\nu(p)^{d_{\nu,i}}?$$

(ii) Si $\overline{\rho}_\nu$ est irréductible, est-il vrai que l'on a :

$$x_{\nu,i} = (-1)^{\frac{d_{\nu,i}}{2}+\frac{d_{\nu,i}h_{\nu,i}}{2f_\nu}(1+\sum_{j=0}^{f_\nu-1} r_{\nu,j})}\theta_\nu(p)^{d_{\nu,i}}?$$

Notons que les valeurs des $x_{\nu,i}$ ci-dessus sont les « valeurs spéciales » de [**7**, Th.6.4] après torsion par le caractère θ_ν.

10. Un problème de compatibilité local-global modulo p II

On relie le problème de compatibilité local-global du §9 (conjecture 9.4) au problème de compatibilité local-global du §3 (conjecture 3.8) et on donne quelques résultats très partiels en direction de ces deux conjectures en utilisant les résultats locaux du §8 et des résultats globaux ([**24**]).

On fixe $\overline{\rho}$ comme au §9 et on conserve toutes les notations de ce paragraphe. On suppose $S_\psi^D(k_E)[\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^\vee}] \neq 0$.

Théorème 10.1. — *Si les conjectures 9.1 et 3.8 sont vraies, alors la conjecture 9.4 est vraie. En particulier $S_\psi^D(k_E)[\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^\vee}]$ contient pour chaque $\nu|p$ une des représentations de $\mathrm{GL}_2(F_\nu)$ associées à $\overline{\rho}_\nu$ dans* [**11**].

Démonstration. — Fixons ν une place divisant p. Rappelons que $\pi_\nu^D(\overline{\rho}^\vee)$ contient $D_0(\overline{\rho}_\nu)$ par la proposition 9.3. Soit donc $x \in D_0(\overline{\rho}_\nu)$ un vecteur non nul fixé par $I_{1,\nu}$ que l'on peut supposer vecteur propre sous l'action de I_ν où $I_\nu \subset \mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{F_\nu})$ est le sous-groupe d'Iwahori des matrices triangulaires supérieures modulo p, on veut montrer que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix} x \in \pi_\nu^D(\overline{\rho}^\vee)$ est encore dans $D_0(\overline{\rho}_\nu)^{I_{1,\nu}}$. On note $\overline{\chi}_\nu = \overline{\eta}_\nu \otimes \overline{\eta}'_\nu : I_\nu \to k_E^\times$ le caractère propre associé, et on remarque que la généricité de $\overline{\rho}_\nu$ implique $\overline{\chi}_\nu \neq \overline{\chi}_\nu^s$ (voir [**11**]). Pour $U \subset (D \otimes_F \mathbb{A}_F^f)^\times$ sous-groupe ouvert compact tel que $\psi|_{U\cap(\mathbb{A}_F^f)^\times} = 1$ et S ensemble fini de places finies de F suffisamment grand, la même preuve que [**12**, Lem.4.6] montre que les localisés $S_\psi^D(U, \mathscr{O}_E)_{\mathfrak{m}^S_{\overline{\rho}^\vee}}$ et $S_\psi^D(U, k_E)_{\mathfrak{m}^S_{\overline{\rho}^\vee}}$ ne dépendent pas de S (voir §9) et on les note respectivement $S_\psi^D(U, \mathscr{O}_E)_{\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^\vee}}$ et $S_\psi^D(U, k_E)_{\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^\vee}}$. Pour U assez petit, on rappelle que l'application $S_\psi^D(U, \mathscr{O}_E)_{\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^\vee}} \to S_\psi^D(U, k_E)_{\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^\vee}}$ est surjective. Soit $S_\psi^D(\mathscr{O}_E)_{\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^\vee}}^{I_{1,\nu}} \overset{\text{déf}}{=} \varinjlim_U S_\psi^D(U, \mathscr{O}_E)_{\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^\vee}}$ et $S_\psi^D(k_E)_{\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^\vee}}^{I_{1,\nu}} \overset{\text{déf}}{=} \varinjlim_U S_\psi^D(U, k_E)_{\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^\vee}}$ où la limite inductive est prise sur les U de la forme $U^\nu I_{1,\nu}$ où U^ν est un sous-groupe ouvert compact de $(D \otimes_F \mathbb{A}_F^{f,\nu})^\times$ ($\mathbb{A}_F^{f,\nu}$ désignant les adèles finis hors la place ν), on a par ce qui précède une surjection :

$$S^D_\psi(\mathscr{O}_E)^{I_{1,\nu}}_{\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^\vee}} \twoheadrightarrow S^D_\psi(k_E)^{I_{1,\nu}}_{\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^\vee}}.$$

Soit $\chi_\nu = \eta_\nu \otimes \eta'_\nu : I_\nu \to \mathscr{O}_E^\times$ où $\eta_\nu = [\overline{\eta}_\nu], \eta'_\nu = [\overline{\eta}'_\nu]$, comme $I_\nu/I_{1,\nu}$ est de cardinal premier à p, on a encore une surjection :

$$\mathrm{Hom}_{I_\nu}\left(\chi_\nu, S^D_\psi(\mathscr{O}_E)^{I_{1,\nu}}_{\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^\vee}}\right) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}_{I_\nu}\left(\overline{\chi}_\nu, S^D_\psi(k_E)^{I_{1,\nu}}_{\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^\vee}}\right) \neq 0.$$

Il existe donc un vecteur non nul w dans $S^D_\psi(\mathscr{O}_E)^{I_{1,\nu}}_{\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^\vee}}$ sur lequel I_ν agit par χ_ν et que l'on peut prendre tel que, dans $S^D_\psi(E)$, $w \in \pi^{I_{1,\nu}} = (\otimes'_{\nu'\neq\nu}\pi_{\nu'}) \otimes \pi_\nu^{I_{1,\nu}}$ où $\pi = \otimes'_{\nu'}\pi_{\nu'}$ est une composante irréductible de dimension infinie de $S^D_\psi(E)$. La représentation π_ν est alors une série principale modérément ramifiée dont le $\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{F_\nu})$-type en (14) est $\sigma(\chi^s_\nu)$ (voir §3). La conjecture 3.8 prédit que le réseau induit sur $\sigma(\chi^s_\nu)$ est isomorphe à $\sigma^0_\nu(\rho_\nu)$. Le théorème 8.5 montre que le socle de la réduction $\overline{\sigma}^0_\nu(\rho_\nu)$ de ce réseau est entièrement constitué de poids de $\mathscr{D}(\overline{\rho}_\nu)$ et que tous les autres constituants de $\overline{\sigma}^0_\nu(\rho_\nu)$ ne sont pas dans $\mathscr{D}(\overline{\rho}_\nu)$. La propriété de maximalité de $D_0(\overline{\rho}_\nu)$ montre que cette réduction est donc contenue dans $D_0(\overline{\rho}_\nu)$. En particulier, la réduction $\overline{w} \in S^D_\psi(k_E)[\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^\vee}]$ de w se trouve dans le sous-espace $\left(\otimes'_{\nu'\neq\nu}\pi^D_{\nu'}(\overline{\rho}^\vee)\right) \otimes D_0(\overline{\rho}_\nu)^{I_{1,\nu}}$, donc est de la forme $y \otimes x$ avec $y \in \otimes'_{\nu'\neq\nu}\pi^D_{\nu'}(\overline{\rho}^\vee)$ (car il n'y a à scalaire près que x dans $D_0(\overline{\rho}_\nu)^{I_{1,\nu}}$ sur lequel I_ν agit par $\overline{\chi}_\nu$). Comme $\sigma(\chi^s_\nu)^{I_{1,\nu}} = \pi_\nu^{I_{1,\nu}}$ est stable par la matrice $\begin{pmatrix}0 & 1\\ p & 0\end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(F_\nu)$, on voit que $\begin{pmatrix}0 & 1\\ p & 0\end{pmatrix} w \in S^D_\psi(\mathscr{O}_E)^{I_{1,\nu}}_{\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^\vee}}$ va encore se réduire sur un élément de $\left(\otimes'_{\nu'\neq\nu}\pi^D_{\nu'}(\overline{\rho}^\vee)\right) \otimes D_0(\overline{\rho}_\nu)^{I_{1,\nu}}$, et donc que $\begin{pmatrix}0 & 1\\ p & 0\end{pmatrix} x$ est encore dans $D_0(\overline{\rho}_\nu)^{I_{1,\nu}}$. □

On aura besoin du lemme suivant, où l'on reprend les notations du §2.

Lemme 10.2. — *Soit $\chi = \eta \otimes \eta'$ avec $\eta \neq \eta'$ un caractère modéré comme en (5), $(J^{\min}, J^{\max})$ deux éléments de $\mathscr{P}_\chi$ tels que $J^{\min} \subseteq J^{\max}$ et $J^{\max}\backslash J^{\min}$ est un singleton, et $\delta \in \mathbb{Q}_E$ tel que $0 < \delta < 1$. Alors il existe à homothétie près un unique $\mathscr{O}_E$-réseau stable $R = \oplus_{J\in\mathscr{P}_\chi} p^{v_J}\sigma_J$ sur $\sigma(\chi^s)$ (cf. proposition 2.3) tel que :*

(i) $\mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_L)} R \otimes_{\mathscr{O}_E} k_E = \overline{\sigma}_{J^{\min}} \oplus \overline{\sigma}_{J^{\max}}$

(ii) $v_\emptyset = 0$ *et* $v_{\mathscr{S}} = |J^{\min}| + \delta$.

De plus, ce réseau est un réseau de Dieudonné (définition 3.1).

Démonstration. — Supposons d'abord que $R = \oplus_{J\in\mathscr{P}_\chi} p^{v_J}\sigma_J$ existe satisfaisant (i) et (ii). Par le corollaire 2.7 et la condition $v_\emptyset = 0$, on a $(v_J)_{J\in\mathscr{P}_\chi} \in \mathscr{V}_\chi$. Par (8) on a pour tout $J, J' \in \mathscr{P}_\chi$:

$$\langle \mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_L) \cdot p^{v_J}\sigma_J \rangle = \bigoplus_{J'\in\mathscr{P}_\chi} p^{|J'|-|J\cap J'|+v_J-v_{J'}}(p^{v_{J'}}\sigma_{J'})$$

et rappelons que l'image de $\langle \mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_L)\cdot p^{v_J}\sigma_J\rangle$ dans $R\otimes_{\mathscr{O}_E} k_E$ est l'unique sous-représentation de $R\otimes_{\mathscr{O}_E} k_E$ de co-socle $\overline{\sigma}_J$. De plus, $\overline{\sigma}_{J'}$ est un facteur de Jordan-Hölder de cette sous-représentation si et seulement si :

$$|J'| - |J\cap J'| + v_J - v_{J'} = 0. \tag{42}$$

En particulier, pour tout $J\in\mathscr{P}_\chi$, on a toujours (42) pour $J'=J^{\min}$ ou $J'=J^{\max}$ par (i). Soit $j_0\in\mathscr{S}$ tel que $J^{\max}=J^{\min}\amalg\{j_0\}$, on a aussi $v_{J^{\min}}\leq v_{J^{\max}}\leq v_{J^{\min}}+1$ (cf. §2).

Étape 1 :

Si $v_{J^{\min}}=v_{J^{\max}}$, alors par (42) :

$$|J^{\min}| - |J^{\max}\cap J^{\min}| + v_{J^{\max}} - v_{J^{\min}} = |J^{\min}| - |J^{\min}| + 0 = 0$$

ce qui implique que $\overline{\sigma}_{J^{\min}}$ est un sous-quotient de la sous-représentation de co-socle $\overline{\sigma}_{J^{\max}}$ dans $R\otimes_{\mathscr{O}_E} k_E$. C'est impossible car cela contredit (i). De même, si $v_{J^{\max}}=v_{J^{\min}}+1$, alors par (42) :

$$|J^{\max}| - |J^{\min}\cap J^{\max}| + v_{J^{\min}} - v_{J^{\max}} = 1 - 1 + 0 = 0$$

ce qui implique que $\overline{\sigma}_{J^{\max}}$ est un sous-quotient de la sous-représentation de co-socle $\overline{\sigma}_{J^{\min}}$ dans $R\otimes_{\mathscr{O}_E} k_E$ et contredit encore (i). On a donc $v_{J^{\min}}<v_{J^{\max}}<v_{J^{\min}}+1$.

Étape 2 :

Soit $J\in\mathscr{P}_\chi$ tel que $J\subseteq J^{\min}$. Si (42) est vrai pour $J'=J^{\max}$, on a $v_J-v_{J^{\max}}=|J|-|J^{\max}|=|J|-|J^{\min}|-1$. Mais $v_J-v_{J^{\max}}>v_J-v_{J^{\min}}-1$ (étape 1) d'où $|J|-|J^{\min}|>v_J-v_{J^{\min}}$ c'est-à-dire $|J^{\min}|-|J|<v_{J^{\min}}-v_J$, ce qui est impossible puisque $J\subseteq J^{\min}$ et $(v_J)_{J\in\mathscr{P}_\chi}\in\mathscr{V}_\chi$ (cf. §2). Donc on a forcément (42) pour $J'=J^{\min}$ i.e. $v_J-v_{J^{\min}}=|J|-|J^{\min}|$, ce qui implique $v_{J^{\min}}=|J^{\min}|$ (prendre $J=\emptyset$) puis $v_J=|J|$.

Étape 3 :

Soit $J\in\mathscr{P}_\chi$ tel que $j_0\notin J$, alors $J\cap J^{\max}=J\cap J^{\min}$ donc $v_{J\cap J^{\max}}=|J\cap J^{\max}|$ par l'étape 2. Si on a (42) avec $J'=J^{\max}$, alors $v_J-v_{J^{\max}}=v_{J\cap J^{\max}}-|J^{\max}|$ c'est-à-dire $v_J-v_{J\cap J^{\max}}=v_{J^{\max}}-|J^{\max}|=v_{J^{\max}}-|J^{\min}|-1$. Or le membre de gauche est positif ou nul (car $J\supset J\cap J^{\max}$) alors que celui de droite est strictement négatif par l'étape 1. On en déduit donc (42) avec $J^{\min}$, i.e. $v_J-v_{J^{\min}}=|J\cap J^{\min}|-|J^{\min}|$ soit $v_J=|J\cap J^{\min}|$ par l'étape 2.

Étape 4 :

Soit $J\in\mathscr{P}_\chi$ tel que $J^{\max}\subseteq J$. Si (42) est vrai pour $J'=J^{\min}$, on a $v_J-v_{J^{\min}}=|J\cap J^{\min}|-|J^{\min}|=|J^{\min}|-|J^{\min}|=0$. Mais $v_J\geq v_{J^{\max}}$ puisque $J\supseteq J^{\max}$ d'où par l'étape 1 :

$$0\leq v_J-v_{J^{\max}}<v_J-v_{J^{\min}}=0$$

qui est impossible. On en déduit $v_J-v_{J^{\max}}=|J\cap J^{\max}|-|J^{\max}|=0$ d'où $v_J=v_{J^{\max}}$ si $J\supseteq J^{\max}$. En particulier, on a $v_{\mathscr{S}}=v_{J^{\max}}=|J^{\min}|+\delta$ par (ii).

Étape 5 :

Soit $J\in\mathscr{P}_\chi$ tel que $j_0\in J$ et supposons que l'on a (42) avec $J'=J^{\min}$. On en déduit $v_J = |J \cap J^{\min}|$ par l'étape 2. Par l'étape 4, on a :

$$v_{J\amalg(J^{\max}\backslash(J\cap J^{\max}))} = v_{J^{\max}}. \tag{43}$$

On doit avoir par ailleurs puisque $(v_J)_{J\in\mathscr{P}_\chi} \in \mathscr{V}_\chi$:

$$v_{J\amalg(J^{\max}\backslash(J\cap J^{\max}))} \leq v_J + |J^{\max}\backslash(J\cap J^{\max})|. \tag{44}$$

Or :

$$\begin{aligned} v_J + |J^{\max}\backslash(J\cap J^{\max})| &= |J\cap J^{\min}| + |J^{\max}\backslash(J\cap J^{\max})| \\ &= (|J^{\min}| - |J^{\min}\backslash(J\cap J^{\min})|) + |J^{\max}\backslash(J\cap J^{\max})| \\ &= (|J^{\min}| - |J^{\max}\backslash(J\cap J^{\max})|) + |J^{\max}\backslash(J\cap J^{\max})| \\ &= |J^{\min}| \end{aligned}$$

d'où $v_{J\amalg(J^{\max}\backslash(J\cap J^{\max}))} \leq |J^{\min}|$ par (44). Par (43), on en déduit $v_{J^{\max}} \leq |J^{\min}|$ ce qui est impossible par les étapes 1 et 2. Donc on a forcément (42) avec $J' = J^{\max}$. On en déduit $v_J = v_{J^{\max}} + |J\cap J^{\max}| - |J^{\max}|$ c'est-à-dire $v_J = |J\cap J^{\max}| + \delta - 1$ avec l'étape 4.

On déduit de toutes ces étapes que l'unique $\mathscr{O}_E$-réseau possible satisfaisant (i) et (ii) est :

$$R = \Big(\bigoplus_{\substack{J\in\mathscr{P}_\chi \\ j_0\notin J}} p^{|J\cap J^{\min}|}\sigma_J\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\substack{J\in\mathscr{P}_\chi \\ j_0\in J}} p^{|J\cap J^{\max}|-(1-\delta)}\sigma_J\Big)$$

et, en reprenant la preuve précédente, il est facile de montrer que ce réseau vérifie bien (i) et (ii). On laisse au lecteur la vérification (immédiate) du fait qu'il s'agit bien d'un réseau de Dieudonné. $\square$

Théorème 10.3. — *Soit $\nu|p$ et $\chi_\nu = \eta_\nu \otimes \eta'_\nu$ avec $\eta_\nu \neq \eta'_\nu$ un caractère modéré comme en (5). Supposons que :*
(i) pour tout $j \in \{0, \cdots, f_\nu - 1\}$, on a $1 \leq c_{\chi_\nu,j} \leq p-2$
(ii) la semi-simplifiée modulo p de $\sigma(\chi_\nu^s)$ sur k_E contient au plus deux poids de Serre de $\mathscr{D}(\overline{\rho}_\nu)$.
Alors la conjecture 3.8 est vraie pour toute composante irréductible π dans $S_\psi^D(E)$ telle que π_ν contient $\sigma(\chi_\nu^s)$ et telle que la représentation ρ associée (cf. §3) déforme $\overline{\rho}$.

Démonstration. — L'hypothèse (i) implique que les constituants irréductibles $(s_0, \cdots, s_{f_\nu-1}) \otimes \det^*$ de $\overline{\sigma}(\chi_\nu^s)$ sont tels que $0 \leq s_j \leq p-2$ (i.e. sont « faiblement réguliers » au sens de [**24**]). Soit π comme dans l'énoncé et fixons un plongement $\mathrm{GL}_2(F_\nu)$-équivariant $\xi_\nu : \pi_\nu \hookrightarrow \pi$ comme au §3. Rappelons que l'on a défini au §3 un $\mathscr{O}_E$-réseau π^0_{ν,ξ_ν} sur π_ν provenant de $S_\psi^D(\mathscr{O}_E)$. Via l'unique plongement $\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{F_\nu})$-équivariant $\sigma(\chi_\nu^s) \hookrightarrow \pi_\nu$, π^0_{ν,ξ_ν} induit un $\mathscr{O}_E$-réseau $\sigma^0(\chi_\nu^s)_{\xi_\nu}$ sur $\sigma(\chi_\nu^s)$ et on en déduit une injection $\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{F_\nu})$-équivariante $\sigma^0(\chi_\nu^s)_{\xi_\nu} \otimes_{\mathscr{O}_E} k_E \hookrightarrow S_\psi^D(k_E)[\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^\vee}]$. Tout constituant irréductible σ_ν de $\mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{F_\nu})}(\sigma^0(\chi_\nu^s)_{\xi_\nu} \otimes_{\mathscr{O}_E} k_E)$ est donc tel que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{F_\nu})}(\sigma_\nu, S_\psi^D(k_E)[\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^\vee}]) \neq 0$. La même preuve que [**24**, Lem.5.1] (basée sur une idée de Schein [**34**]), mais en utilisant le corollaire 8.2

de cet article au lieu de [**24**, Prop.3.5.4] pour les cas $\overline{\rho}_\nu$ non semi-simple, montre que l'on doit avoir nécessairement $\sigma_\nu \in \mathscr{D}(\overline{\rho}_\nu)$ (notons que cette preuve utilise que σ_ν est « faiblement régulier » par (i)). Par (ii), il y a un ou deux tels σ_ν dans $\overline{\sigma}(\chi_\nu^s)$. Nous traitons séparément ces deux cas.
Supposons d'abord qu'il n'y en a qu'un, alors :

$$\mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{F_\nu})}(\sigma^0(\chi_\nu^s)_{\xi_\nu} \otimes_{\mathscr{O}_E} k_E) = \sigma_\nu.$$

Mais le réseau $\sigma_\nu^0(\rho_\nu) = \sigma_{\eta_\nu}^0(\chi_\nu^s)$ de $\sigma(\chi_\nu^s)$ défini en (15) vérifie aussi par le théorème 8.5 :

$$\mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{F_\nu})}(\sigma_\nu^0(\rho_\nu) \otimes_{\mathscr{O}_E} k_E) = \sigma_\nu$$

puisque σ_ν est le seul constituant dans $\mathscr{D}(\overline{\rho}_\nu)$. Or, il n'y a à homothétie près qu'un seul tel réseau sur $\sigma(\chi_\nu^s)$, à savoir le réseau $\sigma_J^0(\chi_\nu^s)$ où J correspond à la position de σ_ν dans $\overline{\sigma}(\chi_\nu^s)$ (cf. §2 et (9)). On en déduit que les réseaux $\sigma^0(\chi_\nu^s)_{\xi_\nu}$ et $\sigma_\nu^0(\rho_\nu)$ sont nécessairement homothétiques.
Supposons maintenant que deux constituants exactement de $\overline{\sigma}(\chi_\nu^s)$ sont dans $\mathscr{D}(\overline{\rho}_\nu)$. Soit $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F) \to \mathrm{GL}_2(E)$ la représentation associée à π au §3, par hypothèse ρ a un unique $\mathscr{O}_E$-réseau stable qui déforme $\overline{\rho}$. De plus par [**29**, Th.1.0.2] la restriction à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F_\nu)$ du dual de Cartier de ce réseau est le module de Tate d'un groupe p-divisible sur l'anneau des entiers de $\mathscr{O}_{F_\nu}[\sqrt[p^{f_\nu}-1]{-p}]$ dont le module fortement divisible $\mathcal{M}_\nu$ associé ([**4**]) est un $\mathscr{O}_E$-module fortement divisible de type χ_ν. Par le théorème 8.5 et la définition de $J^{\min}$ et $J^{\max}$ en (26), on voit qu'il y a un unique $j_0 \in \{0, \cdots, f_\nu - 1\}$ tel que $\mathcal{M}_\nu^{j_0}$ est de type II. En particulier avec les notations comme en (15) on a :

$$\varphi^{f_\nu}(e_{\eta_\nu}^0) = \Big(\prod_{j=0}^{f_\nu-1} x_j\Big) e_{\eta_\nu}^0$$

avec $\mathrm{val}(x_j) \in \{0,1\}$ si $j \neq j_0$ et $0 < \mathrm{val}(x_{j_0}) < 1$. Soit $x \overset{\text{déf}}{=} \prod_{j=0}^{f_\nu-1} x_j$ et $\delta \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{val}(x_{j_0})$ alors $\mathrm{val}(x) = |J^{\min}| + \delta$ par (26) et le corollaire 5.3. Écrivons :

$$\sigma^0(\chi_\nu^s)_{\xi_\nu} \simeq \bigoplus_{J \in \mathscr{P}_{\chi_\nu}} p^{v_J} \sigma_J$$

comme dans le corollaire 2.7 avec $(v_J)_{J \in \mathscr{P}_\chi} \in \mathscr{V}_\chi$. La même preuve que celle de la proposition 3.10 utilisant [**29**, Th.1.0.2] montre que l'on doit avoir $v_{\mathscr{S}} = \mathrm{val}(x)$ donc $v_{\mathscr{S}} = |J^{\min}| + \delta$. Or, si $\mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{F_\nu})}(\sigma^0(\chi_\nu^s)_{\xi_\nu} \otimes_{\mathscr{O}_E} k_E)$ est irréductible, c'est-à-dire si $\sigma^0(\chi_\nu^s)_{\xi_\nu}$ est homothétique à un des réseaux $\sigma_J^0(\chi_\nu^s)$, on a forcément $v_{\mathscr{S}}$ entier par (9), ce qui n'est pas le cas ici car $0 < \delta < 1$. Donc $\sigma^0(\chi_\nu^s)_{\xi_\nu} \otimes_{\mathscr{O}_E} k_E$ a exactement pour socle ses deux constituants qui sont dans $\mathscr{D}(\overline{\rho}_\nu)$. Par le théorème 8.5, il en est de même de $\sigma_\nu^0(\rho_\nu) \otimes_{\mathscr{O}_E} k_E$. Par le lemme 10.2 (que l'on peut appliquer par le (ii) du théorème 8.1 et l'égalité $v_{\mathscr{S}} = |J^{\min}| + \delta$) un tel réseau est unique à homothétie près. Les réseaux $\sigma^0(\chi_\nu^s)_{\xi_\nu}$ et $\sigma_\nu^0(\rho_\nu)$ doivent donc encore être homothétiques. $\square$

Remarque 10.4. — Si χ_ν comme dans le théorème 10.3 vérifie seulement l'hypothèse (ii) mais si l'on suppose vraie la conjecture 9.1, alors la même preuve que celle du théorème 10.3 montre encore que le réseau induit sur $\sigma(\chi_\nu^s)$ est le réseau $\sigma_\nu^0(\rho_\nu)$ défini en (15). En effet, par la conjecture 9.1, on a automatiquement que tout constituant irréductible σ_ν de $\mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{F_\nu})}(\sigma^0(\chi_\nu^s)_{\xi_\nu}\otimes_{\mathscr{O}_E}k_E)$ est nécessairement dans $\mathscr{D}(\overline{\rho}_\nu)$ (cf. début de la preuve).

Corollaire 10.5. — *Supposons vraie la conjecture 9.1. Soit $\nu|p$ tel que, pour tout caractère $\overline{\chi}_\nu$ de I_ν apparaissant sur $D_0(\overline{\rho}_\nu)^{I_{1,\nu}}$, la semi-simplifiée modulo p de $\sigma(\chi_\nu^s)$ sur k_E contient un ou deux poids de Serre de $\mathscr{D}(\overline{\rho}_\nu)$ (où χ_ν est le relevé de Teichmüller de $\overline{\chi}_\nu$), alors la représentation $\pi_\nu^D(\overline{\rho}^\vee)$ contient une des représentations de* $\mathrm{GL}_2(F_\nu)$ *associées à $\overline{\rho}_\nu$ dans* [**11**].

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate des théorèmes 10.1 et 10.3 et de la remarque 10.4. □

L'hypothèse sur $\mathscr{D}(\overline{\rho}_\nu)$ dans le corollaire 10.5 est vérifiée en particulier dans les cas du corollaire ci-dessous (cf. [**11**, §16] pour le cas $f_\nu=2$ et $\overline{\rho}_\nu$ irréductible).

Corollaire 10.6. — *Supposons vraie la conjecture 9.1. Soit $\nu|p$ tel que l'on a soit $|\mathscr{D}(\overline{\rho}_\nu)|\leq 2$, soit $f_\nu=2$ et $\overline{\rho}_\nu$ irréductible, alors $\pi_\nu^D(\overline{\rho}^\vee)$ contient une des représentations de* $\mathrm{GL}_2(F_\nu)$ *associées à $\overline{\rho}_\nu$ dans* [**11**].

Remarque 10.7. — (i) Lorsque $|\mathscr{D}(\overline{\rho}_\nu)|=1$, il existe une preuve bien plus rapide du corollaire 10.6 qui n'utilise pas le théorème 10.3 et qui consiste à remarquer que, si σ_ν est l'unique poids de Serre de $\mathscr{D}(\overline{\rho}_\nu)$, alors $D_0(\overline{\rho}_\nu)^{I_{1,\nu}}$ est dans ce cas isomorphe à $(\mathrm{inj}_{\mathrm{GL}_2(k_{F_\nu})}\sigma_\nu)^{I_{1,\nu}}$ (en général, il est seulement inclus dedans). Il est alors automatique que $D_0(\overline{\rho}_\nu)^{I_{1,\nu}}$ est stable par $\begin{pmatrix}0&1\\p&0\end{pmatrix}$ dans $\pi_\nu^D(\overline{\rho}^\vee)$ puisqu'alors $D_0(\overline{\rho}_\nu)^{I_{1,\nu}}=\pi_\nu^D(\overline{\rho}^\vee)^{I_{1,\nu}}$ (cela découle de $D_0(\overline{\rho}_\nu)^{I_{1,\nu}}\subseteq\pi_\nu^D(\overline{\rho}^\vee)^{I_{1,\nu}}\subseteq(\mathrm{inj}_{\mathrm{GL}_2(k_{F_\nu})}\sigma_\nu)^{I_{1,\nu}}$). Je remercie Paškūnas pour m'avoir signalé ce fait.
(ii) Rappelons que les représentations de $\mathrm{GL}_2(F_\nu)$ associées à $\overline{\rho}_\nu$ dans [**11**] restent encore largement mystérieuses (voir [**27**] et [**36**]). Même si l'on suppose que la conjecture 9.4 est vraie et que les réponses aux questions (i) et (ii) de 9.5 sont oui, on semble encore loin de comprendre la représentation adélique $S_\psi^D(k_E)[\mathfrak{m}_{\overline{\rho}^\vee}]$.

Appendice A

Un peu de théorie de Hodge p-adique entière

On rappelle brièvement et on étend un peu quelques résultats de [**6**, §3]. Puis on détermine explicitement l'ensemble des poids de Serre pour les représentations génériques réductibles non scindées (détermination qui était conjecturale dans [**11**]).

On suppose $p > 2$ et on fixe une extension finie non ramifiée L de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$ comme au §2, dont on reprend les notations, une extension finie E de $\mathbb{Q}_p$ comme au §5 (en fait, on a seulement besoin ici de $|\operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(L[\sqrt[e]{-p}], E)| = [L[\sqrt[e]{-p}] : \mathbb{Q}_p]$ où $e = p^f - 1$) et un plongement $\iota : L \hookrightarrow E$ comme au §2. On fixe également un système compatible p_n de racines p^n-ièmes de $-p$ dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$ pour $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ et on note $L_\infty \subset \overline{\mathbb{Q}_p}$ le sous-corps engendré par L et les p_n.

Appelons φ-module tout $k_L((u)) \otimes_{\mathbb{F}_p} k_E$-module libre de rang fini $\mathfrak{D}$ muni d'un endomorphisme k_E-linéaire $\varphi : \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}$ tel que $\varphi((s \otimes 1)m) = (s^p \otimes 1)\varphi(m)$ ($s \in k_L((u))$, $m \in \mathfrak{D}$, on dit que φ est $k_L((u))$-semi-linéaire) et tel que l'image de φ engendre le $k_L((u)) \otimes_{\mathbb{F}_p} k_E$-module $\mathfrak{D}$.

Soit R la limite projective $\cdots \overset{\varphi}{\to} \overline{\mathbb{Z}_p}/p\overline{\mathbb{Z}_p} \overset{\varphi}{\to} \overline{\mathbb{Z}_p}/p\overline{\mathbb{Z}_p}$ où φ est l'élévation à la puissance p. C'est un anneau intègre parfait de caractéristique p muni d'un Frobenius φ (l'élévation à la puissance p) et d'une action de $\operatorname{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)$ (via l'action sur $\overline{\mathbb{Z}_p}$) commutant à φ. On note $\underline{p} \overset{\text{déf}}{=} (\overline{p}_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \in R$ où $\overline{p}_n$ est l'image de p_n dans $\overline{\mathbb{Z}_p}/p\overline{\mathbb{Z}_p}$.

En munissant $\operatorname{Frac}(R)$ de la structure de $k_L((u))$-espace vectoriel qui consiste à envoyer u sur $\underline{p}$, on peut associer à tout φ-module $\mathfrak{D}$ le k_E-espace vectoriel $\operatorname{Hom}_\varphi(\mathfrak{D}, \operatorname{Frac}(R))^1$ des applications $k_L((u))$-linéaires f de $\mathfrak{D}$ dans $\operatorname{Frac}(R)$ commutant à φ, l'action de k_E sur f se faisant via la multiplication sur $\mathfrak{D}$. Il s'agit d'un k_E-espace vectoriel de dimension finie égale au rang de $\mathfrak{D}$ sur $k_L((u)) \otimes_{\mathbb{F}_p} k_E$. En posant $(gf)(m) \overset{\text{déf}}{=} g(f(m))$ si $g \in \operatorname{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L_\infty)$ et $m \in \mathfrak{D}$, Fontaine a montré que l'on obtenait ainsi une anti-équivalence de catégories entre les φ-modules et les représentations linéaires continues de $\operatorname{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L_\infty)$ sur des k_E-espaces vectoriels de dimension finie (voir par exemple [**6**]).

On fixe une racine e-ième π de $-p$ dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$ et on pose pour $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$:

$$\pi_n \overset{\text{déf}}{=} \frac{\pi^{p^r}}{\prod_{i=0}^{q-1} p_{n-if}}$$

où $r \geq 1$ et $q \geq 0$ sont les uniques entiers tels que $n = fq - r$ avec $1 \leq r \leq f$. Alors les $(\pi_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ engendrent $L_\infty[\pi]$ sur L et forment un système compatible de racines p^n-ièmes de π dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$ tel que $\pi_n^e = p_n$ pour tout n (la vérification, élémentaire, est laissée en exercice au lecteur). Soit $\underline{\pi} \overset{\text{déf}}{=} (\overline{\pi}_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \in R$ où $\overline{\pi}_n$ est l'image de π_n dans $\overline{\mathbb{Z}_p}/p\overline{\mathbb{Z}_p}$. On a donc dans R :

$$\underline{\pi}^e = \underline{p}. \tag{45}$$

Munissant $\operatorname{Frac}(R)$ d'une deuxième structure de $k_L((u))$-espace vectoriel qui consiste à envoyer u sur $\underline{\pi}$, on peut aussi associer à tout φ-module $\mathfrak{D}$ le k_E-espace vectoriel $\operatorname{Hom}_\varphi(\mathfrak{D}, \operatorname{Frac}(R))^2$ des applications $k_L((u))$-linéaires commutant à φ et obtenir cette fois une anti-équivalence de catégories entre les φ-modules et les représentations linéaires continues de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L_\infty[\pi])$ sur des k_E-espaces vectoriels de dimension finie. Soit $\mathfrak{D}'$ le φ-module obtenu par extension des scalaires :

$$\mathfrak{D}' \overset{\text{déf}}{=} \mathfrak{D} \otimes_{k_L((u)),u\mapsto u^e} k_L((u)),$$

il est clair par (45) que l'on a un isomorphisme compatible à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L_\infty[\pi])$:

$$\mathrm{Hom}_\varphi(\mathfrak{D}, \mathrm{Frac}(R))^1|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L_\infty[\pi])} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_\varphi(\mathfrak{D}', \mathrm{Frac}(R))^2.$$

En fait, le φ-module $\mathfrak{D}'$ possède une donnée de descente naturelle de $L_\infty[\pi]$ à L_∞ qui permet d'étendre directement l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L_\infty[\pi])$ sur $\mathrm{Hom}_\varphi(\mathfrak{D}', \mathrm{Frac}(R))^2$ à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L_\infty)$. Le morphisme composé :

$$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L_\infty) \hookrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L) \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(L[\pi]/L)$$

se factorise par $\mathrm{Gal}(L_\infty[\pi]/L_\infty)$ et induit un isomorphisme de groupes :

$$\mathrm{Gal}(L_\infty[\pi]/L_\infty) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(L[\pi]/L).$$

Le caractère $\varkappa_f : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L) \to k_L^\times$ du §1 induit en restriction à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L_\infty)$ un caractère qui se factorise par $\mathrm{Gal}(L_\infty[\pi]/L_\infty)$ et que l'on note encore $\varkappa_f$. En particulier on a $g(\underline{\pi}) = \varkappa_f(g)\underline{\pi}$ dans R pour $g \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L_\infty)$. Munissant le φ-module $\mathfrak{D}'$ de l'action $k_L \otimes_{\mathbb{F}_p} k_E$-linéaire de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L_\infty)$ définie par $g(m \otimes u^i) \overset{\text{déf}}{=} m \otimes (\varkappa_f(g)u)^i$ (où $m \in \mathfrak{D}$) et $\mathrm{Hom}_\varphi(\mathfrak{D}', \mathrm{Frac}(R))^2$ de l'action k_E-linéaire de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L_\infty)$ définie par $(gf)(m') \overset{\text{déf}}{=} g(f(g^{-1}m'))$ (où $m' \in \mathfrak{D}'$), on a un isomorphisme compatible à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L_\infty)$ (qui est utilisé dans la preuve de la proposition 7.3) :

$$\mathrm{Hom}_\varphi(\mathfrak{D}, \mathrm{Frac}(R))^1 \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_\varphi(\mathfrak{D}', \mathrm{Frac}(R))^2. \tag{46}$$

On a besoin pour la preuve de la proposition 7.3 de certains autres φ-modules avec action de $\mathrm{Gal}(L_\infty[\pi]/L_\infty)$ que l'on introduit maintenant.

On fixe $\eta, \eta' : k_L^\times \to \mathscr{O}_E^\times$ deux caractères multiplicatifs distincts comme au §2 et on note $\overline{\eta}$, $\overline{\eta}'$ leurs images par la surjection $\mathscr{O}_E^\times \twoheadrightarrow k_E^\times$. En décomposant $k_L \otimes_{\mathbb{F}_p} k_E \simeq k_E \times \cdots \times k_E$, $a \otimes b \mapsto (\overline{\iota}(a)b, \overline{\iota}(\varphi^{-1}(a))b, \cdots, \overline{\iota}(\varphi^{1-f}(a))b)$ où $\overline{\iota} : k_L \hookrightarrow k_E$ est induit par $\iota : L \hookrightarrow E$, tout φ-module $\mathfrak{D}$ s'écrit $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^0 \times \cdots \times \mathfrak{D}^{f-1}$ où $\mathfrak{D}^j$ est un $k_E((u))$-espace vectoriel de dimension finie et $\varphi : \mathfrak{D}^j \to \mathfrak{D}^{j+1}$ est k_E-linéaire tel que $\varphi(u^i m) = u^{pi}\varphi(m)$ ($i \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathfrak{D}^j$).

Définition A.1. — *On appelle φ-module de type $\overline{\chi} \overset{\text{déf}}{=} \overline{\eta} \otimes \overline{\eta}'$ tout φ-module $\mathfrak{D}$ tel que chaque $\mathfrak{D}^j$ est de dimension 2 sur $k_E((u))$ et est muni d'une action k_E-linéaire de $\mathrm{Gal}(L_\infty[\pi]/L_\infty)$ telle que :*

(i) $g(u^i m) = (\omega_f(g)^{p^{-j}} u)^i g(m)$, $g \in \mathrm{Gal}(L_\infty[\pi]/L_\infty)$, $m \in \mathfrak{D}^j$

(ii) *l'action de $\mathrm{Gal}(L_\infty[\pi]/L_\infty)$ commute à φ*

(iii) *sur chaque $\mathfrak{D}^j$ il existe une $k_E((u))$-base sur laquelle l'action de $\mathrm{Gal}(L_\infty[\pi]/L_\infty)$ est donnée par $\overline{\eta} \oplus \overline{\eta}'$.*

À tout φ-module de type $\overline{\chi}$ on associe comme ci-dessus $\mathrm{Hom}_\varphi(\mathfrak{D},\mathrm{Frac}(R))^2$ que l'on munit d'une action k_E-linéaire de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L_\infty)$ par $(gf)(m)\overset{\text{déf}}{=}g(f(\overline{g}^{-1}m))$ où $m\in\mathfrak{D}$ et $\overline{g}$ est l'image de g dans $\mathrm{Gal}(L_\infty[\pi]/L_\infty)$.

Si $\mathcal{M}$ est un $\mathscr{O}_E$-module fortement divisible de type $\chi\overset{\text{déf}}{=}\eta\otimes\eta'$ (définition 5.1) et $\overline{\mathcal{M}}\overset{\text{déf}}{=}\mathcal{M}\otimes_{\mathscr{O}_E}k_E$ (§6), on considère la représentation $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Fil}^1,\varphi_1}(\overline{\mathcal{M}},\widehat{A}_{\mathrm{cris}}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{F}_p)$ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)$ (voir (28)). Dans la preuve de la proposition 7.3 on a besoin de savoir que la restriction à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L_\infty)$ de cette représentation provient d'un φ-module de type $\overline{\chi}$ par le foncteur ci-dessus, ce que l'on vérifie maintenant (proposition A.2).

Soit $\mathfrak{M}$ un $k_L[[u]]\otimes_{\mathbb{F}_p}k_E$-module libre de rang fini muni d'un endomorphisme k_E-linéaire et $k_L((u))$-semi-linéaire $\varphi:\mathfrak{M}\to\mathfrak{M}$ tel que le $k_L[[u]]\otimes_{\mathbb{F}_p}k_E$-module engendré par l'image de φ contient $u^e\mathfrak{M}$. On peut écrire comme d'habitude $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}^0\times\cdots\times\mathfrak{M}^{f-1}$ où $\mathfrak{M}^j$ est un $k_E[[u]]$-module libre de rang fini et où φ induit des applications (nécessairement) injectives $\varphi:\mathfrak{M}^j\to\mathfrak{M}^{j+1}$. Pour $j\in\{0,\cdots,f-1\}$, on pose :

$$\overline{\mathcal{M}}^j\overset{\text{déf}}{=}\overline{S}\otimes_{\varphi,k_E[[u]]}\mathfrak{M}^{j-1}$$

où $\overline{S}$ est vu comme $k_E[[u]]$-algèbre via $k_E[[u]]\to\overline{S}$, $u\mapsto u^p$ (d'où la notation $\otimes_\varphi$) et où $j-1=f-1$ si $j=0$. On définit :

$$\mathrm{Fil}^1\overline{\mathcal{M}}^j\overset{\text{déf}}{=}\{x\in\overline{\mathcal{M}}^j\mid(\mathrm{Id}\otimes\varphi)(x)\in\mathrm{Fil}^1\overline{S}\otimes_{k_E[[u]]}\mathfrak{M}^j\}$$

où $\mathrm{Fil}^1\overline{S}$ est cette fois vu comme $k_E[[u]]$-module via $k_E[[u]]\to\overline{S}$, $u\mapsto u$. On définit enfin $\varphi_1:\mathrm{Fil}^1\overline{\mathcal{M}}^j\to\overline{\mathcal{M}}^{j+1}$ comme le composé :

$$\mathrm{Fil}^1\overline{\mathcal{M}}^j\xrightarrow{\mathrm{Id}\otimes\varphi}\mathrm{Fil}^1\overline{S}\otimes_{k_E[[u]]}\mathfrak{M}^j\xrightarrow{\varphi_1\otimes\mathrm{Id}}\overline{S}\otimes_{\varphi,k_E[[u]]}\mathfrak{M}^j=\overline{\mathcal{M}}^{j+1}.$$

On peut alors associer un triplet $(\overline{\mathcal{M}},\mathrm{Fil}^1\overline{\mathcal{M}},\varphi_1)$ à tout $\mathfrak{M}$ en posant $\overline{\mathcal{M}}\overset{\text{déf}}{=}\overline{\mathcal{M}}^0\times\cdots\times\overline{\mathcal{M}}^{f-1}$ et en définissant $\mathrm{Fil}^1\overline{\mathcal{M}}$ et φ_1 de manière similaire.

Proposition A.2. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathscr{O}_E$-module fortement divisible de type χ comme au §5 et $\overline{\mathcal{M}}\overset{\text{déf}}{=}\mathcal{M}\otimes_{\mathscr{O}_E}k_E$.*
(i) Il existe un unique $k_L[[u]]\otimes_{\mathbb{F}_p}k_E$-module libre $\mathfrak{M}$ comme ci-dessus tel que le triplet associé soit isomorphe à $(\overline{\mathcal{M}},\mathrm{Fil}^1\overline{\mathcal{M}},\varphi_1)$.
(ii) Soit $\mathfrak{D}\overset{\text{déf}}{=}\mathfrak{M}\otimes_{k_L[[u]]}k_L((u))$ et munissons $\mathfrak{D}$ de l'endomorphisme φ $k_L((u))$-semi-linéaire induit par celui de $\mathfrak{M}$. Alors $\mathfrak{D}$ est un φ-module de type $\overline{\chi}$ et on a un isomorphisme k_E-linéaire compatible à l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L_\infty)$ *:*

$$\mathrm{Hom}_\varphi(\mathfrak{D},\mathrm{Frac}(R))^2\simeq\mathrm{Hom}_{\mathrm{Fil}^1,\varphi_1}(\overline{\mathcal{M}},\widehat{A}_{\mathrm{cris}}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{F}_p)|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L_\infty)}.$$

Démonstration. — Le (i) découle de la preuve de [**6**, Th.3.3.2]. L'unicité de $\mathfrak{M}$ en (i) implique qu'il est naturellement muni d'une action de $\mathrm{Gal}(L_\infty[\pi]/L_\infty)$ provenant de l'action de $\mathrm{Gal}(L[\pi]/L)$ sur $\overline{\mathcal{M}}$ et il est clair (cf. preuve de [**6**, Th.3.3.2]) que cela fait de $\mathfrak{D}$ un φ-module de type $\overline{\chi}$. En munissant R de la structure de $k_L[[u]]$-module qui consiste à envoyer u sur $\underline{\pi}$, on a des isomorphismes de k_E-espaces vectoriels :

$$\mathrm{Hom}_\varphi(\mathfrak{D}, \mathrm{Frac}(R))^2 \xleftarrow{\sim} \mathrm{Hom}_\varphi(\mathfrak{M}, R) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fil}^1,\varphi_1}(\overline{\mathcal{M}}, \widehat{A}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}_p)$$

induits par les applications $R \hookrightarrow \mathrm{Frac}(R)$ et $R \to A_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}_p \to \widehat{A}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}_p$ (l'isomorphisme de gauche ci-dessus résulte de [**5**, Lem.2.3.3] et celui de droite se démontre comme dans [**5**, Prop.4.2.1]). Comme ces applications sont $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L_\infty)$-équivariantes, la commutativité à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L_\infty)$ est immédiate. □

On reprend maintenant les notations du §4 et on convient ci-dessous que f en indice ou exposant doit être vu comme 0. Soit $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L) \to \mathrm{GL}_2(k_E)$ telle que :

$$\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L^{\mathrm{nr}})} \cong \begin{pmatrix} \omega_f^{\sum_{j=0}^{f-1}(r_j+1)p^j} & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} \omega_f^{\sum_{j=0}^{f-1}(s_j+1)p^{-j}} & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec $0 \leq r_j \leq p-3$, $(r_j) \notin \{(0, \cdots, 0), (p-3, \cdots, p-3)\}$ et $s_j \overset{\text{déf}}{=} r_{f-j}$ (en particulier $\overline{\rho}$ est générique). Alors $\overline{\rho}$ provient du module de Fontaine-Laffaille $M = M^0 \times \cdots \times M^{f-1}$ avec $M^j = k_E e^j \oplus k_E f^j$, $\mathrm{Fil}^0 M^j = M^j$, $\mathrm{Fil}^1 M^j = \mathrm{Fil}^{s_j+1} M^j = k_E f^j$, $\mathrm{Fil}^{s_j+2} M^j = 0$ et :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \varphi(e^j) & = & \alpha_{j+1} e^{j+1} \\ \varphi_{s_j+1}(f^j) & = & \beta_{j+1}(f^{j+1} + \mu_{j+1} e^{j+1}) \end{array} \right. \tag{47}$$

où $j \in \{0, \cdots, f-1\}$, $\alpha_j, \beta_j \in k_E^\times$, $\mu_j \in k_E$ (cf. §4).

Proposition A.3. — *On a (avec les notations du §4) :*

$$\mathscr{D}(\overline{\rho}) = \{(\lambda_0(r_0), \cdots, \lambda_{f-1}(r_{f-1})) \otimes \det{}^{e(\lambda)(r_0, \cdots, r_{f-1})}, \lambda \in \mathscr{D}(x_0, \cdots, x_{f-1})\}$$

où $\mathscr{D}(\overline{\rho})$ est l'ensemble des poids de Serre associés à $\overline{\rho}$ dans [**12**].

Démonstration. — Pour tout $J \subseteq \mathscr{S}$ on peut écrire $\overline{\rho}$ sous la forme :

$$\overline{\rho} \cong \begin{pmatrix} \omega_f^{\sum_{j\in J}(r'_j+1)p^j} \mathrm{nr}_1 & * \\ 0 & \omega_f^{\sum_{j\notin J}(r'_j+1)p^j} \mathrm{nr}_2 \end{pmatrix} \otimes \omega_f^{-\sum_{j\notin J}(r'_j+1)p^j} \quad \text{où :}$$

$$r'_j = \left\{ \begin{array}{ccccc} p-3-r_j & \text{si} & j \notin J & \text{et} & j-1 \notin J \\ p-2-r_j & \text{si} & j \notin J & \text{et} & j-1 \in J \\ r_j+1 & \text{si} & j \in J & \text{et} & j-1 \notin J \\ r_j & \text{si} & j \in J & \text{et} & j-1 \in J \end{array} \right. \tag{48}$$

et où $\mathrm{nr}_1, \mathrm{nr}_2$ sont des caractères non ramifiés (indépendants de J). Disons qu'un $J \subseteq \mathscr{S}$ est $\overline{\rho}$-cristallin si l'extension $*$ dans $\overline{\rho} \otimes \omega_f^{\sum_{j\notin J}(r'_j+1)p^j}$ se relève en une extension cristalline :

$$\begin{pmatrix} \prod_{j\in J} \varphi^j(\varepsilon_f)^{r'_j+1} \widehat{\mathrm{nr}}_1 & * \\ 0 & \prod_{j\notin J} \varphi^j(\varepsilon_f)^{r'_j+1} \widehat{\mathrm{nr}}_2 \end{pmatrix}$$

où $\varphi^j(\varepsilon_f)$ est le caractère (cristallin) de Lubin-Tate de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L^{\mathrm{nr}})$ qui, via la réciprocité locale, est $\iota\circ\varphi^j$ sur $\mathscr{O}_L^\times$ (en particulier il relève $\omega_f^{p^j}$) et où $\widehat{\mathrm{nr}}_1, \widehat{\mathrm{nr}}_2$ sont des caractères non ramifiés qui relèvent $\mathrm{nr}_1, \mathrm{nr}_2$. Par définition (cf. [**12**], [**24**]), $\mathscr{D}(\overline{\rho})$ est l'ensemble des poids de Serre $(\lambda_0(r_0),\cdots,\lambda_{f-1}(r_{f-1}))\otimes\det^{e(\lambda)(r_0,\cdots,r_{f-1})}$ pour $\lambda\in\mathscr{RD}(x_0,\cdots,x_{f-1})$ tel que $\{j\mid\lambda_j(x_j)\in\{x_j,x_j+1\}\}$ est $\overline{\rho}$-cristallin. Soit $L_\infty\subset\overline{\mathbb{Q}_p}$ le sous-corps précédent engendré par L et un système compatible de racines p^n-ièmes de $-p$. Puisque toute extension dans $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)}(\mathrm{nr}_2,\omega_f^{\sum_{j=0}^{f-1}(r_j+1)p^j}\mathrm{nr}_1)$ provient d'un objet de Fontaine-Laffaille, par [**5**, Cor.4.2.2 et Lem.5.1] la flèche de restriction :

$$(49)\quad \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)}\big(\mathrm{nr}_2,\omega_f^{\sum_{j=0}^{f-1}(r_j+1)p^j}\mathrm{nr}_1\big)\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L_\infty)}\big(\mathrm{nr}_2,\omega_f^{\sum_{j=0}^{f-1}(r_j+1)p^j}\mathrm{nr}_1\big)$$

est une injection.

Pour tout $J\subseteq\mathscr{S}$ posons $\iota(J)\overset{\text{déf}}{=}\{f-j\mid j\in J\}$ et $s'_j\overset{\text{déf}}{=}r'_{f-j}$ avec r'_j comme en (48). Considérons les modules de Fontaine-Laffaille de la forme $M'_J = {M'_J}^0\times\cdots\times{M'_J}^{f-1}$ avec ${M'_J}^j=k_Ee_J^j\oplus k_Ef_J^j$, $\mathrm{Fil}^0{M'_J}^j={M'_J}^j$, $\mathrm{Fil}^{s'_j+2}{M'_J}^j=0$ et :

$$\begin{cases}\mathrm{Fil}^1{M'_J}^j &=& \mathrm{Fil}^{s'_j+1}{M'_J}^j &=& k_Ee_J^j & \text{si} & j\notin\iota(J)\\ \mathrm{Fil}^1{M'_J}^j &=& \mathrm{Fil}^{s'_j+1}{M'_J}^j &=& k_Ef_J^j & \text{si} & j\in\iota(J)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\varphi_{s'_j+1}(e_J^j) &=& \alpha_{j+1}e_J^{j+1} & \text{si} & j\notin\iota(J) & & \\ \varphi(e_J^j) &=& \alpha_{j+1}e_J^{j+1} & \text{si} & j\in\iota(J) & & \\ \varphi(f_J^j) &=& \beta_{j+1}f_J^{j+1} & \text{si} & j\notin\iota(J) & \text{et} & j+1\notin\iota(J)\\ \varphi(f_J^j) &=& \beta_{j+1}(f_J^{j+1}+\mu_{j+1}e_J^{j+1}) & \text{si} & j\notin\iota(J) & \text{et} & j+1\in\iota(J)\\ \varphi_{s'_j+1}(f_J^j) &=& \beta_{j+1}f_J^{j+1} & \text{si} & j\in\iota(J) & \text{et} & j+1\notin\iota(J)\\ \varphi_{s'_j+1}(f_J^j) &=& \beta_{j+1}(f_J^{j+1}+\mu_{j+1}e_J^{j+1}) & \text{si} & j\in\iota(J) & \text{et} & j+1\in\iota(J)\end{cases}$$

où $\alpha_j,\beta_j\in k_E^\times$, $\mu_j\in k_E$. Soit E'_J le sous-k_E-espace vectoriel de :

$$E\overset{\text{déf}}{=}\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)}(\mathrm{nr}_2,\omega_f^{\sum_{j=0}^{f-1}(r_j+1)p^j}\mathrm{nr}_1)$$

des extensions isomorphes à $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Fil}^\cdot,\varphi_\cdot}(M'_J,A_{\mathrm{cris}}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{F}_p)\otimes\omega_f^{-\sum_{j\notin J}(r'_j+1)p^j}$ pour M'_J comme ci-dessus (avec les α_j,β_j convenables pour obtenir $\mathrm{nr}_1,\mathrm{nr}_2$). Il est de dimension $|\iota(J)|=|J|$. Pour tout $J\subseteq\mathscr{S}$, notons M_J les modules de Fontaine-Laffaille comme en (47) tels que $j\notin\iota(J)$ implique $\mu_j=0$ (et avec les α_j,β_j convenables pour obtenir $\mathrm{nr}_1,\mathrm{nr}_2$). Soit E_J le sous-k_E-espace vectoriel de E des extensions isomorphes à $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Fil}^\cdot,\varphi_\cdot}(M_J,A_{\mathrm{cris}}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{F}_p)$. Il est de dimension $|J|$. Par définition de $\mathscr{D}(x_0,\cdots,x_{f-1})$ (cf. §4) et de $\mathscr{D}(\overline{\rho})$, on voit facilement qu'il suffit de montrer que, pour tout J, les deux sous-espaces E_J et E'_J de E sont les mêmes, et par (49) il suffit de le vérifier après restriction à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L_\infty)$. Notons que l'on passe par $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L_\infty)$ car il est alors facile d'expliciter la torsion par $\omega_f^{-\sum_{j\notin J}(r'_j+1)p^j}$ sur les φ-modules qui apparaissent (cf. ci-dessous).

Par le résultat de Fontaine rappelé au début de cet appendice, se donner une représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L_\infty)$ sur un k_E-espace vectoriel de dimension 2 est équivalent par le foncteur $\mathfrak{D}\mapsto \mathrm{Hom}_\varphi(\mathfrak{D},\mathrm{Frac}(R))^1$ à se donner un φ-module $\mathfrak{D}=\mathfrak{D}^0\times\cdots\times\mathfrak{D}^{f-1}$ où $\mathfrak{D}^j$ est un $k_E((u))$-espace vectoriel de dimension 2 et $\varphi:\mathfrak{D}^j\to\mathfrak{D}^{j+1}$ est k_E-linéaire tel que $\varphi(u^im)=u^{pi}\varphi(m)$. L'équivalence de catégories de [**5**, Th.4.1.1] montre qu'à l'objet de Fontaine-Laffaille M'_J, qui peut être vu par [**5**, Lem.5.1] comme un objet de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}_{0,k_L}^{p-2}$ de *loc.cit.* avec un plongement de k_E dans ses endomorphismes, correspond un $k_L[[u]]\otimes_{\mathbb{F}_p}k_E$-module $\mathfrak{M}'_J$ qui est un objet de la catégorie $\underline{\mathfrak{M}}^{p-2}$ de [**5**, Déf.2.3.4] (le passage de $\mathfrak{M}'_J$ à M'_J est analogue au passage de $\mathfrak{M}$ à $\overline{\mathcal{M}}$ précédent la proposition A.2). C'est ici l'endroit clef où l'on passe des modules de Fontaine-Laffaille (mod. p) aux φ-modules. Le $k_L((u))\otimes_{\mathbb{F}_p}k_E$-module $\mathfrak{D}'_J\overset{\text{déf}}{=}\mathfrak{M}'_J\otimes_{k_L[[u]]}k_L((u))$ est alors l'unique φ-module comme ci-dessus tel que $\mathrm{Hom}_\varphi(\mathfrak{D}'_J,\mathrm{Frac}(R))^1\cong\mathrm{Hom}_{\mathrm{Fil}^\cdot,\varphi_\cdot}(M'_J,A_{\mathrm{cris}}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{F}_p)|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L_\infty)}$ ([**5**, Lem.2.3.3] et [**5**, Prop.4.2.1]). Quand on explicite le calcul donnant $\mathfrak{M}'_J$ (puis $\mathfrak{D}'_J$) à partir de M'_J (cf. partie (2) de la preuve de [**5**, Th.4.1.1]), on obtient que $\mathfrak{D}'_J={\mathfrak{D}'_J}^0\times\cdots\times{\mathfrak{D}'_J}^{f-1}$ est de la forme ${\mathfrak{D}'_J}^j=k_E((u))\mathfrak{e}_J^j\oplus k_E((u))\mathfrak{f}_J^j$ avec :

$$\begin{cases}\varphi(\mathfrak{e}_J^j) &= \gamma_{j+1}u^{s'_{j+1}+1}\mathfrak{e}_J^{j+1} & \text{si}\quad j+1\notin\iota(J)\\ \varphi(\mathfrak{e}_J^j) &= \gamma_{j+1}\mathfrak{e}_J^{j+1} & \text{si}\quad j+1\in\iota(J)\\ \varphi(\mathfrak{f}_J^j) &= \delta_{j+1}\mathfrak{f}_J^{j+1} & \text{si}\quad j+1\notin\iota(J)\\ \varphi(\mathfrak{f}_J^j) &= \delta_{j+1}u^{s'_{j+1}+1}\mathfrak{f}_J^{j+1}+\nu_{j+1}\mathfrak{e}_J^{j+1} & \text{si}\quad j+1\in\iota(J)\end{cases}$$

où $\gamma_j,\delta_j\in k_E^\times$ et $\nu_j\in k_E$. Après torsion par $\omega_f^{-\sum_{j\notin J}(r'_j+1)p^j}$, ce qui correspond à multiplier $\varphi(\mathfrak{e}_J^j)$ et $\varphi(\mathfrak{f}_J^j)$ par $u^{-(s'_{j+1}+1)}$ si $j+1\notin\iota(J)$, et en remplaçant $\mathfrak{f}_J^j$ par $u\mathfrak{f}_J^j$ si $j+1\notin\iota(J)$, on obtient les φ-modules suivants :

$$\begin{cases}\varphi(\mathfrak{e}_J^j) &= \gamma_{j+1}\mathfrak{e}_J^{j+1}\\ \varphi(\mathfrak{f}_J^j) &= \delta_{j+1}u^{s''_{j+1}}\mathfrak{f}_J^{j+1}+\nu_{j+1}\mathfrak{e}_J^{j+1}\end{cases}$$

où $\nu_j=0$ si $j\notin\iota(J)$ et :

$$s''_j=\begin{cases}p-2-s'_j & \text{si}\quad j\notin\iota(J)\quad\text{et}\quad j+1\notin\iota(J)\\ p-1-s'_j & \text{si}\quad j\notin\iota(J)\quad\text{et}\quad j+1\in\iota(J)\\ s'_j & \text{si}\quad j\in\iota(J)\quad\text{et}\quad j+1\notin\iota(J)\\ s'_j+1 & \text{si}\quad j\in\iota(J)\quad\text{et}\quad j+1\in\iota(J).\end{cases}$$

Comme $s'_j=r'_{f-j}$ et $j\in\iota(J)$ (resp. $j+1\in\iota(J)$) si et seulement si $f-j\in J$ (resp. $f-1-j\in J$), en utilisant les formules (48) pour r'_{f-j} ainsi que $r_{f-j}=s_j$, on obtient finalement les φ-modules :

$$\begin{cases}\varphi(\mathfrak{e}_J^j) &= \gamma_{j+1}\mathfrak{e}_J^{j+1}\\ \varphi(\mathfrak{f}_J^j) &= \delta_{j+1}u^{s_{j+1}+1}\mathfrak{f}_J^{j+1}+\nu_{j+1}\mathfrak{e}_J^{j+1}\end{cases}$$

où $\gamma_j,\delta_j\in k_E^\times$, $\nu_j\in k_E$ et $\nu_j=0$ si $j\notin\iota(J)$.

Or, par le même calcul (en plus simple) que précédemment utilisant [**5**, Th.4.1.1], ces φ-modules correspondent précisément aux représentations de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L_\infty)$ de la forme $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Fil}^\cdot,\varphi\cdot}(M_J, A_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}_p)|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L_\infty)}$. Ceci montre $E_J = E'_J$ et achève la preuve. □

Remarque A.4. — Le résultat de la proposition A.3 peut aussi se déduire de [**13**], voir [**14**].

Appendice B

Appendice par Lassina Dembélé

Soit F un corps totalement réel et $p \geq 3$ un premier inerte dans F. Soit D un corps de quaternion sur F totalement défini et ramifié en un ensemble de places finies Σ telles que $(p) \notin \Sigma$ et $v \in \Sigma$ n'est pas congru à 1 modulo p. Soit $\mathfrak{n}$ un idéal entier tel que $v \nmid \mathfrak{n}$, $v \in \Sigma \cup \{(p)\}$. Soit $g \in S^D(U(\mathfrak{n}, p); \overline{\mathbb{F}_p})$ une forme nouvelle telle que la représentation galoisienne associée :

$$\overline{\rho}_g : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}_p})$$

est globalement irréductible et générique en (p). (On réfère à l'article et au reste de l'appendice pour les diverses définitions et notations.) En notant $\overline{\rho}_{g,p}$ la restriction de $\overline{\rho}_g$ à un sous-groupe de décomposition en (p), l'ensemble des poids de Serre $\mathscr{D}(\overline{\rho}_{g,p})$ a comme cardinal 2^d avec $0 \leq d \leq f$, où f désigne le degré d'inertie en (p). De plus, on a $d = f$ si et seulement si $\overline{\rho}_{g,p}$ est semi-simple.

La conjecture suivante est mentionnée dans l'introduction de l'article.

Conjecture B.1. — *Soient F, D, $\mathfrak{n}$ et g comme ci-dessus, et soit $\mathfrak{m}_g$ l'idéal de l'algèbre de Hecke $\mathbf{T}^D$ engendré par tous les opérateurs $T(\mathfrak{p}) - a_{\mathfrak{p}}(g)$ tels que $g|T(\mathfrak{p}) = a_{\mathfrak{p}}(g)g$ avec $\mathfrak{p} \notin (\Sigma \cup \{\mathfrak{p} : \mathfrak{p} \mid \mathfrak{n}p\})$. On pose :*

$$S^D(U(\mathfrak{n}, p); \overline{\mathbb{F}_p})^{\mathfrak{n}\text{-new}}[g] \overset{\text{déf}}{=} \left\{h \in S^D(U(\mathfrak{n}, p); \overline{\mathbb{F}_p})^{\mathfrak{n}\text{-new}} \mid Th = 0, \forall\, T \in \mathfrak{m}_g\right\}$$

(que nous abrégeons dans la suite par $S^D[g]$). Alors on a :

(i) *Si $d < f$, $\dim_{\overline{\mathbb{F}_p}} S^D(U(\mathfrak{n}, p); \overline{\mathbb{F}_p})^{\mathfrak{n}\text{-new}}[g] = 2^{f-d}3^d$.*

(ii) *Si $d = f$, $\dim_{\overline{\mathbb{F}_p}} S^D(U(\mathfrak{n}, p); \overline{\mathbb{F}_p})^{\mathfrak{n}\text{-new}}[g] = 3^f \pm 1$, avec $+$ si $\overline{\rho}_{g,p}$ est scindée et $-$ si $\overline{\rho}_{g,p}$ est irréductible.*

Dans cet appendice, nous vérifions quelques cas de cette conjecture par ordinateur. Pour ce faire, nous avons calculé des systèmes de valeurs propres de Hecke de formes automorphes algébriques modulo 3 et 5 sur des corps de quaternions définis sur les corps totalement réels $F = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\zeta_7)^+$, $\mathbb{Q}(\zeta_9)^+$ et $\mathbb{Q}(\zeta_{16})^+$. Signalons que nous n'avons pas cherché à énoncer une conjecture générale puisque nous ne nous limitons qu'à la vérifier avec les conditions restreintes ci-dessus (p

$\Sigma = \{\mathfrak{p}_3\}$, $\mathfrak{n} = (1)$

$\mathbf{N}\mathfrak{p}$	$\mathfrak{p}$	$a_{\mathfrak{p}}(g_1)$	$a_{\mathfrak{p}}(g_2)$
3	$\mathfrak{p}_3$	2	0
8	$\mathfrak{p}_2$	α^{63}	α^{7}
17	$\mathfrak{p}_{17}^{(1)}$	α^{67}	α^{35}
17	$\mathfrak{p}_{17}^{(2)}$	α^{87}	α^{51}
17	$\mathfrak{p}_{17}^{(3)}$	α^{113}	α^{98}
19	$\mathfrak{p}_{19}^{(1)}$	α^{69}	α^{118}
19	$\mathfrak{p}_{19}^{(2)}$	α^{97}	α^{94}
19	$\mathfrak{p}_{19}^{(3)}$	α^{82}	α^{64}
$\dim_{\overline{\mathbb{F}}_5} S^D[g]$		4	8
$\mathscr{D}(\overline{\rho}_{g,p})$		$\sigma_{(2,3,3),(4,2,2)}$	$\sigma_{(2,1,1),(0,2,2)}$

TABLE 1. Exemples de systèmes de valeurs propres de Hecke sur $\mathbb{Q}(\zeta_9)^+$ à coefficients dans $\mathbb{F}_{5^3}$ (ici α est un générateur de $\mathbb{F}_{5^3}^{\times}$).

inerte, $v \in \Sigma$ non congru à 1 modulo p, $\mathfrak{n}$ premier à Σ et niveau $U_0(\mathfrak{n})$), mais un énoncé plus général devrait être vrai. Précisons aussi que le cas $d = 0$ de la conjecture B.1 peut se déduire de la Remarque 10.7 et de la Conjecture 9.1 sur les poids de Serre dans l'article.

B.1. Exemples. — Pour chacun des corps F ci-dessus et pour quelques corps de quaternions D sur F, nous avons calculé tous les systèmes de valeurs propres de Hecke à coefficients dans $\mathbb{F}_{3^f}$ ou $\mathbb{F}_{5^f}$, pour divers niveaux $\mathfrak{n}$. Nous avons effectué ces calculs en utilisant la même méthode que dans [**18**] auquel nous référons pour plus de détails.

Pour chaque système de valeurs propres g nous avons, par la même occasion, calculé l'ensemble des poids de Serre $\mathscr{D}(\overline{\rho}_{g,p})$ ainsi que la dimension $\dim_{\overline{\mathbb{F}}_p} S^D[g]$. Les poids de Serre $\mathscr{D}(\overline{\rho}_{g,p})$ sont obtenus en déterminant l'ensemble des $\overline{\mathbb{F}_p}$-représentations irréductibles (σ, V) de $\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_F/(p))$ pour lesquels le système g apparait dans $S^D(U_0(\mathfrak{n}); V)$ (voir §B.5 pour les notations). De façon analogue, on obtient $\dim_{\overline{\mathbb{F}_p}} S^D[g]$ en énumérant tous les caractères de l'Iwahori χ en (p) pour lesquels le système g apparait dans $S^D(U(\mathfrak{n}, p), \chi; \overline{\mathbb{F}_p})$. (À titre illustratif, nous avons donné deux exemples de tels systèmes dans la Table 1 ; le lecteur s'apercevra en regardant les poids de Serre que le premier n'est pas générique.)

B.2. Cas $f = 2$ et $p = 3$. — Il est relativement facile de trouver des exemples satisfaisant la Conjecture B.1 tels que $\mathscr{D}(\overline{\rho}_{g,p})$ soit maximal avec $p \geq 5$. Ici, nous nous limitons au cas $p = 3$ qui est un peu plus délicat. On rappelle que, dans

$N\mathfrak{p}$	$\mathfrak{p}$	$\chi(\mathfrak{p})$	$a_{\mathfrak{p}}(g)$
2	$2-\omega$	0	α^2
7	$5-3\omega$	α^7	0
7	$3-\omega$	α^5	0
9	3	$-$	$-$
17	$7+4\omega$	α	α^7
17	$5+2\omega$	α^3	α
23	$5-\omega$	α^6	0
23	$5+\omega$	α^2	0
25	5	$-$	1
31	$9+5\omega$	α	α^6
31	$7+3\omega$	α^3	α^2
41	$7-2\omega$	α^3	0
41	$7+2\omega$	α	0

$\Sigma=\emptyset, \mathfrak{n}=(40)$ $\dim_{\mathbb{F}_9} S^D[g]=3^2-1$	
$\vec{a}$	$\vec{b}$
$(0,0)$	$(0,1)$
$(1,0)$	$(1,0)$
$(1,1)$	$(0,1)$
$(2,1)$	$(1,0)$

TABLE 2. Une forme nouvelle sur $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ de niveau (40) à coefficients dans $\mathbb{F}_9$, irréductible en $p=(3)$. (Ici, $\omega=\sqrt{2}$, et α est un générateur de $\mathbb{F}_9^\times$.)

ce cas-ci, si $\overline{\rho}_{g,p}$ est générique alors elle est irréductible (voir §4). Sur le corps quadratique $F=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, le plus petit niveau pour lequel on a une forme nouvelle dont la représentation galoisienne associée soit générique est $\mathfrak{n}=(40)$. Dans la Table 2, nous avons énuméré les premières valeurs propres de Hecke d'une telle forme g. (Voir [**18**] pour plus de détails.)

Dans les Tables 2, 3, 4 et 5, les $(\vec{a},\vec{b})$ sont les poids de Serre de $\overline{\rho}_{g,p}$ où $(\vec{a},\vec{b})=((a_j),(b_j))$ désigne le poids de Serre (avec les notations du §4) :

$$\bigotimes_{j=0}^{f-1}\left(\det{}^{a_j}\otimes_{k_E}\mathrm{Sym}^{b_j}k_E^2\right)^{\varphi^j}=(b_0,\cdots,b_{f-1})\otimes\det{}^{\sum_{j=0}^{f-1}p^ja_j}.$$

B.3. Cas $f=3$ et $p=5$. — Soit $F=\mathbb{Q}(\alpha)$, où $\alpha^3+\alpha^2-2\alpha-1=0$. C'est le sous-corps totalement réel maximal de $\mathbb{Q}(\zeta_7)$. Il se distingue par le fait que c'est l'extension cubique totalement réelle de plus petit discriminant, soit 49. Le premier (5) est inerte dans F. Soit D/F le corps de quaternions ramifié en (2) et en les trois places archimédiennes de F. Pour l'exemple suivant, nous avons calculé les formes de niveau $U_0(3)\subset(\mathscr{O}_D\otimes\hat{\mathbb{Z}})^\times$.

Proposition B.2. — *Soit* $\overline{\rho}_{E,5}:\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)\to\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_5)$ *la représentation galoisienne modulo* 5 *associée à la courbe elliptique* $E: y^2+xy=x^3+x^2-25x+85$. *Alors* $\overline{\rho}_{E,5}$ *est générique en* (5) *et satisfait la Conjecture B.1. De plus, on a* $\overline{\rho}_{E,5}\simeq\overline{\rho}_{g,5}$ *où* g *est la forme donnée dans la Table 3.*

$\Sigma = \{(2)\}$, $\mathrm{N}(\mathfrak{n}) = 27$ $\dim_{\mathbb{F}_5} S^D[g] = 3^3 - 1$			
$\mathrm{N}\mathfrak{p}$	$a_{\mathfrak{p}}(g)$	$\vec{a}$	$\vec{b}$
7	0	$(4,1,1)$	$(1,1,2)$
13	4	$(1,4,3)$	$(1,1,2)$
29	4	$(1,4,1)$	$(2,1,1)$
41	2	$(1,1,4)$	$(1,2,1)$
43	2	$(3,1,4)$	$(2,1,1)$
71	1	$(4,3,1)$	$(1,2,1)$
83	1	$(3,3,3)$	$(2,2,2)$
97	3	$(1,1,1)$	$(2,2,2)$

TABLE 3. Une forme nouvelle générique sur $\mathbb{Q}(\zeta_7)^+$ à coefficients dans $\mathbb{F}_5$, irréductible en $p = (5)$.

Démonstration. — Il est clair que la courbe elliptique E est un changement de base provenant de $\mathbb{Q}$; c'est la courbe $7350b1$ dans les tables de Cremona. (Elle est donc modulaire.) Sur $\mathbb{Q}$, elle a pour conducteur $2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2$. Mais elle acquiert bonne réduction en le premier au-dessus de 7 dans F. Ainsi, son conducteur sur F est $(2)(3)(5)^2$. En comparant les traces du Frobenius modulo 5 avec les coefficients des formes propres, on obtient que g est l'unique forme nouvelle de niveau $\mathfrak{n} = (2)(3)$ telle que $\overline{\rho}_{E,5} \simeq \overline{\rho}_{g,5}$. Les données de la Table 3, nous permettent alors de conclure que $\overline{\rho}_{E,5}$ est générique et satisfait à la Conjecture B.1. □

Remarque B.3. — Il est utile de noter que nous nous sommes servis de la connaissance de la forme g pour déterminer la courbe E. En effet, les valeurs propres de g dans la Table 3 permettent de voir que $\mathrm{im}(\overline{\rho}_{g,5}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_5)$. Par [**39**, Thm 3.4.], on voit alors que $\overline{\rho}_{g,5}$ peut être réalisée dans les points de 5-torsion d'une courbe elliptique. Comme, les valeurs propres de g suggèrent également qu'une telle courbe est un changement de base, cela nous permet de la déterminer.

Proposition B.4. — *Soit* $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_5)$ *la représentation galoisienne associée à la forme de la Table 4. Alors,* $\overline{\rho}$ *est générique et irréductible en* (5). *Elle peut être réalisée dans les points de* 5*-torsion d'une courbe non changement de base, et vérifie la Conjecture B.1.*

Remarque B.5. — La généricité de la représentation $\overline{\rho}$ résulte de la manière dont elle a été construite. Par le [**39**, Thm 3.4] précédemment mentionné, on sait que $\overline{\rho}$ provient d'une courbe elliptique. Cependant, une telle courbe ne peut être un changement de base comme l'indique les valeur propres de la forme. Comme son conducteur est également très gros, soit de norme $13 \cdot 83 \cdot 5^6 = 16859375$, il nous est impossible de déterminer la courbe explicitement.

$\Sigma = \{\mathfrak{p}_{13}\}$, $\mathrm{N}(\mathfrak{n}) = 83$ $\dim_{\overline{\mathbb{F}}_5} S^D[g] = 3^3 - 1$			
$\mathrm{N}\mathfrak{p}$	$a_{\mathfrak{p}}(g)$	$\vec{a}$	$\vec{b}$
7	0	$(4,1,1)$	$(1,1,2)$
13	1	$(1,4,3)$	$(1,1,2)$
13	2	$(1,4,1)$	$(2,1,1)$
13	0	$(1,1,4)$	$(1,2,1)$
29	2	$(3,1,4)$	$(2,1,1)$
29	3	$(4,3,1)$	$(1,2,1)$
29	0	$(3,3,3)$	$(2,2,2)$
41	1	$(1,1,1)$	$(2,2,2)$
41	0		
41	1		

TABLE 4. Une forme nouvelle sur $\mathbb{Q}(\zeta_7)^+$ à coefficients dans $\mathbb{F}_5$, irréductible en $p = (5)$.

B.4. Cas : $f = 4$ et $p = 5$. — Soit $F = \mathbb{Q}(\alpha)$, avec $\alpha^4 - 4\alpha^2 + 2 = 0$. C'est le sous-corps totalement réel maximal de $\mathbb{Q}(\zeta_{16})$. Le premier (5) est inerte dans F. Soit D/F le corps de quaternions ramifié en les quatre places archimédiennes de F. Nous avons calculé les formes de niveau $U_0(\mathfrak{p}_2^5) \subset (\mathscr{O}_D \otimes \hat{\mathbb{Z}})^\times$ (ici, $\mathfrak{p}_2$ est l'unique premier au-dessus de 2). La Table 5 donne l'exemple d'une forme nouvelle qui satisfait le (i) de la Conjecture B.1.

En guise de complément aux exemples précédents, nous avons réparti dans les Tables 6, 7, 8 et 9, selon le cardinal de $\mathscr{D}(\overline{\rho}_{g,p})$, tous les systèmes de valeurs propres (pour les niveaux indiqués) qui satisfont à la condition :

$$\theta \otimes (r_0, \cdots, r_{f-1}) \in \mathscr{D}(\overline{\rho}_{g,p}) \Rightarrow 0 \leq r_i \leq p-2$$

(nécessaire pour la généricité de $\overline{\rho}_{g,p}$).

On observe que $\dim_{\overline{\mathbb{F}}_5} S^D[g]$ est en accord avec la Conjecture B.1.

B.5. Méthode de calcul des formes automorphes mod p sur F. — Dans ce paragraphe, nous expliquons comment nous avons effectué les calculs pour les formes automorphes algébriques modulo p.

Nous conservons les mêmes notations que dans l'article. Ainsi D est un corps de quaternions sur F qui est ramifié en toutes les places à l'infini et éventuellement en un ensemble fini quelconque de places finies Σ. Nous choisissons un ordre maximal $\mathscr{O}_D$ dans D. Pour chaque place finie v de F, on désigne par F_v et $\mathscr{O}_v$ les complétés de F et de $\mathscr{O}_F$ en v respectivement. On pose $D_v = D \otimes F_v$ et $\mathscr{O}_{D_v} = \mathscr{O}_D \otimes \mathscr{O}_v$; et pour chaque place finie $v \notin \Sigma$, on fixe un isomorphisme $\mathscr{O}_{D_v} \cong M_2(\mathscr{O}_v)$ que l'on étend à $D_v \cong M_2(F_v)$. Les adèles finis de D et $\mathscr{O}_D$ sont

$\Sigma = \emptyset$, $\mathrm{N}(\mathfrak{n}) = 32$, $\dim_{\overline{\mathbb{F}}_5} S^D[g] = 3^4 + 1$			
$\mathrm{N}\mathfrak{p}$	$a_{\mathfrak{p}}(g)$	$\vec{a}$	$\vec{b}$
2	0	$(4,1,1,2)$	$(1,1,2,0)$
17	α^{68}	$(1,4,1,2)$	$(2,1,1,0)$
17	α^{388}	$(4,1,4,3)$	$(0,1,1,2)$
17	α^{340}	$(4,3,1,2)$	$(1,2,1,0)$
17	α^{452}	$(4,1,4,1)$	$(1,1,1,1)$
31	0	$(4,1,1,3)$	$(0,1,2,3)$
31	0	$(4,3,1,3)$	$(0,3,1,3)$
31	0	$(1,1,1,2)$	$(2,2,2,0)$
31	0	$(4,3,3,3)$	$(0,2,2,2)$
47	0	$(4,3,3,1)$	$(1,2,2,1)$
47	0	$(1,1,4,1)$	$(2,2,1,1)$
47	0	$(1,4,3,1)$	$(2,1,2,1)$
47	0	$(0,4,1,3)$	$(3,1,1,3)$
49	α^{286}	$(0,1,4,3)$	$(3,2,1,2)$
49	α^{182}	$(0,4,3,3)$	$(3,1,2,2)$
625	?	$(0,1,1,3)$	$(3,2,2,3)$

TABLE 5. Une forme nouvelle sur $\mathbb{Q}(\zeta_{16})^+$ à coefficients dans $\mathbb{F}_{5^4}$, scindée en $p = 5$. (Ici, α est un générateur de $\mathbb{F}_{5^4}^\times$).

$\Sigma = \{\mathfrak{p}_3\}$, $\mathfrak{n} = (1)$

#Systèmes propres de Hecke	$\lvert\mathscr{D}(\overline{\rho}_{g,p})\rvert$	$\dim_{\overline{\mathbb{F}}_5} S^D[g]$
48	1	8
12	2	12

$\Sigma = \{\mathfrak{p}_3\}$, $\mathfrak{n} = (2)$

#Systèmes propres de Hecke	$\lvert\mathscr{D}(\overline{\rho}_{g,p})\rvert$	$\dim_{\overline{\mathbb{F}}_5} S^D[g]$
300	1	8
96	2	12

TABLE 6. $\dim_{\overline{\mathbb{F}}_5} S^D[g]$ pour systèmes de valeurs propres de Hecke sur $\mathbb{Q}(\zeta_9)^+$ à coefficients dans $\mathbb{F}_{5^3}$.

notés par $\hat{D}$ et $\hat{\mathscr{O}}_D$ respectivement ; cela détermine un isomorphisme :

$$\hat{\mathscr{O}}_D^\times \simeq \prod_{v\in\Sigma} \mathscr{O}_{D_v}^\times \times \prod_{v\notin\Sigma} \mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_v)$$

par lequel nous allons identifier ces deux groupes par la suite.

$\Sigma = \{\mathfrak{p}_7\}$, $\mathfrak{n} = (2)$

#Systèmes propres de Hecke	$\lvert\mathscr{D}(\overline{\rho}_{g,p})\rvert$	$\dim_{\overline{\mathbb{F}}_5} S^D[g]$
292	1	8
48	2	12
12	4	18

TABLE 7. $\dim_{\overline{\mathbb{F}}_5} S^D[g]$ pour systèmes de valeurs propres de Hecke sur $\mathbb{Q}(\zeta_7)^+$ à coefficients dans $\mathbb{F}_{5^3}$.

$\Sigma = \emptyset$, $\mathfrak{n} = (1)$

#Systèmes propres de Hecke	$\lvert\mathscr{D}(\overline{\rho}_{g,p})\rvert$	$\dim_{\overline{\mathbb{F}}_5} S^D[g]$
636	1	16
64	2	24
8	4	36

$\Sigma = \emptyset$, $\mathfrak{n} = (\mathfrak{p}_2)$

#Systèmes propres de Hecke	$\lvert\mathscr{D}(\overline{\rho}_{g,p})\rvert$	$\dim_{\overline{\mathbb{F}}_5} S^D[g]$
852	1	16
208	2	24
36	4	36

TABLE 8. $\dim_{\overline{\mathbb{F}}_5} S^D[g]$ pour systèmes de valeurs propres de Hecke sur $\mathbb{Q}(\zeta_{16})^+$ à coefficients dans $\mathbb{F}_{5^4}$, ($\mathfrak{p}_2$ est le premier au-dessus de 2).

$\Sigma = \emptyset$, $\mathfrak{n} = (\mathfrak{p}_2^5)$

#Formes nouvelles	$\lvert\mathscr{D}(\overline{\rho}_{g,p})\rvert$	$\dim_{\overline{\mathbb{F}}_5} S^D[g]$
4824	1	16
512	2	24
168	4	36
48	8	54
24	16	82

TABLE 9. $\dim_{\overline{\mathbb{F}}_5} S^D[g]$ pour les formes nouvelles $\mathbb{Q}(\zeta_{16})^+$ à coefficients dans $\mathbb{F}_{5^4}$, ($\mathfrak{p}_2$ est le premier au-dessus de 2).

Nous fixons un idéal entier $\mathfrak{n}$ dans $\mathscr{O}_F$ tel que $v \nmid \mathfrak{n}$ pour tout $v \in \Sigma$ et nous définissons les sous groupes compacts ouverts de $\hat{D}^\times$ suivants :

$$\begin{aligned}
U_0(\mathfrak{n}) &\overset{\text{déf}}{=} \left\{\gamma \in \hat{\mathscr{O}}_D^\times : \gamma \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \mod \mathfrak{n}\right\} \\
U_1^1(p) &\overset{\text{déf}}{=} \left\{\gamma \in \hat{\mathscr{O}}_D^\times : \gamma \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mod p\right\} \\
U(\mathfrak{n}, p) &\overset{\text{déf}}{=} U_0(\mathfrak{n}) \cap U_1^1(p).
\end{aligned}$$

Soit (σ, V) une $\overline{\mathbb{F}_p}$-représentation irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_F/(p))$. Pour vérifier la conjecture B.1, nous avons besoin de calculer les espaces des formes automorphes algébriques :

$$S^D(U(\mathfrak{n},p);\overline{\mathbb{F}_p}) \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ f:\ D^\times\backslash \hat{D}^\times/U(\mathfrak{n},p) \to \overline{\mathbb{F}_p} \right\}$$
$$S^D(U_0(\mathfrak{n});V) \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ f:\ D^\times\backslash \hat{D}^\times/U_0(\mathfrak{n}) \to V : f|u = f,\ \forall\, u\in \mathscr{O}^\times_{D_{(p)}} \right\}$$

où $\mathscr{O}^\times_{D_{(p)}}$ agit par la surjection $\mathscr{O}^\times_{D_{(p)}} \twoheadrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_F/(p))$ et où l'on pose $f|u(x) = f(xu)u^{-1}$. Pour ce faire nous allons les décomposer en sous-espaces plus faciles à calculer.

Soit $\mathrm{Cl}(\mathscr{O}_D)$ un ensemble de représentants de toutes les classes à droite de $\mathscr{O}_D$; on rappelle qu'il existe alors une bijection naturelle entre $\mathrm{Cl}(\mathscr{O}_D)$ et le double-quotient $D^\times\backslash\hat{D}^\times/\hat{\mathscr{O}}_D^\times$. Soit S un ensemble fini de premiers dans $\mathscr{O}_F$ disjoint de Σ qui engendre le groupe des classes « étroites » $\mathrm{Cl}^+(F)$ (narrow class group) et tel que, pour tout $\mathfrak{q}\in S$, on a $(\mathfrak{q},\mathfrak{n}p)=1$. Par le théorème de l'approximation forte, on choisit les représentants $\mathfrak{a}\in\mathrm{Cl}(\mathscr{O}_D)$ tels que le support de $\mathrm{nr}(\mathfrak{a})$ est contenu dans S. (On désigne par $\mathrm{nr} : D\to F$ la norme réduite.) Pour chaque $\mathfrak{a}\in\mathrm{Cl}(\mathscr{O}_D)$, on désigne par $\mathscr{O}_{D,\mathfrak{a}}$ l'ordre (maximal) à gauche de $\mathfrak{a}$. Il existe alors des surjections $\hat{\mathscr{O}}^\times_{D,\mathfrak{a}} \twoheadrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_F/\mathfrak{n})$ dont les images dans $\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_F/\mathfrak{n})$ sont conjuguées par lesquelles les $\hat{\mathscr{O}}^\times_{D,\mathfrak{a}}$ agissent de façon transitive et compatible sur $\mathbf{P}^1(\mathscr{O}_F/\mathfrak{n})$.

L'espace des formes automorphes algébriques de niveau $U_0(\mathfrak{n})$ et de poids V sur l'ordre $\mathscr{O}_{D,\mathfrak{a}}$ est défini par :

$$S^{D,\mathfrak{a}}(U_0(\mathfrak{n});V) \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ f:\ \mathbf{P}^1(\mathscr{O}_F/\mathfrak{n}) \to V \mid f|\gamma = f,\ \forall\,\gamma\in\mathscr{O}^\times_{D,\mathfrak{a}} \right\}.$$

Pour chaque $(\mathfrak{a},\,\mathfrak{b})\in\mathrm{Cl}(\mathscr{O}_D)^2$ et chaque premier $\mathfrak{p}$ dans $\mathscr{O}_F$, on pose :

$$\Theta^{(S)}(\mathfrak{p};\,\mathfrak{a},\,\mathfrak{b}) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathscr{O}^\times_{D,\mathfrak{a}}\backslash \left\{ u\in\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1} :\ \frac{(\mathrm{nr}(u))}{\mathrm{nr}(\mathfrak{a})\mathrm{nr}(\mathfrak{b})^{-1}} = \mathfrak{p} \right\},$$

où $\mathscr{O}^\times_{D,\mathfrak{a}}$ agit par multiplication à gauche. On définit l'application linéaire :

$$\begin{array}{rccl} T_{\mathfrak{a},\,\mathfrak{b}}(\mathfrak{p}) :\ S^{D,\mathfrak{b}}(U_0(\mathfrak{n});V) & \to & S^{D,\mathfrak{a}}(U_0(\mathfrak{n});V) & \\ f & \mapsto & \displaystyle\sum_{u\in\Theta^{(S)}(\mathfrak{p};\,\mathfrak{a},\,\mathfrak{b})} f|u. & \end{array}$$

Par [**17**], on sait alors qu'il y a un isomorphisme de modules de Hecke :

$$S^D(U_0(\mathfrak{n});V) \simeq \bigoplus_{\mathfrak{a}\in\mathrm{Cl}(\mathscr{O}_D)} S^{D,\mathfrak{a}}(U_0(\mathfrak{n});V),$$

où l'action de l'opérateur de Hecke $T(\mathfrak{p})$ à droite est donnée par la famille d'applications linéaires $(T_{\mathfrak{a},\,\mathfrak{b}}(\mathfrak{p}))$ avec $(\mathfrak{a},\,\mathfrak{b})$ parcourant $\mathrm{Cl}(\mathscr{O}_D)^2$. On désigne par $\mathbf{T}^D$ la $\overline{\mathbb{F}_p}$-sous-algèbre de $\mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}_p}}(S^D(U_0(\mathfrak{n});V))$ engendrée par les opérateurs $T(\mathfrak{p})$ pour tous les premiers $\mathfrak{p}$ n'appartenant pas à $\Sigma \cup \{\mathfrak{p} : \mathfrak{p} \mid \mathfrak{n}p\}$. La décomposition ci-dessus et une adaption de l'algorithme présenté dans [**17**] permettent de calculer plus facilement l'espace $S^D(U_0(\mathfrak{n}); V)$ et son algèbre de Hecke $\mathbf{T}^D$.

Pour calculer le premier espace, posons $G \stackrel{\text{déf}}{=} (\mathscr{O}_F/(p))^\times \times (\mathscr{O}_F/(p))^\times$ et définissons :

$$\mathscr{H}_1(p) \quad \stackrel{\text{déf}}{=} \quad \left\{(a,\, b) \in (\mathscr{O}_F/(p))^2 :\, ad + bc = 1 \,\text{avec}\, c,\, d \in \mathscr{O}_F/(p)\right\}.$$

On rappelle que $\mathscr{H}_1(p) \simeq \mathbf{P}^1(\mathscr{O}_F/(p)) \times (\mathscr{O}/(p))^\times$ et que $U_0(p)/U_1^1(p) \simeq G$. Le groupe $\hat{\mathscr{O}}_D^\times$ agit transitivement sur $\mathscr{H}_1(p) \times (\mathscr{O}_F/(p))^\times$ par :

$$\gamma \cdot (x, u) \stackrel{\text{déf}}{=} (\gamma_p x, \det(\gamma_p)u),$$

où γ_p est l'image de γ dans $\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_F/(p))$. Le stabilisateur de $((1, 0), 1)$ est $U_1^1(p)$. On en déduit les bijections :

$$\hat{\mathscr{O}}_D^\times/U(\mathfrak{n}, p) \simeq \mathbf{P}^1(\mathscr{O}_F/\mathfrak{n}p) \times U_0(p)/U_1^1(p) \simeq \mathbf{P}^1(\mathscr{O}_F/\mathfrak{n}p) \times G.$$

On définit alors l'espace des formes automorphes algébriques sur l'ordre $\mathscr{O}_{D,\mathfrak{a}}$ de niveau $U(\mathfrak{n}, p)$ par :

$$S^{D,\mathfrak{a}}(U(\mathfrak{n}, p); \overline{\mathbb{F}_p}) \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{f :\, \mathscr{O}_{D,\mathfrak{a}}^\times \backslash \mathbf{P}^1(\mathscr{O}_F/\mathfrak{n}p) \times G \to \overline{\mathbb{F}_p}\right\}.$$

Il est alors facile de voir que :

$$S^D(U(\mathfrak{n}, p); \overline{\mathbb{F}_p}) \simeq \bigoplus_{\mathfrak{a} \in \mathrm{Cl}(\mathscr{O}_D)} S^{D,\mathfrak{a}}(U(\mathfrak{n}, p); \overline{\mathbb{F}_p})$$

comme modules de Hecke lorsque l'on définit l'action de $T(\mathfrak{p})$ à droite comme précédemment.

Maintenant, on observe que le groupe G agit sur $\mathbf{P}^1(\mathscr{O}_F/\mathfrak{n}p) \times G$ par multiplication sur le second facteur. Cela induit une action sur $S^{D,\mathfrak{a}}(U(\mathfrak{n}, p); \overline{\mathbb{F}_p})$ que l'on peut donc décomposer suivant les caractères de G. Soit $\chi : G \to \overline{\mathbb{F}_p}^\times$ un tel caractère, c'est-à-dire un caractère de l'Iwahori en (p). (On rappelle que cela équivaut à se donner une paire de caractères η, $\eta' : (\mathscr{O}_F/(p))^\times \to \overline{\mathbb{F}_p}^\times$ dans le langage de l'article). On peut alors définir l'espace $S^{D,\mathfrak{a}}(U(\mathfrak{n}, p), \chi; \overline{\mathbb{F}_p})$ des formes automorphes algébriques sur l'ordre $\mathscr{O}_{D,\mathfrak{a}}$ de niveau $U(\mathfrak{n}, p)$ et de caractère de l'Iwahori χ en (p) comme étant l'ensemble des fonctions $f \in S^{D,\mathfrak{a}}(U(\mathfrak{n}, p); \overline{\mathbb{F}_p})$ telles que :

$$f(ux) = \chi(u)f(x), \text{ pour tout}\, x \in \mathbf{P}^1(\mathscr{O}_F/\mathfrak{n}) \times G \,\text{et}\, u \in G.$$

Ainsi, on obtient :

$$S^{D,\mathfrak{a}}(U(\mathfrak{n}, p); \overline{\mathbb{F}_p}) = \bigoplus_{\chi} S^{D,\mathfrak{a}}(U(\mathfrak{n}, p), \chi; \overline{\mathbb{F}_p}).$$

En définissant l'espace $S^D(U(\mathfrak{n}),\chi;\overline{\mathbb{F}_p})$ des formes automorphes algébriques sur $\hat{D}^\times$ de niveau $U(\mathfrak{n},p)$ et de caractère de l'Iwahori χ en (p) par :

$$S^D(U(\mathfrak{n},p),\chi;\overline{\mathbb{F}_p}) \stackrel{\text{déf}}{=} \bigoplus_{\mathfrak{a}\in \mathrm{Cl}(\mathscr{O}_D)} S^{D,\mathfrak{a}}(U(\mathfrak{n},p),\chi;\overline{\mathbb{F}_p}),$$

on obtient alors la décomposition :

$$S^D(U(\mathfrak{n},p);\overline{\mathbb{F}_p}) = \bigoplus_{\chi} S^D(U(\mathfrak{n},p),\chi;\overline{\mathbb{F}_p}).$$

Comme précédemment, cette décomposition permet de calculer plus facilement $S^D(U(\mathfrak{n},p);\overline{\mathbb{F}_p})$ et l'algèbre de Hecke $\mathbf{T}^D$ correspondante (définie comme ci-dessus).

B.6. Espaces des formes anciennes et des formes nouvelles. — Pour vérifier la Conjecture B.1, nous avons besoin de calculer les espaces de formes nouvelles. Dans ce paragraphe, nous expliquons comment cela est effectué.

Soit $\mathfrak{q} \mid \mathfrak{n}$ un idéal premier, et posons $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}\mathfrak{q}^{-1}$. Par le théorème de l'approximation faible, on choisit $u \in F$ tel que $v_\mathfrak{q}(u) = -1$ et $v_\mathfrak{p}(u) = 0$ pour $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{n}$ et $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$. Pour définir les applications de dégénérescence en $\mathfrak{q}$, l'on a besoin d'une traduction en termes globaux de leur description adélique (donnée par exemple dans [**41**]). Pour cela, rappelons que :

$$\begin{aligned} X_0^D(\mathfrak{n}) &= D^\times\backslash\hat{D}^\times/U_0(\mathfrak{n}) \simeq \coprod_{\mathfrak{a}\in\mathrm{Cl}(\mathscr{O}_D)} \mathscr{O}_{D,\mathfrak{a}}^\times\backslash\mathbf{P}^1(\mathscr{O}_F/\mathfrak{n}) \\ X_0^D(\mathfrak{m}) &= D^\times\backslash\hat{D}^\times/U_0(\mathfrak{m}) \simeq \coprod_{\mathfrak{a}\in\mathrm{Cl}(\mathscr{O}_D)} \mathscr{O}_{D,\mathfrak{a}}^\times\backslash\mathbf{P}^1(\mathscr{O}_F/\mathfrak{m}). \end{aligned}$$

La surjection naturelle $\pi_1 : \mathbf{P}^1(\mathscr{O}_F/\mathfrak{n}) \to \mathbf{P}^1(\mathscr{O}_F/\mathfrak{m})$ induit de façon évidente une application :

$$\begin{aligned} X_0^D(\mathfrak{n}) &\to X_0^D(\mathfrak{m}) \\ x &\mapsto \pi_1(x). \end{aligned}$$

La première application de dégénérescence est tout simplement le « pullback » par π_1 :

$$\alpha_1(\mathfrak{q}) : S^D(U_0(\mathfrak{m});V) \to S^D(U_0(\mathfrak{n});V).$$

Pour définir la seconde, soient $x \in \mathscr{O}_{D,\mathfrak{a}}^\times\backslash\mathbf{P}^1(\mathscr{O}_F/\mathfrak{n})$, et $(a,b) \in (\mathscr{O}_F/\mathfrak{n})^2$ un représentant de x. Une interprétation de la définition adélique de la seconde application de dégénérescence en termes globaux implique qu'il existe un unique $\mathfrak{b} \in \mathrm{Cl}(\mathscr{O}_D)$ et un unique $\gamma \in \Theta^{(S)}(\mathfrak{p};\, \mathfrak{b},\, \mathfrak{a})$ tels qu'en posant $(c,d) = \gamma\cdot(a,b)$ on a $\min\{v_\mathfrak{q}(c), v_\mathfrak{q}(d)\} = 1$. On désigne alors par y la classe de (cu,du) dans $\mathscr{O}_{D,\mathfrak{b}}^\times\backslash\mathbf{P}^1(\mathscr{O}_F/\mathfrak{m})$. Cela donne une autre application :

$$\begin{aligned} \pi_2 : X_0^D(\mathfrak{n}) &\to X_0^D(\mathfrak{m}) \\ x &\mapsto y. \end{aligned}$$

La seconde application de dégénérescence est le « pullback » par π_2 :

$$\alpha_2(\mathfrak{q}) : S^D(U_0(\mathfrak{m}); V) \to S^D(U_0(\mathfrak{n}); V).$$

La combinaison de ces deux applications donne :

$$\begin{array}{rcl} \iota_{\mathfrak{q}} : S^D(U_0(\mathfrak{m}); V)^2 & \to & S^D(U_0(\mathfrak{n}); V) \\ (f_1,\, f_2) & \mapsto & \alpha_1(\mathfrak{q})f_1 + \alpha_2(\mathfrak{q})f_2. \end{array}$$

On définit alors l'espace des formes anciennes par :

$$S^D(U_0(\mathfrak{n}); V)^{\mathfrak{n}\text{-old}} \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{\mathfrak{q}|\mathfrak{n}} \mathrm{im}(\iota_{\mathfrak{q}}).$$

Pour des raisons pratiques, et comme nous ne disposons pas d'un produit scalaire en général, nous travaillons plutôt avec le dual de $S^D(U_0(\mathfrak{n}); V)$ pour le calcul de l'espace des formes nouvelles. Soit :

$$S^D(U_0(\mathfrak{n}); V)^{\perp} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{F}_p}}(S^D(U_0(\mathfrak{n}); V), \overline{\mathbb{F}_p}),$$

muni de l'action naturelle à droite de $\mathbf{T}^D$ définie par :

$$(\varphi T)(f) \stackrel{\text{déf}}{=} \varphi(f|T),\ \varphi \in S^D(U_0(\mathfrak{n}); V)^{\perp},\ f \in S^D(U_0(\mathfrak{n}); V).$$

L'accouplement naturel :

$$\langle , \rangle : S^D(U_0(\mathfrak{n}); V)^{\perp} \times S^D(U_0(\mathfrak{n}); V) \to \overline{\mathbb{F}_p}$$

défini par $(\varphi, f) = \varphi(f)$ satisfait alors à l'identité $\langle \varphi T, f\rangle = \langle \varphi, f|T\rangle$. En se rappelant que $\mathbf{T}^D \subset \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}_p}}(S^D(U_0(\mathfrak{n}); V))$, l'application tranposée $T \mapsto T^t$ nous permet alors de voir $S^D(U_0(\mathfrak{n}); V)^{\perp}$ comme un $\mathbf{T}^D$-module à gauche. On obtient ainsi la transposée :

$$\iota_{\mathfrak{q}}^t : S^D(U_0(\mathfrak{n}); V)^{\perp} \to S^D(U_0(\mathfrak{m}); V)^{\perp\, 2},$$

qui nous permet de définir :

$$S^D(U_0(\mathfrak{n}); V)^{\perp, \mathfrak{n}\text{-new}} \stackrel{\text{déf}}{=} \bigcap_{\mathfrak{q}|\mathfrak{n}} \ker(\iota_{\mathfrak{q}}^t).$$

Comme nous nous intéressons seulement à la partie semi-simple de $\mathbf{T}^D$, le résultat suivant de Stein [**40**, Proposition 3.14] est encore valable.

Proposition B.6. — *Soit $M \subset S^D(U_0(\mathfrak{n}); V)^{\mathfrak{n}\text{-new}}$ un sous-$\mathbf{T}^D$-module irréductible et $I = \mathrm{Ann}_{\mathbf{T}^D}(M)$. Alors, pour chaque $\mathfrak{p}$, le polynôme caractéristique de $T(\mathfrak{p})$ agissant sur $S^D(U_0(\mathfrak{n}); V)^{\perp}[I]$ est le même que celui de $T(\mathfrak{p})$ agissant sur M.*

Cette proposition nous permet de ramener le calcul de l'action de Hecke sur $S^D(U_0(\mathfrak{n}); V)^{\mathfrak{n}\text{-new}}$ à celle sur son dual, ce qui est plus facile en pratique. On calcule $S^D(U(\mathfrak{n}, p); V)^{\mathfrak{n}\text{-new}}$ de façon similaire.

Références

[1] Barnet-Lamb T., Gee T., Geraghty D., *Congruences betwen Hilbert modular forms : constructing ordinary lifts*, prépublication 2010.

[2] Barnet-Lamb T., Gee T., Geraghty D., *Congruences betwen Hilbert modular forms : constructing ordinary lifts II*, prépublication 2012.

[3] Barnet-Lamb T., Gee T., Geraghty D., *Serre weights for rank two unitary groups*, prépublication 2011.

[4] Breuil C., *Groupes p-divisibles, groupes finis et modules filtrés*, Ann. Math. 152, 2000, 489-549.

[5] Breuil C., *Une application du corps des normes*, Comp. Math. 117, 1999, 189-203.

[6] Breuil C., *Integral p-adic Hodge theory*, Advances Studies in Pure Math. 36, 2002, 51-80.

[7] Breuil C., *Diagrammes de Diamond et* (φ, Γ)*-modules*, Israel J. Math. 182, 2011, 349-382.

[8] Breuil C., Diamond F., *Formes modulaires de Hilbert modulo p et valeurs d'extensions galoisiennes*, en préparation.

[9] Breuil C., Mézard A. (avec un appendice par Henniart G.), *Multiplicités modulaires et représentations de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ *et de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ *en* $\ell = p$, Duke Math. J. 115, 2002, 205-310.

[10] Breuil C., Mézard A., *Multiplicités modulaires raffinées*, prépublication 2011.

[11] Breuil C., Paškūnas V., *Towards a modulo p Langlands correspondence for* GL_2, Memoirs Amer. Math. Soc. 216, 2012.

[12] Buzzard K., Diamond F., Jarvis F., *On Serre's conjecture for mod* ℓ *Galois representations over totally real fields*, Duke Math. J. 155, 2010, 105-161.

[13] Chang S., *Extensions of rank one* (φ, Γ)*-modules*, thèse univ. Brandeis, 2006.

[14] Chang S., Diamond F., *Extensions of rank one* (φ, Γ)*-modules and crystalline representations*, Comp. Math. 147, 2011, 375-427.

[15] Cheng C., *Multiplicities of Galois representations in cohomology groups of Shimura curves*, prépublication 2010.

[16] Colmez P., *Représentations de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *et* (φ, Γ)*-modules*, Astérisque 330, 2010, 281-509.

[17] Dembélé L., Donnelly S., *Computing Hilbert modular forms over fields with non-trivial class group*, Algorithmic Number Theory 5011, 2008, 371-386.

[18] Dembélé L., Diamond F., Roberts D., *Numerical evidences and examples for the Serre conjecture over totally real number fields*, en préparation.

[19] Diamond F., *The Taylor-Wiles construction and multiplicity one*, Inv. Math. 128, 1997, 379-391.

[20] Diamond F., *A correspondence between representations of local Galois groups and Lie-type groups*, London Math. Soc. Lecture Notes 320, 2007, 187-206.

[21] Emerton M., *Local-global compatibility in the p-adic Langlands programme for* $\mathrm{GL}_{2/\mathbb{Q}}$, prépublication 2011.

[22] Fontaine J.-M., Laffaille G., *Construction de représentations p-adiques*, Ann. Scient. E.N.S. 15, 1982, 547-608.

[23] Fujiwara K., *Deformation rings and Hecke algebras in the totally real case*, prépublication.

[24] Gee T., *On the weights of mod p Hilbert modular forms*, à paraître à Inv. Math.

[25] Gee T., Savitt D., *Serre weights for mod p Hilbert modular forms : the totally ramified case*, J. Reine Angew. Math. 660, 2011, 126.

[26] Gee T., Liu T., Savitt D., *The Buzzard-Diamond-Jarvis conjecture for unitary groups*, prépublication 2012.

[27] Hu Y., *Sur quelques représentations supersingulières de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_{p^f})$, J. Algebra 324, 2010, 1577-1615.

[28] Kisin M., *Deformations of* $G_{\mathbb{Q}_p}$ *and* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *representations*, Astérisque 330, 2010, 513-529.

[29] Liu T., *Lattices in filtered* (φ, N)*-modules*, à paraître à J. Inst. Math. Jussieu.

[30] Raynaud M., *Schémas en groupes de type* $(p, \cdots, p)$, Bull. Soc. Math. de France 102, 1974, 241-280.

[31] Saito T., *Hilbert modular forms and p-adic Hodge theory*, Comp. Math. 145, 2009, 1081-1113.

[32] Savitt D., *On a conjecture of Conrad, Diamond, and Taylor*, Duke Math. J. 128, 2005, 141-197.

[33] Savitt D., *Breuil modules for Raynaud schemes*, J. Number Theory 128, 2008, 2939-2950.

[34] Schein M., *Weights of Galois representations associated to Hilbert modular forms*, J. Reine Angew. Math. 622, 2008, 57-94.

[35] Schein M., *Weights in Serre's conjecture for Hilbert modular forms : the ramified case*, Israel J. Math. 166, 2008, 369-391.

[36] Schraen B., *Sur la présentation des représentations supersingulières de* $\mathrm{GL}_2(F)$, prépublication 2012.

[37] Serre J.-P., *Représentations linéaires des groupes finis*, cinquième édition, Hermann, 1998.

[38] Serre J.-P., *Sur les représentations modulaires de degré* 2 *de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, Duke Math. J. 54, 1987, 179-230.

[39] Shepherd-Barron N., Taylor R., *Mod* 2 *and mod* 5 *icosahedral representations*, J. Amer. Math. Soc. 10, 1997, 283-298.

[40] Stein W., *Explicit approaches to modular abelian varieties*, thèse univ. Berkeley, 2000, disponible à l'adresse http ://modular.math.washington.edu/papers/thesis.

[41] Taylor R., *On Galois representations associated to Hilbert modular forms*, Inv. Math. 98, 1989, 265-280.

C. Breuil, C.N.R.S. et Université Paris-Sud, Bâtiment 425, Université Paris-Sud, 91405 Orsay, France • *E-mail :* `christophe.breuil@math.u-psud.fr`

L. Dembélé, Warwick Mathematics Institute, University of Warwick, Coventry CV4 7AL, United Kingdom • *E-mail :* `l.dembele@warwick.ac.uk`