COHOMOLOGIE ÉTALE DE p-TORSION ET COHOMOLOGIE CRISTALLINE EN RÉDUCTION SEMI-STABLE

Christophe Breuil
Mathématiques, Bât. 425
U.R.A. 752 du C.N.R.S.
Université Paris-Sud
F-91405 ORSAY cedex
(France)
E-mail: breuil@math.u-psud.fr

Sommaire

1 Introduction **2**

2 La cohomologie log-cristalline **5**

2.1 Préliminaires 6
2.1.1 Définition et calcul sur le site log-syntomique 6
2.1.2 Platitude des faisceaux $\mathcal{O}_n^{st}$ et $\mathcal{J}_n^{[r]}$ 8
2.2 La cohomologie log-cristalline en caractéristique p des log-schémas propres, log-lisses et du type de Cartier 11
2.2.1 Quelques préliminaires 12
2.2.2 Des isomorphismes "à la Fontaine-Messing-Deligne-Illusie-Kato" sur le site log-syntomique 14
2.2.3 Projection sur le site étale 20
2.2.4 Réduction sur la base $\tilde{E}_1$ 22
2.2.5 Quelques lemmes 26
2.2.6 Etude sur la base $\tilde{\tilde{E}}_1$ 28
2.2.7 Remarque sur le H^{p-1} 32
2.3 La cohomologie log-cristalline de torsion des log-schémas propres, log-lisses et du type de Cartier 33
2.3.1 Deux lemmes d'algèbre (semi-)linéaire 33
2.3.2 Dévissages 34

3 La cohomologie étale de p-torsion **36**

3.1 Trois suites exactes courtes de faisceaux 37
3.1.1 Problèmes de limite inductive 37
3.1.2 Une suite exacte courte "de Künneth" 40
3.1.3 Le noyau de la monodromie 44
3.1.4 Le noyau de $\phi_r - Id$ 45
3.2 Application aux groupes de cohomologie 47
3.2.1 Préliminaires d'algèbre linéaire 47

3.2.2 Calcul de $\varinjlim_L H^i((X_{n,L})_{syn}, \mathcal{J}_n^{[r]})$ . . . 53
3.2.3 Calcul de $\varinjlim_L H^i((X_{n,L})_{syn}, \mathcal{J}_n^{cris,[r]})$, $0 \leq i \leq r \leq p-2$ . . . 54
3.2.4 Calcul de $\varinjlim_L H^i((X_{n+r,L})_{syn}, \mathcal{S}_n^r)$, $0 \leq i \leq r \leq p-2$: un théorème de comparaison . . . 58
3.2.5 Une conjecture de Serre . . . 60

4 Les théorèmes de comparaison sur les cohomologies entières 61
4.1 Cohomologie log-cristalline entière . . . 62
4.2 Cohomologie étale entière . . . 64
4.3 Isomorphisme de Hyodo-Kato et cohomologies rationnelles . . . 66
4.3.1 Préliminaires . . . 66
4.3.2 Le théorème de comparaison de Hyodo-Kato-Tsuji . . . 69
4.4 Le cas des H^i, $i = 0, 1$ . . . 72

A Les catégories abéliennes de Fontaine-Laffaille semi-stable 75
A.1 Les catégories . . . 75
A.2 Les objets tués par p . . . 76

B Sur les faisceaux $\mathcal{O}_1^{car,\Xi}$: preuve du théorème (2.2.1.2) 77
B.1 Site p-infinitésimal . . . 78
B.2 Lemmes préliminaires . . . 79
B.3 Les preuves . . . 82

C Quelques compatibilités 86
C.1 Compatibilité des ϕ_r, $0 \leq r \leq p-1$ . . . 87
C.2 Sur les complexes $s_{n,X}^{log}(r)$ et $s_{n,\bar{X}}^{log}(r)$ . . . 90
C.2.1 Preuve de la proposition (3.2.4.2) . . . 90
C.2.2 Preuve du lemme (3.2.4.3) . . . 91

D Un calcul de limite inductive 91

1 Introduction

Soit K un corps p-adique (par exemple une extension finie de $\mathbf{Q}_p$) et X_K un schéma propre et lisse sur *Spec* K. Deux invariants cohomologiques p-adiques sont associés à X_K: la cohomologie étale p-adique $H^*_{ét}(X_{\bar{K}}, \mathbf{Q}_p)$ et la cohomologie de de Rham $H^*_{dR}(X_K)$ ($\bar{K}$ est une clôture algébrique de K). Pressentis par Grothendieck, initiés par Tate et Raynaud, conjecturés par Fontaine et démontrés par Fontaine-Messing ([FM]), Faltings ([Fa1]), Kato ([Ka1], [Ka3]) et Tsuji ([Ts2]), des théorèmes dits "de comparaison", utilisant les anneaux de Fontaine: B_{cris}, B_{st} et B_{dR}, décrivent les relations "mystérieuses" entre ces deux invariants.

Par définition, $H^*_{\acute{e}t}(X_{\bar{K}}, \mathbf{Q}_p) = \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \varprojlim H^*((X_{\bar{K}})_{\acute{e}t}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$: dans cet article, on s'intéresse à la cohomologie étale de p-torsion $H^*((X_{\bar{K}})_{\acute{e}t}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$ lorsque K est le corps des fractions d'un anneau de vecteurs de Witt W à coefficients dans un corps parfait de caractéristique $p > 0$ (par exemple $K = \mathbf{Q}_p$ et $W = \mathbf{Z}_p$). Si X_K a bonne réduction, i.e. admet un modèle propre et lisse X sur $Spec\, W$, Fontaine et Messing signalent, à la fin de leur article ([FM]), qu'en utilisant d'une part la théorie de construction de représentations cristallines de Fontaine-Laffaille ([FL]) et d'autre part le calcul des cycles évanescents (ou plutôt proches) p-adiques de Kato ([Ka1]), leurs résultats permettent de montrer un théorème de comparaison "en torsion" entre $H^i((X_{\bar{K}})_{\acute{e}t}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$ et $H^i_{dR}(X/p^n)$ pourvu qu'on se restreigne aux $i \in \{0, ..., p-2\}$. Plus précisément, dans [FL], Fontaine et Laffaille construisent des catégories abéliennes $\underline{MF}^{f,i}_{tor}$ de W-modules filtrés de longueur finie avec Frobenius ($0 \leq i \leq p-2$) et un foncteur exact et pleinement fidèle V_{cris} de $\underline{MF}^{f,i}_{tor}$ dans la catégorie $\underline{Rep}^f_{\mathbf{Z}_p}(Gal(\bar{K}/K))$ des $\mathbf{Z}_p$-modules de longueur finie munis d'une action linéaire de $Gal(\bar{K}/K)$. Fontaine et Messing démontrent (entre autres):

Théorème 1.1 *([FM],II.2.7) Soit X un modèle propre et lisse de X_K sur $Spec\, W$, pour $i \in \{0, ..., p-2\}$, $H^i_{dR}(X/p^n)$ peut être muni d'une structure canonique d'objet de $\underline{MF}^{f,i}_{tor}$.*

et signalent qu'une conséquence de leur travail et du calcul de Kato ([Ka1],I.4.3) est le théorème:

Théorème 1.2 *([FM]) Avec les hypothèses de (1.1), pour $i \in \{0, ..., p-2\}$, on a des isomorphismes canoniques de modules galoisiens: $V_{cris}(H^i_{dR}(X/p^n)) \simeq H^i((X_{\bar{K}})_{\acute{e}t}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\wedge$ où $V^\wedge = Hom_{\mathbf{Z}_p}(V, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p)$ si V est un $\mathbf{Z}_p$-module.*

qui a comme corollaire, par passage à la limite projective, que $H^i_{\acute{e}t}(X_{\bar{K}_0}, \mathbf{Q}_p)$ est cristalline pour $i \in \{0, ..., p-2\}$. Dans ce travail, nous généralisons les théorèmes précédents au cas où X_K a réduction *semi-stable* sur W. La démonstration repose sur la généralisation de la théorie de Fontaine-Laffaille développée dans [Br3], le calcul sur le site log-syntomique initié dans [Br1], une bonne généralisation de l'isomorphisme de Deligne-Illusie et le calcul, dû à Kato, Hyodo et Tsuji ([Ka3], [Hy], [Ts1]), des cycles évanescents p-adiques dans le cas de réduction semi-stable.

Soit u une indéterminée et $W < u >$ l'algèbre des polynômes à puissances divisées en u à coefficients dans W, on construit dans [Br3], après avoir fait le choix d'une uniformisante sur W (par exemple p) et pour $0 \leq i \leq p-2$, des catégories abéliennes $\underline{\mathcal{M}}^i$ de $W\!<\!u\!>$-modules filtrés de p-torsion munis d'un Frobenius et d'une dérivation W-linéaire ainsi qu'un foncteur exact et pleinement fidèle V_{st} de $\underline{\mathcal{M}}^i$ dans $\underline{Rep}^f_{\mathbf{Z}_p}(Gal(\bar{K}/K))$. Les catégories $\underline{MF}^{f,i}_{tor}$ sont des sous-catégories pleines des $\underline{\mathcal{M}}^i$ et V_{st} "prolonge" V_{cris}. En munissant X de la log-structure définie par sa fibre spéciale et $W\!<\!u\!>$ de la log-structure associée au monoïde $u^{\mathbf{N}}$, on peut considérer la *cohomologie log-cristalline* du log-schéma X/p^n sur la base $W\!<\!u\!>/p^n$, notons la pour cette introduction $H^i_{st}(X/p^n)$. Dans le cas où X est lisse (au sens classique), on a $H^i_{st}(X/p^n) = W\!<\!u\!> \otimes_W H^i_{dR}(X/p^n)$ avec les structures "produit tensoriel". Grâce à une généralisation convenable de l'isomorphisme de Deligne-Illusie, nous montrons dans la première partie (section 2):

Théorème 1.3 *(2.3.2.1) Soit X un modèle propre et semi-stable de X_K sur Spec W muni de sa log-structure canonique, pour $i \in \{0, ..., p-2\}$, $H^i_{st}(X/p^n)$ peut être muni d'une structure canonique d'objet de $\underline{\mathcal{M}}^i$.*

En fait, nous montrons ce résultat plus généralement lorsque le log-schéma X est propre, log-lisse et de fibre spéciale du type de Cartier, ce qui a des applications au cas ouvert par des résultats encore non publiés de Tsuji (c.f. (3.2.4.7) et (4.2.5)).

En utilisant le calcul des cycles proches p-adiques en réduction semi-stable ([Ka3],5.4), nous montrons alors dans la deuxième partie (section 3):

Théorème 1.4 *(3.2.4.5) Avec les hypothèses de (1.3), pour $i \in \{0, ..., p-2\}$, on a des isomorphismes canoniques de modules galoisiens: $V_{st}(H^i_{st}(X/p^n)) \simeq H^i((X_{\bar{K}})_{ét}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^{\wedge}$.*

Dans [Ts3] (non publié), Tsuji, généralisant des résultats de Faltings ([Fa2]), montre que le complexe calculant, dans la catégorie dérivée, les $H^i((X_{\bar{K}})_{ét}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$ peut s'obtenir à partir du complexe calculant, dans la catégorie dérivée, les $H^i_{st}(X/p^n)$, mais c'est un résultat sur les complexes dans la catégorie dérivée seulement (l'analogue du foncteur V_{st} est défini au niveau des catégories de complexes). Tout le problème est donc de savoir ce qui se passe vraiment sur les groupes de cohomologie, ce que nous montrons ici. Le point clef dans la preuve du théorème (1.4) est d'avoir à sa disposition des catégories *abéliennes* (les $\underline{\mathcal{M}}^i$) suffisamment "grosses" qui, de plus, ont les *mêmes* objets simples que les catégories $\underline{MF}^{f,i}_{tor}$. Les calculs marchent bien avec $\underline{MF}^{f,i}_{tor}$, et par dévissage, on les étend à $\underline{\mathcal{M}}^i$. Le théorème (1.4) permet de répondre, dans le cas de réduction semi-stable, à une question de Serre sur les poids de l'inertie modérée (3.2.5.1).

Enfin, par un passage à la limite projective, nous en déduisons dans une troisième partie (section 4) des théorèmes de comparaison "entiers", c'est-à-dire faisant intervenir $H^i_{ét}(X_{\bar{K}}, \mathbf{Z}_p) = \varprojlim H^i((X_{\bar{K}})_{ét}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$, $i \in \{0, ..., p-2\}$ et obtenons, au passage, des résultats sur les facteurs invariants de $H^i_{ét}(X_{\bar{K}}, \mathbf{Z}_p)$

(4.3.1.5). Puis nous retrouvons le théorème de comparaison de Kato-Tsuji tel que conjecturé par Fontaine-Jannsen (dans le cas non ramifié et pour $i \in \{0, ..., p-2\}$) en montrant une compatibilité entre l'isomorphisme de Hyodo-Kato et l'équivalence de catégories de [Br2]. Nous achevons par l'étude des cas particuliers H^0 et H^1.

Quatre appendices concluent l'article: le premier donne quelques rappels sur les résultats de [Br3], le deuxième inclut les démonstrations nécessaires à l'étude log-syntomique de la condition "du type de Cartier", le troisième contient quelques vérifications de compatibilité entre les points de vue étale de Kato-Tsuji et log-syntomique de Fontaine-Messing et l'auteur et le quatrième donne un calcul technique, mais important, de limite inductive.

Les preuves sont souvent données en détail, ce qui excuse peut-être la longueur de ce travail.

Les notations adoptées sont les suivantes: k est un corps parfait de caractéristique $p > 0$, W_n l'anneau des vecteurs de Witt de longueur n à coefficients dans k, $W = \varprojlim W_n$, $K_0 = Frac(W)$, $\bar{K_0}$ est une clôture algébrique de K_0, $\mathcal{O}_{\bar{K_0}}$ l'anneau des entiers de $\bar{K_0}$ et G le groupe de Galois $Gal(\bar{K_0}/K_0)$. On renvoie à [Ka2] pour la théorie des log-schémas. Dans cet article, log-schéma signifie log-schéma intègre et on note $\dot{X}$ le schéma sous-jacent au log-schéma X. Si $\dot{X} = Spec\ A$ et si la log-structure est associée à une carte $P \to A^{\times}$ où P est un monoïde intègre commutatif et $A^{\times}$ le monoïde multiplicatif A, on note aussi $X = (Spec\ A, P)$ et simplement $Spec\ A$ si la log-structure est triviale. On appelle parfois log-schéma affine un log-schéma de la forme $(Spec\ A, P)$. Enfin, lorsqu'il faut faire le choix d'une uniformisante sur W, on choisit p et on note $(Spec\ W_n, \mathcal{L}(p))$ (resp. $(Spec\ W_n, \mathcal{L}(0))$, $(Spec\ k, L)$) le log-schéma associé à $(\mathbf{N} \to W_n^{\times},\ 1 \mapsto p)$ (resp. $(\mathbf{N} \to W_n^{\times},\ 1 \mapsto 0)$, $(\mathbf{N} \to k^{\times},\ 1 \mapsto 0)$).

Je remercie J.-M. Fontaine pour ses explications sur la théorie classique, L. Illusie pour ses questions motivantes et T. Tsuji pour diverses remarques et suggestions d'amélioration. Ce travail a fait l'objet d'une série d'exposés donnés à l'IHP en mai-juin 1997 (cours Peccot du Collège de France) et je remercie les auditeurs, notamment O. Gabber et W. Messing, pour leurs présence, questions et remarques. Enfin, je remercie chaleureusement Bill Messing pour ses exposés à l'IHP au printemps 1997 et pour nos nombreuses discussions qui m'ont permis d'éclaircir mes idées sur les "théories" syntomique et log-syntomique.

2 La cohomologie log-cristalline

Grâce à la cohomologie log-cristalline, on construit des objets de $\underline{\mathcal{M}}^r$ (voir Appendice A) d'origine "géométrique".

2.1 Préliminaires

On rappelle le calcul log-syntomique de la cohomologie log-cristalline et la définition des faisceaux $\mathcal{O}_n^{st}$ et $\mathcal{J}_n^{[r]}$ puis on démontre des propriétés de platitude de ces faisceaux.

2.1.1 Définition et calcul sur le site log-syntomique

Si T est un log-schéma fin tel que $\mathcal{O}_{\dot{T}}$ est tué par un entier non nul et muni d'un idéal à puissances divisées et si X est un log-schéma fin sur T tel que les puissances divisées s'étendent à X, on note $(X/T)_{cris}$ le petit site cristallin fin défini dans ([Ka2],5) et $(X/T)_{CRIS}$ le gros site cristallin fin défini dans ([Br1],3). Pour tout log-schéma fin X, on note $(X)_{ét}$ le site formé des log-schémas sur X dont le schéma sous-jacent est étale sur $\dot{X}$ et muni de la log-structure induite par celle de X (en fait $(X)_{ét} = (\dot{X})_{ét}$) et $(X)_{ET}$ la catégorie des log-schémas fins localement de type fini sur X munie de cette topologie étale. On note $\mathcal{O}_X$ le faisceau structural sur $(X)_{ét}$ et $(X)_{ET}$. On définit $S_n = W_n < u >$ (resp. S) l'enveloppe aux puissances divisées de l'algèbre des polynômes sur W_n en l'indéterminée u, $W_n[u]$, par rapport à l'idéal engendré par u (resp. son complété pour la topologie p-adique) et on écrit $\gamma_i(u) = \frac{u^i}{i!}$. L'algèbre S_n est aussi l'enveloppe aux puissances divisées de $W_n[u]$ par rapport au noyau de l'immersion fermée $W_n[u] \to k,\ u \mapsto 0$, compatible avec les puissances divisées canoniques sur $pW_n[u]$. On munit S_n de la log-structure associée à $\mathbf{N} \to S_n,\ 1 \mapsto u$ et on note $E_n = (Spec\ S_n, \mathbf{N})$. Si X est un log-schéma fin sur E_n , on peut considérer le site (log-)cristallin $(X/E_n)_{cris}$ (resp. $(X/E_n)_{CRIS}$), son faisceau structural $\mathcal{O}_{X/E_n}$ et les faisceaux d'idéaux $\mathcal{J}_{X/E_n}^{[r]}$ ($r \in \mathbf{N}^*$) où $\mathcal{J}_{X/E_n}\Big((U \hookrightarrow T, \delta)\Big) = Ker(\mathcal{O}_T \to \mathcal{O}_U)$. Ce sont des faisceaux à composantes quasi-cohérentes sur $(X/E_n)_{cris}$ (resp. $(X/E_n)_{CRIS}$), c'est-à-dire que leur restriction à chaque $(U \hookrightarrow T, \delta)$ est quasi-cohérente sur T. Le choix de l'uniformisante p sur W permet de définir une immersion fermée exacte $(Spec\, W_n, \mathcal{L}(p)) \hookrightarrow E_n$ en envoyant u sur p et tout log-schéma sur $(Spec\, W_n, \mathcal{L}(p))$ peut être ainsi vu sur E_n.

Soit X un log-schéma fin sur E_n, on peut considérer les groupes de cohomologie $H^i((X/E_n)_{cris}, \mathcal{O}_{X/E_n})$ et $H^i((X/E_n)_{cris}, \mathcal{J}_{X/E_n}^{[r]})$: ce sont des S_n-modules. On munit S_n d'un opérateur de Frobenius ϕ, semi-linéaire par rapport au Frobenius sur W_n, défini par $\phi(\gamma_i(u)) = \gamma_i(u^p)$ et on note F_{E_n} le Frobenius qu'on en déduit sur E_n:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & S_n & & E_n \\ {\scriptstyle p}\uparrow & & \uparrow {\scriptstyle \phi} & = & \downarrow {\scriptstyle F_{E_n}} \\ \mathbf{N} & \longrightarrow & S_n & & E_n \end{array}$$

Tout log-schéma sur $\mathbf{F}_p$ est muni d'un Frobenius canonique qui est le Frobenius classique sur le schéma sous-jacent et l'élévation à la puissance p sur le faisceau de monoïdes (en notation multiplicative). Si X_1 désigne la réduction modulo p d'un log-schéma fin X sur E_n, on a comme dans le cas classique $H^i((X_1/E_n)_{cris}, \mathcal{O}_{X_1/E_n}) = H^i((X/E_n)_{cris}, \mathcal{O}_{X/E_n})$, de sorte que les groupes $H^i((X/E_n)_{cris}, \mathcal{O}_{X/E_n})$ sont munis d'un opérateur de Frobenius encore noté ϕ. Pour calculer ces groupes, on utilise la topologie log-syntomique:

Définition 2.1.1.1 *([Ka3],2.5) Un morphisme de log-schémas fins $f : Y \to X$ est dit log-syntomique s'il est intègre, si $\dot{f} : \dot{Y} \to \dot{X}$ est localement de présentation finie et si f peut s'écrire étale localement comme la composée d'un morphisme log-lisse avec une immersion fermée exacte dont l'idéal est engendré en chaque point par une suite transversalement régulière relativement à $\dot{X}$.*

En particulier, les morphismes des schémas sous-jacents sont plats. On peut donner une autre description (locale) plus explicite des morphismes log-syntomiques: soit une carte locale du morphisme f dans la définition précédente:

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ Q & \rightarrow & B \end{array}$$

où $Spec\ A$ et $Spec\ B$ sont des ouverts étales respectivement sur $\dot{X}$ et $\dot{Y}$ et où le morphisme $P \to Q$ est intègre , on peut toujours écrire Q sous la forme $Q = \dfrac{P \oplus \mathbf{N}^r}{G}$ pour un certain entier r et un certain sous-groupe G de $P^{gp} \oplus \mathbf{Z}^r$ (rappelons que si P est un monoïde intègre et G un sous-groupe de P^{gp}, P/G désigne le monoïde intègre P quotienté par la relation d'équivalence $x \sim y \Leftrightarrow xy^{-1} \in G$) et B sous la forme $B = \Big(A \otimes_{\mathbf{Z}[P]} \mathbf{Z}[(P \oplus \mathbf{N}^r)G][X_1, ..., X_s]\Big)/I$ pour un certain entier s et un certain idéal I contenant les $[g]-1$, $g \in G$. Par ([Ka3],2.5.1), quitte à prendre un recouvrement étale de $Spec\ B$, on peut alors supposer que I est engendré par une suite transversalement régulière relativement à A. C'est cette description des morphismes log-syntomiques que nous utiliserons pour les calculs locaux tout au long de cet article. Dans [Br1], l'auteur a introduit une autre notion de morphismes log-syntomiques qui correspond en fait à des choix de G et de I d'un type particulier (dans la description précédente): les morphismes log-syntomiques au sens de [Br1] sont donc log-syntomiques au sens ci-dessus (et l'auteur est désolé de ne pas avoir vu ce fait plus tôt).

Proposition 2.1.1.2 *(1) (changement de base) Si f: $Y \to X$ est un morphisme log-syntomique, il en est de même de $f_{X'}$: $Y \times_X X'$ pour tout morphisme $X' \to X$ de log-schémas fins*
(2) (composition) le composé de deux morphismes log-syntomiques est un morphisme log-syntomique
(3) (relèvement local) si $Y \hookrightarrow X$ est une immersion fermée exacte définie par un nil-idéal, on peut (étale-)localement relever les morphismes log-syntomiques sur Y en morphismes log-syntomiques sur X.

Pour une preuve très détaillée de cette proposition, voir [Br1] (les morphismes considérés dans [Br1] sont donc plus restrictifs, mais les démonstrations s'adaptent facilement). En particulier, si le nil-idéal de l'immersion fermée en (3) est muni d'une structure de puissances divisées, il en est de même du nil-idéal du relevé local.

Soit X un log-schéma fin localement de type fini sur E_n, on note $(X)_{SYN}$ le gros site log-syntomique, c'est-à-dire la catégorie des log-schémas fins localement de type fini sur X munie de la topologie log-syntomique (un morphisme log-syntomique étant un recouvrement lorsqu'il l'est sur les espaces topologiques sous-jacents) et $(X)_{syn}$ le petit site log-syntomique. Tous les résultats de [Br1] obtenus avec le site log-syntomique au sens de [Br1] sont évidemment valables avec le site log-syntomique de Kato: si $\mathcal{A}b$ est la catégorie des groupes abéliens commutatifs, les préfaisceaux $(X)_{SYN} \to \mathcal{A}b$, $U \mapsto H^0((U/E_n)_{cris}, \mathcal{O}_{U/E_n})$ (resp. $U \mapsto H^0((U/E_n)_{cris}, \mathcal{J}^{[r]}_{U/E_n})$, $r \in \mathbf{N}^*$) sont des faisceaux de S_n-modules sur $(X)_{SYN}$, notés respectivement $\mathcal{O}^{st}_n$ et $\mathcal{J}^{[r]}_n$, tels qu'on a des isomorphismes canoniques et fonctoriels:

$$H^i((X)_{SYN}, \mathcal{O}^{st}_n) \simeq H^i((X/E_n)_{cris}, \mathcal{O}_{X/E_n}) = H^i((X/E_n)_{CRIS}, \mathcal{O}_{X/E_n})$$

$$H^i((X)_{SYN}, \mathcal{J}^{[r]}_n) \simeq H^i((X/E_n)_{cris}, \mathcal{J}^{[r]}_{X/E_n}) = H^i((X/E_n)_{CRIS}, \mathcal{J}^{[r]}_{X/E_n})$$

(pour $\mathcal{J}^{[r]}_n$, non traité directement dans ([Br1],3.2), la preuve est la même que pour $\mathcal{O}^{st}_n$ car les faisceaux $\mathcal{J}^{[r]}_{X/E_n}$ sont à composantes quasi-cohérentes et se calculent localement par des complexes de de Rham logarithmiques analogues à ceux de ([BO1],7.2)). On peut bien sûr calculer la cohomologie de $\mathcal{O}^{st}_n$ et $\mathcal{J}^{[r]}_n$ sur le petit site log-syntomique seulement. On conviendra que $\mathcal{J}^{[r]}_n = \mathcal{O}^{st}_n$ (resp. $\mathcal{J}^{[r]}_{X/E_n} = \mathcal{O}_{X/E_n}$) pour r entier négatif ou nul.

Remarque: L'hypothèse "localement de type fini" (malencontreusement "oubliée" dans [Br1]) vient du fait que, contrairement au cas classique, le calcul "à la de Rham" de la cohomologie log-cristalline n'a été démontré dans [Ka2] que lorsqu'on dispose d'un plongement dans un log-schéma *log-lisse* sur la base, et non pas seulement *formellement log-lisse.*

2.1.2 Platitude des faisceaux $\mathcal{O}^{st}_n$ et $\mathcal{J}^{[r]}_n$

On commence par la :

Proposition 2.1.2.1 *Le faisceau $\mathcal{O}^{st}_n$ sur $(Spec\ W_n, \mathcal{L}(p))_{syn}$ est plat sur S_n. Les faisceaux $\mathcal{J}^{[r]}_n$ sur $(Spec\ W_n, \mathcal{L}(p))_{syn}$ ($r \in \mathbf{N}^*$) sont plats sur W_n.*

Preuve. — Un log-schéma log-syntomique sur $(Spec\ W_n, \mathcal{L}(p))$ s'écrit donc (étale-)localement sous la forme:

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{\mathbf{N}x_0 \oplus \mathbf{N}x_1 \oplus ... \oplus \mathbf{N}x_r}{G} & \stackrel{\alpha}{\to} & \dfrac{W_n[(\mathbf{N}x_0 \oplus \mathbf{N}x_1 \oplus ... \oplus \mathbf{N}x_r)G][X_1, ..., X_s]}{([x_0]-p, f_1, ..., f_t)} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{N}x_0 & \longrightarrow & W_n \end{array}$$

avec $([x_0]-p, f_1, ..., f_t)$ transversalement régulière relativement à W_n telle que l'idéal engendré contient $[g]-1$, $g \in G$ (le morphisme $\mathbf{N}x_0 \to \dfrac{\mathbf{N}x_0 \oplus \mathbf{N}x_1 \oplus ... \oplus \mathbf{N}x_r}{G}$ est toujours intègre). Notons, pour $i \in \mathbf{N}$, $Q^i = \mathbf{N}x_0^{p^{-i}} \oplus \mathbf{N}x_1^{p^{-i}} \oplus ... \oplus \mathbf{N}x_r^{p^{-i}}$ et $A^i = \dfrac{W_n[Q^iG][X_1^{p^{-i}}, ..., X_s^{p^{-i}}]}{([x_0]-p, f_1, ..., f_t)}$. On a des recouvrements log-syntomiques évidents $(Spec\ A^{i+1}, Q^{i+1}/G) \to (Spec\ A^i, Q^i/G)$ et on pose $Q^\infty = \varinjlim Q^i$, $A^\infty = \varinjlim A^i$ et $\alpha^\infty : Q^\infty/G \to A^\infty$. Soit $\mathcal{A} = W_n(A^\infty/pA^\infty) \otimes_{\mathbf{Z}[Q^\infty/G]} \mathbf{Z}[Q^\infty G^{p^{-n}}/G]$ où $G^{p^{-n}} = \{h \in Q^{\infty, gp}\ tq\ h^{p^n} \in G\}$, on définit une surjection canonique $s_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to A^\infty$ par $s_{\mathcal{A}}\Big((a_0, ..., a_{n-1}) \otimes [h]\Big) = (\hat{a_0}^{p^n} + p\hat{a_1}^{p^{n-1}} + ... + p^{n-1}\hat{a_{n-1}}).\alpha^\infty(h^{p^n})$ en notant $\hat{a}_i$ des relèvements des a_i dans A^∞ et on note $\mathcal{A}^{DP}$ l'enveloppe aux puissances divisées par rapport à l'idéal noyau. Soit $\mathcal{A}^{DP} < X >$ l'algèbre polynomiale aux puissances divisées en l'indéterminée X, en envoyant $\gamma_i(X)$ sur 0 pour $i \geq 1$, on définit aussi une surjection $\mathcal{A}^{DP} < X > \to \mathcal{A}^{DP} \stackrel{s_{\mathcal{A}}^{DP}}{\to} A^\infty$ de noyau noté $\mathcal{J}$ (et muni de puissances divisées). Par (D.1) et (D.3), on a des isomorphismes (non canoniques) de S_n-modules:

$$\varinjlim_i \mathcal{O}_n^{st}(Spec\ A^i, Q^i/G) \simeq \mathcal{A}^{DP} < X > \ \ et\ \ \varinjlim_i \mathcal{J}_n^{[r]}(Spec\ A^i, Q^i/G) \simeq \mathcal{J}^{[r]}$$

Il suffit donc de montrer que $\mathcal{A}^{DP} < X >$ est plat sur S_n et $\mathcal{J}^{[r]}$ est plat sur W_n. Soit $\mathcal{B} = W_n\Big(k[Q^\infty][[X_1^{p^{-\infty}}, ..., X_s^{p^{-\infty}}]]\Big) \otimes_{\mathbf{Z}[Q^\infty]} \mathbf{Z}[Q^\infty G^{p^{-n}}]$, $s_{\mathcal{B}}$ la surjection naturelle: $\mathcal{B} \to \mathcal{A}$ et $\mathcal{B}^{DP}$ l'enveloppe aux puissances divisées de $\mathcal{B}$ par rapport à $Ker(s_{\mathcal{A}} \circ s_{\mathcal{B}})$, on vérifie aisément que l'image de $Ker(s_{\mathcal{B}})$ dans $\mathcal{B}^{DP}$ est nulle, donc $s_{\mathcal{B}}$ induit un isomorphisme: $\mathcal{B}^{DP} \stackrel{\sim}{\to} \mathcal{A}^{DP}$. Si $\mathcal{C} = W_n(k)[Q^\infty G][X_1^{p^{-\infty}}, ..., X_s^{p^{-\infty}}]$, on a un isomorphisme canonique: $\mathcal{B} \stackrel{\sim}{\to} \mathcal{C}$, $(P_0, ..., P_{n-1}) \otimes [h] \mapsto (\hat{P_0}^{p^n} + p\hat{P_1}^{p^{n-1}} + ... + p^{n-1}\hat{P_{n-1}}^p).[h^{p^n}]$ (où les $\hat{P}_i$ relèvent les P_i dans $W_n(k)[Q^\infty][X_1^{p^{-\infty}}, ..., X_s^{p^{-\infty}}]$) tel que $s_{\mathcal{A}} \circ s_{\mathcal{B}}$ est la composée $\mathcal{B} \stackrel{\sim}{\to} \mathcal{C} \to \mathcal{C}/I = A^\infty$ avec $I = ([x_0]-p, f_1, ..., f_t)$: on a donc $\mathcal{B}^{DP} \stackrel{\sim}{\to} \mathcal{C}^{DP}$. Notons $f_0 = [x_0]-p$ et soit $\mathcal{D} = \dfrac{\mathcal{C} \otimes_{W_n} W_n[T_0, ..., T_t]/(T_i^{p^n})_{0 \leq i \leq t}}{(T_i - f_i)_{0 \leq i \leq t}}$, la surjection naturelle $s_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ induit un isomorphisme $\mathcal{C}^{DP} \stackrel{\sim}{\to} \mathcal{D}^{DP}$. Mais par le critère de platitude des suites régulières ([Mi],I.2.6), $\mathcal{D}$ est plat sur $W_n[T_0, ..., T_t]/(T_i^{p^n})_{0 \leq i \leq t}$, d'où ([BO1],3.21):

$$\mathcal{A}^{DP} \simeq \mathcal{D}^{DP} \simeq \mathcal{D} \otimes_{W_n[T_0, ..., T_t]/(T_i^{p^n})} W_n < T_0, ..., T_t >$$

où $T_i \mapsto f_i$ dans $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}^{DP}$ est donc plat sur $W_n\!<\!T_0,...,T_t\!>$. D'autre part, par ([Be],I.3.4.4), le ($\mathcal{A}^{DP}/Ker(s_{\mathcal{A}}^{DP})\ =)A^{\infty}$-module $Gr^r\mathcal{A}^{DP} = Gr^r\mathcal{C}^{DP}$ est libre, donc plat sur W_n. Comme $Gr^r\mathcal{A}^{DP}<X>=\bigoplus_{i=0}^{r} Gr^{r-i}\mathcal{A}^{DP}.\gamma_i(X) = \mathcal{J}^{[r]}/\mathcal{J}^{[r+1]}$, $\mathcal{J}^{[r]}/\mathcal{J}^{[r+1]}$ est aussi plat sur W_n et une récurrence facile à partir des suites exactes courtes: $0 \to \mathcal{J}^{[r+1]} \to \mathcal{J}^{[r]} \to \mathcal{J}^{[r]}/\mathcal{J}^{[r+1]} \to 0$ montre que $\mathcal{J}^{[r]}$ est plat sur W_n. Enfin, la structure de S_n-module de $\mathcal{A}^{DP}<X>$ induit sur $\mathcal{D}^{DP}<X>$ la structure de S_n-module donnée par $\gamma_i(u) \mapsto \gamma_i(T_0+p).(1+X)^{-1}$ (avec les puissances divisées canoniques sur l'idéal engendré par p). On laisse au lecteur l'exercice de montrer que la platitude de $\mathcal{D}^{DP}$ sur $W_n<T_0>$ entraine celle de $\mathcal{D}^{DP}<X>$ sur $W_n<u>=S_n$. $\square$

Soit $q \in \mathbf{N}^*$, pour $n \le q$, le foncteur i_* : $(Spec\, W_n, \mathcal{L}(p))^{\sim}_{syn} \to (Spec\, W_q, \mathcal{L}(p))^{\sim}_{syn}$ sur les catégories de faisceaux correspondantes est exact (à cause de 2.1.1.2,(3)): si $\mathcal{F}$ est un faisceau sur $(Spec\ W_n, \mathcal{L}(p))_{syn}$, on notera encore $\mathcal{F}$ au lieu de $i_*\mathcal{F}$ le faisceau image sur $(Spec\ W_q, \mathcal{L}(p))^{\sim}_{syn}$. Pour $n+i \le q$, on a des morphismes de faisceaux sur $(Spec\ W_q, \mathcal{L}(p))_{syn}$: $\mathcal{O}^{st}_{n+i} \to \mathcal{O}^{st}_n$ et $\mathcal{J}^{[r]}_{n+i} \to \mathcal{J}^{[r]}_n$.

Si l'on note $p^n\mathcal{O}^{st}_{n+i}$ (resp. $p^n\mathcal{J}^{[r]}_{n+i}$) l'image de $\mathcal{O}^{st}_{n+i} \xrightarrow{p^n} \mathcal{O}^{st}_{n+i}$ (resp. avec $\mathcal{J}^{[r]}_{n+i}$), on déduit facilement de (2.1.2.1) et de sa preuve des isomorphismes $\mathcal{O}^{st}_i \simeq p^n\mathcal{O}^{st}_{n+i}$ (resp. avec $\mathcal{J}^{[r]}_{n+i}$) et des suites exactes courtes sur $(Spec\ W_q, \mathcal{L}(p))_{syn}$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^{st}_i \longrightarrow \mathcal{O}^{st}_{n+i} \longrightarrow \mathcal{O}^{st}_n \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}^{[r]}_i \longrightarrow \mathcal{J}^{[r]}_{n+i} \longrightarrow \mathcal{J}^{[r]}_n \longrightarrow 0$$

D'autre part, le Frobenius sur $H^0((./E_n)_{cris}, \mathcal{O}_{./E_n})$ induit un morphisme de faisceaux sur $(Spec\ W_q, \mathcal{L}(p))_{syn}$ $\phi : \mathcal{O}^{st}_n \to \mathcal{O}^{st}_n$. Montrons que $\phi(\mathcal{J}^{[r]}_n) \subset p^r\mathcal{O}^{st}_n$ pour $1 \le r \le p-1$. Il suffit de montrer $\phi(\mathcal{J}_n) \subset p\mathcal{O}^{st}_n$ ou bien, par platitude, $\phi(\mathcal{J}_1) = 0$. En reprenant les notations de la preuve de (2.1.2.1) dans le cas $n=1$, il suffit de montrer que $\phi(\mathcal{J}) = 0$ dans $\mathcal{A}^{DP}<X>$, ce qui est évident puisque $\mathcal{J}$ y est muni de puissances divisées. Soit $1 \le r \le p-1$ et supposons $n+r \le q$: la flèche composée $\mathcal{J}^{[r]}_{n+r} \xrightarrow{\phi} p^r\mathcal{O}^{st}_{n+r} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}^{st}_n$ est nulle sur $p^n\mathcal{J}^{[r]}_{n+r}$ et se factorise donc en un unique morphisme de faisceaux sur $(Spec\ W_q, \mathcal{L}(p))_{syn}$, ϕ_r: $\mathcal{J}^{[r]}_n \to \mathcal{O}^{st}_n$. On a $\phi_r|_{\mathcal{J}^{[r+1]}_n} = p\phi_{r+1}$. Pour $r \in \mathbf{N}$, soit Fil^rS_n l'idéal de S_n engendré par les $\gamma_i(u-p)$ pour $i \ge r$ et $c = (p-1)!\gamma_p(u) - 1$. Pour $0 \le r \le p-1$ définissons des ϕ_r sur Fil^rS_n par $\phi_r(\gamma_i(u-p)) = \dfrac{p^{i-r}}{i!}c^i$ ($\dfrac{p^{i-r}}{i!}$ est toujours un entier p-adique si $r \le p-1$ et $i \ge r$). Si $x \in Fil^iS_n$, la multiplication par x induit un morphisme $\mathcal{J}^{[r]}_n \xrightarrow{x} \mathcal{J}^{[r+i]}_n$ et, pour $0 \le r+i \le p-1$ et $n+r+i \le q$, le diagramme de faisceaux sur $(Spec\ W_q, \mathcal{L}(p))_{syn}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{J}_n^{[r]} & \xrightarrow{x} & \mathcal{J}_n^{[r+i]} \\ \phi_r \downarrow & & \downarrow \phi_{r+i} \\ \mathcal{O}_n^{st} & \xrightarrow{\phi_i(x)} & \mathcal{O}_n^{st} \end{array}$$

est alors commutatif.

Sur $\mathcal{J}_1^{[r]}$, on peut construire les ϕ_r d'une deuxième façon, au moins pour $0 \leq r \leq p-2$. Soit $\mathcal{O}_1$ la réduction modulo p du faisceau structural sur $(Spec\ W_q, \mathcal{L}(p))_{syn}$: on remarque que $\mathcal{O}_1^{st}/\mathcal{J}_1 \simeq \mathcal{O}_1$. Pour $r \in \mathbf{N}$, on a un morphisme de faisceaux sur $(Spec\ W_q, \mathcal{L}(p))_{syn}$: $Sym^r_{\mathcal{O}_1}\mathcal{J}_1/\mathcal{J}_1^{[2]} \to \mathcal{J}_1^{[r]}/\mathcal{J}_1^{[r+1]}$.

Lemme 2.1.2.2 *Pour $0 \leq r \leq p-1$, le morphisme ci-dessus est un isomorphisme.*

Preuve. — Reprenons les notations de la preuve de (2.1.2.1), dans le cas $n = 1$. Il suffit de montrer que $Sym^r_{A^\infty}\mathcal{J}/\mathcal{J}^{[2]} \xrightarrow{\sim} \mathcal{J}^{[r]}/\mathcal{J}^{[r+1]}$. Mais $\mathcal{J}$ est le P.D. idéal de $\mathcal{A}^{DP}\!<\!X\!>=\mathcal{C}^{DP}\!<\!X\!>$ engendré par $(f_0, ..., f_t, X)$ qui est une suite régulière de générateurs. On conclut encore avec ([Be],I.3.4.4). $\square$

Supposons $p \geq 3$, alors $\phi_1(\mathcal{J}_1^{[2]}) = 0$ et on peut définir $\bar{\phi}_1 : \mathcal{J}_1/\mathcal{J}_1^{[2]} \to \mathcal{O}_1^{st}$ et, par (2.1.2.2), pour $0 \leq r \leq p-1$, $\bar{\phi}_r = Sym^r\bar{\phi}_1 : \mathcal{J}_1^{[r]}/\mathcal{J}_1^{[r+1]} \to \mathcal{O}_1^{st}$. On vérifie que les diagrammes:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{J}_1^{[r]} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{O}_1^{st} \\ \downarrow & & \| \\ \mathcal{J}_1^{[r]}/\mathcal{J}_1^{[r+1]} & \xrightarrow{\bar{\phi}_r} & \mathcal{O}_1^{st} \end{array}$$

sont commutatifs pour $0 \leq r \leq p-2$. La commutativité est fausse pour $r = p-1$ (car, par exemple, $\phi_{p-1}(\gamma_p(u)) \neq 0$). Si $p = 2$, on se contente de définir $\bar{\phi}_0 = \bar{\phi} : \mathcal{O}_1^{st}/\mathcal{J}_1 \to \mathcal{O}_1^{st}$.

Remarque: Dans le cas $n = 1$ et $0 \leq r \leq p-2$, $\phi_r : \mathcal{J}_1^{[r]} \to \mathcal{O}_1^{st}$ ne dépend que de ϕ_1 et peut donc être défini sur $(Spec\ W_2, \mathcal{L}(p))_{syn}$.

2.2 La cohomologie log-cristalline en caractéristique p des log-schémas propres, log-lisses et du type de Cartier

Pour un log-schéma X_1 du type de Cartier sur $(Spec\ k, L)$ ([Ka2],4.8) qui admet un relèvement log-lisse sur $(Spec\ W_2, \mathcal{L}(p))$, on étudie la structure des groupes $H^i((X_1)_{syn}, \mathcal{O}_1^{st})$ pour $0 \leq i \leq p-2$. Pour ce faire, on démontre des isomorphismes "à la Fontaine-Messing-Deligne-Illusie-Kato" sur $(Spec\ W_2, \mathcal{L}(p))_{syn}$.

2.2.1 Quelques préliminaires

On note $\tilde{S}_1 = k[u]/u^p$ et on munit l'idéal de $\tilde{S}_1$ engendré par u de puissances divisées "stupides" en posant $\gamma_i(u) = u^i/i!$ si $0 \leq i \leq p-1$ et $\gamma_i(u) = 0$ sinon. La surjection k-linéaire $S_1 = k\!<\!u\!>\to k[u]/u^p = \tilde{S}_1$ qui envoie $\gamma_i(u)$ sur $u^i/i!$ pour $0 \leq i \leq p-1$ et $\gamma_i(u)$ sur 0 sinon est alors un P.D. morphisme. On munit $\tilde{S}_1$ de la log-structure associée à $\mathbf{N} \to \tilde{S}_1$, $1 \mapsto u$ et on note $\tilde{E}_1$ le log-schéma $(Spec\ \tilde{S}_1, \mathbf{N})$. Pour alléger les notations, on notera aussi parfois $\bar{E}_1 = (Spec\ k, L)$. On a des P.D. épaississement $\bar{E}_1 \hookrightarrow \tilde{E}_1 \hookrightarrow E_1$. Soit X un log-schéma fin localement de type fini sur $\bar{E}_1$, on note $\tilde{\mathcal{O}}_1^{st}$ (resp. $\mathcal{O}_1^{HK}$) le faisceau sur $(X)_{SYN}$ qui à U associe $H^0\Big((U/\tilde{E}_1)_{CRIS}, \mathcal{O}_{U/\tilde{E}_1}\Big)$ (resp. $H^0\Big((U/\bar{E}_1)_{CRIS}, \mathcal{O}_{U/\bar{E}_1}\Big)$). On note aussi $\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]}$ (resp. $\bar{\mathcal{J}}_1^{[r]}$) les faisceaux sur $(X)_{SYN}$ qui à U associent $H^0\Big((U/\tilde{E}_1)_{CRIS}, \mathcal{J}^{[r]}_{U/\tilde{E}_1}\Big)$ (resp. $H^0\Big((U/\bar{E}_1)_{CRIS}, \mathcal{J}^{[r]}_{U/\bar{E}_1}\Big)$) et on convient que $\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]} = \tilde{\mathcal{O}}_1^{st}$ et $\mathcal{J}^{[r]}_{X/\tilde{E}_1} = \mathcal{O}_{X/\tilde{E}_1}$ (resp. $\bar{\mathcal{J}}_1^{[r]} = \mathcal{O}_1^{HK}$ et $\mathcal{J}^{[r]}_{X/\bar{E}_1} = \mathcal{O}_{X/\bar{E}_1}$) pour r entier négatif ou nul. On a comme d'habitude des isomorphismes pour $i, r \in \mathbf{N}$:

$$\begin{aligned}
H^i((X)_{SYN}, \tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]}) &= H^i\Big((X/\tilde{E}_1)_{CRIS}, \mathcal{J}^{[r]}_{X/\tilde{E}_1}\Big) \\
H^i((X)_{SYN}, \bar{\mathcal{J}}_1^{[r]}) &= H^i\Big((X/\bar{E}_1)_{CRIS}, \mathcal{J}^{[r]}_{X/\bar{E}_1}\Big)
\end{aligned}$$

et des morphismes canoniques $\mathcal{J}_1^{[r]} \to \tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]} \to \bar{\mathcal{J}}_1^{[r]}$.

Soit Σ l'une des trois algèbres S_1, $\tilde{S}_1$ ou k et Ξ le log-schéma correspondant (E_1, $\tilde{E}_1$ ou $\bar{E}_1$). Grâce aux immersions fermées exactes $\bar{E}_1 \hookrightarrow \Xi$, tout log-schéma sur $\bar{E}_1$ peut être vu sur Ξ. Soit X un log-schéma fin sur $\bar{E}_1$ et X' le produit fibré:

$$\begin{array}{ccc}
 & & X \\
 & & \downarrow \\
\Xi & \xrightarrow{F_\Xi} & \Xi
\end{array}$$

où F_Ξ est le Frobenius absolu de Ξ (voir 2.1.1). Par ([Ka2],4.10), le morphisme de Frobenius relatif $F_{X/\Xi} : X \to X'$ se factorise de façon unique sous la forme $X \xrightarrow{F''_X} X'' \xrightarrow{F'_X} X'$ avec F'_X log-étale et F''_X purement inséparable. De façon imagée, X'' est "l'exactifié" de X' par le Frobenius relatif. Cette construction étant fonctorielle, on peut définir un préfaisceau $\mathcal{O}_1^{car,\Xi}$ sur la catégorie des log-schémas fins sur $\bar{E}_1$ par $\mathcal{O}_1^{car,\Xi}(X) = \Gamma(X'', \mathcal{O}_{X''})$. Si $(Spec\ A, P)$ est un log-schéma affine sur $\bar{E}_1$:

$$\begin{array}{ccc}
P & \to & A \\
\uparrow & & \uparrow \\
\mathbf{N} & \to & k
\end{array}$$

si $\mathbf{N} \oplus_{(\phi),\mathbf{N}} P$ désigne la limite inductive du diagramme $\mathbf{N} \xleftarrow{p} \mathbf{N} \to P$ et si $(\mathbf{N} \oplus_{(\phi),\mathbf{N}} P)^e = \{x \oplus y \in (\mathbf{N} \oplus_{(\phi),\mathbf{N}} P)^{gp} = \mathbf{Z} \oplus_{(\phi),\mathbf{Z}} P^{gp}\ tq\ xy^p \in P\}$, on a simplement:

$$\mathcal{O}_1^{car}(Spec\ A, P) = (\Sigma \otimes_{(\phi),k} A) \otimes_{\mathbf{Z}[\mathbf{N}\oplus_{(\phi),\mathbf{N}}P]} \mathbf{Z}[(\mathbf{N} \oplus_{(\phi),\mathbf{N}} P)^e]$$

On note $\mathcal{O}_X^{car,\Xi}$ la restriction de $\mathcal{O}_1^{car,\Xi}$ à la catégorie des log-schémas fins sur X: c'est un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules quasi-cohérents sur $(X)_{ét}$.

Proposition 2.2.1.1 *Le préfaisceau $\mathcal{O}_1^{car,\Xi}$ est un faisceau sur $(\bar{E}_1)_{SYN} = (Spec\ k, L)_{SYN}$.*

On renvoie à l'appendice B pour la preuve. Comme pour $\mathcal{O}_1^{st}$, la méthode est d'interpréter $\mathcal{O}_1^{car,\Xi}$ comme le H^0 du faisceau structural sur un site qui n'est pas le site log-cristallin, mais qui lui ressemble.

Soit également Υ l'une des trois bases E_1, $\tilde{E}_1$ ou $\bar{E}_1$: on renvoie à ([Br1],3) pour la définition des sites $(X/\Upsilon)_{SYN-CRIS}$ (mais en prenant les morphismes log-syntomiques en (2.1.1.1)). On définit un faisceau encore noté $\mathcal{O}_X^{car,\Xi}$ sur $(X/\Upsilon)_{CRIS}$ et $(X/\Upsilon)_{SYN-CRIS}$ par $\mathcal{O}_X^{car,\Xi}(U \hookrightarrow T) = \Gamma(U, \mathcal{O}_1^{car,\Xi})$. On a des morphismes de topoï ([Br1],3.2.1):

$$\begin{array}{ccc} (\widetilde{X/\Upsilon})_{SYN-CRIS} & \xrightarrow{v} & (\widetilde{X/\Upsilon})_{CRIS} \\ w\downarrow & & \downarrow u \\ (\widetilde{X})_{SYN} & \xrightarrow{\alpha} & (\tilde{X})_{ét} \end{array}$$

Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux faisceaux de modules sur un site $\mathcal{S}$, on écrit dans la suite $\mathcal{F} \otimes^{\mathcal{S}} \mathcal{G}$ le faisceau associé (sur $\mathcal{S}$) au préfaisceau produit tensoriel.

Théorème 2.2.1.2 *Soit X un log-schéma fin localement de type fini sur $\bar{E}_1$, Ξ et Υ deux bases quelconques parmi $(E_1, \tilde{E}_1, \bar{E}_1)$ et $r \in \mathbf{N}$:*

(1) si on dispose d'une Υ-immersion fermée $X \hookrightarrow Y$ avec Y log-lisse sur Υ et si D est l'enveloppe aux puissances divisées de X dans Y:

$$Ru_*\Big(\mathcal{O}_X^{car,\Xi} \otimes_{\mathcal{O}_X}^{CRIS} (\mathcal{J}_{X/\Upsilon}^{[r]}/\mathcal{J}_{X/\Upsilon}^{[r+1]})\Big) \simeq$$

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{X''}\otimes_{\mathcal{O}_X} \frac{\mathcal{J}_D^{[r]}}{\mathcal{J}_D^{[r+1]}} \rightarrow \Big(\mathcal{O}_{X''}\otimes_{\mathcal{O}_X} \frac{\mathcal{J}_D^{[r-1]}}{\mathcal{J}_D^{[r]}}\Big)\otimes_{\mathcal{O}_Y}\omega^1_{Y/\Upsilon} \rightarrow \Big(\mathcal{O}_{X''}\otimes_{\mathcal{O}_X} \frac{\mathcal{J}_D^{[r-2]}}{\mathcal{J}_D^{[r-1]}}\Big)\otimes_{\mathcal{O}_Y}\omega^2_{Y/\Upsilon} \rightarrow \ldots$$

(2)

$$Rv_*\Big(\mathcal{O}_X^{car,\Xi} \otimes_{\mathcal{O}_X}^{SYN-CRIS} (\mathcal{J}_{X/\Upsilon}^{[r]}/\mathcal{J}_{X/\Upsilon}^{[r+1]})\Big) \simeq \mathcal{O}_X^{car,\Xi} \otimes_{\mathcal{O}_X}^{CRIS} (\mathcal{J}_{X/\Upsilon}^{[r]}/\mathcal{J}_{X/\Upsilon}^{[r+1]})$$

(3)

$$\begin{array}{rcl} Rw_*\Big(\mathcal{O}_X^{car,\Xi} \otimes_{\mathcal{O}_X}^{SYN-CRIS} (\mathcal{J}_{X/E_1}^{[r]}/\mathcal{J}_{X/E_1}^{[r+1]})\Big) & \simeq & \mathcal{O}_1^{car,\Xi} \otimes_{\mathcal{O}_1}^{SYN} (\mathcal{J}_1^{[r]}/\mathcal{J}_1^{[r+1]}) \\ Rw_*\Big(\mathcal{O}_X^{car,\Xi} \otimes_{\mathcal{O}_X}^{SYN-CRIS} (\mathcal{J}_{X/\tilde{E}_1}^{[r]}/\mathcal{J}_{X/\tilde{E}_1}^{[r+1]})\Big) & \simeq & \mathcal{O}_1^{car,\Xi} \otimes_{\mathcal{O}_1}^{SYN} (\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]}/\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r+1]}) \\ Rw_*\Big(\mathcal{O}_X^{car,\Xi} \otimes_{\mathcal{O}_X}^{SYN-CRIS} (\mathcal{J}_{X/\bar{E}_1}^{[r]}/\mathcal{J}_{X/\bar{E}_1}^{[r+1]})\Big) & \simeq & \mathcal{O}_1^{car,\Xi} \otimes_{\mathcal{O}_1}^{SYN} (\bar{\mathcal{J}}_1^{[r]}/\bar{\mathcal{J}}_1^{[r+1]}) \end{array}$$

Voir l'appendice B pour la preuve qui découle essentiellement (comme celle de 2.2.1.1) d'un calcul de Čech.

Corollaire 2.2.1.3 *Avec les hypothèses de (2.2.1.2,(1)):*
$R\alpha_*\Big(\mathcal{O}_1^{car,\Xi} \otimes_{\mathcal{O}_1}^{SYN} (\mathcal{J}_1^{[r]}/\mathcal{J}_1^{[r+1]})\Big) \simeq$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X''}\otimes_{\mathcal{O}_X} \frac{\mathcal{J}_D^{[r]}}{\mathcal{J}_D^{[r+1]}} \longrightarrow \Big(\mathcal{O}_{X''}\otimes_{\mathcal{O}_X} \frac{\mathcal{J}_D^{[r-1]}}{\mathcal{J}_D^{[r]}}\Big)\otimes_{\mathcal{O}_Y}\omega^1_{Y/E_1} \longrightarrow \Big(\mathcal{O}_{X''}\otimes_{\mathcal{O}_X} \frac{\mathcal{J}_D^{[r-2]}}{\mathcal{J}_D^{[r-1]}}\Big)\otimes_{\mathcal{O}_Y}\omega^2_{Y/E_1} \longrightarrow \dots$$

(resp. avec les bases $\tilde{E}_1$ et $\bar{E}_1$).

Remarque: Le faisceau $\mathcal{O}_X^{car,\Xi}$ n'apparaît pas si les log-structures sont tout le temps triviales, puisqu'il est alors égal à $\Sigma \otimes_{(\phi),k} \mathcal{O}_X$.

2.2.2 Des isomorphismes "à la Fontaine-Messing-Deligne-Illusie-Kato" sur le site log-syntomique

On commence par travailler sur $(Spec\ k, L)_{syn}$. Si $i \in \mathbf{N}$ et $r \in \mathbf{N}$, on désigne par $\gamma_i(u).\mathcal{J}_1^{[r]}$ l'image de $\mathcal{J}_1^{[r]} \overset{\gamma_i(u).Id}{\longrightarrow} \mathcal{J}_1^{[r]}$.

Lemme 2.2.2.1 *On a des suites exactes de faisceaux sur $(Spec\ k, L)_{syn}$:*

$$0 \longrightarrow \sum_{i\geq 1}\gamma_i(u).\mathcal{O}_1^{st} \longrightarrow \mathcal{O}_1^{st} \longrightarrow \mathcal{O}_1^{HK} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \sum_{i\geq r}\gamma_i(u).\mathcal{O}_1^{st} + \sum_{i=1}^{r-1}\gamma_i(u).\mathcal{J}_1^{[r-i]} \longrightarrow \mathcal{J}_1^{[r]} \longrightarrow \bar{\mathcal{J}}_1^{[r]} \longrightarrow 0$$

($r \in \mathbf{N}^*$).

Preuve. — Dans tout ce qui suit, on reprend les notations de la preuve de (2.1.2.1) (dans le cas $n = 1$). On pose $P^\infty = Q^\infty/G$, $f_0 = [x_0]$ et, pour tout faisceau $\mathcal{F}$ sur $(Spec\ k, L)_{syn}$, on note $\mathcal{F}(A^\infty, P^\infty) = \varinjlim_i \mathcal{F}(Spec\ A^i, Q^i/G)$. Si $\mathcal{B} = k[Q^\infty][X_1^{p^{-\infty}}, ..., X_s^{p^{-\infty}}] \otimes_{k[Q^\infty]} k[Q^\infty G^{p^{-1}}]$, on note $\psi_0, ..., \psi_t$ les éléments (uniques) de $\mathcal{B}$ tels que $\psi_i^p = f_i$ dans $k[Q^\infty G][X_1^{p^{-\infty}}, ..., X_s^{p^{-\infty}}]$, et on a:

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_1^{st}(A^\infty, P^\infty) \simeq \mathcal{B}^{DP}<X> &\simeq \mathcal{B}/(f_0, ..., f_t) \otimes_{k[T_0,...,T_t]/T_i^p} k<T_0, ..., T_t, X> \\ &\simeq \mathcal{B} \otimes_{k[T_0,...,T_t]} k<T_0, ..., T_t, X>\end{aligned}$$

(où $T_i \mapsto \psi_i$ dans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}/(f_0, ..., f_t)$ est plat sur $k[T_0, ..., T_t]/T_i^p$). Soit K l'idéal à puissances divisées engendré dans $k<T_0, ..., T_t, X>$ par T_0, on a (Appendice D ou ([Br1],5.1.1)):

$$\mathcal{O}_1^{HK}(A^\infty, P^\infty) \simeq \mathcal{B}^{DP}<X>/K \simeq \mathcal{B} \otimes_{k[T_0,...,T_t]} k<T_1, ..., T_t, X>$$

Soit J (resp. $\bar{J}$) l'idéal à puissances divisées engendré dans $k < T_0, ..., T_t, X >$ (resp. $k < T_1, ..., T_t, X >$) par $(T_0, ..., X)$ (resp. $(T_1, ..., X)$), on a des suites exactes ($r \in \mathbf{N}^*$):

$$0 \longrightarrow K^{[r]} + \sum_{i=1}^{r-1} \gamma_i(T_0).J^{[r-i]} \longrightarrow J^{[r]} \longrightarrow \bar{J}^{[r]} \longrightarrow 0$$

d'où des suites exactes:

$$\mathcal{B} \otimes_{k[T_0,...,T_t]} K^{[r]} \oplus \sum_{i=1}^{r-1} \mathcal{B} \otimes_{k[T_0,...,T_t]} \gamma_i(T_0).J^{[r-i]} \to \mathcal{B} \otimes_{k[T_0,...,T_t]} J^{[r]} \to \mathcal{B} \otimes_{k[T_0,...,T_t]} \bar{J}^{[r]} \to 0$$

Mais $\mathcal{J}_1^{[r]}(A^\infty, P^\infty) = \mathcal{B}/(f_0, ..., f_t) \otimes_{k[T_0,...,T_t]/T_i^p} J^{[r]} = \mathcal{B} \otimes_{k[T_0,...,T_t]} J^{[r]}$ (resp. $\bar{\mathcal{J}}_1^{[r]}(A^\infty, P^\infty) = \mathcal{B} \otimes_{k[T_0,...,T_t]} \bar{J}^{[r]}$) et $u = T_0.(1 + X)^{-1}$ dans $\mathcal{B}^{DP} < X >$, d'où on déduit facilement le résultat. $\square$

On suit la méthode de ([FM],II.1.7): pour $r \geq 1$, soit $\hat{\mathcal{I}}_1^{<r>}$ le noyau de la composée: $\mathcal{O}_{r+1}^{st} \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}_{r+1}^{st} \longrightarrow \mathcal{O}_r^{st}$ et $\pi : \mathcal{O}_1^{st} \to \mathcal{O}_{r+1}^{st}$, $x \mapsto p^r.\hat{x}$ si $\hat{x}$ relève localement x dans $\mathcal{O}_{r+1}^{st}$. On définit $\nu_r : \hat{\mathcal{I}}_1^{<r>} \to \mathcal{O}_1^{st}$ comme la composée $\hat{\mathcal{I}}_1^{<r>} \hookrightarrow \mathcal{O}_{r+1}^{st} \to \mathcal{O}_1^{st}$ et $\hat{f}_r : \hat{\mathcal{I}}_1^{<r>} \to \mathcal{O}_1^{st}$ par $\hat{f}_r(x) = y$ si $\phi(x) = \pi(y)$. On pose $F^r\mathcal{O}_1^{st} = Im\nu_r$, $F_r\mathcal{O}_1^{st} = Im\hat{f}_r$, $F^0\mathcal{O}_1^{st} = \mathcal{O}_1^{st}$, $F_0\mathcal{O}_1^{st} = \phi(\mathcal{O}_1^{st})$ et $F_{-1}\mathcal{O}_1^{st} = 0$. A partir de la platitude sur W_r des $\mathcal{O}_r^{st}$, il est formel de montrer ($r \in \mathbf{N}$):

- $F^r\mathcal{O}_1^{st} \supset F^{r+1}\mathcal{O}_1^{st}$ et $F_{r-1}\mathcal{O}_1^{st} \subset F_r\mathcal{O}_1^{st}$

- $\hat{f}_r$ induit un isomorphisme $f_r : F^r\mathcal{O}_1^{st}/F^{r+1}\mathcal{O}_1^{st} \xrightarrow{\sim} F_r\mathcal{O}_1^{st}/F_{r-1}\mathcal{O}_1^{st}$.

Afin d'alléger les notations, on note $\mathcal{O}_1^{car} = \mathcal{O}_1^{car,E_1}$, $\tilde{\mathcal{O}}_1^{car} = \mathcal{O}_1^{car,\tilde{E}_1}$ et $\mathcal{O}_1^{car,HK} = \mathcal{O}_1^{car,\bar{E}_1}$. Pour tout log-schéma fin X sur $\bar{E}_1 = (Spec\ k, L)$, on a, comme dans la preuve de (B.3.1) (avec $\Xi = E_1$), une flèche canonique: $\Gamma(X'', \mathcal{O}_{X''}) \to H^0((X/E_1)_{CRIS}, \mathcal{O}_{X/E_1})$ qui induit en particulier un morphisme de faisceaux sur $(Spec\ k, L)_{syn}$: $\mathcal{O}_1^{car} \to \mathcal{O}_1^{st}$. On pose $F_{-1}^{car}\mathcal{O}_1^{st} = F_{-1}^{car}\tilde{\mathcal{O}}_1^{st} = F_{-1}^{car}\mathcal{O}_1^{HK} = 0$ et on définit, pour $r \in \mathbf{N}$:

$$\begin{aligned} F_r^{car}\mathcal{O}_1^{st} &= Im(\mathcal{O}_1^{car} \otimes_k F_r\mathcal{O}_1^{st} \to \mathcal{O}_1^{st}) \\ F_r^{car}\tilde{\mathcal{O}}_1^{st} &= Im(F_r^{car}\mathcal{O}_1^{st} \to \tilde{\mathcal{O}}_1^{st}) \\ F_r^{car}\mathcal{O}_1^{HK} &= Im(F_r^{car}\mathcal{O}_1^{st} \to \mathcal{O}_1^{HK}) \\ F^r\mathcal{O}_1^{HK} &= Im(F^r\mathcal{O}_1^{st} \to \mathcal{O}_1^{HK}) \end{aligned}$$

Proposition 2.2.2.2 *(1) Pour $r \in \mathbf{N}$, $F^r\mathcal{O}_1^{st} = \mathcal{J}_1^{[r]}$ et $F^r\mathcal{O}_1^{HK} = \bar{\mathcal{J}}_1^{[r]}$*
(2) $\bigcup_{r \in \mathbf{N}} F_r^{car}\mathcal{O}_1^{st} = \mathcal{O}_1^{st}$, $\bigcup_{r \in \mathbf{N}} F_r^{car}\tilde{\mathcal{O}}_1^{st} = \tilde{\mathcal{O}}_1^{st}$, $\bigcup_{r \in \mathbf{N}} F_r^{car}\mathcal{O}_1^{HK} = \mathcal{O}_1^{HK}$

(3) l'isomorphisme f_r se factorise en des isomorphismes de faisceaux (sur $(Spec\ k, L)_{syn}$ et pour $r \in \mathbf{N}$):

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{O}_1^{car} \otimes_{\mathcal{O}_1} F^r\mathcal{O}_1^{HK}/F^{r+1}\mathcal{O}_1^{HK} & \overset{Id\otimes f_r^{HK}}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} & F_r^{car}\mathcal{O}_1^{st}/F_{r-1}^{car}\mathcal{O}_1^{st} \\
\tilde{\mathcal{O}}_1^{car} \otimes_{\mathcal{O}_1} F^r\mathcal{O}_1^{HK}/F^{r+1}\mathcal{O}_1^{HK} & \overset{Id\otimes f_r^{HK}}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} & F_r^{car}\tilde{\mathcal{O}}_1^{st}/F_{r-1}^{car}\tilde{\mathcal{O}}_1^{st} \\
\mathcal{O}_1^{car,HK} \otimes_{\mathcal{O}_1} F^r\mathcal{O}_1^{HK}/F^{r+1}\mathcal{O}_1^{HK} & \overset{Id\otimes f_r^{HK}}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} & F_r^{car}\mathcal{O}_1^{HK}/F_{r-1}^{car}\mathcal{O}_1^{HK}
\end{array}$$

Preuve. — Tout au long de la preuve, on garde les notations de (2.1.2.1) et (2.2.2.1). Soit $P^{\infty,e} = \{x \in (P^\infty)^{gp}\ tq\ x^p \in P^\infty\}$, on a:

- $\mathcal{O}_1^{car}(A^\infty, P^\infty) = S_1 \otimes_{k[\mathbf{N}]} k[(\mathbf{N} \oplus_{(\phi),\mathbf{N}} P^\infty)^e] \otimes_{k[P^\infty]} A^\infty$ (à un twist près sur k, voir 2.2.1)

- $\mathcal{O}_1^{st}(A^\infty, P^\infty) = \Big(k[(\mathbf{N} \oplus_{(\phi),\mathbf{N}} P^\infty)^e] \otimes_{k[P^\infty]} A^\infty\Big)^{DP}$ (D.1)

et des expressions analogues pour $\tilde{\mathcal{O}}_1^{car}(A^\infty, P^\infty)$, $\tilde{\mathcal{O}}_1^{st}(A^\infty, P^\infty)$, $\mathcal{O}_1^{car,HK}(A^\infty, P^\infty)$ et $\mathcal{O}_1^{HK}(A^\infty, P^\infty)$ qu'on laisse au lecteur le soin d'écrire. Un calcul rapide donne alors:

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{O}_1^{st}(A^\infty, P^\infty) & = & \displaystyle\bigoplus_{(m_0,\dots,m_{t+1})\in\mathbf{N}^{t+2}} (\mathcal{B}[X]/(f_0,...,f_t,X^p)).\gamma_{pm_0}(\psi_0)...\gamma_{pm_t}(\psi_t)\gamma_{pm_{t+1}}(X) \\
\tilde{\mathcal{O}}_1^{st}(A^\infty, P^\infty) & = & \displaystyle\bigoplus_{(m_1,\dots,m_{t+1})\in\mathbf{N}^{t+1}} (\mathcal{B}[X]/(f_0,...,f_t,X^p)).\gamma_{pm_1}(\psi_1)...\gamma_{pm_t}(\psi_t)\gamma_{pm_{t+1}}(X) \\
\mathcal{O}_1^{HK}(A^\infty, P^\infty) & = & \displaystyle\bigoplus_{(m_1,\dots,m_{t+1})\in\mathbf{N}^{t+1}} (\mathcal{B}[X]/(\psi_0,f_1,...,f_t,X^p)).\gamma_{pm_1}(\psi_1)...\gamma_{pm_t}(\psi_t)\gamma_{pm_{t+1}}(X) \\
\mathcal{O}_1^{car}(A^\infty, P^\infty) & = & \displaystyle\bigoplus_{m_0\in\mathbf{N}} (\mathcal{B}[X]/(f_0,...,f_t,X^p)).\gamma_{pm_0}(\psi_0) \\
\tilde{\mathcal{O}}_1^{car}(A^\infty, P^\infty) & = & \mathcal{B}[X]/(f_0,...,f_t,X^p) \\
\mathcal{O}_1^{car,HK}(A^\infty, P^\infty) & = & \mathcal{B}[X]/(\psi_0,f_1,...,f_t,X^p)
\end{array}$$

d'où on déduit:

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{O}_1^{st}(A^\infty, P^\infty) & = & \displaystyle\bigoplus_{(m_1,\dots,m_{t+1})\in\mathbf{N}^{t+1}} \mathcal{O}_1^{car}(A^\infty, P^\infty).\gamma_{pm_1}(\psi_1)...\gamma_{pm_t}(\psi_t)\gamma_{pm_{t+1}}(X) \\
\tilde{\mathcal{O}}_1^{st}(A^\infty, P^\infty) & = & \displaystyle\bigoplus_{(m_1,\dots,m_{t+1})\in\mathbf{N}^{t+1}} \tilde{\mathcal{O}}_1^{car}(A^\infty, P^\infty).\gamma_{pm_1}(\psi_1)...\gamma_{pm_t}(\psi_t)\gamma_{pm_{t+1}}(X) \\
\mathcal{O}_1^{HK}(A^\infty, P^\infty) & = & \displaystyle\bigoplus_{(m_1,\dots,m_{t+1})\in\mathbf{N}^{t+1}} \mathcal{O}_1^{car,HK}(A^\infty, P^\infty).\gamma_{pm_1}(\psi_1)...\gamma_{pm_t}(\psi_t)\gamma_{pm_{t+1}}(X)
\end{array}$$

Posons $\tilde{A}^\infty = k[Q^\infty G^{p^{-1}}][X_1^{p^{-\infty}}, ..., X_s^{p^{-\infty}}]/(\psi_0, ..., \psi_t)$, on a aussi par ([Be],I.3.4.4):

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_1^{[r]}(A^\infty, P^\infty)/\mathcal{J}_1^{[r+1]}(A^\infty, P^\infty) &= \bigoplus_{\sum m_i = r} \tilde{A}^\infty.\gamma_{m_0}(\psi_0)...\gamma_{m_t}(\psi_t)\gamma_{m_{t+1}}(X) \\ \mathcal{J}_1^{HK,[r]}(A^\infty, P^\infty)/\mathcal{J}_1^{HK,[r+1]}(A^\infty, P^\infty) &= \bigoplus_{\sum m_i = r} \tilde{A}^\infty.\gamma_{m_1}(\psi_1)...\gamma_{m_t}(\psi_t)\gamma_{m_{t+1}}(X)\end{aligned}$$

(1) Montrons que $\mathcal{J}_1^{[r]} \subset F^r\mathcal{O}_1^{st}$: il suffit de montrer $\mathcal{J}_1^{[r]}(A^\infty, P^\infty) \subset F^r\mathcal{O}_1^{st}(A^\infty, P^\infty)$ puisque ce sont des sous-faisceaux de $\mathcal{O}_1^{st}$. Pour chaque ψ_i de $\mathcal{B}$, on choisit une écriture $\psi_i = a \otimes 1 + \sum b \otimes ([h] - 1)$ où $a \in Ker(k[Q^\infty][X_1^{p^{-\infty}}, ..., X_s^{p^{-\infty}}] \to A^\infty)$, $b \in k[Q^\infty][X_1^{p^{-\infty}}, ..., X_s^{p^{-\infty}}]$, $h \in G^{p^{-1}}$ et on pose $g_i = (a^p/p) + \sum (b^p \otimes ([h]^p - 1)/p) \in \mathcal{B}^{DP}$ (rappelons que $\{[h] - 1, h \in G^{p^{-1}}\} \subset (\psi_0, ..., \psi_t)$). On vérifie que:

$$\mathcal{O}_1^{st}(A^\infty, P^\infty) = \bigoplus_{(m_1,...,m_{t+1}) \in \mathbf{N}^{t+1}} \mathcal{O}_1^{car}(A^\infty, P^\infty).\gamma_{m_1}(g_1)...\gamma_{m_t}(g_t)\gamma_{m_{t+1}}\Big(\frac{(1+X)^p - 1}{p}\Big)$$

Soit $a^{p^{-r}}$ (resp. $b^{p^{-r}}$, $h^{p^{-r}}$) une racine $p^{r^{i\grave{e}me}}$ de a (resp. b, h) dans $k[Q^\infty][X_1^{p^{-\infty}}, ..., X_s^{p^{-\infty}}]$ (resp. $k[Q^\infty][X_1^{p^{-\infty}}, ..., X_s^{p^{-\infty}}]$, $G^{p^{-(r+1)}}$) et $\widehat{\psi_i}$ l'image de:

$$(a^{p^{-r}}, 0, ..., 0) + \sum (b^{p^{-r}}, 0, ..., 0) \otimes ([h^{p^{-r}}] - 1) \in W_{r+1}(k[Q^\infty][X_1^{p^{-\infty}}, ..., X_s^{p^{-\infty}}]) \otimes_{\mathbf{Z}[Q^\infty]} \mathbf{Z}[Q^\infty G^{p^{-(r+1)}}]$$

dans $\mathcal{O}_{r+1}^{st}(A^\infty, P^\infty)$. C'est un relevé de ψ_i tel que $\phi\Big(\gamma_m(\widehat{\psi_i})\Big) \in p^m.\mathcal{O}_{r+1}^{st}(A^\infty, P^\infty)$, donc, si $\sum_{i=0}^{t+1} m_i \geq r$, $\gamma_{m_0}(\widehat{\psi_0})...\gamma_{m_t}(\widehat{\psi_t}).\gamma_{m_{t+1}}(X) \in \hat{\mathcal{I}}_1^{<r>}$ d'où $\mathcal{J}_1^{[r]}(A^\infty, P^\infty) \subset F^r\mathcal{O}_1^{st}(A^\infty, P^\infty)$ et, si $\sum_{i=0}^{t+1} m_i = r$:

$$\hat{f}_r\Big(\gamma_{m_0}(\widehat{\psi_0})...\gamma_{m_t}(\widehat{\psi_t}).\gamma_{m_{t+1}}(X)\Big) = \gamma_{m_0}(g_0)...\gamma_{m_t}(g_t)\gamma_{m_{t+1}}\Big(\frac{(1+X)^p - 1}{p}\Big)$$

Montrons par récurrence que $\mathcal{J}_1^{[r]} = F^r\mathcal{O}_1^{st}$: c'est vrai pour $r = 0$. La flèche $\mathcal{O}_2^{st} \to \mathcal{O}_1^{st}$ étant surjective, on a:

$$F^1\mathcal{O}_1^{st} = Ker(\phi : \mathcal{O}_1^{st} \to \mathcal{O}_1^{st}) = Ker(\mathcal{O}_1^{st} \to \mathcal{O}_1) = \mathcal{J}_1$$

d'où on déduit par le calcul ci-dessus:

$$F_1\mathcal{O}_1^{st}(A^\infty, P^\infty) = \bigoplus_{\sum m_i \leq 1} A^\infty.\gamma_{m_0}(g_0)...\gamma_{m_t}(g_t)\gamma_{m_{t+1}}\Big(\frac{(1+X)^p - 1}{p}\Big)$$

Mais la composée $\mathcal{J}_1/\mathcal{J}_1^{[2]} \longrightarrow F^1\mathcal{O}_1^{st}/F^2\mathcal{O}_1^{st} \xrightarrow[\sim]{f_1} F_1\mathcal{O}_1^{st}/F_0\mathcal{O}_1^{st}$ induit sur $(Spec\, A^\infty, P^\infty)$, par ce qui précède et puisque $\tilde{A}^\infty \xrightarrow[\sim]{\phi} A^\infty$, un isomorphisme:

$$\bigoplus_{\sum m_i = 1} \tilde{A}^\infty.\gamma_{m_0}(\psi_0)...\gamma_{m_t}(\psi_t)\gamma_{m_{t+1}}(X) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\sum m_i = 1} A^\infty.\gamma_{m_0}(g_0)...\gamma_{m_t}(g_t)\gamma_{m_{t+1}}\Big(\frac{(1+X)^p - 1}{p}\Big)$$

d'où $\mathcal{J}_1/\mathcal{J}_1^{[2]} \xrightarrow{\sim} F^1\mathcal{O}_1^{st}/F^2\mathcal{O}_1^{st}$ et, puisque $\mathcal{J}_1 = F^1\mathcal{O}_1^{st}$, $\mathcal{J}_1^{[2]} = F^2\mathcal{O}_1^{st}$. Comme précédemment, on en déduit alors:

$$F_2\mathcal{O}_1^{st}(A^\infty, P^\infty) = \bigoplus_{\sum m_i \leq 2} A^\infty.\gamma_{m_0}(g_0)...\gamma_{m_t}(g_t)\gamma_{m_{t+1}}\Big(\frac{(1+X)^p - 1}{p}\Big)$$

Par une récurrence dont on laisse les détails au lecteur, on obtient, pour $r \in \mathbf{N}$, $\mathcal{J}_1^{[r]} = F^r\mathcal{O}_1^{st}$ et:

$$F_r\mathcal{O}_1^{st}(A^\infty, P^\infty) = \bigoplus_{\sum m_i \leq r} A^\infty.\gamma_{m_0}(g_0)...\gamma_{m_t}(g_t)\gamma_{m_{t+1}}\Big(\frac{(1+X)^p - 1}{p}\Big)$$

Par (2.2.2.1), on a immédiatement $\bar{\mathcal{J}}_1^{[r]} = F^r\mathcal{O}_1^{HK}$.

(2) A partir de la formule ci-dessus pour $F_r\mathcal{O}_1^{st}$, on a facilement:

$$\begin{aligned}
F_r^{car}\mathcal{O}_1^{st}(A^\infty, P^\infty) &= \bigoplus_{\sum m_i \leq r} \mathcal{O}_1^{car}(A^\infty, P^\infty).\gamma_{m_1}(g_1)...\gamma_{m_t}(g_t)\gamma_{m_{t+1}}\Big(\frac{(1+X)^p - 1}{p}\Big) \\
&= \bigoplus_{\sum m_i \leq r} \mathcal{O}_1^{car}(A^\infty, P^\infty).\gamma_{pm_1}(\psi_1)...\gamma_{pm_t}(\psi_t)\gamma_{pm_{t+1}}(X)
\end{aligned}$$

puis, par les calculs précédents:

$$\begin{aligned}
F_r^{car}\tilde{\mathcal{O}}_1^{st}(A^\infty, P^\infty) &= \bigoplus_{\sum m_i \leq r} \tilde{\mathcal{O}}_1^{car}(A^\infty, P^\infty).\gamma_{pm_1}(\psi_1)...\gamma_{pm_t}(\psi_t)\gamma_{pm_{t+1}}(X) \\
F_r^{car}\mathcal{O}_1^{HK}(A^\infty, P^\infty) &= \bigoplus_{\sum m_i \leq r} \mathcal{O}_1^{car,HK}(A^\infty, P^\infty).\gamma_{pm_1}(\psi_1)...\gamma_{pm_t}(\psi_t)\gamma_{pm_{t+1}}(X)
\end{aligned}$$

d'où:

$$\begin{aligned}
\bigcup_{r\in\mathbf{N}} F_r^{car}\mathcal{O}_1^{st}(A^\infty, P^\infty) &= \bigoplus_{(m_1,...,m_{t+1})\in\mathbf{N}^{t+1}} \mathcal{O}_1^{car}(A^\infty, P^\infty).\gamma_{pm_1}(\psi_1)...\gamma_{pm_t}(\psi_t)\gamma_{pm_{t+1}}(X) \\
&= \mathcal{O}_1^{st}(A^\infty, P^\infty)
\end{aligned}$$

i.e. $\bigcup_{r\in\mathbf{N}} F_r^{car}\mathcal{O}_1^{st} = \mathcal{O}_1^{st}$, et de même pour les autres cas.

(3) Pour $i \geq r+1$, $f_r(\gamma_i(u).\mathcal{O}_1^{st}/\mathcal{J}_1) = 0$. Soient $0 \leq i \leq r$, x une section locale de $\mathcal{J}_1^{[r-i]}$, et $\hat{x}$ un relevé (local) de x dans $\mathcal{O}_{r+1}^{st}$ tel que $\gamma_i(u).\hat{x} \in \hat{\mathcal{I}}_1^{<r>}$ ($\hat{x}$ existe par (1)), on a $\hat{f}_r(\gamma_i(u).\hat{x}) = \eta.\gamma_{pi}(u).\hat{f}_{r-i}(\hat{x})$ où η est une unité p-adique et $\gamma_{pi}(u).f_{r-i}(\hat{x}) \in F_{r-i}^{car}\mathcal{O}_1^{st} \subset F_{r-1}^{car}\mathcal{O}_1^{st}$ pour $i \geq 1$. Donc, par (2.2.2.1), $f_r\Big(Ker(\mathcal{J}_1^{[r]} \to \bar{\mathcal{J}}_1^{[r]})\Big) = 0$ dans $F_r^{car}\mathcal{O}_1^{st}/F_{r-1}^{car}\mathcal{O}_1^{st}$, ce qui permet de définir un morphisme de faisceaux sur $(Spec\ k, L)_{syn}$, f_r^{HK} : $F^r\mathcal{O}_1^{HK}/F^{r+1}\mathcal{O}_1^{HK} \to F_r^{car}\mathcal{O}_1^{st}/F_{r-1}^{car}\mathcal{O}_1^{st}$. On note également f_r^{HK} les composés avec les projections

$F_r^{car}\mathcal{O}_1^{st}/F_{r-1}^{car}\mathcal{O}_1^{st} \to F_r^{car}\tilde{\mathcal{O}}_1^{st}/F_{r-1}^{car}\tilde{\mathcal{O}}_1^{st}$ et $F_r^{car}\mathcal{O}_1^{st}/F_{r-1}^{car}\mathcal{O}_1^{st} \to F_r^{car}\mathcal{O}_1^{HK}/F_{r-1}^{car}\mathcal{O}_1^{HK}$.
Par les calculs précédents:
$\mathcal{O}_1^{car}(A^\infty, P^\infty) \otimes_{A^\infty} \Big(F^r\mathcal{O}_1^{HK}(A^\infty, P^\infty)/F^{r+1}\mathcal{O}_1^{HK}(A^\infty, P^\infty)\Big) =$

$$= \bigoplus_{\sum m_i = r} \mathcal{O}_1^{car}(A^\infty, P^\infty).\gamma_{m_1}(\psi_1)...\gamma_{m_t}(\psi_t)\gamma_{m_{t+1}}(X)$$

En vertu de la description dans (2) de $F_r^{car}\mathcal{O}_1^{st}(A^\infty, P^\infty)$ et puisque:

$$f_r\Big(\gamma_{m_1}(\psi_1)...\gamma_{m_t}(\psi_t)\gamma_{m_{t+1}}(X)\Big) = \gamma_{m_1}(g_1)...\gamma_{m_t}(g_t)\gamma_{m_{t+1}}\Big(\frac{(1+X)^p-1}{p}\Big)$$

le résultat est clair. Les autres cas sont similaires. $\square$

Grâce à la remarque finale de (2.1.2), on se place jusqu'à la fin de cette section sur $(Spec\ W_2, \mathcal{L}(p))_{syn}$. On rappelle que:

$$i_* : (Spec\ k, L)_{syn}^\sim \to (Spec\ W_2, \mathcal{L}(p))_{syn}^\sim$$

est exact, qu'on écrit encore $\mathcal{F}$ au lieu de $i_*\mathcal{F}$ et qu'on a défini dans (2.1.2) des morphismes de faisceaux sur $(Spec\ W_2, \mathcal{L}(p))_{syn}$ $\bar{\phi}_r : \mathcal{J}_1^{[r]}/\mathcal{J}_1^{[r+1]} \to \mathcal{O}_1^{st}$ pour $0 \le r \le p-1$ si $p \ge 3$ et $r = 0$ si $p = 2$. On note encore $\bar{\phi}_r$ les composés avec les projections $\mathcal{O}_1^{st} \to \tilde{\mathcal{O}}_1^{st}$ et $\mathcal{O}_1^{st} \to \mathcal{O}_1^{HK}$.

Théorème 2.2.2.3 *Pour $0 \le r \le p-1$ si $p \ge 3$, $r = 0$ si $p = 2$, on a des isomorphismes de faisceaux sur $(Spec\ W_2, \mathcal{L}(p))_{syn}$:*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_1^{car} \otimes_{\mathcal{O}_1} \mathcal{J}_1^{[r]}/\mathcal{J}_1^{[r+1]} & \overset{Id\otimes\bar{\phi}_r}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} & F_r^{car}\mathcal{O}_1^{st} \\ \tilde{\mathcal{O}}_1^{car} \otimes_{\mathcal{O}_1} \mathcal{J}_1^{[r]}/\mathcal{J}_1^{[r+1]} & \overset{Id\otimes\bar{\phi}_r}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} & F_r^{car}\tilde{\mathcal{O}}_1^{st} \\ \mathcal{O}_1^{car,HK} \otimes_{\mathcal{O}_1} \mathcal{J}_1^{[r]}/\mathcal{J}_1^{[r+1]} & \overset{Id\otimes\bar{\phi}_r}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} & F_r^{car}\mathcal{O}_1^{HK} \end{array}$$

Preuve. — Le cas $r = 0, p = 2$ est laissé au lecteur. Soit x une section locale de $\mathcal{J}_1^{[r]}/\mathcal{J}_1^{[r+1]}$, par (2.1.2.2), x est (localement) une somme d'éléments de la forme $x_1...x_r$ avec $x_i \in \mathcal{J}_1/\mathcal{J}_1^{[2]}$. Par les résultats de (2.1.2), on peut trouver des relevés $\hat{x}_i$ des x_i dans $\mathcal{O}_{r+1}^{st}$ dont la projection sur $\mathcal{O}_2^{st}$ tombe dans $\mathcal{J}_2$ et $(\hat{x}_1...\hat{x}_r \in \hat{\mathcal{I}}_1^{<r>})$:

$$\hat{f}_r(\hat{x}_1...\hat{x}_r) = \phi(\hat{x}_1...\hat{x}_r)/p^r = \phi(\hat{x}_1)/p...\phi(\hat{x}_r)/p = \bar{\phi}_1(x_1)...\bar{\phi}_1(x_r) = \bar{\phi}_r(x_1...x_r)$$

donc $Im\bar{\phi}_r \subset F_r\mathcal{O}_1^{st} \subset F_r^{car}\mathcal{O}_1^{st}$ et la flèche est bien définie. Avec les notations de (2.2.2.2), un calcul simple donne $\bar{\phi}_1(\psi_i) - g_i \in \mathcal{B}/(f_0, ..., f_t) \subset \mathcal{O}_1^{car}(A^\infty, P^\infty)$, d'où:

$$\begin{array}{rcl} F_r^{car}\mathcal{O}_1^{st}(A^\infty, P^\infty) & = & \displaystyle\bigoplus_{\sum m_i \le r} \mathcal{O}_1^{car}(A^\infty, P^\infty).\bar{\phi}_{m_1}(\psi_1^{m_1})...\bar{\phi}_{m_t}(\psi_t)\bar{\phi}_{m_{t+1}}(X^{m_{t+1}}) \\ & = & \displaystyle\bigoplus_{m_0=0}^{r} \bigoplus_{\sum m_i = r-m_0} \mathcal{O}_1^{car}(A^\infty, P^\infty).\bar{\phi}_{m_1}(\psi_1^{m_1})...\bar{\phi}_{m_t}(\psi_t^{m_t})\bar{\phi}_{m_{t+1}}(X^{m_{t+1}}) \end{array}$$

Mais:

$$\mathcal{O}_1^{car}(A^\infty,P^\infty)\otimes_{A^\infty}\frac{\mathcal{J}_1^{[r]}(A^\infty,P^\infty)}{\mathcal{J}_1^{[r+1]}(A^\infty,P^\infty)} = \bigoplus_{\sum m_i=r}\mathcal{O}_1^{car}(A^\infty,P^\infty).\psi_0^{m_0}...\psi_t^{m_t}X^{m_{t+1}}$$

$$= \bigoplus_{m_0=0}^{r}\bigoplus_{\sum m_i=r-m_0}\Big(\mathcal{O}_1^{car}(A^\infty,P^\infty).\psi_0^{m_0}\Big).\psi_1^{m_1}...\psi_t^{m_t}X^{m_{t+1}}$$

et il suffit de montrer que la flèche $Id\otimes\bar{\phi}_{m_0}:\mathcal{O}_1^{car}(A^\infty,P^\infty)\otimes\psi_0^{m_0}\to\mathcal{O}_1^{car}(A^\infty,P^\infty)$ est un isomorphisme, ce qui est évident puisque $\bar{\phi}_{m_0}(\psi_0^{m_0})=\bar{\phi}_{m_0}(u^{m_0})$ est une unité dans $\mathcal{O}_1^{car}(A^\infty,P^\infty)$. Les autres cas sont similaires. □

2.2.3 Projection sur le site étale

On fixe maintenant X_2 un log-schéma fin log-lisse sur $(Spec\ W_2,\mathcal{L}(p))$ et tel que $X_1=X_2\times Spec\ \mathbf{F}_p$ est du type de Cartier sur $(Spec\ k,L)$. L'intégrité et la platitude étant automatiques, X_2 est aussi log-syntomique sur $(Spec\ W_2,\mathcal{L}(p))$. On note encore α le morphisme de topoï : $(\widetilde{X_2})_{syn}\to(\widetilde{X_2})_{ét}=(\widetilde{X_1})_{ét}$.

Corollaire 2.2.3.1 *Pour $0\leq r\leq p-1$ si $p\geq 3$, $r=0$ si $p=2$, on a des isomorphismes (dans la catégorie dérivée des faisceaux étales sur X_1):*

$$\begin{array}{rcl} S_1\otimes_{(\phi),k}\tau_{\leq r}R\alpha_*\Big(\mathcal{J}_1^{[r]}/\mathcal{J}_1^{[r+1]}\Big) & \overset{Id\otimes\bar{\phi}_r}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} & \tau_{\leq r}R\alpha_*\mathcal{O}_1^{st} \\ \tilde{S}_1\otimes_{(\phi),k}\tau_{\leq r}R\alpha_*\Big(\mathcal{J}_1^{[r]}/\mathcal{J}_1^{[r+1]}\Big) & \overset{Id\otimes\bar{\phi}_r}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} & \tau_{\leq r}R\alpha_*\tilde{\mathcal{O}}_1^{st} \\ \tau_{\leq r}R\alpha_*\Big(\mathcal{J}_1^{[r]}/\mathcal{J}_1^{[r+1]}\Big) & \overset{\bar{\phi}_r}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} & \tau_{\leq r}R\alpha_*\mathcal{O}_1^{HK} \end{array}$$

Preuve. — On ne traite que le cas de la base E_1, les autres cas étant similaires. Par projection sur $(\widetilde{X_1})_{ét}$, on déduit de (2.2.2.3) des isomorphismes pour $0\leq r\leq p-1$ si $p\geq 3$, $r=0$ si $p=2$:

$$R\alpha_*\Big(\mathcal{O}_1^{car}\otimes_{\mathcal{O}_1}(\mathcal{J}_1^{[r]}/\mathcal{J}_1^{[r+1]})\Big)\overset{Id\otimes\bar{\phi}_r}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} R\alpha_*\Big(F_r^{car}\mathcal{O}_1^{st}\Big) \qquad (1)$$

Etale-localement, on peut facilement relever X_2 en un log-schéma fin Y_2 log-lisse sur E_2 dont la fibre spéciale $Y_1=Y_2\times Spec\ \mathbf{F}_p$ est du type de Cartier sur E_1. L'hypothèse "du type de Cartier" ajoutée à (2.2.1.3) donne (étale-localement):

$$\begin{array}{rcl} R\alpha_*\Big(\mathcal{O}_1^{car}\otimes_{\mathcal{O}_1}(\mathcal{J}_1^{[r]}/\mathcal{J}_1^{[r+1]})\Big) & \simeq & 0\to S_1\otimes_{(\phi),k}(\frac{\mathcal{J}_{Y_1}^{[r]}}{\mathcal{J}_{Y_1}^{[r+1]}})\to S_1\otimes_{(\phi),k}(\frac{\mathcal{J}_{Y_1}^{[r-1]}}{\mathcal{J}_{Y_1}^{[r]}})\otimes_{\mathcal{O}_{Y_1}}\omega^1_{Y_1/E_1}\to\dots \\ & \simeq & S_1\otimes_{(\phi),k}R\alpha_*(\mathcal{J}_1^{[r]}/\mathcal{J}_1^{[r+1]}) \end{array}$$

et la flèche canonique $S_1 \otimes_{(\phi),k} \mathcal{J}_1^{[r]}/\mathcal{J}_1^{[r+1]} \to \mathcal{O}_1^{car} \otimes_{\mathcal{O}_1} \mathcal{J}_1^{[r]}/\mathcal{J}_1^{[r+1]}$ induit donc des isomorphismes (dans la catégorie dérivée):

$$S_1 \otimes_{(\phi),k} R\alpha_*(\mathcal{J}_1^{[r]}/\mathcal{J}_1^{[r+1]}) \xrightarrow{\sim} R\alpha_*\Big(\mathcal{O}_1^{car} \otimes_{\mathcal{O}_1} (\mathcal{J}_1^{[r]}/\mathcal{J}_1^{[r+1]})\Big) \qquad (2)$$

Par projection sur $(\widetilde{X_1})_{ét}$, on déduit de même de (2.2.2.2,(3)) et (2.2.1.3) pour $r \in \mathbf{N}$:

$$\begin{array}{rcl} S_1 \otimes_{(\phi),k} R\alpha_*(\bar{\mathcal{J}}_1^{[r]}/\bar{\mathcal{J}}_1^{[r+1]}) & \stackrel{\sim}{\to} & R\alpha_*\Big(\mathcal{O}_1^{car} \otimes_{\mathcal{O}_1} (\bar{\mathcal{J}}_1^{[r]}/\bar{\mathcal{J}}_1^{[r+1]})\Big) \\ & \overset{Id\otimes f_r^{HK}}{\stackrel{\sim}{\to}} & R\alpha_*(F_r^{car}\mathcal{O}_1^{st}/F_{r-1}^{car}\mathcal{O}_1^{st}) \end{array}$$

Mais:

$$S_1 \otimes_{(\phi),k} R\alpha_*(\bar{\mathcal{J}}_1^{[r]}/\bar{\mathcal{J}}_1^{[r+1]}) \simeq S_1 \otimes_{(\phi),k} \omega^r_{X_1/\bar{E}_1}[-r]$$

d'où $R^i\alpha_*(F_r^{car}\mathcal{O}_1^{st}/F_{r-1}^{car}\mathcal{O}_1^{st}) = 0$ pour $0 \leq i \leq r-1$, i.e. $R^i\alpha_*F_r^{car}\mathcal{O}_1^{st} = R^i\alpha_*F_{r+1}^{car}\mathcal{O}_1^{st}$ pour $0 \leq i \leq r$. On a donc:

$$R^i\alpha_*F_r^{car}\mathcal{O}_1^{st} = \varinjlim_{s\geq r} R^i\alpha_*F_s^{car}\mathcal{O}_1^{st} = R^i\alpha_*\varinjlim_{s\geq r} F_s^{car}\mathcal{O}_1^{st} \stackrel{(2.2.2.2,(2))}{=} R^i\alpha_*\mathcal{O}_1^{st}$$

pour $0 \leq i \leq r$, c'est-à-dire:

$$\tau_{\leq r}R\alpha_*F_r^{car}\mathcal{O}_1^{st} \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq r}R\alpha_*\mathcal{O}_1^{st} \qquad (3)$$

En assemblant (1), (2) et (3), on a le résultat. □

Corollaire 2.2.3.2 *On a des isomorphismes pour* $0 \leq i \leq r \leq p-1$ *si* $p \geq 3$ *(*$i = r = 0$ *si* $p = 2$*):*

$$\begin{array}{rcl} S_1 \otimes_{(\phi),k} H^i((X_1)_{syn}, \mathcal{J}_1^{[r]}/\mathcal{J}_1^{[r+1]}) & \xrightarrow[\sim]{Id\otimes\bar{\phi}_r} & H^i((X_1)_{syn}, \mathcal{O}_1^{st}) \\ \tilde{S}_1 \otimes_{(\phi),k} H^i((X_n)_{syn}, \mathcal{J}_1^{[r]}/\mathcal{J}_1^{[r+1]}) & \xrightarrow[\sim]{Id\otimes\bar{\phi}_r} & H^i((X_1)_{syn}, \tilde{\mathcal{O}}_1^{st}) \\ H^i((X_1)_{syn}, \mathcal{J}_1^{[r]}/\mathcal{J}_1^{[r+1]}) & \xrightarrow[\sim]{\bar{\phi}_r} & H^i((X_1)_{syn}, \mathcal{O}_1^{HK}) \end{array}$$

Remarque: Dans les corollaires ci-dessus, les termes de l'isomorphisme ne dépendent que de X_1, mais l'isomorphisme lui-même dépend bien sûr de X_2. On remarquera qu'on ne dispose pas, en général, de relèvement global log-lisse de X_2 sur E_2, ni même de X_1 sur E_1 (ce qui est une différence majeure avec le cas classique ([FM], [DI]) et sa généralisation par Kato ([Ka2],4.12)).

Supposons en plus que le schéma $\dot{X}_2$ est propre sur $Spec\, W_2$, les $H^i((X_1)_{syn}, \mathcal{O}_1^{HK}) = H^i((X_1)_{ét}, \omega^{\cdot}_{X_1/\bar{E}_1})$ sont alors des k-espaces vectoriels de dimension finie (EGA III,3.2.1) et on peut dans ce cas résumer l'ensemble des résultats précédents de la façon suivante:

Corollaire 2.2.3.3 *Soit X_2 un log-schéma fin propre, log-lisse sur $(Spec\, W_2, \mathcal{L}(p))$ et tel que $X_1 = X_2 \times Spec\ \mathbf{F}_p$ est du type de Cartier sur $(Spec\ k, L)$. Pour $0 \leq i \leq p-1$ si $p \geq 3$ ($i = 0$ si $p = 2$), les $H^i((X_1)_{syn}, \mathcal{O}_1^{st})$ (resp. $H^i((X_1)_{syn}, \tilde{\mathcal{O}}_1^{st})$, resp. $H^i((X_1)_{syn}, \mathcal{O}_1^{HK})$) sont des S_1-modules libres (resp. $\tilde{S}_1$-modules libres, resp. k-espaces vectoriels) de rang fini. De plus, les projections $\mathcal{O}_1^{st} \to \tilde{\mathcal{O}}_1^{st}$ et $\mathcal{O}_1^{st} \to \mathcal{O}_1^{HK}$ induisent des isomorphismes pour $0 \leq i \leq p-1$ si $p \geq 3$, $i = 0$ si $p = 2$:*

$$\begin{array}{rcl} \tilde{S}_1 \otimes_{S_1} H^i((X_1)_{syn}, \mathcal{O}_1^{st}) & \xrightarrow{\sim} & H^i((X_1)_{syn}, \tilde{\mathcal{O}}_1^{st}) \\ k \otimes_{\tilde{S}_1} H^i((X_1)_{syn}, \tilde{\mathcal{O}}_1^{st}) & \xrightarrow{\sim} & H^i((X_1)_{syn}, \mathcal{O}_1^{HK}) \end{array}$$

2.2.4 Réduction sur la base $\tilde{E}_1$

Dans cette section et les suivantes, on fixe un log-schéma fin X_2 propre et log-lisse sur $(Spec\ W_2, \mathcal{L}(p))$ et tel que $X_1 = X_2 \times Spec\ \mathbf{F}_p$ est du type de Cartier sur $(Spec\ k, L)$.

Lemme 2.2.4.1 *Pour $r \in \mathbf{N}$, les morphismes de faisceaux sur $(Spec\ k, L)_{syn}$: $\mathcal{J}_1^{[r]} \to \tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]}$ sont surjectifs. Pour $0 \leq r_1 + r_2 \leq p$, ils induisent des isomorphismes:*

$$\mathcal{J}_1^{[r_1]}/\mathcal{J}_1^{[r_1+r_2]} \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathcal{J}}_1^{[r_1]}/\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r_1+r_2]}$$

Preuve. — Reprenons les notations de la preuve de (2.2.2.1): il suffit de montrer qu'on a des surjections $\mathcal{J}_1^{[r]}(A^\infty, P^\infty) \to \tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]}(A^\infty, P^\infty)$ et des isomorphismes, pour $0 \leq r_1 + r_2 \leq p$:

$$\mathcal{J}_1^{[r_1]}(A^\infty, P^\infty)/\mathcal{J}_1^{[r_1+r_2]}(A^\infty, P^\infty) \simeq \tilde{\mathcal{J}}_1^{[r_1]}(A^\infty, P^\infty)/\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r_1+r_2]}(A^\infty, P^\infty)$$

Mais $\tilde{\mathcal{O}}_1^{st}(A^\infty, P^\infty) = \mathcal{B} \otimes_{k[T_0,\dots,T_t]} (k < T_0, ..., T_t, X > /K^{[p]})$ et $\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]}(A^\infty, P^\infty) = \mathcal{B} \otimes_{k[T_0,\dots,T_t]} (J/K^{[p]})^{[r]}$. Pour $0 \leq r \leq p$, on a donc $\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]}(A^\infty, P^\infty) = \mathcal{B} \otimes_{k[T_0,\dots,T_t]} (J^{[r]}/K^{[p]})$ et le résultat est clair. $\square$

Pour $0 \leq r \leq p-1$ si $p \geq 3$, $r = 0$ si $p = 2$, on peut donc définir $\tilde{\phi}_r : \tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]} \to \tilde{\mathcal{O}}_1^{st}$ comme le composé:

$$\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]} \to \tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]}/\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r+1]} \xleftarrow{\sim} \mathcal{J}_1^{[r]}/\mathcal{J}_1^{[r+1]} \xrightarrow{\bar{\phi}_r} \mathcal{O}_1^{st} \to \tilde{\mathcal{O}}_1^{st}$$

Rappelons que dans ([Br1],6), on a défini sur $\mathcal{O}_n^{st}$ une dérivation W_n-linéaire N telle que $N\phi = p\phi N$. Sur S_n, c'est l'unique dérivation W_n-linéaire (encore notée) N compatible aux puissances divisées telle que $N(u) = -u$. On vérifie que $N(\mathcal{J}_n^{[r]}) \subset \mathcal{J}_n^{[r-1]}$ et $N\phi_r = \phi^{r-1}N|_{\mathcal{J}_n^{[r]}}$.

Lemme 2.2.4.2 *On a une suite exacte de faisceaux sur $(Spec\ k, L)_{syn}$:*

$$0 \longrightarrow \sum_{i \geq p} \gamma_i(u).\mathcal{O}_1^{st} \longrightarrow \mathcal{O}_1^{st} \longrightarrow \tilde{\mathcal{O}}_1^{st} \longrightarrow 0$$

Preuve. — Evident à partir des formules donnant $\mathcal{O}_1^{st}(A^\infty, P^\infty)$ et $\tilde{\mathcal{O}}_1^{st}(A^\infty, P^\infty)$ dans la preuve de (2.2.2.2). $\square$

Puisque $N(\sum_{i\geq p}\gamma_i(u).\mathcal{O}_1^{st}) \subset \sum_{i\geq p}\gamma_i(u).\mathcal{O}_1^{st}$, l'opérateur N induit un opérateur $\tilde{N} : \tilde{\mathcal{O}}_1^{st} \to \tilde{\mathcal{O}}_1^{st}$ tel que $\tilde{N}(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]}) \subset \tilde{\mathcal{J}}_1^{[r-1]}$ $(r \in \mathbf{N}^*)$.

Remarque: Dans ([HK],3.6), Hyodo et Kato définissent un autre opérateur de monodromie sur $\mathcal{O}_n^{st}$. En utilisant (D.1), on peut montrer que cet opérateur est l'opposé de celui défini par voie syntomique sur $\mathcal{O}_n^{st}$: par exemple sa définition donne $N(u) = u$.

On rappelle (2.1.2) que S_n est muni d'une filtration positive décroissante $Fil^r S_n = \sum_{i\geq r}\gamma_i(u-p).S_n$ et, pour $0 \leq r \leq p-1$, de Frobenius $\phi_r : Fil^r S_n \to S_n$ tels que $\phi_r(\gamma_i(u-p)) = p^{i-r}/i!.c^i$ si $i \geq r$ $(c = (p-1)!\gamma_p(u) - 1)$. Si $n = 1$, ces structures correspondent bien sûr aux structures précédentes induites sur la cohomologie (en degré 0 !) du log-schéma $(Spec\ W_2, \mathcal{L}(p))$.

Jusqu'à la fin de cette section, on se fixe un entier $r \in \{0, ..., p-2\}$ et on renvoie à l'appendice A pour la définition des catégories $\underline{\mathcal{M}}_k^r$ et $\underline{\tilde{\mathcal{M}}}_k^r$. Pour alléger les notations, si $\mathcal{F}$ est un faisceau sur $(Spec\ W_2, \mathcal{L}(p))_{syn}$, on note $H^i(\mathcal{F})$ au lieu de $H^i((X_1)_{syn}, \mathcal{F})$. Pour tout $i \in \mathbf{N}$, soit $Fil^r H^i(\mathcal{O}_1^{st})$ l'image de $H^i(\mathcal{J}_1^{[r]})$ dans $H^i(\mathcal{O}_1^{st})$ induit par l'inclusion $\mathcal{J}_1^{[r]} \hookrightarrow \mathcal{O}_1^{st}$. On vérifie facilement les faits suivants:

- Pour tout $i \in \mathbf{N}$, $Fil^r H^i(\mathcal{O}_1^{st})$ contient $Fil^r S_1.H^i(\mathcal{O}_1^{st})$ (car si $s \in Fil^r S_1$, les morphismes $\mathcal{O}_1^{st} \xrightarrow{s.Id} \mathcal{O}_1^{st}$ se factorisent par $\mathcal{J}_1^{[r]}$).

- Pour tout $i \in \mathbf{N}$, pour tout $s \in Fil^r S_1$, pour tout $x \in H^i(\mathcal{J}_1^{[r]})$, on a $\phi_r(s.x) = \phi_r(s).\phi(x)$ (car le diagramme:
$$\begin{array}{ccccc} & \mathcal{O}_1^{st} & \xrightarrow{s.Id} & \mathcal{J}_1^{[r]} & \\ \phi_r(s).Id & \downarrow & & \downarrow & \phi_r \\ & \mathcal{O}_1^{st} & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{O}_1^{st} & \end{array}$$
est commutatif). En particulier, $\phi_r(u^r.x) = c^r.\phi(x)$, d'où finalement $c^r.\phi_r(s.x) = \phi_r(s).\phi_r(u^r.x)$ (voir Appendice A).

- Pour tout $i \in \mathbf{N}$, pour tout $s \in S_1$, pour tout $x \in H^i(\mathcal{O}_1^{st})$, $N(s.x) = N(s).x + s.N(x)$ (car $N \circ s.Id : \mathcal{O}_1^{st} \to \mathcal{O}_1^{st}$ est égal à $N(s).Id + (s.Id) \circ N$).

- Pour tout $i \in \mathbf{N}$, $u.N\Big(Fil^r H^i(\mathcal{O}_1^{st})\Big) \subset Fil^r H^i(\mathcal{O}_1^{st})$ (car le diagramme:
$$\begin{array}{ccccc} & \mathcal{J}_1^{[r]} & \hookrightarrow & \mathcal{O}_1^{st} & \\ (u.Id)\circ N & \downarrow & & \downarrow & (u.Id)\circ N \\ & \mathcal{J}_1^{[r]} & \hookrightarrow & \mathcal{O}_1^{st} & \end{array}$$

est commutatif !).

- Pour tout $i \in \mathbf{N}$, le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{cccccc} & H^i(\mathcal{J}_1^{[r]}) & \xrightarrow{\phi_r} & H^i(\mathcal{O}_1^{st}) & \\ {\scriptstyle (u.Id)\circ N} & \downarrow & & \downarrow & {\scriptstyle (c.Id)\circ N} \\ & H^i(\mathcal{J}_1^{[r]}) & \xrightarrow{\phi_r} & H^i(\mathcal{O}_1^{st}) & \end{array}$$

(car le diagramme correspondant avec les faisceaux est commutatif).

On a des assertions analogues avec $H^i(\tilde{\mathcal{O}}_1^{st})$, $H^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]})$, $\tilde{\phi}_r$ et $\tilde{N}$ qu'on laisse au lecteur le soin d'écrire. On note les objets de $\underline{\mathcal{M}}_k^r$ (resp. $\underline{\tilde{\mathcal{M}}}_k^r$) sous la forme $(\mathcal{M}, Fil^r\mathcal{M}, \phi_r, N)$ (resp. $(\tilde{\mathcal{M}}, Fil^r\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{\phi}_r, \tilde{N})$) et on rappelle que le foncteur $\mathcal{M} \mapsto \tilde{S}_1 \otimes_{S_1} \mathcal{M}$ établit une équivalence de catégories entre $\underline{\mathcal{M}}_k^r$ et $\underline{\tilde{\mathcal{M}}}_k^r$ (Appendice A). A partir de (2.2.3.2) et (2.2.3.3) (et au vu des propriétés déjà vérifiées), il est clair que $\left(H^i(\mathcal{O}_1^{st}), H^i(\mathcal{J}_1^{[r]}), \phi_r, N\right)$ (resp. $\left(H^i(\tilde{\mathcal{O}}_1^{st}), H^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]}), \tilde{\phi}_r, \tilde{N}\right)$) est un objet de $\underline{\mathcal{M}}_k^r$ (resp. $\underline{\tilde{\mathcal{M}}}_k^r$) si et seulement si:

- la flèche $H^i(\mathcal{J}_1^{[r]}) \to H^i(\mathcal{O}_1^{st})$ (resp. $H^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]}) \to H^i(\tilde{\mathcal{O}}_1^{st})$) est injective (i.e. $H^i(\mathcal{J}_1^{[r]}) \simeq Fil^r H^i(\mathcal{O}_1^{st})$)
- la flèche $H^i(\mathcal{J}_1^{[r]}) \to H^i(\mathcal{J}_1^{[r]}/\mathcal{J}_1^{[r+1]})$ (resp. $H^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]}) \to H^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]}/\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r+1]})$) est surjective.

On a déjà:

Proposition 2.2.4.3 *Pour $0 \leq i \leq r \leq p-2$, $\left(H^i(\mathcal{O}_1^{st}), H^i(\mathcal{J}_1^{[r]}), \phi_r, N\right)$ est un objet de $\underline{\mathcal{M}}_k^r$ si et seulement si $\left(H^i(\tilde{\mathcal{O}}_1^{st}), H^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]}), \tilde{\phi}_r, \tilde{N}\right)$ est un objet de $\underline{\tilde{\mathcal{M}}}_k^r$. Si tel est le cas, ces deux objets se correspondent par l'équivalence de catégories entre $\underline{\mathcal{M}}_k^r$ et $\underline{\tilde{\mathcal{M}}}_k^r$.*

Preuve. — Par (2.2.3.3), les flèches $H^i(\mathcal{O}_1^{st}) \to H^i(\tilde{\mathcal{O}}_1^{st})$ sont surjectives ($0 \leq i \leq p-2$). Pour $0 \leq r \leq p-2$, les deux diagrammes commutatifs de faisceaux:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ 0 & \to & Ker & = & Ker & \to & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \mathcal{J}_1^{[r]} & \to & \mathcal{O}_1^{st} & \to & \mathcal{O}_1^{st}/\mathcal{J}_1^{[r]} & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \to & \tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]} & \to & \tilde{\mathcal{O}}_1^{st} & \to & \tilde{\mathcal{O}}_1^{st}/\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]} & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \to & Ker & = & Ker & \to & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathcal{J}_1^{[r+1]} & \to & \mathcal{J}_1^{[r]} & \to & \mathcal{J}_1^{[r]}/\mathcal{J}_1^{[r+1]} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
0 & \to & \tilde{\mathcal{J}}_1^{[r+1]} & \to & \tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]} & \to & \tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]}/\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r+1]} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

ont leurs lignes horizontales et verticales exactes par (2.2.4.1). Ils donnent lieu à des suites exactes longues dans les deux sens:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \to & H^i(Ker) & = & H^i(Ker) & \to & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\dots & \to & H^i(\mathcal{J}_1^{[r]}) & \to & H^i(\mathcal{O}_1^{st}) & \to & H^i(\mathcal{O}_1^{st}/\mathcal{J}_1^{[r]}) & \to & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
\dots & \to & H^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]}) & \to & H^i(\tilde{\mathcal{O}}_1^{st}) & \to & H^i(\tilde{\mathcal{O}}_1^{st}/\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]}) & \to & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \to & H^i(Ker) & = & H^i(Ker) & \to & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\dots & \to & H^i(\mathcal{J}_1^{[r+1]}) & \to & H^i(\mathcal{J}_1^{[r]}) & \to & H^i(\mathcal{J}_1^{[r]}/\mathcal{J}_1^{[r+1]}) & \to & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
\dots & \to & H^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r+1]}) & \to & H^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]}) & \to & H^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]}/\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r+1]}) & \to & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & 0 & &
\end{array}$$

Soit $i \in \{0, ..., r\}$ et supposons que $\left(H^i(\mathcal{O}_1^{st}), H^i(\mathcal{J}_1^{[r]}), \phi_r, N\right)$ est un objet de $\underline{\mathcal{M}}_k^r$. Dans le premier diagramme au cran $i-1$, la flèche $H^{i-1}(\mathcal{O}_1^{st}) \to H^{i-1}(\mathcal{O}_1^{st}/\mathcal{J}_1^{[r]})$ est surjective ce qui entraine la même chose pour la flèche $H^{i-1}(\tilde{\mathcal{O}}_1^{st}) \to H^{i-1}(\tilde{\mathcal{O}}_1^{st}/\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]})$, donc $H^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]})$ s'injecte dans $H^i(\tilde{\mathcal{O}}_1^{st})$. Le même raisonnement dans le deuxième diagramme au cran i montre que la flèche $H^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]}) \to H^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]}/\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r+1]})$ est aussi surjective, et $\left(H^i(\tilde{\mathcal{O}}_1^{st}), H^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]}), \tilde{\phi}_r, \tilde{N}\right)$ est un objet de $\underline{\tilde{\mathcal{M}}}_k^r$.
Soit $i \in \{0, ..., r\}$ et supposons que $\left(H^i(\tilde{\mathcal{O}}_1^{st}), H^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]}), \tilde{\phi}_r, \tilde{N}\right)$ est un objet de $\underline{\tilde{\mathcal{M}}}_k^r$. Dans le premier diagramme au cran $i-1$, la flèche $H^{i-1}(\tilde{\mathcal{O}}_1^{st}) \to H^{i-1}(\tilde{\mathcal{O}}_1^{st}/\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]})$ est surjective ce qui entraine clairement la même chose pour la flèche $H^{i-1}(\mathcal{O}_1^{st}) \to$

$H^{i-1}(\mathcal{O}_1^{st}/\mathcal{J}_1^{[r]})$, donc $H^i(\mathcal{J}_1^{[r]})$ s'injecte dans $H^i(\mathcal{O}_1^{st})$. De plus, une chasse au diagramme triviale sur le premier diagramme au cran i montre que la flèche $H^i(\mathcal{J}_1^{[r]}) \to H^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]})$ est surjective. Comme la flèche $H^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]}) \to H^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]}/\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r+1]})$ est aussi surjective, en regardant le deuxième diagramme au cran i, on en déduit la même chose pour la flèche $H^i(\mathcal{J}_1^{[r]}) \to H^i(\mathcal{J}_1^{[r]}/\mathcal{J}_1^{[r+1]})$ et $\left(H^i(\mathcal{O}_1^{st}), H^i(\mathcal{J}_1^{[r]}), \phi_r, N\right)$ est bien un objet de $\underline{\mathcal{M}}_k^r$. La dernière assertion est claire. □

2.2.5 Quelques lemmes

On garde les hypothèses de (2.2.4).

Lemme 2.2.5.1 *Pour $0 \leq k+l \leq p$ et $r \in \mathbf{N}$, on a des suites exactes courtes de faisceaux sur $(Spec\ k, L)_{syn}$:*

$$0 \longrightarrow u^{p-k}.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r-p+k]} \longrightarrow u^l.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]} \xrightarrow{u^k.Id} u^{k+l}.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow u.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r-1]} \longrightarrow \tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]} \longrightarrow \bar{\mathcal{J}}_1^{[r]} \longrightarrow 0$$

Preuve. — Avec les notations de (2.2.2.1), on a:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]}(A^\infty, P^\infty) &= \mathcal{B} \otimes_{k[T_0,...,T_t]} (J/K^{[p]})^{[r]} \\
&= \mathcal{B}/(f_0, ..., f_t) \otimes_{k[T_0,...,T_t]/T_i^p} (J/K^{[p]})^{[r]} \\
\bar{\mathcal{J}}_1^{[r]}(A^\infty, P^\infty) &= \mathcal{B} \otimes_{k[T_0,...,T_t]} (J/K)^{[r]} \\
&= \mathcal{B}/(f_0, ..., f_t) \otimes_{k[T_0,...,T_t]/T_i^p} (J/K)^{[r]}
\end{aligned}$$

où $\mathcal{B}/(f_0, ..., f_t)$ est plat sur $k[T_0, ..., T_t]/T_i^p$ et où:

$$\begin{aligned}
(J/K^{[p]})^{[r]} &= \bigoplus_{\substack{\sum m_i \geq r \\ 0 \leq m_0 \leq p-1}} k.\gamma_{m_0}(T_0)...\gamma_{m_t}(T_t).\gamma_{m_{t+1}}(X) \\
&= \bigoplus_{m_0=0}^{p-1} T_0^{m_0}.\Big(\bigoplus_{\sum m_i \geq r-m_0} k.\gamma_{m_1}(T_1)...\gamma_{m_t}(T_t).\gamma_{m_{t+1}}(X)\Big) \\
(J/K)^{[r]} &= \bigoplus_{\sum m_i \geq r} k.\gamma_{m_1}(T_1)...\gamma_{m_t}(T_t).\gamma_{m_{t+1}}(X)
\end{aligned}$$

et le résultat est clair puisque $u = T_0.(1+X)^{-1}$. □

Lemme 2.2.5.2 *Pour $0 \leq i \leq r \leq p-1$, les flèches $\tilde{\mathcal{J}}_1^{[i]} \xrightarrow{u^{r-i}.Id} \tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]}$ et $\tilde{\mathcal{J}}_1^{[i+1]} \xrightarrow{u^{r-i}.Id} \tilde{\mathcal{J}}_1^{[r+1]}$ induisent des isomorphismes:*

$$H^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[i]}/\tilde{\mathcal{J}}_1^{[i+1]}) \xrightarrow{\sim} H^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]}/\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r+1]})$$

Preuve. — De (2.2.5.1), on déduit des isomorphismes $\bar{\mathcal{J}}_1^{[r]} \xrightarrow{\sim} u^k.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]}/u^{k+1}.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r-1]}$ pour $0 \leq k \leq p-1$ et $\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r_1]}/\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r_2]} \xrightarrow{\sim} u^k.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r_1]}/u^k.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r_2]}$ pour $r_1 \leq r_2 \leq p-k$. En particulier, on a $\bar{\mathcal{J}}_1^{[i+\delta]} \simeq u^{r-i-\delta}.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[i+\delta]}/u^{r-i-\delta+1}.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[i+\delta]}$ pour $0 \leq \delta \leq r-i$ d'où $\tilde{\mathcal{J}}_1^{[i]}/\tilde{\mathcal{J}}_1^{[i+1]} \xrightarrow{\sim} u^{r-i}.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[i]}/u^{r-i}.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[i+1]}$. On vérifie également qu'on a des suites exactes courtes $(0 \leq \delta \leq r-i-1)$:

$$0 \to \frac{u^{r-i-\delta}.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[i+\delta]}}{u^{r-i-\delta}.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[i+\delta+1]}} \to \frac{u^{r-i-\delta-1}.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[i+\delta+1]}}{u^{r-i-\delta-1}.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[i+\delta+2]}} \to \frac{\bar{\mathcal{J}}_1^{[i+\delta+1]}}{\bar{\mathcal{J}}_1^{[i+\delta+2]}} \to 0$$

Mais $H^i(\bar{\mathcal{J}}_1^{[i+\delta+1]}/\bar{\mathcal{J}}_1^{[i+\delta+2]}) = 0$ car $R\alpha_*(\bar{\mathcal{J}}_1^{[i+\delta+1]}/\bar{\mathcal{J}}_1^{[i+\delta+2]}) = \omega^{i+\delta+1}_{X_1/\bar{E}_1}[-(i+\delta+1)]$, d'où des isomorphismes:

$$\begin{aligned} H^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[i]}/\tilde{\mathcal{J}}_1^{[i+1]}) &\simeq H^i(u^{r-i}.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[i]}/u^{r-i}.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[i+1]}) \simeq H^i(u^{r-i-1}.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[i+1]}/u^{r-i-1}.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[i+2]}) \\ &\simeq H^i(u^{r-i-2}.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[i+2]}/u^{r-i-2}.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[i+3]}) \simeq ... \simeq H^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]}/\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r+1]}) \end{aligned}$$

□

Remarque: On déduit de (2.2.3.2) et (2.2.4.1) que, pour $0 \leq i \leq r \leq p-1$ si $p \geq 3$, $i = r = 0$ si $p = 2$, $dim_k H^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]}/\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r+1]}) = dim_k H^i(\mathcal{O}_1^{HK})$.

Lemme 2.2.5.3 *Pour $0 \leq i \leq p-1$ si $p \geq 3$, $i = 0$ si $p = 2$ et pour $0 \leq k+l \leq p$, on a des suites exactes courtes:*

$$0 \longrightarrow H^i(u^{p-k}.\tilde{\mathcal{O}}_1^{st}) \longrightarrow H^i(u^l.\tilde{\mathcal{O}}_1^{st}) \xrightarrow{u^k.Id} H^i(u^{k+l}.\tilde{\mathcal{O}}_1^{st}) \longrightarrow 0$$

Preuve. — On part des suites exactes courtes de faisceaux (2.2.5.1):

$$0 \longrightarrow u^{p-k}.\tilde{\mathcal{O}}_1^{st} \longrightarrow u^l.\tilde{\mathcal{O}}_1^{st} \xrightarrow{u^k.Id} u^{k+l}.\tilde{\mathcal{O}}_1^{st} \longrightarrow 0$$

Commençons avec k=1: on fait une récurrence sur i. Pour $i = 0$, on a à priori seulement des suites exactes:

$$0 \longrightarrow H^0(u^{p-1}.\tilde{\mathcal{O}}_1^{st}) \longrightarrow H^0(u^l.\tilde{\mathcal{O}}_1^{st}) \xrightarrow{u.Id} H^0(u^{1+l}.\tilde{\mathcal{O}}_1^{st})$$

Soit $h^0(\mathcal{O}_1^{HK})$ la dimension sur k de $H^0(\mathcal{O}_1^{HK})$. Les $H^0(u^l.\tilde{\mathcal{O}}_1^{st})$ étant tous de dimension finie sur k (car inclus dans $H^0(\tilde{\mathcal{O}}_1^{st})$ qui est de dimension finie par (2.2.3.3)), notons $h^0(u^l.\tilde{\mathcal{O}}_1^{st})$ leur dimension. On a des inégalités pour $0 \leq l \leq p-2$: $h^0(u^l.\tilde{\mathcal{O}}_1^{st}) \leq h^0(u^{1+l}.\tilde{\mathcal{O}}_1^{st}) + h^0(u^{p-1}.\tilde{\mathcal{O}}_1^{st})$, soit en sommant: $h^0(\tilde{\mathcal{O}}_1^{st}) \leq ph^0(u^{p-1}.\tilde{\mathcal{O}}_1^{st}) = ph^0(\mathcal{O}_1^{HK})$. Mais, par (2.2.3.3), $h^0(\tilde{\mathcal{O}}_1^{st}) = ph^0(\mathcal{O}_1^{HK})$, d'où pour $0 \leq l \leq p-2$: $h^0(u^l.\tilde{\mathcal{O}}_1^{st}) = h^0(u^{1+l}.\tilde{\mathcal{O}}_1^{st}) + h^0(u^{p-1}.\tilde{\mathcal{O}}_1^{st})$ c'est-à-dire une suite exacte courte avec les H^0. On a alors des suites exactes:

$$0 \longrightarrow H^1(u^{p-1}.\tilde{\mathcal{O}}_1^{st}) \longrightarrow H^1(u^l.\tilde{\mathcal{O}}_1^{st}) \xrightarrow{u.Id} H^1(u^{1+l}.\tilde{\mathcal{O}}_1^{st})$$

et le même raisonnement donne la surjectivité à droite. La récurrence se poursuit ainsi jusqu'aux H^{p-1} si $p \geq 3$. Pour $k \geq 2$, la flèche $H^i(u^l.\tilde{\mathcal{O}}_1^{st}) \xrightarrow{u^k.Id} H^i(u^{k+l}.\tilde{\mathcal{O}}_1^{st})$ est surjective car composée des flèches toutes surjectives:

$$H^i(u^l.\tilde{\mathcal{O}}_1^{st}) \xrightarrow{u.Id} H^i(u^{1+l}.\tilde{\mathcal{O}}_1^{st}) \xrightarrow{u.Id} H^i(u^{2+l}.\tilde{\mathcal{O}}_1^{st}) \xrightarrow{u.Id} \dots$$

□

Remarque: On a donc aussi un début de suite exacte pour $p \geq 3$:

$$0 \longrightarrow H^p(u^{p-k}.\tilde{\mathcal{O}}_1^{st}) \longrightarrow H^p(u^l.\tilde{\mathcal{O}}_1^{st}) \xrightarrow{u^k.Id} H^p(u^{k+l}.\tilde{\mathcal{O}}_1^{st})$$

Lemme 2.2.5.4 *Pour $k \in \mathbf{N}$ et $0 \leq i \leq k$, on a $H^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[p+k]}) = 0$.*

Preuve. — Le morphisme de topoï $\alpha : (X_1)_{syn}^{\sim} \rightarrow (X_1)_{\acute{e}t}^{\sim}$ donne lieu à une suite spectrale $H^i((X_1)_{\acute{e}t}, R^j\alpha_*\tilde{\mathcal{J}}_1^{[p+k]}) \Rightarrow H^{i+j}((X_1)_{syn}, \tilde{\mathcal{J}}_1^{[p+k]})$ où $R^j\alpha_*\tilde{\mathcal{J}}_1^{[p+k]}$ est le faisceau sur $(X_1)_{\acute{e}t}$ associé à $\Big(U_1 \mapsto H^j((U_1)_{syn}, \tilde{\mathcal{J}}_1^{[p+k]}) = H^j((U_1/\tilde{E}_1)_{cris}, \mathcal{J}_{U_1/\tilde{E}_1}^{[p+k]})\Big)$. Etale-localement, on peut facilement relever X_1 en un log-schéma fin Y_1 log-lisse sur $\tilde{E}_1$ et on a alors $R\alpha_*\tilde{\mathcal{J}}_1^{[p+k]} \simeq \mathcal{J}_{Y_1}^{[p+k-.]} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_1}} \omega^{\cdot}_{Y_1/\tilde{E}_1}$ (en convenant que $\mathcal{J}_{Y_1}^{[r]} = \mathcal{O}_{Y_1}$ si $r \leq 0$). Mais $\mathcal{J}_{Y_1}^{[r]} = 0$ dès que $r \geq p$ puisque $\gamma_r(u) = 0$ pour $r \geq p$, donc $R^j\alpha_*\tilde{\mathcal{J}}_1^{[p+k]} = 0$ pour $0 \leq j \leq k$. En particulier, $H^i((X_1)_{\acute{e}t}, R^j\alpha_*\tilde{\mathcal{J}}_1^{[p+k]}) = 0$ pour $0 \leq i+j \leq k$ d'où le résultat. □

2.2.6 Etude sur la base $\tilde{E}_1$

Pour pouvoir raisonner avec des dimensions, on aura besoin du lemme:

Lemme 2.2.6.1 *Pour $i \in \mathbf{N}$, $r \in \mathbf{N}$ et $0 \leq k \leq p-1$, les $H^i(u^k.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]})$ sont des k-espaces vectoriels de dimension finie.*

Preuve. — Si l'on a une suite exacte de faisceaux sur $(X_1)_{syn}$: $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$ telle que deux d'entre eux ont toute leur cohomologie de dimension finie, il est clair qu'il en est de même du troisième en prenant la suite exacte longue associée. Pour $i \in \mathbf{N}$ et $r \in \mathbf{N}$, les k-espaces vectoriels $H^i(\bar{\mathcal{J}}_1^{[r]})$ sont de dimension finies car égaux à $H^i\Big((X_1)_{\acute{e}t}, \sigma_{\geq r}\omega^{\cdot}_{X_1/\bar{E}_1}\Big)$ où $\sigma_{\geq r}\omega^{\cdot}_{X_1/\bar{E}_1} = 0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow \omega^r_{X_1/\bar{E}_1} \rightarrow \dots$. De (2.2.5.1), on déduit des suites exactes courtes pour $0 \leq k \leq p-1$ et $r \in \mathbf{N}$:

$$0 \longrightarrow u^{k+1}.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r-1]} \longrightarrow u^k.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]} \longrightarrow \bar{\mathcal{J}}_1^{[r]} \longrightarrow 0$$

et la cohomologie de $u^k.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]}$ est donc de dimension finie si et seulement si celle de $u^{k+1}.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r-1]}$ l'est. Comme $u^{p-1}\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r-p+k+1]} \simeq \bar{\mathcal{J}}_1^{[r-p+k+1]}$, on a le résultat. □

On a alors:

Proposition 2.2.6.2 *Pour* $0 \leq i \leq r \leq p-1$ *si* $p \geq 3$, $i = r = 0$ *si* $p = 2$, *on a des suites exactes courtes:*

$$0 \longrightarrow H^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r+1]}) \longrightarrow H^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]}) \longrightarrow H^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]}/\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r+1]}) \longrightarrow 0$$

Preuve. — On donne la preuve pour $p = 3$, laissant au lecteur les (quelques) modifications pour $p = 2$. Si $H^i(\mathcal{F})$ est de dimension finie, notons $h^i(\mathcal{F})$ sa dimension. Le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \to & u^{p-1}\tilde{\mathcal{O}}_1^{st} & \overset{\sim}{\to} & u^{p-1}\tilde{\mathcal{O}}_1^{st} & \to & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]} & \to & \tilde{\mathcal{O}}_1^{st} & \to & \tilde{\mathcal{O}}_1^{st}/\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \wr & & \\
0 & \to & u.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]} & \to & u.\tilde{\mathcal{O}}_1^{st} & \to & u.\tilde{\mathcal{O}}_1^{st}/u.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

a ses lignes et colonnes exactes par (2.2.5.1). Il donne lieu à des suites exactes longues (dans les deux sens):

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \to & H^i(u^{p-1}\tilde{\mathcal{O}}_1^{st}) & \overset{\sim}{\to} & H^i(u^{p-1}\tilde{\mathcal{O}}_1^{st}) & \to & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\dots & \to & H^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]}) & \to & H^i(\tilde{\mathcal{O}}_1^{st}) & \to & H^i(\tilde{\mathcal{O}}_1^{st}/\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]}) & \to & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \wr & & \\
\dots & \to & H^i(u.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]}) & \to & H^i(u.\tilde{\mathcal{O}}_1^{st}) & \to & H^i(u.\tilde{\mathcal{O}}_1^{st}/u.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]}) & \to & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Les applications $H^i(u^{p-1}\tilde{\mathcal{O}}_1^{st}) \to H^i(\tilde{\mathcal{O}}_1^{st})$ étant injectives pour $0 \leq i \leq p$ (voir 2.2.5.3 et la remarque qui suit), une chasse au diagramme facile donne des suites exactes courtes:

$$0 \longrightarrow H^i(u^{p-1}\tilde{\mathcal{O}}_1^{st}) \longrightarrow H^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]}) \longrightarrow H^i(u.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]}) \longrightarrow 0$$

pour $0 \leq i \leq p-1$ (et $0 \leq r \leq p-1$). La suite exacte courte $0 \to u.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]} \to \tilde{\mathcal{J}}_1^{[r+1]} \to \bar{\mathcal{J}}_1^{[r+1]} \to 0$ donne une suite exacte longue:

$$\dots \longrightarrow H^i(u.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]}) \longrightarrow H^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r+1]}) \longrightarrow H^i(\bar{\mathcal{J}}_1^{[r+1]}) \longrightarrow \dots$$

Pour $i \leq r$, on a $H^i(\bar{\mathcal{J}}_1^{[r+1]}) = H^i\Big((X_1)_{ét}, \sigma_{\geq r+1}\omega^{\cdot}_{X_1/\bar{E}_1}\Big) = 0$ (voir preuve de 2.2.6.1), d'où $H^i(u.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]}) \overset{\sim}{\to} H^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r+1]})$. Avec (2.2.6.1), ce qui précède et puisque

$u^{p-1}.\tilde{\mathcal{O}}_1^{st} \simeq \mathcal{O}_1^{HK}$, on en déduit les égalités $h^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]}) = h^i(\mathcal{O}_1^{HK}) + h^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r+1]})$ pour $0 \leq i \leq r \leq p-1$. Mais par la remarque qui suit (2.2.5.2), $h^i(\mathcal{O}_1^{HK}) = h^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]}/\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r+1]})$, d'où $h^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]}) = h^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]}/\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r+1]}) + h^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r+1]})$ et une récurrence facile sur i à partir de $i=0$ montre alors que les suites:

$$0 \longrightarrow H^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r+1]}) \longrightarrow H^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]}) \longrightarrow H^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]}/\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r+1]}) \longrightarrow 0$$

sont exactes. □

Remarque: En faisant $r = i$, on a donc aussi des débuts de suites exactes ($0 \leq i \leq p-1$ si $p \geq 3$, $i = 0$ si $p = 2$):

$$0 \longrightarrow H^{i+1}(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[i+1]}) \longrightarrow H^{i+1}(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[i]}) \longrightarrow H^{i+1}(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[i]}/\tilde{\mathcal{J}}_1^{[i+1]})$$

Proposition 2.2.6.3 *Pour $p \geq 3$, $0 \leq i \leq p-1$ et $i \leq r \leq p$ ($i = 0$ si $p = 2$), la flèche $H^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]}) \to H^i(\tilde{\mathcal{O}}_1^{st})$ est injective.*

Preuve. — Pour $p = 2$, il n'y a rien à montrer, on suppose donc $p \geq 3$. Soit $i \in \{0, ..., p-2\}$ et $\delta = Max\{0, 2i-p\}$ ($\delta \leq i$), le diagramme commutatif de faisceaux à lignes exactes (2.2.5.1):

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & u^{p-i}.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[i]} & \longrightarrow & u^{p-i}.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[\delta]} & \longrightarrow & u^{p-i}.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[\delta]}/u^{p-i}.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[i]} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{J}}_1^{[p]} & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{J}}_1^{[i]} & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{J}}_1^{[i]}/\tilde{\mathcal{J}}_1^{[p]} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

donne un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccccccc}
... & \to & H^i(u^{p-i}.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[\delta]}/u^{p-i}.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[i]}) & \to & H^{i+1}(u^{p-i}.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[i]}) & \to & H^{i+1}(u^{p-i}.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[\delta]}) & \to & ... \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
... & \to & H^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[i]}/\tilde{\mathcal{J}}_1^{[p]}) & \to & H^{i+1}(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[p]}) & \to & H^{i+1}(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[i]}) & \to & ...
\end{array}$$

Par (2.2.6.2), la flèche $H^{i+1}(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[p]}) \to H^{i+1}(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[i]})$ est injective, donc la flèche $H^i(u^{p-i}.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[\delta]}/u^{p-i}.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[i]}) \to H^{i+1}(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[p]})$ est nulle. D'autre part, de (2.2.5.1), on déduit des suite exactes longues:

$$\ldots \longrightarrow H^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[p]}) \stackrel{u^i.Id}{\longrightarrow} H^i(u^i.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[p]}) \longrightarrow H^{i+1}(u^{p-i}.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[i]}) \longrightarrow H^{i+1}(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[p]}) \longrightarrow \ldots$$

et, pour $0 \leq k \leq i \leq p-2$:

$$\ldots \longrightarrow H^i(u^{i-k+1}.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[p+k-1]}) \longrightarrow H^i(u^{i-k}.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[p+k]}) \longrightarrow H^i(\bar{\mathcal{J}}_1^{[p+k]}) \longrightarrow \ldots$$

Mais, on a vu que pour $0 \leq i \leq p+k-1$, $H^i(\bar{\mathcal{J}}_1^{[p+k]}) = 0$, d'où (en faisant successivement $k = 1$, $k = 2$, ...,$k = i$) $H^i(u^i.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[p]}) = H^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[p+i]})$. Comme $H^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[p+i]}) = 0$ par (2.2.5.4), la flèche $H^{i+1}(u^{p-i}.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[i]}) \longrightarrow H^{i+1}(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[p]})$ est injective et le diagramme commutatif précédent donne que la flèche $H^i(u^{p-i}.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[\delta]}) \to$

$H^i(u^{p-i}.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[\delta]}/u^{p-i}.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[i]})$ est surjective. Considérons alors le diagramme commutatif à lignes et colonnes exactes ($0 \leq i \leq p-2$):

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \to & H^i(u^i\tilde{\mathcal{O}}_1^{st}) & \xrightarrow{\sim} & H^i(u^i\tilde{\mathcal{O}}_1^{st}) & \to & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\dots & \to & H^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[i]}) & \to & H^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[\delta]}) & \to & H^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[\delta]}/\tilde{\mathcal{J}}_1^{[i]}) & \to & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \wr & & \\
\dots & \to & H^i(u^{p-i}.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[i]}) & \to & H^i(u^{p-i}.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[\delta]}) & \to & H^i(u^{p-i}.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[\delta]}/u^{p-i}.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[i]}) & \to & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

(la colonne du milieu est exacte car les flèches $H^i(u^i.\tilde{\mathcal{O}}_1^{st}) \to H^i(\tilde{\mathcal{O}}_1^{st})$ sont injectives pour $0 \leq i \leq p-1$ par (2.2.5.3) et se factorisent à travers $H^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[\delta]})$). La surjection trouvée précédemment entraine alors que la flèche $H^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[\delta]}) \to H^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[\delta]}/\tilde{\mathcal{J}}_1^{[i]})$ est aussi surjective, donc que la flèche $H^{i+1}(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[i]}) \to H^{i+1}(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[\delta]})$ est injective. Si $\delta = 0$, on déduit $H^{i+1}(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]}) \hookrightarrow H^{i+1}(\tilde{\mathcal{O}}_1^{st})$ pour $i \leq r \leq p$ et $i \leq p-2$ en utilisant (2.2.6.2) et sa remarque. Si $\delta > 0$, c'est que $i > 0$ et on a alors $\delta \leq i-1$ et $H^{i+1}(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[p]}) \hookrightarrow H^{i+1}(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[\delta]})$. En posant $\delta_2 = Max\{0, \delta + i - p\}$ ($\delta_2 \leq \delta - 1$), on peut recommencer exactement le raisonnement précédent avec les diagrammes commutatifs:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & u^{p-i}.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[i]} & \longrightarrow & u^{p-i}.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[\delta_2]} & \longrightarrow & u^{p-i}.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[\delta_2]}/u^{p-i}.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[i]} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{J}}_1^{[p]} & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{J}}_1^{[\delta]} & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{J}}_1^{[\delta]}/\tilde{\mathcal{J}}_1^{[p]} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

et:

$$\begin{array}{ccccccccc}
... & \to & H^i(u^{p-i}.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[\delta_2]}/u^{p-i}.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[i]}) & \to & H^{i+1}(u^{p-i}.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[i]}) & \to & H^{i+1}(u^{p-i}.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[\delta_2]}) & \to & ... \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
... & \to & H^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[\delta]}/\tilde{\mathcal{J}}_1^{[p]}) & \to & H^{i+1}(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[p]}) & \to & H^{i+1}(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[\delta]}) & \to & ...
\end{array}$$

pour déduire que $H^i(u^{p-i}.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[\delta_2]}) \to H^i(u^{p-i}.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[\delta_2]}/u^{p-i}.\tilde{\mathcal{J}}_1^{[i]})$ est surjectif, puis, en remplaçant δ par δ_2 dans le troisième diagramme, montrer que $H^{i+1}(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[i]}) \to H^{i+1}(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[\delta_2]})$ est injectif. Par récurrence, on se ramène ainsi au cas $\delta = 0$, ce qui achève la preuve au moins pour i plus grand que 1. Mais pour $i = 0$, c'est trivial. $\square$

Remarque: La preuve de (2.2.6.3) donne en fait que pour $0 \leq i \leq p-2$ et $p \geq 3$ les flèches $H^{i+1}(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[i]}) \to H^{i+1}(\tilde{\mathcal{O}}_1^{st})$ sont encore injectives: cette remarque servira pour les dévissages en (2.3.2).

Finalement, pour $0 \leq i \leq r \leq p-2$, les flèches $H^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]}) \to H^i(\tilde{\mathcal{O}}_1^{st})$ sont injectives et les flèches $H^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]}) \to H^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]}/\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r+1]})$ surjectives. On a donc (voir 2.2.4):

Théorème 2.2.6.4 *Pour* $0 \leq i \leq r \leq p-2$, $\left(H^i(\tilde{\mathcal{O}}_1^{st}), H^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]}), \tilde{\phi}_r, \tilde{N}\right)$ *est un objet de* $\underline{\tilde{\mathcal{M}}}_k^r$.

Et, par (2.2.4.3):

Corollaire 2.2.6.5 *Pour* $0 \leq i \leq r \leq p-2$, $\left(H^i(\mathcal{O}_1^{st}), H^i(\mathcal{J}_1^{[r]}), \phi_r, N\right)$ *est un objet de* $\underline{\mathcal{M}}_k^r$.

2.2.7 Remarque sur le H^{p-1}

Dans [Br3], on s'est limité aux modules dont la filtration "ne dépasse pas le cran $p-2$". Pour les besoins du dévissage en (2.3.2), on regarde ici la structure du H^{p-1} (en caractéristique p seulement).

On définit d'abord une application semi-linéaire $\phi_{p-1}^{\sharp} : Fil^{p-1}S_1 \to S_1$ par $\phi_{p-1}^{\sharp}(\gamma_{p-1}(u)) = \phi^{p-1}(\gamma_{p-1}(u))$ et $\phi_{p-1}^{\sharp}(\gamma_i(u)) = 0$ pour $i \geq p$. Soit $\underline{\mathcal{M}}_{0,k}^{p-1}$ la catégorie suivante: les objets sont la donnée:

- d'un S_1-module libre de rang fini $\mathcal{M}$
- d'un sous-S_1-module $Fil^{p-1}\mathcal{M}$ de $\mathcal{M}$ contenant $Fil^{p-1}S_1.\mathcal{M}$
- d'une flèche ϕ-semi-linéaire $\phi_{p-1}^{\sharp} : Fil^{p-1}\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ telle que pour tout $s \in Fil^{p-1}S_1$ et $x \in \mathcal{M}$, on a $c^{p-1}.\phi_{p-1}^{\sharp}(s.x) = \phi_{p-1}^{\sharp}(s).\phi_{p-1}^{\sharp}(u^{p-1}.x)$ et telle que le S_1-module $\mathcal{M}$ est engendré par l'image de $\phi_{p-1}^{\sharp}$.

Les flèches sont les morphismes S_1-linéaires qui préservent $Fil^{p-1}\mathcal{M}$ et commutent à $\phi_{p-1}^{\sharp}$. Comme dans ([Br3],2.1.2), on note $\underline{\mathcal{M}}_k^{p-1}$ la catégorie obtenue en rajoutant un opérateur de monodromie N vérifiant des relations qu'on laisse au lecteur le soin d'écrire. On définit également comme en ([Br3],2.2.1) les catégories $\underline{\widetilde{\mathcal{M}}}_{0,k}^{p-1}$ et $\underline{\widetilde{\mathcal{M}}}_k^{p-1}$ en faisant $r = p-1$. On définit un foncteur $T : \underline{\mathcal{M}}_k^{p-1} \to \underline{\widetilde{\mathcal{M}}}_k^{p-1}$ par $T(\mathcal{M}) = \tilde{S}_1 \otimes_{S_1} \mathcal{M}$ muni du Fil^{p-1} image et des opérateurs $\tilde{\phi}_{p-1}$ et $\tilde{N}$ définis par passage au quotient de $\phi_{p-1}^{\sharp}$ et N. Le résultat suivant se prouve exactement comme en ([Br3],2.2):

Théorème 2.2.7.1 *Le foncteur* $T : \underline{\mathcal{M}}_k^{p-1} \to \underline{\widetilde{\mathcal{M}}}_k^{p-1}$ *induit une équivalence de catégories. La catégorie* $\underline{\widetilde{\mathcal{M}}}_k^{p-1}$ *est abélienne.*

Pour $p \geq 3$, notons $\phi^\sharp_{p-1}$ la composée: $\mathcal{J}_1^{[p-1]} \longrightarrow \mathcal{J}_1^{[p-1]}/\mathcal{J}_1^{[p]} \xrightarrow{\bar{\phi}_{p-1}} \mathcal{O}_1^{st}$ ($\phi^\sharp_{p-1} \neq \phi_{p-1}$), ainsi que l'opérateur induit sur les groupes de cohomologie. Par les résultats de (2.2.2), (2.2.5) et (2.2.6), on montre comme en (2.2.4) et (2.2.6):

Théorème 2.2.7.2 *Pour $p \geq 3$ et $0 \leq i \leq p-1$, $\left(H^i(\tilde{\mathcal{O}}_1^{st}), H^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[p-1]}), \tilde{\phi}_{p-1}, \tilde{N}\right)$ (resp. $\left(H^i(\mathcal{O}_1^{st}), H^i(\mathcal{J}_1^{[p-1]}), \phi^\sharp_{p-1}, N\right)$) est un objet de $\underline{\tilde{\mathcal{M}}}_k^{p-1}$ (resp. $\underline{\mathcal{M}}_k^{p-1}$). Ces deux objets se correspondent par l'équivalence de catégories ci-dessus.*

2.3 La cohomologie log-cristalline de torsion des log-schémas propres, log-lisses et du type de Cartier

Dans cette section, grâce à un peu d'algèbre linéaire et à la platitude des faisceaux $\mathcal{J}_n^{[r]}$, on étend par dévissage le théorème précédent au cas de torsion quelconque. On renvoie à l'appendice A pour la définition des catégories $'\underline{\mathcal{M}}^r$ et $\underline{\mathcal{M}}^r$, $0 \leq r \leq p-2$.

2.3.1 Deux lemmes d'algèbre (semi-)linéaire

On rappelle que $S = \varprojlim_n S_n$.

Lemme 2.3.1.1 *Soit $0 \leq r \leq p-2$ et soit $\mathcal{M}'$ un objet de $'\underline{\mathcal{M}}^r$ vérifiant les deux propriétés:*

- *le S-module $\mathcal{M}'$ est engendré par $\phi_r(Fil^r\mathcal{M}')$*
- *il existe un objet $\mathcal{M}$ de $\underline{\mathcal{M}}^r$ et un morphisme (dans $'\underline{\mathcal{M}}^r$): $\mathcal{M}' \to \mathcal{M}$ qui induit une injection sur les S-modules sous-jacents.*

Alors $\mathcal{M}'$ est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$.

Preuve. — La seule chose qu'il faut prouver est que $\mathcal{M}'$ est, en tant que S-module, une somme directe (finie) de S_{n_i} pour des n_i dans $\mathbf{N}^*$. On fait une récurrence sur le plus petit entier n tel que $p^n\mathcal{M} = 0$. Si $p\mathcal{M} = 0$, on a un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} S_1 \otimes_k \phi_r(Fil^r\mathcal{M}') & \hookrightarrow & S_1 \otimes_k \phi_r(Fil^r\mathcal{M}) \\ \downarrow & & \downarrow \wr \\ \mathcal{M}' & \rightarrow & \mathcal{M} \end{array}$$

où la flèche de gauche est surjective par hypothèse et où la flèche de droite est un isomorphisme puisque $\mathcal{M}$ est dans $\underline{\mathcal{M}}^r$. La flèche de gauche est alors injective, donc un isomorphisme et $\mathcal{M}'$ est libre (de type fini) sur S_1. Remarquons qu'on a alors $\mathcal{M}' \cap Fil^r\mathcal{M} = Fil^r\mathcal{M}'$ ([Br3],2.3.2.2). Supposons le résultat vrai si $p^{n-1}\mathcal{M} = 0$ et soient $\mathcal{M}'$ et $\mathcal{M}$ comme dans l'énoncé avec $p^n\mathcal{M} = 0$. Par récurrence, $p\mathcal{M}'$ muni de $pFil^r\mathcal{M}'$ (et vu dans $p\mathcal{M}$) est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$. On a donc une injection dans $\underline{\mathcal{M}}^r$: $p\mathcal{M}' \hookrightarrow \mathcal{M}$ d'où $pFil^r\mathcal{M}' = p\mathcal{M}' \cap Fil^r\mathcal{M} = p\mathcal{M}' \cap Fil^r\mathcal{M}'$ et $\mathcal{M}'/p\mathcal{M}'$ muni de $Fil^r\mathcal{M}'/p\mathcal{M}' = Image(Fil^r\mathcal{M}')$ est un objet de $'\underline{\mathcal{M}}^r$ engendré comme S_1-module par $\phi_r(Fil^r\mathcal{M}'/p\mathcal{M}')$. Mais $\mathcal{M}/p\mathcal{M}'$ est dans $\underline{\mathcal{M}}^r$ (qui est une catégorie abélienne) et l'injection $\mathcal{M}'/p\mathcal{M}' \hookrightarrow \mathcal{M}/p\mathcal{M}'$ montre (par le cas $n = 1$) que $\mathcal{M}'/p\mathcal{M}'$ est un S_1-module libre (de type fini). Par la suite exacte de S-modules: $0 \to p\mathcal{M}' \to \mathcal{M}' \to \mathcal{M}'/p\mathcal{M}' \to 0$ et le lemme ([Br3],2.3.1.1), on conclut que $\mathcal{M}'$ est bien dans $\underline{\mathcal{M}}^r$. $\square$

Lemme 2.3.1.2 *Soit $0 \leq r \leq p-2$ et soit $\mathcal{M}$ un objet de $'\underline{\mathcal{M}}^r$ tel qu'il existe deux objets $\mathcal{M}'$ et $\mathcal{M}''$ de $\underline{\mathcal{M}}^r$ et une suite exacte courte (dans $'\underline{\mathcal{M}}^r$): $0 \to \mathcal{M}' \to \mathcal{M} \to \mathcal{M}'' \to 0$. Alors $\mathcal{M}$ est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$.*

Preuve. — Notons $<\phi_r(Fil^r\mathcal{M})>$ le module engendré par l'image de ϕ_r (resp. avec $\mathcal{M}'$ et $\mathcal{M}''$). On a une suite exacte courte:

$$0 \longrightarrow <\phi_r(Fil^r\mathcal{M})> \cap \mathcal{M}' \longrightarrow <\phi_r(Fil^r\mathcal{M})> \longrightarrow <\phi_r(Fil^r\mathcal{M}'')> \longrightarrow 0$$

Mais $\mathcal{M}' = <\phi_r(Fil^r\mathcal{M}')> \subset (<\phi_r(Fil^r\mathcal{M})> \cap \mathcal{M}') \subset \mathcal{M}'$ et $<\phi_r(Fil^r\mathcal{M}'')> = \mathcal{M}''$, d'où une suite exacte: $0 \to \mathcal{M}' \to <\phi_r(Fil^r\mathcal{M})> \to \mathcal{M}'' \to 0$ qui entraine $<\phi_r(Fil^r\mathcal{M})> = \mathcal{M}$. Il reste à voir que $\mathcal{M}$ est, en tant que module, une somme directe de S_{n_i} pour des n_i dans $\mathbf{N}^*$. Supposons d'abord $p\mathcal{M}'' = 0$. On a alors $p\mathcal{M}$ (muni de $pFil^r\mathcal{M}$) inclus dans $\mathcal{M}'$ et par (2.3.1.1), $p\mathcal{M}$ est dans $\underline{\mathcal{M}}^r$. Puisque $\underline{\mathcal{M}}^r$ est abélienne, $\mathcal{M}'/p\mathcal{M}$ est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ et la suite exacte courte de S_1-modules: $0 \to \mathcal{M}'/p\mathcal{M} \to \mathcal{M}/p\mathcal{M} \to \mathcal{M}''/p\mathcal{M}'' \to 0$ montre que $\mathcal{M}/p\mathcal{M}$ est libre de type fini sur S_1 (car les deux autres le sont). On conclut (dans ce cas) avec ([Br3],2.3.1.1), comme en (2.3.1.1). Pour le cas général, on fait une récurrence sur le plus petit entier n tel que $p^n\mathcal{M}'' = 0$. Supposons $p^{n+1}\mathcal{M}'' = 0$ et soit $0 \to \mathcal{M}' \to \mathcal{M} \xrightarrow{s} \mathcal{M}'' \to 0$ une suite exacte comme dans l'énoncé. Soit $\mathcal{M}''^{(p)} = Ker(\mathcal{M}'' \xrightarrow{p} \mathcal{M}'')$, le S-module $\mathcal{N} = s^{-1}(\mathcal{M}''^{(p)})$ muni de $Fil^r\mathcal{N} = s^{-1}(\mathcal{M}''^{(p)}) \cap Fil^r\mathcal{M}$, du ϕ_r et du N induit est un objet de $'\underline{\mathcal{M}}^r$ et on a encore une suite exacte dans $'\underline{\mathcal{M}}^r$: $0 \to \mathcal{M}' \to \mathcal{N} \xrightarrow{s} \mathcal{M}''^{(p)} \to 0$. Par récurrence au cas $n = 1$, $\mathcal{N}$ est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$. Mais $\mathcal{M}/\mathcal{N} \simeq \mathcal{M}''/\mathcal{M}''^{(p)}$ est aussi dans $\underline{\mathcal{M}}^r$ et on a une suite exacte dans $'\underline{\mathcal{M}}^r$: $0 \to \mathcal{N} \to \mathcal{M} \to \mathcal{M}''/\mathcal{M}''^{(p)} \to 0$. Par récurrence au cas $p^n\mathcal{M}'' = 0$, on a bien $\mathcal{M}$ dans $\underline{\mathcal{M}}^r$. $\square$

2.3.2 Dévissages

Dans cette section, on se donne deux entiers non nuls n et q tels que $n \leq q$ et un log-schéma fin X_q propre et log-lisse sur $(Spec\ W_q, \mathcal{L}(p))$ dont la fibre spéciale est du type de Cartier sur $(Spec\ k, L)$ (en particulier, X_q est un objet de $(Spec\ W_q, \mathcal{L}(p))_{syn}$). Par (2.1.2), on a pour $0 \leq r \leq Min\{p-2, q-n\}$ des applications ϕ_r sur $(Spec\ W_q, \mathcal{L}(p))_{syn}$: $\mathcal{J}_n^{[r]} \to \mathcal{O}_n^{st}$. On note $X_n = X_q \times Spec\ W_n$, $H^i(\mathcal{J}_n^{[r]})$ au lieu de $H^i((X_n)_{syn}, \mathcal{J}_n^{[r]})$ et ϕ_r et N les opérateurs induits sur $H^i(\mathcal{J}_n^{[r]})$.

Théorème 2.3.2.1 *Pour* $0 \leq i \leq r \leq Min\{p-2, q-n\}$, $\Big(H^i(\mathcal{O}_n^{st}), H^i(\mathcal{J}_n^{[r]}), \phi_r, N\Big)$ *est un objet de* $\underline{\mathcal{M}}^r$.

Preuve. — Pas besoin de dévissages pour le cas $p = 2$ (ou très peu): on montre "à la main" à partir du cas $n = 1$ que $H^0(\mathcal{O}_n^{st}) \simeq S_n^{c_0}$ où c_0 est le nombre de composantes connexes du schéma sous-jacent et que le Frobenius est trivial. Supposons donc $p \geq 3$, comme en (2.2.4) on se ramène à montrer les trois assertions:

- la flèche $H^i(\mathcal{J}_n^{[r]}) \to H^i(\mathcal{O}_n^{st})$ est injective
- $H^i(\mathcal{O}_n^{st})$ est engendré comme S-module par l'image de ϕ_r
- $H^i(\mathcal{O}_n^{st})$ est, en tant que S-module, une somme directe de S_{n_i} ($n_i \in \mathbf{N}^*$)

Par (2.1.2.1), on a des suites exactes de faisceaux sur $(X_q)_{syn}$: $0 \to \mathcal{J}_1^{[r]} \to \mathcal{J}_n^{[r]} \to \mathcal{J}_{n-1}^{[r]} \to 0$ et $0 \to \mathcal{O}_1^{st} \to \mathcal{O}_n^{st} \to \mathcal{O}_{n-1}^{st} \to 0$ qui donnent des suites exactes longues:

$$\ldots \to H^{i-1}(\mathcal{J}_{n-1}^{[r]}) \to H^i(\mathcal{J}_1^{[r]}) \to H^i(\mathcal{J}_n^{[r]}) \to H^i(\mathcal{J}_{n-1}^{[r]}) \to H^{i+1}(\mathcal{J}_1^{[r]}) \to \ldots$$

$$\ldots \to H^{i-1}(\mathcal{O}_{n-1}^{st}) \to H^i(\mathcal{O}_1^{st}) \to H^i(\mathcal{O}_n^{st}) \to H^i(\mathcal{O}_{n-1}^{st}) \to H^{i+1}(\mathcal{O}_1^{st}) \to \ldots$$

On fixe $r \in \{0, ..., p-2\}$ et $q \geq r+1$, et on fait une récurrence sur $n \in \{1, ..., q-r\}$: on suppose que $\Big(H^i(\mathcal{O}_{n-1}^{st}), H^i(\mathcal{J}_{n-1}^{[r]}), \phi_r, N\Big)$ est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ pour $0 \leq i \leq r$ (c'est vrai pour $n = 1$ par (2.2.6.5)). Par (2.2.6.5) encore, la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ étant abélienne, on se ramène, au moins pour $0 \leq i \leq r-1$, à des suites exactes courtes:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & Fil^r\mathcal{N} & \to & H^i(\mathcal{J}_n^{[r]}) & \to & Fil^r\mathcal{M} & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \mathcal{N} & \to & H^i(\mathcal{O}_n^{st}) & \to & \mathcal{M} & \to & 0 \end{array}$$

où $\mathcal{N}$ est dans $\underline{\mathcal{M}}_k^r$ et $\mathcal{M}$ dans $\underline{\mathcal{M}}^r$. On en déduit d'abord $H^i(\mathcal{J}_n^{[r]}) \hookrightarrow H^i(\mathcal{O}_n^{st})$, puis les deux autres assertions par (2.3.1.2). Restent les cas $i = r$: par la même méthode que ci-dessus, il suffit de montrer que $Ker\Big(H^r(\mathcal{O}_{n-1}^{st}) \to H^{r+1}(\mathcal{O}_1^{st})\Big)$ muni de $Ker\Big(H^r(\mathcal{J}_{n-1}^{[r]}) \to H^{r+1}(\mathcal{J}_1^{[r]})\Big)$ est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ (attention, la donnée $\Big(H^{r+1}(\mathcal{O}_1^{st}), H^{r+1}(\mathcal{J}_1^{[r]}), \phi^r, N\Big)$ n'est pas un objet de $\underline{\mathcal{M}}_k^r$ à priori). Soit:

$$\mathcal{M} = \Big(H^r(\mathcal{O}_{n-1}^{st})/pH^r(\mathcal{O}_{n-1}^{st}), H^r(\mathcal{J}_{n-1}^{[r]})/pH^r(\mathcal{J}_{n-1}^{[r]}), \phi_r, N\Big)$$

C'est un objet de $\underline{\mathcal{M}}_k^r$ et il suffit de voir que $Ker(\mathcal{M} \to H^{r+1}(\mathcal{O}_1^{st}))$ muni de $Ker\Big(H^r(\mathcal{J}_{n-1}^{[r]})/p \to H^{r+1}(\mathcal{J}_1^{[r]})\Big)$ est dans $\underline{\mathcal{M}}_k^r$. Par la remarque de (2.2.6.3), la flèche $H^{r+1}(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[r]}) \to H^{r+1}(\tilde{\mathcal{O}}_1^{st})$ est injective et cela entraine comme en (2.2.4.3) que la flèche $H^{r+1}(\mathcal{J}_1^{[r]}) \to H^{r+1}(\mathcal{O}_1^{st})$ est aussi injective. Puisque $H^r(\mathcal{J}_{n-1}^{[r]})/p \to H^r(\mathcal{O}_{n-1}^{st})/p$ est injective, on a:

$$Ker\Big(H^r(\mathcal{J}_{n-1}^{[r]})/p \to H^{r+1}(\mathcal{J}_1^{[r]})\Big) \simeq H^r(\mathcal{J}_{n-1}^{[r]})/p \bigcap Ker\Big(\mathcal{M} \to H^{r+1}(\mathcal{O}_1^{st})\Big)$$

Notons $Fil^r\mathcal{M} = H^r(\mathcal{J}_{n-1}^{[r]})/p$ et soit $Fil^{r+1}\mathcal{M} = u.Fil^r\mathcal{M} + Fil^{r+2}S.\mathcal{M}$ sur lequel on définit, si $r \leq p-3$, ϕ_{r+1} par $\phi_{r+1}(u.x+s.y) = \phi_1(u).\phi_{r-1}(x)$ ($x \in Fil^r\mathcal{M}$ et $s \in Fil^{r+2}S$, on vérifie que cette application est bien définie) et, si $r = p-2$, $\phi_{p-1}^{\sharp}$ par $\phi_{p-1}^{\sharp}(u.x+s.y) = \phi^1(u).\phi_{p-2}(x)$ ($x \in Fil^{p-2}\mathcal{M}$ et $s \in Fil^pS$). C'est un objet de $\underline{\mathcal{M}}_k^{r+1}$ (voir(2.2.7) pour le cas $r = p-2$, en fait $\underline{\mathcal{M}}_k^r$ est une sous-catégorie pleine de $\underline{\mathcal{M}}_k^{r+1}$) et on vérifie facilement que la flèche $\mathcal{M} \to H^{r+1}(\mathcal{O}_1^{st})$ induit un morphisme dans $\underline{\mathcal{M}}_k^{r+1}$:

$$\Big(\mathcal{M}, Fil^{r+1}\mathcal{M}, \phi_{r+1}, N\Big) \to \Big(H^{r+1}(\mathcal{O}_1^{st}), H^{r+1}(\mathcal{J}_1^{[r+1]}), \phi_{r+1}, N\Big)$$

(resp. avec $\phi_{p-1}^{\sharp}$ si $r = p-2$ et par (2.2.7.2)). Puisque cette catégorie est abélienne (2.2.7.1 pour $r = p-2$), $Ker(\mathcal{M} \to H^{r+1}(\mathcal{O}_1^{st}))$ (muni du $Fil^{r+1}\mathcal{M}$ induit) est un objet de $\underline{\mathcal{M}}_k^{r+1}$. On laisse alors au lecteur l'exercice d'en déduire que ce noyau, muni du $Fil^r\mathcal{M}$ précédent induit, est bien dans $\underline{\mathcal{M}}_k^r$. $\square$

Remarque 1: Les catégories $\underline{\mathcal{M}}^r$ sont des sous-catégories pleines les unes des autres et le foncteur naturel $\underline{\mathcal{M}}^r \to \underline{\mathcal{M}}^{r+1}$ envoie $\Big(H^i(\mathcal{O}_n^{st}), H^i(\mathcal{J}_n^{[r]}), \phi_r, N\Big)$ sur $\Big(H^i(\mathcal{O}_n^{st}), H^i(\mathcal{J}_n^{[r+1]}), \phi_{r+1}, N\Big)$.

Remarque 2: Si la log-structure de X_q est induite par celle de $(Spec\, W_q, \mathcal{L}(p))$, on retrouve le résultat de ([FM],2.7). Plus précisément, on a un relevé global Y_q de X_q sur E_q (qui est $Spec\ S_q \times_{Spec\ W_q} \dot{X}_q$ muni de la log-structure induite par celle sur $Spec\ S_q$) et on montre facilement que, pour $0 \leq i \leq r \leq Min\{p-2, q-n\}$:

$$H^i((X_n)_{syn}, \mathcal{O}_n^{st}) = H^i((Y_n)_{ét}, \omega^{\cdot}_{Y_n/E_n}) = S_n \otimes_{W_n} H^i((\dot{X}_n)_{ét}, \Omega^{\cdot}_{\dot{X}_n/W_n})$$

$$H^i((X_n)_{syn}, \mathcal{J}_n^{[r]}) = \sum_{l=0}^{r} Fil^{r-l}S_n \otimes_{W_n} H^i((\dot{X}_n)_{ét}, \sigma_{\geq l}\Omega^{\cdot}_{\dot{X}_n/W_n})$$

et que $\Big(H^i(\mathcal{O}_n^{st}), H^i(\mathcal{J}_n^{[r]}), \phi_r, N\Big)$ est l'image par le foncteur $\underline{MF}_{tor}^{f,r} \to \underline{\mathcal{M}}^r$ (voir Appendice A) de $H^i((\dot{X}_n)_{ét}, \Omega^{\cdot}_{\dot{X}_n/W_n})$ muni de la filtration $\Big(H^i((\dot{X}_n)_{ét}, \sigma_{\geq l}\Omega^{\cdot}_{\dot{X}_n/W_n})\Big)_{0 \leq l \leq r}$ et des ϕ_l correspondants.

3 La cohomologie étale de p-torsion

On montre que les objets de $\underline{\mathcal{M}}_r$ d'origine géométrique construits dans la section précédente permettent de retrouver la cohomologie étale de p-torsion de la fibre générique. On travaille avec le petit site syntomique exclusivement, même si certains résultats sont valables avec le gros site.

3.1 Trois suites exactes courtes de faisceaux

On renvoie à ([Ka3],3) ou ([Br1],6.3) ou ([Br2],2) pour la définition et les propriétés de l'anneau $\widehat{A_{st}}$ (pour le choix de l'uniformisante p). On construit trois suites exactes courtes de faisceaux sur le petit site syntomique qui serviront pour passer de la cohomologie log-cristalline à la cohomologie étale.

3.1.1 Problèmes de limite inductive

Si L est une extension finie de K_0, on note $\mathcal{O}_L$ l'anneau des entiers correspondant qu'on munit de la log-structure associée à $\mathcal{O}_L\backslash\{0\} \to \mathcal{O}_L$. Si L' est une extension finie de L, on a des morphismes de log-schémas $j_{L'/L} : (Spec\ \mathcal{O}_{L'}, \mathcal{O}_{L'}\backslash\{0\}) \to (Spec\ \mathcal{O}_L, \mathcal{O}_L\backslash\{0\})$.

Lemme 3.1.1.1 *Les morphismes $j_{L'/L}$ sont log-syntomiques.*

Preuve. — Soit L^{nr} l'extension maximale non ramifiée de L dans L', le log-schéma $(Spec\,\mathcal{O}_{L^{nr}}, \mathcal{O}_{L^{nr}}\backslash\{0\})$ est étale (au sens classique) sur $(Spec\,\mathcal{O}_L, \mathcal{O}_L\backslash\{0\})$ avec log-structure induite, donc est log-syntomique et on est ramené (par composition des morphismes log-syntomiques) au cas d'une extension L' totalement ramifiée. Soit π_L une uniformisante de L, $\pi_{L'}$ une uniformisante de L', e l'indice de ramification de L' sur L et $Q(X) = X^e - \pi_L P(X)$ le polynôme d'Eisenstein de $\pi_{L'}$. On a:

$$\mathcal{O}_{L'} = \mathcal{O}_L[X]/(X^e - \pi_L P(X)) = \mathcal{O}_L[X,Y]/(X^e - \pi_L Y, Y - P(X))$$

Soient $Q = \mathbf{N} \oplus \mathbf{N}x \oplus \mathbf{N}y$, G le sous-groupe de Q^{gp} engendré par $g = (-1) \oplus e.x \oplus (-y)$ et $f = y - P(x) \in \mathcal{O}_L \otimes_{\mathbf{Z}[\mathbf{N}]} \mathbf{Z}[QG]$, on vérifie facilement que le morphisme de log-schémas:

$$\begin{array}{ccccc} Q/G & \rightarrow & \dfrac{\mathcal{O}_L \otimes_{\mathbf{Z}[\mathbf{N}]} \mathbf{Z}[QG]}{(g-1,f)} & = \mathcal{O}_{L'} \\ \uparrow & & \uparrow & \\ \mathbf{N} & \stackrel{\alpha}{\rightarrow} & \mathcal{O}_L & \end{array}$$

(où $\alpha(1) = \pi_L$) est log-syntomique et que le log-schéma $(Spec\,\mathcal{O}_{L'}, Q/G)$ s'identifie à $(Spec\ \mathcal{O}_{L'}, \mathcal{O}_{L'}\backslash\{0\})$. $\square$

Si Z est un log-schéma sur $(Spec\ W, \mathcal{L}(p))$, on pose:

$$\begin{aligned} Z_L &= Z \times_{(Spec\ W,\mathcal{L}(p))} (Spec\ \mathcal{O}_L, \mathcal{O}_L\backslash\{0\}) \\ \bar{Z} &= Z \times_{(Spec\ W,\mathcal{L}(p))} (Spec\ \mathcal{O}_{\bar{K}_0}, \mathcal{O}_{\bar{K}_0}\backslash\{0\}) \end{aligned}$$

Le log-schéma $\bar{Z}$ n'est plus fin, mais est une limite inductive filtrante de log-schémas fins. Soit j_L le morphisme de topoï:

$$(Spec\ \mathcal{O}_L/p^n, \mathcal{O}_L\backslash\{0\})^\sim_{syn} \longrightarrow (Spec\ W_n, \mathcal{L}(p))^\sim_{syn}$$

et $\mathcal{F}$ un faisceau abélien sur $(Spec\ W_n, \mathcal{L}(p))_{syn}$. Pour tout log-schéma fin X_n de $(Spec\, W_n, \mathcal{L}(p))_{syn}$, on a (3.1.1.1) $j_{L*}j_L^*\mathcal{F}(X_n) = \mathcal{F}(X_{n,L})$. Pour L' extension finie de L, les applications $\mathcal{F}(X_{n,L}) \to \mathcal{F}(X_{n,L'})$ induisent des morphismes de faisceaux sur $(Spec\ W_n, \mathcal{L}(p))_{syn}$: $j_{L*}j_L^*\mathcal{F} \to j_{L'*}j_{L'}^*\mathcal{F}$ et on pose $j_*\mathcal{F} = \varinjlim_L j_{L*}j_L^*\mathcal{F}$.

Lemme 3.1.1.2 *Pour $i > 0$ et $r \geq 0$, on a:* $\varinjlim_L R^i j_{L*}j_L^*\mathcal{J}_n^{[r]} = 0$.

Preuve. — Le faisceau $\varinjlim_L R^j j_{L*}j_L^*\mathcal{J}_n^{[r]}$ est le faisceau sur $(Spec\ W_n, \mathcal{L}(p))_{syn}$ associé au préfaisceau $X_n \mapsto \varinjlim_L H^j((X_{n,L})_{syn}, \mathcal{J}_n^{[r]})$. Le problème étant local, on peut supposer le log-schéma X_n affine. On se donne une immersion fermée:

$$\begin{array}{ccc} (Spec\ \mathcal{O}_L/p^n, \mathcal{O}_L\backslash\{0\}) & \hookrightarrow & V_L \\ \downarrow & & \downarrow \\ (Spec\ W_n, \mathcal{L}(p)) & \hookrightarrow & E_n \end{array}$$

et, quitte à travailler étale-localement sur X_n, une immersion fermée:

$$\begin{array}{ccc} X_n & \hookrightarrow & Y_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ (Spec\ W_n, \mathcal{L}(p)) & \hookrightarrow & E_n \end{array}$$

où V_L et Y_n sont affines et log-lisses sur E_n. On note D l'enveloppe aux puissances divisées de $X_{n,L}$ dans $Y_n \times_{E_n} V_L$. Soit s un élément de $\varinjlim_L H^j((X_{n,L})_{syn}, \mathcal{J}_n^{[r]})$, il existe une extension finie L telle que s provienne de $s_L \in H^j((X_{n,L})_{syn}, \mathcal{J}_n^{[r]})$, donc (les schémas étant affines) s_L provient d'un cocycle c_L dans $\mathcal{J}_D^{[r-j]} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_n \times_{E_n} V_L}} \omega^j_{Y_n \times_{E_n} V_L/E_n}$. En prenant "suffisamment" de racines $p^{i\grave{e}mes}$ sur V_L et Y_n, on peut trouver, d'une part une extension L' de L et un diagramme commutatif d'immersions fermées:

$$\begin{array}{ccc} (Spec\ \mathcal{O}_{L'}/p^n, \mathcal{O}_{L'}\backslash\{0\}) & \hookrightarrow & V_{L'} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (Spec\ \mathcal{O}_L/p^n, \mathcal{O}_L\backslash\{0\}) & \hookrightarrow & V_L \end{array}$$

où $V_{L'}$ est affine et log-lisse sur E_n, d'autre part (quitte à localiser encore sur X_n) un diagramme commutatif d'immersions fermées:

$$\begin{array}{ccc} X'_n & \hookrightarrow & Y'_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_n & \hookrightarrow & Y_n \end{array}$$

où X'_n est affine et est un recouvrement log-syntomique de X_n et Y'_n est affine et log-lisse sur E_n, tels que, si D' est l'enveloppe aux puissances divisées de $X'_{n,L'}$

dans $Y'_n \times_{E_n} V'_L$, l'image de c_L dans $\mathcal{J}^{[r-j]}_{D'} \otimes_{\mathcal{O}_{Y'_n \times_{E_n} V'_L}} \omega^j_{Y'_n \times_{E_n} V'_L/E_n}$ est nulle (voir [Br1],3.2.3). L'image de s_L dans $H^j((X'_{n,L'})_{syn}, \mathcal{J}^{[r]}_n)$ est donc nulle et il en est de même de l'image de s dans $\varinjlim_L H^j((X'_{n,L})_{syn}, \mathcal{J}^{[r]}_n)$, d'où le résultat. $\square$

On en déduit les deux corollaires:

Corollaire 3.1.1.3 *Pour $r \in \mathbf{N}$ et $0 \leq m \leq n$, on a des suites exactes de faisceaux sur $(Spec\ W_n, \mathcal{L}(p))_{syn}$:*

$$0 \longrightarrow j_* \mathcal{J}^{[r]}_m \longrightarrow j_* \mathcal{J}^{[r]}_n \longrightarrow j_* \mathcal{J}^{[r]}_{n-m} \longrightarrow 0$$

Preuve. — Par platitude (2.1.2.1), on a des suites exactes: $0 \to \mathcal{J}^{[r]}_m \to \mathcal{J}^{[r]}_n \to \mathcal{J}^{[r]}_{n-m} \to 0$, donc des suites exactes longues:

$$0 \to j_{L*} j^*_L \mathcal{J}^{[r]}_m \to j_{L*} j^*_L \mathcal{J}^{[r]}_n \to j_{L*} j^*_L \mathcal{J}^{[r]}_{n-m} \to R^1 j_{L*} j^*_L \mathcal{J}^{[r]}_m \to R^1 j_{L*} j^*_L \mathcal{J}^{[r]}_n \to \dots$$

d'où, puisque le foncteur $\varinjlim_L$ est exact (car la limite inductive est filtrante), une suite exacte longue:

$$0 \to \varinjlim_L j_{L*} j^*_L \mathcal{J}^{[r]}_m \to \varinjlim_L j_{L*} j^*_L \mathcal{J}^{[r]}_n \to \varinjlim_L j_{L*} j^*_L \mathcal{J}^{[r]}_{n-m} \to \varinjlim_L R^1 j_{L*} j^*_L \mathcal{J}^{[r]}_m \to \dots$$

Par (3.1.1.2), $\varinjlim_L R^1 j_{L*} j^*_L \mathcal{J}^{[r]}_m = 0$, d'où le résultat. $\square$

Corollaire 3.1.1.4 *Soient $i \in \mathbf{N}$, $r \in \mathbf{N}$ et X_n un log-schéma log-syntomique sur $(Spec\ W_n, \mathcal{L}(p))$ dont le schéma sous-jacent $\dot{X}_n$ est quasi-compact, on a des isomorphismes:*

$$\begin{array}{ccc} \varinjlim_L H^i((X_n)_{syn}, j_{L*} j^*_L \mathcal{J}^{[r]}_n) & \xrightarrow{\sim} & \varinjlim_L H^i((X_{n,L})_{syn}, j^*_L \mathcal{J}^{[r]}_n) \\ \wr\downarrow & & \| \\ H^i((X_n)_{syn}, j_* \mathcal{J}^{[r]}_n) & & \varinjlim_L H^i((X_{n,L})_{syn}, \mathcal{J}^{[r]}_n) \end{array}$$

Preuve. — Puisque $\dot{X}_n$ est quasi-compact et que les morphismes des recouvrements dans $(X_n)_{syn}$ sont ouverts, la cohomologie de X_n commute avec les limites inductives filtrantes de faisceaux, d'où l'isomorphisme de gauche. Le morphisme de topoï j_L donne lieu à une suite spectrale: $H^i((X_n)_{syn}, R^j j_{L*} j^*_L \mathcal{J}^{[r]}_n) \Rightarrow H^{i+j}((X_{n,L})_{syn}, j^*_L \mathcal{J}^{[r]}_n)$. Par passage à la limite inductive, on a donc une suite spectrale:

$$\varinjlim_L H^i((X_n)_{syn}, R^j j_{L*} j^*_L \mathcal{J}^{[r]}_n) \Rightarrow \varinjlim_L H^{i+j}((X_{n,L})_{syn}, j^*_L \mathcal{J}^{[r]}_n)$$

Mais, par ce qui précède:

$$\varinjlim_L H^i((X_n)_{syn}, R^j j_{L*} j^*_L \mathcal{J}^{[r]}_n) \xrightarrow{\sim} H^i((X_n)_{syn}, \varinjlim_L R^j j_{L*} j^*_L \mathcal{J}^{[r]}_n)$$

et $\varinjlim_L R^j j_{L*} j^*_L \mathcal{J}^{[r]}_n$ est nul pour $j \geq 1$ par (3.1.1.2): la suite spectrale dégénère donc. $\square$

3.1.2 Une suite exacte courte "de Künneth"

Par définition ([Br2],2), on a pour $r \in \mathbf{N}$:

$$Fil^r\widehat{A_{st}} = \varprojlim_n H^0\left(\left((Spec\ \mathcal{O}_{\bar{K_0}}/p^n, \mathcal{O}_{\bar{K_0}}\backslash\{0\})/E_n\right)_{cris}, \mathcal{J}^{[r]}_{(Spec\ \mathcal{O}_{\bar{K_0}}/p^n, \mathcal{O}_{\bar{K_0}}\backslash\{0\})/E_n}\right)$$

($Fil^0\widehat{A_{st}} = \widehat{A_{st}}$). Rappelons ([Ka3],3 ou [Br2],2) qu'à tout choix d'un système compatible de racines $p^{n^{ièmes}}$ de p, $(\xi_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, sont associés des isomorphismes de S-modules $\widehat{A_{st}} \simeq A_{cris}\widehat{<X>}$ et:

$$Fil^r\widehat{A_{st}} \simeq \{\sum_{i=0}^{\infty} a_i\gamma_i(X), \lim_{i\to\infty} a_i = 0, a_i \in Fil^{r-i}A_{cris}\}$$

où la structure de S-algèbre de $A_{cris}\widehat{<X>}$ est donné par $u \mapsto [\bar{\xi}](1+X)^{-1}$ ($[\bar{\xi}]$ est l'élément de A_{cris} correspondant aux $(\xi_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, voir ([Br2],2)). Dans toute la suite, on choisit un tel système compatible de racines $p^{n^{ièmes}}$, de sorte qu'on a $\widehat{A_{st}} = A_{cris}\widehat{<X>}$. Les $Fil^s\widehat{A_{st}}/p^n$ n'étant pas des S_n-modules plats, on définit:

$$Fil^s_X(\widehat{A_{st}}/p^n) = \{\sum_{i=s}^{m} a_i\gamma_i(X), m \in \mathbf{N}, a_i \in A_{cris}/p^n\}$$

et on munit A_{cris} d'une structure de S-algèbre en envoyant u sur $[\bar{\xi}]$.

Lemme 3.1.2.1 *Pour tout $s \in \mathbf{N}$, $Fil^s_X\widehat{A_{st}}/p^n$ est un S_n-module plat.*

Preuve. — On laisse au lecteur l'exercice de montrer que la platitude de A_{cris}/p^n sur S_n entraine celle de $\widehat{A_{st}}/p^n$ sur S_n (où $u \mapsto [\bar{\xi}](1+X)^{-1}$). Les suites exactes courtes de S_n-modules: $0 \to Fil^{s+1}_X\widehat{A_{st}}/p^n \to Fil^s_X\widehat{A_{st}}/p^n \to \gamma_s(X).A_{cris}/p^n \to 0$ donnent alors, par récurrence, toutes les autres platitudes. Montrons que A_{cris}/p^n est plat sur S_n. On rappelle la description suivante de A_{cris}/p^n ([Fo],2.3.3): soit R la limite projective du diagramme $\mathcal{O}_{\bar{K_0}}/p\mathcal{O}_{\bar{K_0}} \leftarrow \mathcal{O}_{\bar{K_0}}/p\mathcal{O}_{\bar{K_0}} \leftarrow ... \leftarrow \mathcal{O}_{\bar{K_0}}/p\mathcal{O}_{\bar{K_0}} \leftarrow ...$ où les applications de transition sont l'élévation à la puissance p, c'est un anneau intègre parfait et on note $W_n(R)$ l'anneau des vecteurs de Witt de longueur n correspondant. En particulier, le système compatible $(\xi_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ précédent donne un élément $\bar{\xi}$ de R et $[\bar{\xi}]$ de $W_n(R)$ (le "Teichmüller") et on a $A_{cris}/p^n \simeq W_n(R)^{DP}$ où les puissances divisées sont prises sur l'idéal engendré par $[\bar{\xi}]$. Notons $A = S_n$, $M = W_n(R)^{DP}$ et $I = pA$, A et M sont plats sur W_n, d'où on déduit aisément que les applications canoniques: $I^m/I^{m+1} \otimes_{A/I} M/IM \to I^mM/I^{m+1}M$ sont des isomorphismes pour $0 \leq m \leq n-1$ (pour $m \geq n$, tout est nul). Montrons que M/IM est plat sur A/I: on a $A/I = k<u>= k[u,u_i]/(u^p, u_i^p)_{i\in\mathbf{N}^*}$ et $M/IM = A_{cris}/pA_{cris} = R^{DP} = R[X_i]/(\bar{\xi}^p, X_i^p)_{i\in\mathbf{N}^*}$ (où $u_i = \gamma_{p^i}(u)$ et $X_i = \gamma_{p^i}(\bar{\xi})$). Comme $u \mapsto \bar{\xi}$ et $u_i \mapsto X_i$, il suffit de voir que $R/(\bar{\xi}^p)$ est plat sur $k[u]/u^p$. La projection sur la première composante donne un isomorphisme de $k[u]/u^p$-module $R/(\bar{\xi}^p) \simeq \mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\mathcal{O}_{\bar{K}_0}$ (où $u \mapsto \bar{\xi}_1$ à droite). Mais si $L = K_0[\xi_1]$, l'anneau $\mathcal{O}_{\bar{K}_0}$ est plat sur $\mathcal{O}_L$ et $\mathcal{O}_L \simeq W[u]/(u^p - p)$, donc, par changement de base, $\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\mathcal{O}_{\bar{K}_0}$ est plat sur $k[u]/u^p$. On conclut par ([Ma],22.3). $\square$

Le groupe $G = Gal(\bar{K}_0/K_0)$ agit par fonctorialité sur $\widehat{A_{st}}$ et sur $j_*\mathcal{F}$ pour tout faisceau $\mathcal{F}$ sur $(Spec\ W_n, \mathcal{L}(p))_{syn}$. On vérifie facilement qu'on a des isomorphismes pour tout $s \in \mathbf{N}$:

$$\begin{aligned} Fil^s\widehat{A_{st}}/p^n &\simeq \varinjlim_L H^0\left(\left((Spec\ \mathcal{O}_L/p^n, \mathcal{O}_L\backslash\{0\})/E_n\right)_{cris}, \mathcal{J}^{[s]}_{(Spec\ \mathcal{O}_L/p^n, \mathcal{O}_L\backslash\{0\})/E_n}\right) \\ &\simeq \varinjlim_L H^0((Spec\ \mathcal{O}_L/p^n, \mathcal{O}_L\backslash\{0\})_{syn}, \mathcal{J}_n^{[s]}) \end{aligned}$$

(utiliser (D.1) par exemple) d'où des applications compatibles à l'action de G pour tout X_n de $(Spec\ W_n, \mathcal{L}(p))_{syn}$ $(0 \leq s \leq r)$:

$$Fil^s\widehat{A_{st}}/p^n \otimes_{S_n} H^0((X_n)_{syn}, \mathcal{J}_n^{[r-s]}) \to \varinjlim_L H^0((X_{n,L})_{syn}, \mathcal{J}_n^{[r]})$$

($g \in G$ agit à gauche par $g \otimes Id$). Par composition avec l'injection $Fil^s_X\widehat{A_{st}}/p^n \hookrightarrow Fil^s\widehat{A_{st}}/p^n$, on déduit des morphismes de faisceaux sur $(Spec\ W_n, \mathcal{L}(p))_{syn}$ compatibles à l'action de G: $\bigoplus_{s=0}^{r} Fil^s_X\widehat{A_{st}}/p^n \otimes_{S_n} \mathcal{J}_n^{[r-s]} \to j_*\mathcal{J}_n^{[r]}$. Le lemme suivant est en fait un cas particulier de la proposition (3.1.2.3), on le montre à part pour des raisons pratiques:

Lemme 3.1.2.2 *On a un isomorphisme de faisceaux sur* $(Spec\ W_n, \mathcal{L}(p))_{syn}$ *compatible à l'action de G:* $\widehat{A_{st}}/p^n \otimes_{S_n} \mathcal{O}_n^{st} \xrightarrow{\sim} j_*\mathcal{O}_n^{st}$.

Preuve. — Par (2.1.2.1), (3.1.2.1) et (3.1.1.3), on a un diagramme commutatif à lignes exactes:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \widehat{A_{st}}/p^n \otimes_{S_n} \mathcal{O}_{n-1}^{st} & \to & \widehat{A_{st}}/p^n \otimes_{S_n} \mathcal{O}_n^{st} & \to & \widehat{A_{st}}/p^n \otimes_{S_n} \mathcal{O}_1^{st} & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & j_*\mathcal{O}_{n-1}^{st} & \to & j_*\mathcal{O}_n^{st} & \to & j_*\mathcal{O}_1^{st} & \to & 0 \end{array}$$

et il suffit donc de montrer l'isomorphisme pour $n = 1$. C'est un calcul local pour la topologie log-syntomique et on reprend les notations de (2.1.2.1) et (2.2.2.1), en posant $\bar{A}^\infty = A^\infty \otimes_k \mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\mathcal{O}_{\bar{K}_0}$, $\bar{P}^\infty = P^\infty \oplus_{\mathbf{N}} \mathcal{O}_{\bar{K}_0}\backslash\{0\}$. Le Frobenius est surjectif sur A^∞, P^∞, $\bar{A}^\infty$ et $\bar{P}^\infty$: soit $g \in P$ l'image de $1 \in \mathbf{N}$ et choisissons une racine $p^{ième}$ h de g dans P (on a déjà choisi une racine $p^{ième}$ ξ_1 de p dans $\mathcal{O}_{\bar{K}_0}$). A ce choix sont associés des isomorphismes (Appendice D):

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_1^{st}(A^\infty, P^\infty) &= \varinjlim_i \mathcal{O}_1^{st}(Spec\ A^i, P^i) &\simeq (A^\infty \otimes_{\mathbf{Z}[P^\infty]} \mathbf{Z}[P^{\infty,e}])^{DP}<Y> \\ \mathcal{O}_1^{st}(\bar{A}^\infty, \bar{P}^\infty) &= \varinjlim_i j_*\mathcal{O}_1^{st}(Spec\ A^i, P^i) &\simeq (\bar{A}^\infty \otimes_{\mathbf{Z}[\bar{P}^\infty]} \mathbf{Z}[\bar{P}^{\infty,e}])^{DP}<Y> \end{aligned}$$

où $P^{\infty,e} = \{x \in P^{\infty,gp}/x^p \in P^\infty\}$ (resp. avec $\bar{P}^\infty$) et où les puissances divisées sont prises par rapport au noyau de la flèche dans A^∞ (resp. $\bar{A}^\infty$, pour l'isomorphisme dans ce cas, sur chaque extension finie L, extraire des racines $p^{\infty^{i\grave{e}mes}}$ d'une uniformisante et utiliser (D.1)). Le morphisme:

$$(A^\infty \otimes_{\mathbf{Z}[P^\infty]} \mathbf{Z}[P^{\infty,e}])^{DP}<Y> \otimes_{S_1} A_{cris}/p<X> \longrightarrow (\bar{A}^\infty \otimes_{\mathbf{Z}[\bar{P}^\infty]} \mathbf{Z}[\bar{P}^{\infty,e}])^{DP}<Y>$$

envoie Y sur Y et X sur $\dfrac{1 \oplus \xi_1}{h \oplus 1}(1+Y) - 1$ où $\dfrac{1 \oplus \xi_1}{h \oplus 1} \in \bar{P}^{\infty,e}$ (les monoïdes sont notés multiplicativement, 1 est l'élément neutre). On rappelle que $A_{cris}/p \simeq (\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p)^{DP}$, avec les puissances divisées sur l'idéal $(\bar{\xi}_1)$, et on laisse au lecteur la vérification des isomorphismes suivants ($< x_1, x_2, ... >$ sous un monoïde désigne le sous-groupe engendré par $x_1, x_2, ...$):

- $$\mathcal{O}_1^{st}(A^\infty, P^\infty) \otimes_{S_1} (\frac{\mathcal{O}_{\bar{K}_0}}{p})^{DP}<X> \simeq \frac{[(A^\infty \otimes_{\mathbf{Z}[P^\infty]} \mathbf{Z}[P^{\infty,e}])^{DP} \otimes_k (\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p)^{DP}]<Y,X>}{\Big(\gamma_i\Big(h.(1+Y)^{-1} - \xi_1.(1+X)^{-1}\Big)\Big)_{i \in \mathbf{N}^*}}$$

- $$\bar{P}^{\infty,e} \simeq \frac{P^{\infty,e} \oplus_{\mathbf{N}} \mathcal{O}_{\bar{K}_0}\backslash\{0\} \oplus z^{\mathbf{Z}}}{< \frac{h \oplus 1 \oplus z}{1 \oplus \xi_1 \oplus 1} >} \simeq \frac{P^{\infty,e} \oplus \mathcal{O}_{\bar{K}_0}\backslash\{0\} \oplus z^{\mathbf{Z}}}{< \frac{h \oplus 1 \oplus z}{1 \oplus \xi_1 \oplus 1}, \frac{g \oplus 1}{1 \oplus p} >}$$

- $$\mathbf{Z}[\bar{P}^{\infty,e}] \simeq \frac{\mathbf{Z}[P^{\infty,e} \oplus_{\mathbf{N}} \mathcal{O}_{\bar{K}_0}\backslash\{0\}][Z, Z^{-1}]}{(h.Z - \xi_1, Z^p - 1)}$$

- $$\mathcal{O}_1^{st}(\bar{A}^\infty, \bar{P}^\infty) \simeq \frac{\Big[\Big(A^\infty \otimes_{\mathbf{Z}[P^\infty]} \mathbf{Z}[P^{\infty,e}]\Big) \otimes_k \mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\Big]^{DP}<Z-1, Y>}{\Big(\gamma_i\Big(h.Z - \xi_1\Big)\Big)_{i \in \mathbf{N}}}$$

- $$(A^\infty \otimes_{\mathbf{Z}[P^\infty]} \mathbf{Z}[P^{\infty,e}])^{DP} \otimes_k (\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p)^{DP} \xrightarrow{\sim} \Big[\Big(A^\infty \otimes_{\mathbf{Z}[P^\infty]} \mathbf{Z}[P^{\infty,e}]\Big) \otimes_k \mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\Big]^{DP}$$

La flèche $\mathcal{O}_1^{st}(A^\infty, P^\infty) \otimes_k \widehat{A_{st}}/p \to \mathcal{O}_1^{st}(\bar{A}^\infty, \bar{P}^\infty)$ n'est autre que l'application $\Big[\Big(A^\infty \otimes_{\mathbf{Z}[P^\infty]} \mathbf{Z}[P^{\infty,e}]\Big) \otimes_k \mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\Big]^{DP}$-linéaire qui envoie Y sur Y et X sur $Z(1+Y) - 1$. En particulier, elle envoie $\gamma_i\Big(h.(1+Y)^{-1} - \xi_1.(1+X)^{-1}\Big)$ sur $Z^{-i}(1+Y)^{-i}\gamma_i\Big(h.Z - \xi_1\Big)$ et on laisse au lecteur le soin de montrer qu'il s'agit bien d'un isomorphisme. □

Pour $r \in \mathbf{N}$, on considère le complexe de faisceaux sur $(Spec\ W_n, \mathcal{L}(p))_{syn}$:

$$\bigoplus_{s=1}^{r} Fil_X^s \widehat{A_{st}}/p^n \otimes_{S_n} \mathcal{J}_n^{[r+1-s]} \to \bigoplus_{s=0}^{r} Fil_X^s \widehat{A_{st}}/p^n \otimes_{S_n} \mathcal{J}_n^{[r-s]} \to j_* \mathcal{J}_n^{[r]}$$

où la flèche de droite est celle définie précédemment et celle de gauche la somme des flèches:

$$\begin{array}{ccccc} Fil^s_X\widehat{A_{st}}/p^n\otimes_{S_n}\mathcal{J}_n^{[r+1-s]} & \rightarrow & Fil^{s-1}_X\widehat{A_{st}}/p^n\otimes_{S_n}\mathcal{J}_n^{[r+1-s]} & \oplus & Fil^s_X\widehat{A_{st}}/p^n\otimes_{S_n}\mathcal{J}_n^{[r-s]} \\ x_s\otimes y_{r+1-s} & \mapsto & x_s\otimes y_{r+1-s} & \oplus & -x_s\otimes y_{r+1-s} \end{array}$$

Proposition 3.1.2.3 *Pour $r\in\mathbf{N}$, on a des suites exactes courtes de faisceaux sur $(Spec\ W_n,\mathcal{L}(p))_{syn}$ compatibles à l'action de G:*

$$0\rightarrow\bigoplus_{s=1}^{r}Fil^s_X\widehat{A_{st}}/p^n\otimes_{S_n}\mathcal{J}_n^{[r+1-s]}\rightarrow\bigoplus_{s=0}^{r}Fil^s_X\widehat{A_{st}}/p^n\otimes_{S_n}\mathcal{J}_n^{[r-s]}\rightarrow j_*\mathcal{J}_n^{[r]}\rightarrow 0$$

Preuve. — Par un dévissage similaire à celui en (3.1.2.2), on se ramène au cas $n=1$. La suite exacte de S_1-modules plats (3.1.2.1): $0\rightarrow Fil^s_X\widehat{A_{st}}/p\rightarrow Fil^{s-1}_X\widehat{A_{st}}/p\rightarrow X^{s-1}.A_{cris}/p\rightarrow 0$ donne encore une suite exacte en tensorisant (sur S_1) par $\mathcal{J}_1^{[r]}$. En particulier, les flèches $Fil^{s+1}_X\widehat{A_{st}}/p\otimes_{S_1}\mathcal{J}_1^{[r]}\rightarrow Fil^s_X\widehat{A_{st}}/p\otimes_{S_1}\mathcal{J}_1^{[r]}$ sont injectives, d'où on déduit facilement l'injectivité de gauche. On a une injection $j_*\mathcal{J}_1^{[r]}\hookrightarrow j_*\mathcal{O}_1^{st}\overset{\sim}{\leftarrow}\widehat{A_{st}}/p\otimes_{S_1}\mathcal{O}_1^{st}$ (3.1.2.2), et il suffit de montrer l'exactitude du milieu en remplaçant $j_*\mathcal{J}_1^{[r]}$ par $\widehat{A_{st}}/p\otimes_{S_1}\mathcal{O}_1^{st}$. Calculons $Ker\Big(\bigoplus_{s=r-1}^{r}Fil^s_X\widehat{A_{st}}/p\otimes_{S_1}\mathcal{J}_1^{[r-s]}\rightarrow Fil^{r-1}_X\widehat{A_{st}}/p\otimes_{S_1}\mathcal{O}_1^{st}\Big)$. On a une suite exacte courte: $0\longrightarrow\mathcal{J}_1\overset{-Id\oplus Id}{\longrightarrow}\mathcal{J}_1\oplus\mathcal{O}_1^{st}\longrightarrow\mathcal{O}_1^{st}\rightarrow 0$ d'où, par (3.1.2.1), un diagramme commutatif à lignes et colonnes exactes:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ 0 & \rightarrow & Fil^r_X\widehat{A_{st}}/p\otimes_{S_1}\mathcal{J}_1 & \overset{\sim}{\rightarrow} & Fil^r_X\widehat{A_{st}}/p\otimes_{S_1}\mathcal{J}_1 & \rightarrow & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & Fil^r_X\widehat{A_{st}}/p\otimes_{S_1}(\mathcal{J}_1\oplus\mathcal{O}_1^{st}) & \rightarrow & \bigoplus_{s=r-1}^{r}Fil^s_X\widehat{A_{st}}/p\otimes_{S_1}\mathcal{J}_1^{[r-s]} & \rightarrow & A_{cris}/p\otimes_{S_1}\mathcal{J}_1 & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & Fil^r_X\widehat{A_{st}}/p\otimes_{S_1}\mathcal{O}_1^{st} & \rightarrow & Fil^{r-1}_X\widehat{A_{st}}/p\otimes_{S_1}\mathcal{O}_1^{st} & \rightarrow & A_{cris}/p\otimes_{S_1}\mathcal{O}_1^{st} & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & & & & & \\ & & 0 & & & & & & \end{array}$$

d'où:

$$Ker\Big(\bigoplus_{s=r-1}^{r}Fil^s_X\widehat{A_{st}}/p\otimes_{S_1}\mathcal{J}_1^{[r-s]}\rightarrow Fil^{r-1}_X\widehat{A_{st}}/p\otimes_{S_1}\mathcal{O}_1^{st}\Big)=Fil^r_X\widehat{A_{st}}/p\otimes_{S_1}\mathcal{J}_1 \qquad (4)$$

On montre de même la suite exacte:

$$0\rightarrow Fil^{r-1}_X\widehat{A_{st}}/p\otimes_{S_1}\mathcal{J}_1^{[2]}\rightarrow Fil^{r-2}_X\widehat{A_{st}}/p\otimes_{S_1}\mathcal{J}_1^{[2]}\oplus Fil^{r-1}_X\widehat{A_{st}}/p\otimes_{S_1}\mathcal{O}_1^{st}\rightarrow Fil^{r-2}_X\widehat{A_{st}}/p\otimes_{S_1}\mathcal{O}_1^{st} \qquad (5)$$

Calculons $Ker\Big(\bigoplus_{s=r-2}^{r} Fil^s_X\widehat{A_{st}}/p\otimes_{S_1}\mathcal{J}_1^{[r-s]}\to Fil^{r-2}_X\widehat{A_{st}}/p\otimes_{S_1}\mathcal{O}_1^{st}\Big)$: par (5), c'est la limite projective du diagramme de faisceaux:

$$\begin{array}{ccccc} & & & & Fil^{r-2}_X\widehat{A_{st}}/p\otimes_{S_1}\mathcal{J}_1^{[2]}\oplus\Big(\bigoplus_{s=r-1}^{r} Fil^s_X\widehat{A_{st}}/p\otimes_{S_1}\mathcal{J}_1^{[r-s]}\Big) \\ & & & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & Fil^{r-1}_X\widehat{A_{st}}/p\otimes_{S_1}\mathcal{J}_1^{[2]} & \longrightarrow & Fil^{r-2}_X\widehat{A_{st}}/p\otimes_{S_1}\mathcal{J}_1^{[2]}\oplus Fil^{r-1}_X\widehat{A_{st}}/p\otimes_{S_1}\mathcal{O}_1^{st}\end{array}$$

c'est-à-dire $Fil^{r-1}_X\widehat{A_{st}}/p\otimes_{S_1}\mathcal{J}_1^{[2]}\oplus Fil^r_X\widehat{A_{st}}/p\otimes_{S_1}\mathcal{J}_1$ par (4). Par une récurrence dont on laisse les détails au lecteur, on obtient ainsi l'exactitude au milieu. Reste la surjectivité de droite: avec les notations de la preuve de (3.1.2.2), il suffit de montrer la surjectivité de:

$$\bigoplus_{s=0}^{r} Fil^s_X\widehat{A_{st}}/p\otimes_{S_1}\mathcal{J}_1^{[r-s]}(A^\infty,P^\infty)\longrightarrow \mathcal{J}_1^{[r]}(\bar{A}^\infty,\bar{P}^\infty)$$

Par le diagramme commutatif (3.1.2.2):

$$\begin{array}{ccc}\widehat{A_{st}}/p\otimes_{S_1}\mathcal{O}_1^{st}(A^\infty,P^\infty) & \overset{\sim}{\longrightarrow} & \mathcal{O}_1^{st}(\bar{A}^\infty,\bar{P}^\infty)\\ \downarrow & & \downarrow\\ \mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\otimes_k A^\infty & \overset{\sim}{\longrightarrow} & \bar{A}^\infty\end{array}$$

$\mathcal{J}_1(\bar{A}^\infty,\bar{P}^\infty)=Ker(\mathcal{O}_1^{st}(\bar{A}^\infty,\bar{P}^\infty)\to\bar{A}^\infty)$ s'identifie à:

$$Fil^1\widehat{A_{st}}/p\otimes_{S_1}\mathcal{O}_1^{st}(A^\infty,P^\infty)+\widehat{A_{st}}/p\otimes_{S_1}\mathcal{J}_1(A^\infty,P^\infty)$$

donc $\mathcal{J}_1^{[r]}(\bar{A}^\infty,\bar{P}^\infty)=\sum_{s=0}^{r}Fil^s\widehat{A_{st}}/p\otimes_{S_1}\mathcal{J}_1^{[r-s]}(A^\infty,P^\infty)$. Soit $x\in Fil^s\widehat{A_{st}}/p$, x s'écrit $\sum_{i=0}^{m}x_i.\gamma_i(X)$ avec $x_i\in Fil^{s-i}A_{cris}/p=Fil^{s-i}R^{DP}$ (voir 3.1.2.1). Comme $Fil^{s-i}R^{DP}$ est l'idéal de R^{DP} engendré par $(\gamma_j(\bar{\xi}))_{j\geq s-i}$ et que, dans $\widehat{A_{st}}/p$, $\gamma_j(\bar{\xi})=\gamma_j(u)(1+X)^j$, on a bien:

$$\sum_{s=0}^{r}Fil^s_X\widehat{A_{st}}/p\otimes_{S_1}\mathcal{J}_1^{[r-s]}(A^\infty,P^\infty)\overset{\sim}{\to}\sum_{s=0}^{r}Fil^s\widehat{A_{st}}/p\otimes_{S_1}\mathcal{J}_1^{[r-s]}(A^\infty,P^\infty)\overset{\sim}{\to}\mathcal{J}_1^{[r]}(\bar{A}^\infty,\bar{P}^\infty)$$

ce qui achève la preuve. □

3.1.3 Le noyau de la monodromie

On rappelle que $Spec\ W_n$ désigne le schéma $Spec\ W_n$ muni de la log-structure triviale. On définit les faisceaux $\mathcal{O}_n^{cris}$ et $\mathcal{J}_n^{cris,[r]}$ ($r\in\mathbf{N}^*$) sur $(Spec\ W_n)_{syn}$ par:

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_n^{cris}(U) &= H^0\Big((U/Spec\ W_n)_{cris},\mathcal{O}_{U/Spec\ W_n}\Big)\\ \mathcal{J}_n^{cris,[r]}(U) &= H^0\Big((U/Spec\ W_n)_{cris},\mathcal{J}^{[r]}_{U/Spec\ W_n}\Big)\end{aligned}$$

Pour $r \leq 0$, on convient que $\mathcal{J}_n^{cris,[r]} = \mathcal{O}_n^{cris}$. Comme dans ([Br1],3.2), on a pour $i, r \in \mathbf{N}$ et X_n dans $(Spec\ W_n)_{syn}$ des isomorphismes canoniques entre $H^i((X_n/Spec\ W_n)_{cris}, \mathcal{J}^{[r]}_{X_n/Spec\ W_n})$ et $H^i((X_n)_{syn}, \mathcal{J}_n^{cris,[r]})$. Le morphisme de log-schémas $(Spec\ W_n, \mathcal{L}(p)) \to Spec\ W_n$ est log-syntomique et on note encore $\mathcal{J}_n^{cris,[r]}$ la restriction de $\mathcal{J}_n^{cris,[r]}$ à $(Spec\ W_n, \mathcal{L}(p))_{syn}$.

Proposition 3.1.3.1 *Pour $r \in \mathbf{N}$, on a des suites exactes de faisceaux sur $(Spec\ W_n, \mathcal{L}(p))_{syn}$:*

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}_n^{cris,[r]} \longrightarrow \mathcal{J}_n^{[r]} \xrightarrow{N} \mathcal{J}_n^{[r-1]} \longrightarrow 0$$

Preuve. — Pour $r = 0$, c'est le résultat de ([Br1],6.2.1). Avec les notations de (2.1.2.1) et (2.2.2.1), il suffit de montrer qu'on a une suite exacte:

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}_n^{cris,[r]}(A^\infty, P^\infty) \longrightarrow \mathcal{J}_n^{[r]}(A^\infty, P^\infty) \xrightarrow{N} \mathcal{J}_n^{[r-1]}(A^\infty, P^\infty) \longrightarrow 0$$

Mais on a un isomorphisme (non canonique) $\mathcal{O}_n^{st}(A^\infty, P^\infty) \simeq \mathcal{O}_n^{cris}(A^\infty, P^\infty) < X >$ (Appendice D): l'injectivité de gauche est donc triviale et on vérifie que:

$$\mathcal{J}_n^{[r]}(A^\infty, P^\infty) = \sum_{s=0}^{\infty} \mathcal{J}_n^{cris,[r-s]}(A^\infty, P^\infty).\gamma_s(X)$$

d'où on déduit aisément l'exactitude du milieu puisque $N(\gamma_s(X)) = (1+X)\gamma_{s-1}(X)$. Si $x \in \mathcal{J}_n^{cris,[r-1]}(A^\infty, P^\infty) \subset \mathcal{J}_n^{[r-1]}(A^\infty, P^\infty)$, on peut le relever en $x.Log(1+X) \in \mathcal{J}_n^{[r]}(A^\infty, P^\infty)$. En utilisant ceci et le fait que les $\gamma_s(X)$ se relèvent dans $\mathcal{J}_n^{[s+1]}(A^\infty, P^\infty)$ pour $s \in \mathbf{N}^*$ (voir [Br1],6.2.1), on conclut à la surjectivité de droite. $\square$

3.1.4 Le noyau de $\phi_r - Id$

On montre comme en (2.1.2.1) que les faisceaux $\mathcal{J}_n^{cris,[r]}$ sur $(Spec\ W_n)_{syn}$ sont plats sur W_n et qu'on peut définir des opérateurs (encore) noté $\phi_r : \mathcal{J}_n^{[r]} \to \mathcal{O}_n^{cris}$ sur $(Spec\ W_q)_{syn}$ pour $0 \leq r \leq p-1$ et $n + r \leq q$. On a bien sûr des diagrammes commutatifs sur $(Spec\ W_q, \mathcal{L}(p))_{syn}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{J}_n^{cris,[r]} & \hookrightarrow & \mathcal{J}_n^{[r]} \\ \phi_r \downarrow & & \downarrow \phi_r \\ \mathcal{O}_n^{cris} & \hookrightarrow & \mathcal{O}_n^{st} \end{array}$$

Soit $\mathcal{S}_n^r$ le noyau de $\phi_r - Id : \mathcal{J}_n^{cris,[r]} \longrightarrow \mathcal{O}_n^{cris}$.

Proposition 3.1.4.1 *Pour $0 \leq r \leq Min\{p-1, q-n\}$, on a des suites exactes de faisceaux sur $(Spec\ W_q)_{syn}$:*

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}_n^r \longrightarrow \mathcal{J}_n^{cris,[r]} \xrightarrow{\phi_r - Id} \mathcal{O}_n^{cris} \longrightarrow 0$$

Preuve. — Il faut montrer la surjectivité à droite. Par un dévissage utilisant la platitude des $\mathcal{J}_n^{cris,[r]}$ sur W_n et l'exactitude des foncteurs $i_* : (Spec\ W_n)^{\sim}_{syn} \to (Spec\ W_q)^{\sim}_{syn}$ pour $n \leq q$, on se ramène au cas $n = 1$. Le morphisme de log-schémas $(Spec\ W_q, \mathcal{L}(p)) \to Spec\ W_q$ étant un recouvrement log-syntomique, il suffit de montrer qu'on a une suite exacte: $0 \to \mathcal{S}_1^r \to \mathcal{J}_1^{cris,[r]} \overset{\phi_r - Id}{\to} \mathcal{O}_1^{cris} \to 0$ de faisceaux sur $(Spec\ W_q, \mathcal{L}(p))$. On reprend les notations en (2.1.2.1) et (2.2.2.1). Soit $s \in \mathcal{O}_1^{cris}(A^\infty, P^\infty)$: existe-t-il $x \in \mathcal{J}_1^{cris,[r]}(A^\infty, P^\infty)$ tel que $\phi_r(x) - x = s$? Supposons d'abord $r \leq p-2$. On a:

$$\mathcal{O}_1^{cris}(A^\infty, P^\infty) = \bigoplus_{(m_0,...,m_t)\in \mathbf{N}^{t+1}} (\mathcal{B}/(f_0, ..., f_t)).\gamma_{pm_0}(\psi_0)...\gamma_{pm_t}(\psi_t)$$

et, si $s \in \bigoplus_{\sum m_i \geq 1} (\mathcal{B}/(f_0, ..., f_t)).\gamma_{pm_0}(\psi_0)...\gamma_{pm_t}(\psi_t)$, il est clair que $\phi_r(-s) - (-s) = s$, donc $x = -s$ convient. Supposons $s \in \mathcal{B}/(f_0, ..., f_t) = A^\infty \otimes_{k[Q^\infty G]} k[Q^\infty G^{p^{-1}}]$, puisque $\phi_r - Id$ est additive, il suffit de considérer les deux cas $s = a$ et $s = a(h-1)$ ($a \in A^\infty$, $h \in G^{p^{-1}}$). On rappelle que $\psi_0 \in A^\infty$, $\psi_0 \in \mathcal{J}_1^{cris}(A^\infty, P^\infty)$ et $\phi_1(\psi_0) = -\gamma_p(\psi_0) - 1$.

- Si $s \in A^\infty$: soit $b \in A^\infty$ et $t = (\phi_r(\psi_0^r) - (-1)^r)b^p \in \mathcal{J}_1^{cris,[p]}(A^\infty, P^\infty)$, on a $\phi_r(\psi_0^r b + t) - (\psi_0^r b + t) = (-1)^r b^p - \psi_0^r b$ et l'équation $(-1)^r b^p - \psi_0^r b = a$ n'a peut-être pas de solution dans A^∞, mais se résoud sur un recouvrement syntomique (au sens classique) du schéma $Spec\ A^\infty$: $x = \psi_0^r b + t$ convient alors.

- Si $s = a(h-1)$: $\phi_i((h-1)^i) = (h-1)^i + ... \in k[h-1, (h-1)^p/p]$, et peut donc s'écrire $\phi_i((h-1)^i) = \phi_i^{\leq r}((h-1)^i) + \phi_i^{\geq r+1}((h-1)^i)$ en séparant degrés inférieurs à r et degrés supérieurs à $r+1$ ($(h-1)^p/p$ étant de degré p). Soient $a_1, ..., a_r \in A^\infty$ et:

$$\begin{aligned} t_1 &= \sum_{i=1}^r (\phi_{r-i}(\psi_0^{r-i}) - (-1)^{r-i}) a_i^p \phi_i((h-1)^i) \in \mathcal{J}_1^{cris,[p]}(A^\infty, P^\infty) \\ t_2 &= \sum_{i=1}^r (-1)^{r-i} a_i^p \phi_i^{\geq r+1}((h-1)^i) \in \mathcal{J}_1^{cris,[r+1]}(A^\infty, P^\infty) \\ x &= \sum_{i=1}^r \psi_0^{r-i} a_i (h-1)^i + t_1 + t_2 \in \mathcal{J}_1^{cris,[r]}(A^\infty, P^\infty) \end{aligned}$$

  un calcul facile donne:

$$\begin{aligned} \phi_r(x) - x &= \sum_{i=1}^r (-1)^{r-i} a_i^p \phi_i^{\leq r}((h-1)^i) - \sum_{i=1}^r \psi_0^{r-i} a_i (h-1)^i \\ &= \sum_{i=1}^r \Big((-1)^{r-i} a_i^p - c_{i-1} - \psi_0^{r-i} a_i\Big)(h-1)^i \end{aligned}$$

où $c_0 = 0$ et $c_{i-1} \in k[a_1^p, ..., a_{i-1}^p]$. Or, le système d'équations aux inconnues $\{a_1, ..., a_r\}$:

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} (-1)^{r-1}a_1^p & - & \psi_0^{r-1}a_1 & = & a \\ (-1)^{r-2}a_2^p & - & \psi_0^{r-2}a_2 & = & c_1 \\ & \vdots & & \vdots & \\ a_r^p & - & a_r & = & c_{r-1} \end{array} \right.$$

se résoud (par récurrence) sur des recouvrements syntomiques classiques du schéma *Spec* A^∞.

Supposons $r = p-1$: si on a toujours $\phi_{p-1}(\gamma_r(h-1)) = 0$ pour $r \geq p$ et $\phi_{p-1}(\gamma_r(\psi_i)) = 0$ pour $r \geq p+1$, on a $\phi_{p-1}(\gamma_p(\psi_i)) \in A^\infty$ et non nul en général (par exemple $\phi_{p-1}(\gamma_p(\psi_0)) = -1$).

- Si $s \in A^\infty$, on prend t et x comme précédemment: on a alors $\phi_{p-1}(t) = \eta b^{p^2}$ où $\eta \in \mathbf{F}_p^*$ et $\phi_{p-1}(x) - x = \eta b^{p^2} + (-1)^r b^p - \psi_0^{p-1} b$ qui se résoud encore sur un recouvrement syntomique de *Spec* A^∞.

- Si $s = a(h-1)$, un calcul montre qu'on a encore $\phi_{p-1}(t_1) = \phi_{p-1}(t_2) = 0$ et la preuve est la même dans ce cas.

- Si $s \in \bigoplus_{\sum m_i \geq 1} (\mathcal{B}/(f_0, ..., f_t)).\gamma_{pm_0}(\psi_0)...\gamma_{pm_t}(\psi_t)$, on a $\phi_{p-1}(s) \in A^\infty$ et, par le cas $s \in A^\infty$, l'équation $\phi_{p-1}(y) - y = \phi_{p-1}(s)$ se résoud sur un recouvrement syntomique de *Spec* A^∞: $x = y - s$ convient alors.

Les derniers détails formels de la preuve sont laissés au lecteur. $\Box$

3.2 Application aux groupes de cohomologie

On exploite les suites exactes longues associées aux suites exactes courtes de faisceaux précédentes. Grâce à cela, un peu d'algèbre linéaire et un calcul de cycles proches en réduction semi-stable dû à Kato, Hyodo et Tsuji, on reconstruit la cohomologie étale de p-torsion de la fibre générique (en tant que représentation galoisienne). On en déduit des renseignements sur cette représentation qui sont la réponse à une généralisation d'une conjecture de Serre.

3.2.1 Préliminaires d'algèbre linéaire

Définition 3.2.1.1 *Soit* $r \in \{0, ..., p-2\}$ *et* $\mathcal{M}$ *un objet de* $\underline{\mathcal{M}}^r$, *on appelle filtration admissible sur* $\mathcal{M}$ *toute filtration décroissante* $(Fil^i\mathcal{M})_{0 \leq i \leq r}$ *par des sous-*S*-modules indexés par les entiers entre* 0 *et* r *telle que:*

- $Fil^r\mathcal{M}$ *est le* $Fil^r\mathcal{M}$ *déjà défini sur* $\mathcal{M}$ *et* $Fil^0\mathcal{M} = \mathcal{M}$

- $Fil^{j-i}S.Fil^i\mathcal{M} \subset Fil^j\mathcal{M}$, $0 \leq i \leq j \leq r$

- $N(Fil^i\mathcal{M}) \subset Fil^{i-1}\mathcal{M}$

Par exemple, $Fil^i_M\mathcal{M} = \{x \in \mathcal{M}/(u-p)^{r-i}.x \in Fil^r\mathcal{M}\}$ ou $Fil^i_m\mathcal{M} = S$-module engendré par $N^{r-i}(Fil^r\mathcal{M}) + \sum\limits_{j\geq i} Fil^j S.\mathcal{M}$ sont des filtrations admissibles (pour la deuxième, on utilise la propriété $Fil^1S.N(Fil^r\mathcal{M}) \subset Fil^r\mathcal{M}$). En fait, on vérifie aisément que toute filtration admissible est telle que $Fil^i_m\mathcal{M} \subset Fil^i\mathcal{M} \subset Fil^i_M\mathcal{M}$. Munissons $\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M}$ de la dérivation produit tensoriel et notons $(\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0}$ le noyau de cette dérivation. Si $Fil^i\mathcal{M}$ est une filtration admissible, posons pour $0 \leq i \leq r$:

$$\begin{aligned}
Fil^i(\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M}) &= \sum_{s=0}^{i} Fil^s\widehat{A_{st}} \otimes_S Fil^{i-s}\mathcal{M} \\
Fil^i_X(\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M}) &= \sum_{s=0}^{i} Fil^s_X\widehat{A_{st}} \otimes_S Fil^{i-s}\mathcal{M} \\
Fil^i(\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0} &= Fil^i(\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M}) \bigcap (\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0}
\end{aligned}$$

Lemme 3.2.1.2 *Soit $r \in \{0, ..., p-2\}$, $\mathcal{M}$ un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ et $(Fil^i\mathcal{M})_{0\leq i\leq r}$ une filtration admissible sur $\mathcal{M}$, alors, pour $0 \leq i \leq r$:*
(1) on a des isomorphismes $Fil^i_X(\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} Fil^i(\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M})$
(2) on a des suites exactes courtes:

$$0 \to \bigoplus_{s=1}^{i} Fil^s_X\widehat{A_{st}} \otimes_S Fil^{i+1-s}\mathcal{M} \to \bigoplus_{s=0}^{i} Fil^s_X\widehat{A_{st}} \otimes_S Fil^{i-s}\mathcal{M} \to Fil^i(\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M}) \to 0$$

Preuve. — (1) Soit $a \in Fil^sA_{cris}/p^n$ ($s \in \mathbf{N}$ et n est tel que $p^n\mathcal{M} = 0$), alors a est dans l'idéal engendré par $(\gamma_j([\bar{\xi}] - p))_{j\geq s}$ (voir preuve de (3.1.2.1)). Dans $\widehat{A_{st}}$, on a: $\gamma_j([\bar{\xi}] - p) = \gamma_j(u - p + u.X) = \sum\limits_{l=0}^{j} \gamma_{j-l}(u-p).u^l.\gamma_l(X)$. Soit x dans l'image de $Fil^s\widehat{A_{st}}/p^n \otimes_{S_n} Fil^{i-s}\mathcal{M}$, x est une somme de termes de la forme $a.\gamma_j([\bar{\xi}]-p).\gamma_k(X)\otimes m$ où $a \in A_{cris}/p^n$, $m \in Fil^{i-s}\mathcal{M}$ et $k+j \geq s$. En développant $\gamma_j([\bar{\xi}]-p)$ comme ci-dessus, on obtient $x \in \sum\limits_{l=k}^{s} Fil^l_X\widehat{A_{st}}/p^n \otimes_{S_n} Fil^{i-l}\mathcal{M}$ d'où (1).
(2) La surjectivité est claire par (1). L'injectivité et l'exactitude au milieu résultent de la platitude de $Fil^s_X\widehat{A_{st}}/p^n$ sur S_n ($p^n\mathcal{M} = 0$) exactement comme en (3.1.2.3). □

Remarque: Le lemme précédent est valable, en fait, avec des objets beaucoup plus généraux que ceux de $\underline{\mathcal{M}}^r$.

On renvoie à l'appendice A pour la définition des catégories $\underline{MF}^{f,r}_{tor}$ et $\underline{MF}^{f,r}_{k}$, sous-catégories pleines respectivement de $\underline{\mathcal{M}}^r$ et $\underline{\mathcal{M}}^r_k$.

Lemme 3.2.1.3 *Avec les notations de (3.2.1.2), on a des suites exactes pour* $0 \leq i \leq r$*:*

$$0 \longrightarrow Fil^i(\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0} \longrightarrow Fil^i(\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M}) \xrightarrow{N} Fil^{i-1}(\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M}) \longrightarrow 0$$

Preuve. — Par (3.2.1.2,(1)), il suffit de montrer la surjectivité de $N : Fil^i_X(\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M}) \to Fil^{i-1}_X(\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M})$, et il suffit de trouver un antécédent aux éléments de la forme $\gamma_j(X) \otimes x$ où $x \in Fil^{i-1-s}\mathcal{M}$ et $j \geq s$. On laisse au lecteur le soin de montrer la surjectivité des flèches $N : Fil^{j+1}_X \widehat{A_{st}} \to Fil^j_X \widehat{A_{st}}$ ($j \in \mathbf{N}$) et on note $\int \gamma_j(X)$ un antécédent (quelconque) par N de $\gamma_j(X)$ dans $Fil^{j+1}_X \widehat{A_{st}}$. Soit:

$$y = \int \gamma_j(X) \otimes x - \int\int \gamma_j(X) \otimes N(x) + ... + (-1)^{i-s-2} \underbrace{\int ... \int}_{i-s-1} \gamma_j(X) \otimes N^{i-s-2}(x)$$

On a $y \in Fil^i_X(\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M})$ et un calcul donne:

$$N(y) = \gamma_j(X) \otimes x + (-1)^{i-s-2} \underbrace{\int ... \int}_{i-s-1} \gamma_j(X) \otimes N^{i-s-1}(x)$$

Il suffit donc de trouver un antécédent au deuxième terme de droite et pour cela, il suffit de montrer que $N : Fil^i_X \widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M} \to Fil^{i-1}_X \widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M}$ est surjectif. Par (3.1.2.1), ([Br3],2.4.2.1) et un dévissage facile, il suffit de montrer cette surjectivité pour un objet $\mathcal{M}$ provenant d'un objet M de $\underline{MF}_k^{f,r}$. Mais on obtient alors $N \otimes Id : Fil^i_X \widehat{A_{st}} \otimes_W M \to Fil^{i-1}_X \widehat{A_{st}} \otimes_W M$ puisque $N(M) = 0$, et la surjectivité provient de celle de $N : Fil^i_X \widehat{A_{st}} \to Fil^{i-1}_X \widehat{A_{st}}$. $\square$

Proposition 3.2.1.4 *Soit* $\mathcal{M}$ *un objet de* $\underline{\mathcal{M}}^r$*, le* W*-module* $Fil^r(\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0}$ *ne dépend pas de la filtration admissible* $(Fil^i\mathcal{M})_{0 \leq i \leq r}$ *choisie.*

Preuve. — Si $0 \to \mathcal{M}' \to \mathcal{M} \xrightarrow{s} \mathcal{M}'' \to 0$ est une suite exacte dans $\underline{\mathcal{M}}^r$ et $Fil^i\mathcal{M}$ une filtration admissible sur $\mathcal{M}$, on vérifie que $Fil^i\mathcal{M}'' = s(Fil^i\mathcal{M})$ (resp. $Fil^i\mathcal{M}' = Fil^i\mathcal{M} \cap \mathcal{M}'$) est encore une filtration admissible sur $\mathcal{M}''$ (resp. $\mathcal{M}'$). A partir des suites exactes $0 \to Fil^i\mathcal{M}' \to Fil^i\mathcal{M} \to Fil^i\mathcal{M}'' \to 0$, de (3.1.2.1) et de (3.2.1.2), on obtient des diagrammes commutatifs où les lignes et les deux colonnes de gauche sont exactes ($0 \leq i \leq r$):

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \bigoplus_{s=1}^{i} Fil_X^s \widehat{A_{st}} \otimes_S Fil^{i+1-s}\mathcal{M}' & \longrightarrow & \bigoplus_{s=0}^{i} Fil_X^s \widehat{A_{st}} \otimes_S Fil^{i-s}\mathcal{M}' & \longrightarrow & Fil^i(\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M}') & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \bigoplus_{s=1}^{i} Fil_X^s \widehat{A_{st}} \otimes_S Fil^{i+1-s}\mathcal{M} & \longrightarrow & \bigoplus_{s=0}^{i} Fil_X^s \widehat{A_{st}} \otimes_S Fil^{i-s}\mathcal{M} & \longrightarrow & Fil^i(\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \bigoplus_{s=1}^{i} Fil_X^s \widehat{A_{st}} \otimes_S Fil^{i+1-s}\mathcal{M}'' & \longrightarrow & \bigoplus_{s=0}^{i} Fil_X^s \widehat{A_{st}} \otimes_S Fil^{i-s}\mathcal{M}'' & \longrightarrow & Fil^i(\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M}'') & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

La colonne de droite est donc aussi exacte. Par (3.2.1.3) et le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & Fil^r(\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M}')_{N=0} & \longrightarrow & Fil^r(\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M}') & \xrightarrow{N} & Fil^{r-1}(\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M}') & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & Fil^r(\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0} & \longrightarrow & Fil^r(\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M}) & \xrightarrow{N} & Fil^{r-1}(\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & Fil^r(\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M}'')_{N=0} & \longrightarrow & Fil^r(\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M}'') & \xrightarrow{N} & Fil^{r-1}(\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M}'') & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

on en déduit alors l'exactitude de la colonne de gauche. Notons $Fil^i_{M''}\mathcal{M}'' = s(Fil^i_M\mathcal{M})$ et $Fil^i_{M'}\mathcal{M}' = Fil^i_M\mathcal{M} \cap \mathcal{M}'$ ($Fil^i_{M''}\mathcal{M}'' \neq Fil^i_M\mathcal{M}''$ en général), en réitérant ce qui précède avec $(Fil^i_M\mathcal{M})_{0 \leq i \leq r}$, on a un diagramme commutatif à lignes exactes:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & Fil^r(\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M}')_{N=0} & \longrightarrow & Fil^r(\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0} & \longrightarrow & Fil^r(\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M}'')_{N=0} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & Fil^r_{M'}(\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M}')_{N=0} & \longrightarrow & Fil^r_M(\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0} & \longrightarrow & Fil^r_{M''}(\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M}'')_{N=0} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

et si la proposition est vraie pour $\mathcal{M}'$ et $\mathcal{M}''$ (i.e. si on a des isomorphismes à droite et à gauche), elle est donc vraie pour $\mathcal{M}$. Par dévissage, on se ramène ainsi au cas d'un objet $\mathcal{M} = S_1 \otimes_k M$ avec M dans $\underline{MF}_k^{f,r}$. En prenant une base adaptée à la filtration sur M, on écrit $M = M^0 \oplus M^1 \oplus ... \oplus M^r$ où $Fil^i M = \bigoplus_{j=i}^{r} M^j$ et on a:

$$Fil^i_M\mathcal{M} = Fil^i S \otimes_W M^0 \oplus Fil^{i-1} S \otimes_W M^1 \oplus ... \oplus Fil^1 S \otimes_W M^{i-1} \oplus S \otimes_W Fil^i M$$

d'où on déduit:

$$Fil^r_M(\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0} = \bigoplus_{s=0}^{r}(Fil^s\widehat{A_{st}} \otimes_W M^{r-s})_{N=0} = \bigoplus_{s=0}^{r} Fil^s A_{cris} \otimes_W M^{r-s}$$

(car $N(M) = 0$ et $(Fil^s\widehat{A_{st}})_{N=0} = Fil^s A_{cris}$). Mais en développant “en fonction des $\gamma_j(u)$” les éléments de $Fil^s A_{cris}/p$ comme dans la preuve de (3.2.1.2,(1)), on obtient $\bigoplus_{s=0}^{r} Fil^s A_{cris} \otimes_W M^{r-s} \subset (\widehat{A_{st}} \otimes_S Fil^r\mathcal{M})_{N=0}$ d'où $(\widehat{A_{st}} \otimes_S Fil^r\mathcal{M})_{N=0} = Fil^r_M(\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0}$. Comme pour toute filtration admissible $(Fil^i\mathcal{M})_{0\leq i\leq r}$, on a des inclusions:

$$(\widehat{A_{st}} \otimes_S Fil^r\mathcal{M})_{N=0} \subset Fil^r(\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0} \subset Fil^r_M(\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0}$$

on en déduit le résultat. $\square$

La preuve de (3.2.1.4) donne en prime le:

Lemme 3.2.1.5 *Soit $0 \to \mathcal{M}' \to \mathcal{M} \to \mathcal{M}'' \to 0$ une suite exacte dans $\underline{\mathcal{M}}^r$, on a une suite exacte de W-modules:*

$$0 \to Fil^r(\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M}')_{N=0} \to Fil^r(\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0} \to Fil^r(\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M}'')_{N=0} \to 0$$

On note désormais $Fil^r(\widehat{A_{st}}\otimes_S\mathcal{M})_{N=0} = Fil^r_M(\widehat{A_{st}}\otimes_S\mathcal{M})_{N=0}$. Soit $(Fil^i\mathcal{M})_{0\leq i\leq r}$ une filtration admissible sur $\mathcal{M}$, on définit pour $0 \leq i \leq r$ des applications $\phi_i : Fil^i\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ par $\phi_i(x) = \dfrac{\phi_r((u-p)^{r-i}.x)}{\phi_{r-i}((u-p)^{r-i})}$. On en déduit une application semi-linéaire:

$$\bigoplus_{s=0}^{r} \phi_s \otimes \phi_{r-s} : \bigoplus_{s=0}^{r} Fil^s_X\widehat{A_{st}} \otimes_S Fil^{r-s}\mathcal{M} \to \widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M}$$

Soit $f : \bigoplus_{s=1}^{r} Fil^s_X\widehat{A_{st}} \otimes_S Fil^{r+1-s}\mathcal{M} \to \bigoplus_{s=0}^{r} Fil^s_X\widehat{A_{st}} \otimes_S Fil^{r-s}\mathcal{M}$ l'injection de (3.2.1.2,(2)), en utilisant $\phi_i|_{Fil^{i+1}} = p\phi_{i+1}$, on a $(\bigoplus_{s=0}^{r} \phi_s \otimes \phi_{r-s}) \circ f = 0$ d'où par (3.2.1.2,(2)) une application semi-linéaire encore notée $\phi_r : Fil^r(\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M}) \to \widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M}$. Grâce aux relations $N\phi_i = \phi_{i-1}N$ (calcul facile), elle induit une application $\phi_r : Fil^r(\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0} \to (\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0}$. On note $Fil^r(\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M})^{\phi_r=1}_{N=0}$ le noyau de $\phi_r - Id$ sur $Fil^r(\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0}$.

Lemme 3.2.1.6 *Soit $\mathcal{M}$ un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$, on a une suite exacte:*

$$0 \longrightarrow Fil^r(\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M})^{\phi_r=1}_{N=0} \longrightarrow Fil^r(\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0} \xrightarrow{\phi_r - Id} (\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0} \longrightarrow 0$$

Preuve. — Il faut montrer la surjectivité de droite. Soit $0 \to \mathcal{M}' \to \mathcal{M} \to \mathcal{M}'' \to 0$ une suite exacte dans $\underline{\mathcal{M}}^r$. Par (3.1.2.1) et (3.2.1.3), on déduit une suite exacte $0 \to (\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M}')_{N=0} \to (\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0} \to (\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M}'')_{N=0} \to 0$ et, par (3.2.1.5), que si la surjection est vraie pour $\mathcal{M}'$ et $\mathcal{M}''$, elle est vraie pour $\mathcal{M}$. On se ramène ainsi au cas d'un objet $\mathcal{M} = S_1 \otimes_k M$ avec M dans $\underline{MF}_k^{f,r}$ et il s'agit de montrer la surjectivité de $Fil^r(A_{cris}/p \otimes_k M) \overset{\phi_r - Id}{\longrightarrow} A_{cris}/p \otimes_k M$. Notons $(e_1, ..., e_n)$ une base de M adaptée à la filtration et r_i le plus grand entier tel que $e_i \in Fil^{r_i}M$. Un élément y de $Fil^r(A_{cris}/p \otimes_k M)$ s'écrit de façon unique $\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes e_i$ avec $a_i \in Fil^{r-r_i}A_{cris}/p$ et, si $\mathcal{G}^{-1} \in GL_n(k)$ désigne la matrice de $(\phi_{r_1}(e_1), ..., \phi_{r_n}(e_n))$ dans la base $(e_1, ..., e_n)$, les coordonnées de $\phi_r(y) - y$ dans $(e_1, ..., e_n)$ sont données par le vecteur colonne:

$$\mathcal{G}^{-1} \begin{pmatrix} \phi_{r-r_1}(a_1) \\ \vdots \\ \phi_{r-r_n}(a_n) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Soit $\sum_{i=1}^{n} b_i \otimes e_i$ un élément de $A_{cris}/p \otimes_k M$, lui trouver un antécédent revient donc à chercher des a_i dans $Fil^{r-r_i}A_{cris}/p$ tels que:

$$\begin{pmatrix} \phi_{r-r_1}(a_1) \\ \vdots \\ \phi_{r-r_n}(a_n) \end{pmatrix} = \mathcal{G} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \mathcal{G} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Mais un tel système admet toujours des solutions (voir [Br3],3.2.2.1 (3)), ce qui achève la preuve du lemme. □

Si V est un $\mathbf{Z}_p$-module galoisien, on note $V(r)$ le tordu de V par la puissance $r^{ième}$ du caractère cyclotomique et $V^\wedge = Hom_{\mathbf{Z}_p}(V, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p)$. Dans ([Br3],3), on définit un foncteur contravariant V_{st} exact et pleinement fidèle de $\underline{\mathcal{M}}^r$ dans la catégorie des représentations de p-torsion de $G = Gal(\bar{K_0}/K_0)$ par $V_{st}(\mathcal{M}) = Hom_{'\underline{\mathcal{M}}^r}(\mathcal{M}, \widehat{A_{st}} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p)$. On aura besoin de la version covariante de V_{st}:

Proposition 3.2.1.7 *Soit $\mathcal{M}$ un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$, on a un isomorphisme canonique de $\mathbf{Z}_p$-modules galoisiens:*

$$\Psi^r : \; Fil^r(\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0}^{\phi_r=1} \overset{\sim}{\longrightarrow} V_{st}(\mathcal{M})^\wedge(r)$$

Preuve. — Soit t l'élément de A_{cris} construit dans ([Fo],5.1.2) tel que $\mathbf{Z}_p(1) \simeq \mathbf{Z}_p.t$. Remarquons d'abord que:

$$(Fil^r\widehat{A_{st}}/p^n)_{N=0}^{\phi_r=1} = (Fil^r A_{cris}/p^n)^{\phi_r=1} = \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}.t^r$$

([Fo],5.3.6). Si $x = \sum_{j\in J} a_j \otimes x_j \in Fil^r(\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0}^{\phi_r=1}$ et $f \in V_{st}(\mathcal{M})$, on pose $\Psi^r(x)(f) = \sum_{j\in J} a_j f(x_j) \in (Fil^r A_{cris}/p^n)^{\phi_r=1}$ ($p^n\mathcal{M} = 0$): Ψ^r est une application $\mathbf{Z}_p$-linéaire de $Fil^r(\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0}^{\phi_r=1}$ dans $Hom_{\mathbf{Z}_p}\Big(V_{st}(\mathcal{M}), (\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p).t^r\Big)$ et qui commute à Galois. Par (3.2.1.5) et (3.2.1.6), le foncteur $\mathcal{M} \mapsto Fil^r(\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0}^{\phi_r=1}$ est exact et comme le foncteur $\mathcal{M} \mapsto V_{st}(\mathcal{M})^\wedge(r)$ est aussi exact ([Br3],3.2.3.1), il suffit par dévissage de montrer que Ψ^r est un isomorphisme pour un objet $\mathcal{M} = S_1 \otimes_k M$ avec M dans $\underline{MF}_k^{f,r}$. Puisque les $\mathbf{F}_p$-espaces vectoriels $Fil^r(\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0}^{\phi_r=1} = Fil^r(A_{cris} \otimes_k M)^{\phi_r=1}$ et $V_{st}(\mathcal{M}) = V_{cris}(M)$ sont de même dimension finie $= dim_k M$ ([FL],3.3 et [Br3],3.2.3.2), il suffit de montrer que Ψ^r est injectif. Voici brièvement comment procéder: on se ramène d'abord sur $R/\bar{\xi}^p R$ ([Br3],3.3.1) puis, en posant $Fil^i R = \bar{\xi}^i R$, $\phi_i(\bar{\xi}^i x) = (-1)^i x^p$ ($0 \leq i \leq r$ et $\phi_i : Fil^i R \to R$) et en résolvant les équations de proche en proche dans $R/\bar{\xi}^m R$ pour $m \to \infty$ ($R \simeq \varprojlim_m R/\bar{\xi}^m R$), on a des isomorphismes de $\mathbf{F}_p$-espaces vectoriels: $Fil^r(R \otimes_k M)^{\phi_r=1} \xrightarrow{\sim} Fil^r(R/\bar{\xi}^p R \otimes_k M)^{\phi_r=1}$ et $V_{cris}(M) \xleftarrow{\sim} \hat{V}_{cris}(M) = \{f \in Hom_k(M, R)$ *compatible à* Fil^i *et* $\phi_i\}$. Si $\hat{t}$ est une base du $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel de dimension 1: $(Fil^1 R)^{\phi_1=1}$ et si on définit comme précédemment $\hat{\Psi}^r : Fil^r(R \otimes_k M)^{\phi_r=1} \to Hom_{\mathbf{F}_p}(\hat{V}_{cris}(M), \mathbf{F}_p.\hat{t}^r)$, on a un diagramme commutatif de $\mathbf{F}_p$-espaces vectoriels:

$$\begin{array}{ccc}
Fil^r(R \otimes_k M)^{\phi_r=1} & \longrightarrow & Hom_{\mathbf{F}_p}(\hat{V}_{cris}(M), \mathbf{F}_p.\hat{t}^r) \\
\wr\downarrow & & \downarrow\wr \\
Fil^r(R/\bar{\xi}^p R \otimes_k M)^{\phi_r=1} & \longrightarrow & Hom_{\mathbf{F}_p}(V_{cris}(M), \mathbf{F}_p.t^r)
\end{array}$$

et il suffit de montrer l'injectivité de $\hat{\Psi}^r$. Mais si $n = dim_k M$, on montre aisément qu'elle vient du fait qu'un vecteur de $R^n \subset (Frac\ R)^n$ "orthogonal" à n vecteurs linéairement indépendants de $(Frac\ R)^n$ est nul. $\square$

3.2.2 Calcul de $\varinjlim_L H^i((X_{n,L})_{syn}, \mathcal{J}_n^{[r]})$

Dans cette section, on note X_n un log-schéma log-syntomique sur $(Spec\, W_n, \mathcal{L}(p))$ dont le schéma sous-jacent est quasi-compact.

Lemme 3.2.2.1 *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de S_n-modules sur $(X_n)_{syn}$, on a pour tout $s \in \mathbf{N}$ et $i \in \mathbf{N}$: $H^i((X_n)_{syn}, Fil_X^s \widehat{A_{st}}/p^n \otimes_{S_n} \mathcal{F}) = Fil_X^s \widehat{A_{st}}/p^n \otimes_{S_n} H^i((X_n)_{syn}, \mathcal{F})$.*

Preuve. — Cela résulte de la platitude de $Fil_X^s \widehat{A_{st}}/p^n$ sur S_n (3.1.2.1) et du fait que si $\mathcal{I}$ est un objet injectif dans la catégorie des faisceaux de S_n-modules, $Fil_X^s \widehat{A_{st}}/p^n \otimes_{S_n} \mathcal{I}$ est un faisceau acyclique de S_n-modules (utiliser (SGA4, V.4.3) par exemple). $\square$

Proposition 3.2.2.2 *Pour $r \in \mathbf{N}$ et $i \in \mathbf{N}$, on a des suites exactes courtes compatibles à l'action de G:*

$$0\to\bigoplus_{s=1}^{r} Fil^s_X\widehat{A_{st}}/p^n\otimes_{S_n}H^i((X_n)_{syn},\mathcal{J}_n^{[r+1-s]})\to\bigoplus_{s=0}^{r} Fil^s_X\widehat{A_{st}}/p^n\otimes_{S_n}H^i((X_n)_{syn},\mathcal{J}_n^{[r-s]})\to\varinjlim_L H^i((X_{n,L})_{syn},\mathcal{J}_n^{[r]})\to 0$$

Preuve. — De (3.1.2.3) et par (3.2.2.1), on déduit une suite exacte longue de cohomologie (compatible à l'action de G):

$$...\to\bigoplus_{s=1}^{r} Fil^s_X\widehat{A_{st}}/p^n\otimes_{S_n}H^i((X_n)_{syn},\mathcal{J}_n^{[r+1-s]})\to\bigoplus_{s=0}^{r} Fil^s_X\widehat{A_{st}}/p^n\otimes_{S_n}H^i((X_n)_{syn},\mathcal{J}_n^{[r-s]})\to H^i((X_n)_{syn},j_*\mathcal{J}_n^{[r]})\to...$$

Les flèches $Fil^s_X\widehat{A_{st}}/p^n\otimes_{S_n}H^i((X_n)_{syn},\mathcal{J}_n^{[r+1-s]})\to Fil^{s-1}_X\widehat{A_{st}}/p^n\otimes_{S_n}H^i((X_n)_{syn},\mathcal{J}_n^{[r+1-s]})$ sont toutes injectives puisque $(Fil^{s-1}_X\widehat{A_{st}}/p^n)/(Fil^s_X\widehat{A_{st}}/p^n)$ est un S_n-module plat (voir preuve de (3.1.2.1)). Une récurrence facile donne alors une injection à gauche, d'où le résultat par (3.1.1.4). $\square$

3.2.3 Calcul de $\varinjlim_L H^i((X_{n,L})_{syn},\mathcal{J}_n^{cris,[r]})$, $0\leq i\leq r\leq p-2$

Dans cette section, on se donne deux entiers non nuls n et q tels que $n\leq q$ et un log-schéma fin X_q propre et log-lisse sur $(Spec\ W_q,\mathcal{L}(p))$ dont la fibre spéciale est du type de Cartier sur $(Spec\ k,L)$. Pour simplifier, on supposera $p-1\leq q-n$. Si $X_n=X_q\times_{Spec\ W_q}Spec\ W_n$, on rappelle que, pour $0\leq i\leq r\leq p-2$, $\left(H^i((X_n)_{syn},\mathcal{O}_n^{st}),H^i((X_n)_{syn},\mathcal{J}_n^{[r]}),\phi_r,N\right)$ est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ (2.3.2.1). Comme en (3.1.1), on montre $\varinjlim_L R^ij_{L*}j_L^*\mathcal{J}_n^{cris,[r]}=0$ sur $(Spec\ W_n,\mathcal{L}(p))_{syn}$ pour $i>0$ et $r\in\mathbf{N}$ et des isomorphismes compatibles à G:

$$H^i((X_n)_{syn},j_*\mathcal{J}_n^{cris,[r]})\xleftarrow{\sim}\varinjlim_L H^i((X_n)_{syn},j_{L*}j_L^*\mathcal{J}_n^{cris,[r]})\xrightarrow{\sim}\varinjlim_L H^i((X_{n,L})_{syn},\mathcal{J}_n^{cris,[r]})$$

pour $i\in\mathbf{N}$ et $r\in\mathbf{N}$.

Proposition 3.2.3.1 *Pour $r\in\mathbf{N}$ et $0\leq i\leq p-2$, on a des suites exactes courtes:*

$$0\longrightarrow H^i((X_n)_{syn},j_*\mathcal{J}_n^{cris,[r]})\longrightarrow H^i((X_n)_{syn},j_*\mathcal{J}_n^{[r]})\xrightarrow{N}H^i((X_n)_{syn},j_*\mathcal{J}_n^{[r-1]})\longrightarrow 0$$

Preuve. — A partir de (3.1.3.1) et puisque $\varinjlim_L R^1j_{L*}j_L^*\mathcal{J}_n^{cris,[r]}=0$, on obtient comme en (3.1.1.3) une suite exacte courte: $0\to j_*\mathcal{J}_n^{cris,[r]}\to j_*\mathcal{J}_n^{[r]}\xrightarrow{N} j_*\mathcal{J}_n^{[r-1]}\to 0$. En prenant la suite exacte longue associée, il suffit de montrer la surjectivité de $H^i((X_n)_{syn},j_*\mathcal{J}_n^{[r]})\xrightarrow{N}H^i((X_n)_{syn},j_*\mathcal{J}_n^{[r-1]})$. Soit $i\in\{0,...,p-2\}$, pour $r\geq 2$ et $1\leq s\leq r-1$, on définit des applications $N^{s,r}=N\otimes Id\oplus Id\otimes N$:

$$Fil^s_X\widehat{A_{st}}/p^n\otimes_{W_n}\mathcal{J}_n^{[r-s]}\xrightarrow{N^{s,r}}Fil^{s-1}_X\widehat{A_{st}}/p^n\otimes_{W_n}\mathcal{J}_n^{[r-s]}\oplus Fil^s_X\widehat{A_{st}}/p^n\otimes_{W_n}\mathcal{J}_n^{[r-s-1]}$$

(remarquer qu'on tensorise pour cela au-dessus de W_n). Pour $r \in \mathbf{N}$ et $s = 0$ (resp. $s = r$), on définit $N^{0,r} = N \otimes Id + Id \otimes N : \widehat{A_{st}}/p^n \otimes_{S_n} \mathcal{J}_n^{[r]} \to \widehat{A_{st}}/p^n \otimes_{S_n} \mathcal{J}_n^{[r-1]}$ (resp. $N^{r,r} = N \otimes Id + Id \otimes N : Fil_X^r \widehat{A_{st}}/p^n \otimes_{S_n} \mathcal{O}_n^{st} \to Fil_X^{r-1} \widehat{A_{st}}/p^n \otimes_{S_n} \mathcal{O}_n^{st}$). On obtient ainsi un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc}
\bigoplus_{s=0}^{r-1} Fil_X^s \widehat{A_{st}} \otimes_W H^i((X_n)_{syn}, \mathcal{J}_n^{[r-s]}) \oplus Fil_X^r \widehat{A_{st}} \otimes_S H^i((X_n)_{syn}, \mathcal{O}_n^{st}) & \to & H^i((X_n)_{syn}, j_*\mathcal{J}_n^{[r]}) \\
\oplus N^{s,r} \downarrow & & \downarrow N \\
\bigoplus_{s=0}^{r-2} Fil_X^s \widehat{A_{st}} \otimes_W H^i((X_n)_{syn}, \mathcal{J}_n^{[r-1-s]}) \oplus Fil_X^{r-1} \widehat{A_{st}} \otimes_S H^i((X_n)_{syn}, \mathcal{O}_n^{st}) & \to & H^i((X_n)_{syn}, j_*\mathcal{J}_n^{[r-1]})
\end{array}$$

On déduit de (3.2.2.2) que les deux flèches horizontales sont surjectives et il suffit donc de montrer la surjectivité de la flèche verticale de gauche. Par une méthode exactement similaire à la preuve de (3.2.1.3), on se ramène à montrer la surjectivité de $N^{r,r}$ (sur les groupes de cohomologie). Mais, pour $0 \leq i \leq p-2$, $H^i((X_n)_{syn}, \mathcal{O}_n^{st})$ peut être muni d'une structure d'objet de $\underline{\mathcal{M}}^{p-2}$ et il suffit donc de montrer que $N : Fil_X^r \widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M} \to Fil_X^{r-1} \widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M}$ est surjectif pour $r \in \mathbf{N}$ et $\mathcal{M}$ dans $\underline{\mathcal{M}}^{p-2}$, ce qui est fait dans la preuve de (3.2.1.3). $\square$

On fixe jusqu'à la fin de cette section deux entiers $r \in \{0, ..., p-2\}$ et $i \in \{0, ..., r\}$, et on pose $\mathcal{M}_i = H^i((X_n)_{syn}, \mathcal{O}_n^{st})$ et, pour $0 \leq j \leq r$:

- $Fil^j \mathcal{M}_i = Im\Big(H^i((X_n)_{syn}, \mathcal{J}_n^{[j]}) \to H^i((X_n)_{syn}, \mathcal{O}_n^{st})\Big)$
- $K_i^j = Ker\Big(H^i((X_n)_{syn}, \mathcal{J}_n^{[j]}) \to H^i((X_n)_{syn}, \mathcal{O}_n^{st})\Big)$
- $\bar{K}_i^j = Ker\Big(H^i((X_n)_{syn}, j_*\mathcal{J}_n^{[j]}) \to H^i((X_n)_{syn}, j_*\mathcal{O}_n^{st})\Big)$

On a $K_i^0 = K_i^r = 0$ et on vérifie facilement que $(Fil^j \mathcal{M}_i)_{0 \leq j \leq r}$ est une filtration admissible sur $\mathcal{M}_i$ (3.2.1.1).

Lemme 3.2.3.2 *Avec les hypothèses et notations précédentes, on a pour $0 \leq j \leq r$ des suites exactes courtes:*

$$0 \to \bigoplus_{s=1}^{j} Fil_X^s \widehat{A_{st}}/p^n \otimes_{S_n} K_i^{j+1-s} \to \bigoplus_{s=0}^{j} Fil_X^s \widehat{A_{st}}/p^n \otimes_{S_n} K_i^{j-s} \to \bar{K}_i^j \to 0$$

Preuve. — C'est évident à partir de (3.1.2.1), (3.2.2.2), (3.2.1.2,(2)) (appliqué à $\mathcal{M} = \mathcal{M}_i$ avec la filtration admissible précédente) et des suites exactes $0 \to K_i^j \to H^i(X_n, \mathcal{J}_n^{[j]}) \to Fil^j \mathcal{M}_i \to 0$. $\square$

Les opérateurs $H^i((X_n)_{syn}, \mathcal{J}_n^{[j]}) \xrightarrow{N} H^i((X_n)_{syn}, \mathcal{J}_n^{[j-1]})$ et $H^i((X_n)_{syn}, j_*\mathcal{J}_n^{[j]}) \xrightarrow{N} H^i((X_n)_{syn}, j_*\mathcal{J}_n^{[j-1]})$ induisent des opérateurs encore notés N: $K_i^j \to K_i^{j-1}$ et $\bar{K}_i^j \to \bar{K}_i^{j-1}$.

Lemme 3.2.3.3 *Les applications* $N : \bar{K}_i^j \to \bar{K}_i^{j-1}$ *sont surjectives pour* $0 \leq j \leq r$.

Preuve. — En raisonnant comme dans la preuve de (3.2.3.1) et puisque $K_i^0 = 0$, on a un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \widehat{A_{st}}/p^n \otimes_{S_n} K_i^j \oplus \bigoplus_{s=1}^{j-1} Fil_X^s \widehat{A_{st}}/p^n \otimes_{W_n} K_i^{j-s} & \to & \bar{K}_i^j \\ {\scriptstyle \oplus N^{s,j}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle N} \\ \widehat{A_{st}}/p^n \otimes_{S_n} K_i^{j-1} \oplus \bigoplus_{s=1}^{j-2} Fil_X^s \widehat{A_{st}}/p^n \otimes_{W_n} K_i^{j-1-s} & \to & \bar{K}_i^{j-1} \end{array}$$

et par (3.2.3.2) il suffit de montrer la surjectivité à gauche. Mais si $x \in K_i^{j-1-s_0}$ $(0 \leq s_0 \leq j-2)$ et $l \geq s_0$, on vérifie que l'élément suivant de $\bigoplus_{s=s_0+1}^{j-1} Fil_X^s \widehat{A_{st}}/p^n \otimes_{W_n} K_i^{j-s}$ (avec les notations de (3.2.1.3)):

$$y = \left(\int \gamma_l(X) \otimes x\right) \oplus \left(-\int\int \gamma_l(X) \otimes N(x)\right) \oplus ... \oplus \left((-1)^{j-2-s_0} \underbrace{\int ... \int}_{j-1-s_0} \gamma_l(X) \otimes N^{j-2-s_0}(x)\right)$$

est un antécédent de $\gamma_l(X) \otimes x$ (on utilise $N(K_i^1) = 0$). $\square$

Lemme 3.2.3.4 *Les applications* $N : \bar{K}_i^r \to \bar{K}_i^{r-1}$ *sont injectives.*

Preuve. — Soit $x \in \bar{K}_i^r$, par (3.2.3.2), il existe des éléments $x_s \in Fil_X^s \widehat{A_{st}}/p^n \otimes_{W_n} K_i^{r-s}$ $(1 \leq s \leq r-1)$ tels que x est l'image dans $\bar{K}_i^r$ de $\bigoplus_{s=1}^{r-1} x_s$ (rappelons que $K_i^0 = K_i^r = 0$). Supposons $N(x) = 0$, alors l'image de l'élément $(N \otimes Id)(x_1) \oplus \bigoplus_{s=1}^{r-2} \big((Id \otimes N)(x_s) + (N \otimes Id)(x_{s+1})\big)$ dans $\bigoplus_{s=0}^{r-2} Fil_X^s \widehat{A_{st}}/p^n \otimes_{S_n} K_i^{r-1-s}$ a pour image $N(x) = 0$ dans $\bar{K}_i^{r-1}$ et provient donc de $\bigoplus_{s=1}^{r-1} Fil_X^s \widehat{A_{st}}/p^n \otimes_{S_n} K_i^{r-s}$ (3.2.3.2). En particulier, l'image de $(N \otimes Id)(x_1)$ dans $\widehat{A_{st}}/p^n \otimes_{S_n} K_i^{r-1}$ appartient à $Fil_X^1 \widehat{A_{st}}/p^n \otimes_{S_n} K_i^{r-1}$. Considérons le diagramme commutatif à lignes exactes par (3.1.2.1):

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & Fil_X^2 \widehat{A_{st}} \otimes_W K_i^{r-1} & \to & Fil_X^1 \widehat{A_{st}} \otimes_W K_i^{r-1} & \to & \gamma_1(X).A_{cris} \otimes_W K_i^{r-1} & \to 0 \\ & & {\scriptstyle N\otimes Id} \downarrow & & {\scriptstyle N\otimes Id} \downarrow & & {\scriptstyle N\otimes Id} \downarrow & \\ 0 & \to & Fil_X^1 \widehat{A_{st}} \otimes_S K_i^{r-1} & \to & \widehat{A_{st}} \otimes_S K_i^{r-1} & \to & A_{cris} \otimes_S K_i^{r-1} & \to 0 \end{array}$$

l'élément $x_1 \in Fil_X^1 \widehat{A_{st}} \otimes_W K_i^{r-1}$ a donc pour image 0 dans $A_{cris} \otimes_S K_i^{r-1}$. Grâce au diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \gamma_1(X).A_{cris}/p^n \otimes_{W_n} K_i^{r-1} & \longrightarrow & \gamma_1(X).A_{cris}/p^n \otimes_{S_n} K_i^{r-1} \\ {\scriptstyle N\otimes Id} \downarrow \wr & & \wr \downarrow {\scriptstyle N\otimes Id} \\ A_{cris}/p^n \otimes_{W_n} K_i^{r-1} & \longrightarrow & A_{cris}/p^n \otimes_{S_n} K_i^{r-1} \end{array}$$

(l'application $N : \gamma_1(X).A_{cris}/p^n \to A_{cris}/p^n$ est un morphisme de S_n-module cette fois) et à la suite exacte:

$$0 \to Fil^2_X\widehat{A_{st}} \otimes_S K_i^{r-1} \to Fil^1_X\widehat{A_{st}} \otimes_S K_i^{r-1} \to \gamma_1(X).A_{cris} \otimes_S K_i^{r-1} \to 0$$

on en déduit que l'image de x_1 dans $Fil^1_X\widehat{A_{st}}/p^n \otimes_{S_n} K_i^{r-1}$ a pour image 0 dans $\gamma_1(X).A_{cris}/p^n \otimes_{S_n} K_i^{r-1}$ donc appartient à $Fil^2_X\widehat{A_{st}}/p^n \otimes_{S_n} K_i^{r-1}$. Quitte à changer x_2, on peut donc supposer $x_1 = 0$. Par le même raisonnement avec x_2, on montre qu'on peut prendre $x_2 = 0$ quitte à changer x_3. Par une récurrence facile, x est finalement l'image dans $\bar{K}_i^r$ d'un élément $x_{r-1} \in Fil^{r-1}_X\widehat{A_{st}}/p^n \otimes_{W_n} K_i^1$. Mais l'image de $N(x_{r-1})$ ($N(K_i^1) = 0$) dans $Fil^{r-2}_X\widehat{A_{st}}/p^n \otimes_{S_n} K_i^1$ s'envoie sur 0 dans $\bar{K}_i^{r-1}$ et on en déduit de même que l'image de x_{r-1} dans $Fil^{r-1}_X\widehat{A_{st}}/p^n \otimes_{S_n} K_i^1$ appartient en fait à $Fil^r_X\widehat{A_{st}}/p^n \otimes_{S_n} K_i^1$. Un tel élément s'envoie sur 0 dans $\bar{K}_i^r$ car la flèche $Fil^r_X\widehat{A_{st}}/p^n \otimes_{S_n} K_i^1 \to \bar{K}_i^r$ se factorise par $Fil^r_X\widehat{A_{st}}/p^n \otimes_{S_n} K_i^0$ et $K_i^0 = 0$. Finalement, $x = 0$, d'où l'injectivité. $\square$

A partir de (3.2.2.2) et (3.2.1.2,(2)), on a des flèches canoniques surjectives compatibles à l'action de G ($0 \leq j \leq r$): $H^i((X_n)_{syn}, j_*\mathcal{J}_n^{[j]}) \to Fil^j(\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M}_i)$. Par (3.2.3.1) et le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc}
\bigoplus_{s=0}^{r} Fil^s_X\widehat{A_{st}}/p^n \otimes_{W_n} \mathcal{J}_n^{[r-s]} & \to & j_*\mathcal{J}_n^{[r]} \\
\oplus N^{s,r} \downarrow & & \downarrow N \\
\bigoplus_{s=0}^{r-1} Fil^s_X\widehat{A_{st}}/p^n \otimes_{W_n} \mathcal{J}_n^{[r-1-s]} & \to & j_*\mathcal{J}_n^{[r-1]}
\end{array}$$

on en déduit des applications: $H^i((X_n)_{syn}, j_*\mathcal{J}_n^{cris,[j]}) \to Fil^j(\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M}_i)_{N=0}$.

Corollaire 3.2.3.5 *Pour $0 \leq i \leq r \leq p-2$, on a des isomorphismes de modules galoisiens:*

$$\begin{array}{ccccc}
\varinjlim_L H^i((X_{n,L})_{syn}, \mathcal{O}_n^{cris}) & \simeq & H^i((X_n)_{syn}, j_*\mathcal{O}_n^{cris}) & \xrightarrow{\sim} & (\widehat{A_{st}} \otimes_S H^i((X_n)_{syn}, \mathcal{O}_n^{st}))_{N=0} \\
\varinjlim_L H^i((X_{n,L})_{syn}, \mathcal{J}_n^{cris,[r]}) & \simeq & H^i((X_n)_{syn}, j_*\mathcal{J}_n^{cris,[r]}) & \xrightarrow{\sim} & Fil^r(\widehat{A_{st}} \otimes_S H^i((X_n)_{syn}, \mathcal{O}_n^{st}))_{N=0}
\end{array}$$

Preuve. — Le premier est un corollaire immédiat de (3.2.2.2) et (3.2.3.1). Par (3.2.1.3) et (3.2.3.1), on a le diagramme commutatif suivant à lignes et colonnes exactes compatibles à l'action de G:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & \bar{K}_i^r & \xrightarrow{N} & \bar{K}_i^{r-1} & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & H^i((X_n)_{syn}, j_*\mathcal{J}_n^{cris,[r]}) & \to & H^i((X_n)_{syn}, j_*\mathcal{J}_n^{[r]}) & \xrightarrow{N} & H^i((X_n)_{syn}, j_*\mathcal{J}_n^{[r-1]}) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & Fil^r(\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M}_i)_{N=0} & \to & Fil^r(\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M}_i) & \xrightarrow{N} & Fil^{r-1}(\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M}_i) & \to & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Comme $N : \bar{K}_i^r \to \bar{K}_i^{r-1}$ est bijectif par (3.2.3.3) et (3.2.3.4), on en déduit le résultat par une chasse au diagramme triviale. $\square$

3.2.4 Calcul de $\varinjlim_L H^i((X_{n+r,L})_{syn}, \mathcal{S}_n^r)$, $0 \le i \le r \le p-2$: un théorème de comparaison

On garde les hypothèses de la section précédente. Les opérateurs ϕ_r sur $\mathcal{J}_n^{cris,[r]}$ induisent des opérateurs encore notés $\phi_r : j_*\mathcal{J}_n^{cris,[r]} \to j_*\mathcal{O}_n^{cris}$ sur $(Spec\, W_{n+r}, \mathcal{L}(p))_{syn}$. On rappelle que l'image de $H^i((X_n)_{syn}, \mathcal{J}_n^{[j]})$ dans $H^i((X_n)_{syn}, \mathcal{O}_n^{st})$ définit une filtration admissible sur ce dernier ($0 \le i \le r \le p-2$ et $0 \le j \le r$) et qu'on a des opérateurs $\phi_r : Fil^r(\widehat{A_{st}} \otimes_S H^i((X_n)_{syn}, \mathcal{O}_n^{st}))_{N=0} \to (\widehat{A_{st}} \otimes_S H^i((X_n)_{syn}, \mathcal{O}_n^{st}))_{N=0}$ (3.2.1).

Théorème 3.2.4.1 *Pour $0 \le i \le r \le p-2$, on a des isomorphismes de modules galoisiens:*

$$\varinjlim_L H^i((X_{n+r,L})_{syn}, \mathcal{S}_n^r) \xrightarrow{\sim} Fil^r(\widehat{A_{st}} \otimes_S H^i((X_n)_{syn}, \mathcal{O}_n^{st}))_{N=0}^{\phi_r=1}$$

Preuve. — De (3.1.4.1), on a des suites exactes longues:

$$\ldots \longrightarrow H^i((X_{n+r,L})_{syn}, \mathcal{S}_n^r) \longrightarrow H^i((X_{n,L})_{syn}, \mathcal{J}_n^{cris,[r]}) \xrightarrow{\phi_r - Id} H^i((X_{n,L})_{syn}, \mathcal{O}_n^{cris}) \longrightarrow \ldots$$

d'où, par passage à la limite inductive (filtrante) sur L et en utilisant l'introduction de (3.2.3), des suites exactes longues compatibles à l'action de G:

$$\ldots \longrightarrow \varinjlim_L H^i((X_{n+r,L})_{syn}, \mathcal{S}_n^r) \longrightarrow H^i((X_n)_{syn}, j_*\mathcal{J}_n^{cris,[r]}) \xrightarrow{\phi_r - Id} H^i((X_n)_{syn}, j_*\mathcal{O}_n^{cris}) \longrightarrow \ldots$$

On laisse au lecteur la vérification de la commutativité du diagramme de modules galoisiens:

$$\begin{array}{ccc} H^i((X_n)_{syn}, j_*\mathcal{J}_n^{cris,[r]}) & \xrightarrow{\phi_r - Id} & H^i((X_n)_{syn}, j_*\mathcal{O}_n^{cris}) \\ \wr\downarrow & & \downarrow\wr \\ Fil^r(\widehat{A_{st}} \otimes_S H^i((X_n)_{syn}, \mathcal{O}_n^{st}))_{N=0} & \xrightarrow{\phi_r - Id} & (\widehat{A_{st}} \otimes_S H^i((X_n)_{syn}, \mathcal{O}_n^{st}))_{N=0} \end{array}$$

où les flèches verticales sont des isomorphismes par (3.2.3.5). Par (3.2.1.6), on en déduit finalement des suites exactes courtes pour $0 \le i \le r \le p-2$:

$$0 \to \varinjlim_L H^i((X_{n+r,L})_{syn}, \mathcal{S}_n^r) \to H^i((X_n)_{syn}, j_*\mathcal{J}_n^{cris,[r]}) \xrightarrow{\phi_r - Id} H^i((X_n)_{syn}, j_*\mathcal{O}_n^{cris}) \to 0$$

d'où le résultat. $\square$

Soit X un log-schéma fin log-syntomique sur $Spec\ W$, $n \in \mathbf{N}^*$ et $X_n = X \times_{Spec\ W} Spec\ W_n$. Kato définit dans ([Ka3],5) pour $0 \le r \le p-1$ des complexes de faisceaux $s_{n,X}^{log}(r)$ dans la catégorie dérivée des faisceaux sur $(X_n)_{ét}$ (voir Appendice C). Soit $\alpha : (\widetilde{X_{n+r}})_{syn} \to (\widetilde{X_{n+r}})_{ét} = (\widetilde{X_n})_{ét}$.

Lemme 3.2.4.2 *Pour $0 \leq r \leq p-1$, on a des isomorphismes: $s^{log}_{n,X}(r) \simeq R\alpha_*\mathcal{S}^r_n$.*

Voir l'appendice C pour la preuve. Le point est de montrer que les applications $\phi_r : R\alpha_*\mathcal{J}^{cris,[r]}_n \to R\alpha_*\mathcal{O}^{cris}_n$ définies par Kato dans la catégorie dérivée coïncident avec les applications provenant de $\phi_r : \mathcal{J}^{cris,[r]}_n \to \mathcal{O}^{cris}_n$.

Supposons de plus $\dot{X}$ quasi-compact et séparé, pour toute extension finie L de K_0, on note $X_L = X \times_{(Spec\ W,\mathcal{L}(p))} (Spec\ \mathcal{O}_L, \mathcal{O}_L\backslash\{0\})$ et $X_{n,L} = X_L \times_{Spec\ W}$ $Spec\, W_n$: X_L est log-syntomique sur $Spec\, W$ par (3.1.1.1) et on peut donc définir avec Kato $s^{log}_{n,X_L}(r)$. Soient $\bar{X} = X \times_{(Spec\ W,\mathcal{L}(p))} (Spec\ \mathcal{O}_{\bar{K}_0}, \mathcal{O}_{\bar{K}_0}\backslash\{0\})$ et $\bar{X}_n = \bar{X} \times_{Spec\ W} Spec\, W_n$, par passage à la limite inductive sur les complexes $s^{log}_{n,X_L}(r)$, Kato définit également un complexe $s^{log}_{n,\bar{X}}(r)$ dans la catégorie des faisceaux étales sur $\bar{X}_n$ ([Ka3],5.4 ou [Ts3],3 ou Appendice C).

Lemme 3.2.4.3 *Pour $i \in \mathbf{N}$ et $0 \leq r \leq p-1$, on a des isomorphismes de modules galoisiens:*

$$\varinjlim_L H^i((X_{n+r,L})_{syn}, \mathcal{S}^r_n) \xrightarrow{\sim} H^i((\bar{X}_n)_{ét}, s^{log}_{n,\bar{X}}(r))$$

Voir l'appendice C pour la preuve.

Soit X_{K_0} un schéma (classique) propre et lisse sur $Spec\ K_0$ à réduction semi-stable sur $Spec\ W$ et soit X un modèle propre et semi-stable muni de sa log-structure canonique (en particulier, X est propre, log-lisse et de fibre spéciale du type de Cartier). Soit $X_{\bar{K}_0} = X \times_{Spec\ W} Spec\ \bar{K}_0$, Kato et Tsuji montrent alors le théorème (voir [Ts1] pour la démonstration):

Théorème 3.2.4.4 *([Ka3],5.5) Pour $0 \leq i \leq r \leq p-2$, on a des isomorphismes canoniques compatibles à l'action de Galois:*

$$H^i((\bar{X}_n)_{ét}, s^{log}_{n,\bar{X}}(r)) \xrightarrow{\sim} H^i((X_{\bar{K}_0})_{ét}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})(r)$$

Par (3.2.4.1), (3.2.4.4), (3.2.4.3) et (3.2.1.7), on obtient finalement:

Théorème 3.2.4.5 *Pour $0 \leq i \leq r \leq p-2$, on a des isomorphismes canoniques de modules galoisiens:*

$$V_{st}\Big(H^i((X_n)_{syn}, \mathcal{O}^{st}_n), H^i((X_n)_{syn}, \mathcal{J}^{[r]}_n), \phi_r, N\Big) \simeq H^i((X_{\bar{K}_0})_{ét}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\wedge$$

Remarque: Soient X un log-schéma fin, propre, log-lisse sur $(Spec\ W, \mathcal{L}(p))$ et de fibre spéciale du type de Cartier sur $(Spec\ k, L)$, $X_{K_0} = X \times_{Spec\ W} Spec\ K_0$, X_{triv} l'ouvert (de Zariski) maximal de X sur lequel la log-structure est triviale et $X_{triv,\bar{K}_0} = X_{triv} \times_{Spec\ K_0} Spec\ \bar{K}_0$ ($X_{triv} \subset X_{K_0}$). Lorsque les log-structures de X et $\bar{X}$ sont de plus saturées (i.e. sont des faisceaux de monoïdes saturés, un monoïde intègre P étant dit saturé si ($x \in P^{gp}$ et $x^n \in P$ pour un n dans $\mathbf{N}^*$) entraine $x \in P$), Tsuji a généralisé le théorème (3.2.4.4):

Théorème 3.2.4.6 *(Tsuji, non publié) Pour $0 \leq i \leq r \leq p-2$, on a des isomorphismes canoniques compatibles à l'action de Galois:*

$$H^i((\bar{X}_n)_{\acute{e}t}, s^{log}_{n,\bar{X}}(r)) \xrightarrow{\sim} H^i((X_{triv,\bar{K}_0})_{\acute{e}t}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})(r)$$

On en déduit donc également:

Théorème 3.2.4.7 *Pour $0 \leq i \leq r \leq p-2$, on a des isomorphismes canoniques de modules galoisiens:*

$$V_{st}\Big(H^i((X_n)_{syn}, \mathcal{O}^{st}_n), H^i((X_n)_{syn}, \mathcal{J}^{[r]}_n), \phi_r, N\Big) \simeq H^i((X_{triv,\bar{K}_0})_{\acute{e}t}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\wedge$$

3.2.5 Une conjecture de Serre

Soit V une représentation de G de l'une des deux formes suivantes:
(1) V est une représentation linéaire continue de G sur un $\mathbf{Z}_p$-module de longueur finie
(2) V est une représentation linéaire continue de G sur un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie.
On note I le sous-groupe d'inertie de G et $ss_p(V)$ la semi-simplifiée modulo p de V relativement à l'action de I, c'est-à dire:
(1) la somme directe des représentations simples intervenant dans une suite de Jordan-Hölder de V/pV pour l'action de I
(2) la somme directe des représentations simples intervenant dans une suite de Jordan-Hölder de T/pT pour l'action de I, où T est un réseau de V stable par G (c'est indépendant du choix de T, voir ([Se],1.6)).
Par ([Se],prop.4), l'action de I sur $ss_p(V)$ se factorise par l'action du groupe d'inertie modérée. Le théorème suivant généralise au cas semi-stable un théorème de Fontaine et Messing ([FM],I.3.2) qui répondait à une question de Serre ([Se],1.13):

Théorème 3.2.5.1 *Soient X_{K_0} un schéma propre et lisse sur Spec K_0 à réduction semi-stable, $X_{\bar{K}_0} = X_{K_0} \times_{Spec\ K_0} Spec\ \bar{K}_0$, i un entier compris entre 0 et $p-2$ et $V = H^i((X_{\bar{K}_0})_{\acute{e}t}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\wedge$ (dual dans $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$) ou $V = H^i_{\acute{e}t}(X_{\bar{K}_0}, \mathbf{Q}_p)^* = \Big(\mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \varprojlim_n H^i((X_{\bar{K}_0})_{\acute{e}t}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})\Big)^*$ (dual dans $\mathbf{Q}_p$), alors l'action de l'inertie modérée sur $ss_p(V)$ est donnée par des caractères de la forme $\chi_h^{i_0+pi_1+\ldots+p^{h-1}i_{h-1}}$ où $h \in \mathbf{N}^*$, χ_h est un caractère fondamental de niveau h (à valeurs dans $\mathbf{F}^*_{p^h}$, c.f. ([Se],1.7)) et i_j des entiers compris entre 0 et i.*

Preuve. — Quitte à remplacer k par sa clôture algébrique, on peut supposer $G = I$.
(1) Cas $V = H^i((X_{\bar{K}_0})_{\acute{e}t}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\wedge$: par (A.1.3) et ([FL],6.13), le foncteur V_{st} induit une (anti-)équivalence de catégories entre la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathcal{M}}^i$ formée des objets semi-simples et la sous-catégorie pleine de son image essentielle

formée des objets semi-simples (en tant que représentations galoisiennes). Par (3.2.4.5), $ss_p(V)$ est donc l'image par V_{st} d'un objet semi-simple de $\underline{MF}_{tor}^{f,i}$ et le résultat dans ce cas vient de ([FL],5.3).
(2) Cas $V = H^i_{ét}(X_{\bar{K}_0}, \mathbf{Q}_p)^*$: (la preuve suivante suit une suggestion de T. Tsuji, ma preuve originale consistait à utiliser (4.2.2)) de la suite exacte courte de faisceaux sur $(X_{\bar{K}_0})_{ét}$: $0 \to \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} \xrightarrow{p} \mathbf{Z}/p^{n+1}\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \to 0$, on déduit une suite exacte longue de cohomologie:

$$... \to H^i((X_{\bar{K}_0})_{ét}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}) \xrightarrow{p} H^i((X_{\bar{K}_0})_{ét}, \mathbf{Z}/p^{n+1}\mathbf{Z}) \to H^i((X_{\bar{K}_0})_{ét}, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \to ...$$

soit, par passage à la limite projective (les conditions de Mittag-Leffler étant trivialement vérifiées), une suite exacte longue de modules galoisiens:

$$... \longrightarrow H^i_{ét}(X_{\bar{K}_0}, \mathbf{Z}_p) \xrightarrow{p} H^i_{ét}(X_{\bar{K}_0}, \mathbf{Z}_p) \longrightarrow H^i((X_{\bar{K}_0})_{ét}, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \longrightarrow ...$$

où $H^i_{ét}(X_{\bar{K}_0}, \mathbf{Z}_p) = \varprojlim_n H^i((X_{\bar{K}_0})_{ét}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$. On en déduit une injection (compatible à l'action de Galois) $H^i_{ét}(X_{\bar{K}_0}, \mathbf{Z}_p)/pH^i_{ét}(X_{\bar{K}_0}, \mathbf{Z}_p) \hookrightarrow H^i((X_{\bar{K}_0})_{ét}, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ d'où une surjection:

$$H^i((X_{\bar{K}_0})_{ét}, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^\wedge \to \left(H^i_{ét}(X_{\bar{K}_0}, \mathbf{Z}_p)/pH^i_{ét}(X_{\bar{K}_0}, \mathbf{Z}_p)\right)^\wedge$$

Mais on montre facilement en utilisant l'équivalence de catégories entre objets semi-simples de (1) que si V est une représentation de G dans l'image essentielle de V_{st}, tout sous-objet et tout quotient de V l'est aussi. De (3.2.4.5), on déduit alors que la représentation $\left(H^i_{ét}(X_{\bar{K}_0}, \mathbf{Z}_p)/pH^i_{ét}(X_{\bar{K}_0}, \mathbf{Z}_p)\right)^\wedge$ est dans l'image essentielle de V_{st} (restreint à $\underline{\mathcal{M}}^i$). Soit $T' = H^i_{ét}(X_{\bar{K}_0}, \mathbf{Z}_p)/H^i_{ét}(X_{\bar{K}_0}, \mathbf{Z}_p)_{tors}$ et $T = Hom_{\mathbf{Z}_p}(T', \mathbf{Z}_p)$, on a une injection:

$$T/pT = (T'/pT')^\wedge \hookrightarrow \left(H^i_{ét}(X_{\bar{K}_0}, \mathbf{Z}_p)/pH^i_{ét}(X_{\bar{K}_0}, \mathbf{Z}_p)\right)^\wedge$$

et T/pT est encore dans l'image essentielle de V_{st}. Comme T est un réseau de V stable par G, $ss_p(V)$ s'identifie à la semi-simplifiée de T/pT et on conclut grâce à ([FL],5.3). □

4 Les théorèmes de comparaison sur les cohomologies entières

Dans toute cette partie, X désigne un log-schéma propre et log-lisse sur $(Spec\, W, \mathcal{L}(p))$ et de fibre spéciale du type de Cartier sur $(Spec\ k, L)$ et on note $X_n = X \times_{Spec\ W} Spec\ W_n$. On étudie la cohomologie log-cristalline entière de X puis, lorsque X est semi-stable, on montre deux théorèmes de comparaison (parties de torsion, quotients libres) entre les cohomologie log-cristalline et étale entières. On retrouve, dans le cas particulier considéré, le théorème de comparaison de Hyodo-Kato-Tsuji sur les cohomologies rationnelles (où il n'y a plus de coefficients en u). Enfin, on étudie le cas du H^0 et du H^1 (où les choses se simplifient beaucoup).

4.1 Cohomologie log-cristalline entière

On fixe deux entiers $0 \leq i \leq r \leq p-2$ et on note $\mathcal{M}_n$ l'objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ donné par $\Big(H^i((X_n)_{syn}, \mathcal{O}_n^{st}), H^i((X_n)_{syn}, \mathcal{J}_n^{[r]}), \phi_r, N\Big)$, $\mathcal{M} = \varprojlim_n H^i((X_n)_{syn}, \mathcal{O}_n^{st})$, $Fil^r\mathcal{M} = \varprojlim_n H^i((X_n)_{syn}, \mathcal{J}_n^{[r]})$ et encore ϕ_r et N les opérateurs obtenus à la limite. Soit $\mathcal{M}_{tors}$ le sous-S-module de $\mathcal{M}$ formés des éléments annulés par une puissance de p, on va montrer que $\mathcal{M}_{tors}$ est muni d'une structure d'objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ et $\mathcal{M}/\mathcal{M}_{tors}$ d'une structure de module fortement divisible ([Br3],4.1).

On pose $Fil^r(\mathcal{M}/p^m\mathcal{M}) = Im(Fil^r\mathcal{M} \to \mathcal{M}/p^m\mathcal{M})$.

Lemme 4.1.1 *On a des isomorphismes de S-modules: $\mathcal{M}/p^m\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n \mathcal{M}_n/p^m\mathcal{M}_n$ et $Fil^r\mathcal{M}/p^mFil^r\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} Fil^r(\mathcal{M}/p^m\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n Fil^r(\mathcal{M}_n/p^m\mathcal{M}_n)$ ($m \in \mathbf{N}^*$).*

Preuve. — Remarquons que pour tout système projectif $(\mathcal{N}_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ d'objets de $\underline{\mathcal{M}}^r$, la condition de Mittag-Leffler est vérifiée car la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ est artinienne. Notons $\mathcal{M}_n^{(p^m)} = Ker(\mathcal{M}_n \xrightarrow{p^m} \mathcal{M}_n)$ (c'est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$), à partir des suites exactes courtes dans $\underline{\mathcal{M}}^r$:

$$0 \to p^m\mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_n/p^m\mathcal{M}_n \to 0 \ et \ 0 \to \mathcal{M}_n^{(p^m)} \to \mathcal{M}_n \xrightarrow{p^m} p^m\mathcal{M}_n \to 0$$

on obtient donc des suites exactes de S-modules:

$$0 \to \varprojlim_n p^m\mathcal{M}_n \to \mathcal{M} \to \varprojlim_n \mathcal{M}_n/p^m\mathcal{M}_n \to 0$$
$$0 \to \varprojlim_n \mathcal{M}_n^{(p^m)} \to \mathcal{M} \to \varprojlim_n p^m\mathcal{M}_n \to 0$$
$$0 \to \varprojlim_n p^mFil^r\mathcal{M}_n \to Fil^r\mathcal{M} \to \varprojlim_n Fil^r(\mathcal{M}_n/p^m\mathcal{M}_n) \to 0$$
$$0 \to \varprojlim_n Fil^r\mathcal{M}_n^{(p^m)} \to Fil^r\mathcal{M} \to \varprojlim_n p^mFil^r\mathcal{M}_n \to 0$$

Mais $\varprojlim_n \mathcal{M}_n^{(p^m)} = \mathcal{M}^{(p^m)} = \{x \in \mathcal{M} \, tq \, p^mx = 0\}$ et $\varprojlim_n Fil^r\mathcal{M}_n^{(p^m)} = Fil^r\mathcal{M}^{(p^m)} = \mathcal{M}^{(p^m)} \cap Fil^r\mathcal{M}$, donc $\varprojlim_n p^m\mathcal{M}_n = p^m\mathcal{M}$ et $\varprojlim_n p^mFil^r\mathcal{M}_n = p^mFil^r\mathcal{M}$, d'où le résultat. □

On note $lg(\mathcal{N}_n)$ la longueur d'un objet $\mathcal{N}_n$ dans la catégorie artinienne $\underline{\mathcal{M}}^r$.

Lemme 4.1.2 *Soit $m \in \mathbf{N}^*$ (fixé), pour $n \in \mathbf{N}^*$, $lg(\mathcal{M}_n/p^m\mathcal{M}_n)$ est bornée.*

Preuve. — Par récurrence à partir des suites exactes: $0 \to p^{m-1}\mathcal{M}_n/p^m\mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_n/p^m\mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_n/p^{m-1}\mathcal{M}_n \to 0$ et puisque $lg(p^{m-1}\mathcal{M}_n/p^m\mathcal{M}_n) \leq lg(\mathcal{M}_n/p\mathcal{M}_n)$, il suffit de montrer le lemme pour $m=1$. A partir des suites exactes longues de cohomologie associées aux suites exactes courtes (2.1.2):

$$0 \to \mathcal{O}_{n-1}^{st} \to \mathcal{O}_n^{st} \to \mathcal{O}_1^{st} \to 0 \ \ et \ \ 0 \to \mathcal{J}_{n-1}^{[r]} \to \mathcal{J}_n^{[r]} \to \mathcal{J}_1^{[r]} \to 0$$

on obtient des suites exactes dans $\underline{\mathcal{M}}^r$: $\mathcal{M}_{n-1} \xrightarrow{p} \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_1$, d'où $lg(\mathcal{M}_n/p\mathcal{M}_{n-1}) \leq lg(\mathcal{M}_1)$. A partir de la suite exacte: $p\mathcal{M}_{n-1}/p\mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_n/p\mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_n/p\mathcal{M}_{n-1} \to 0$, il suffit de borner $lg(\mathcal{M}_{n-1}/\mathcal{M}_n)$. Pour $i=0$, $p=2$, c'est clair, on suppose donc $p \geq 3$. Si $i \leq r-1$, soit $\mathcal{N}_1$ l'objet de $\underline{\mathcal{M}}_k^r$ $\big(H^{i+1}((X_1)_{syn}, \mathcal{O}_1^{st}), H^{i+1}((X_1)_{syn}, \mathcal{J}_1^{[r]}), \phi_r, N\big)$, on a une suite exacte dans $\underline{\mathcal{M}}^r$ (voir preuve de 2.3.2.1): $\mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_{n-1} \to \mathcal{N}_1$, d'où $lg(\mathcal{M}_{n-1}/\mathcal{M}_n) \leq lg(\mathcal{N}_1)$. Si $i=r$, soit $\mathcal{N}_1 = \big(H^{r+1}((X_1)_{syn}, \mathcal{O}_1^{st}), H^{r+1}((X_1)_{syn}, \mathcal{J}_1^{[r+1]}), \phi_{r+1}, N\big)$ ($\phi_{p-1}^{\sharp}$ si $r=p-2$, $\mathcal{N}_1$ est dans $\underline{\mathcal{M}}_k^{r+1}$), $\mathcal{M}_{n-1}/\mathcal{M}_n$ est un objet de $\underline{\mathcal{M}}_k^r$ et, si on le "voit" dans $\underline{\mathcal{M}}_k^{r+1}$, on a une injection $\mathcal{M}_{n-1}/\mathcal{M}_n \hookrightarrow \mathcal{N}_1$ dans $\underline{\mathcal{M}}_k^{r+1}$ (c.f. preuve de 2.3.2.1), d'où $lg(\mathcal{M}_{n-1}/\mathcal{M}_n) \leq lg(\mathcal{N}_1)$. □

Proposition 4.1.3 *Pour* $m \in \mathbf{N}^*$, $(\mathcal{M}/p^m\mathcal{M}, Fil^r\mathcal{M}/p^m Fil^r\mathcal{M}, \phi_r, N)$ *est un objet de* $\underline{\mathcal{M}}^r$.

Preuve. — Notons $u_{s,n} : \mathcal{M}_s/p^m\mathcal{M}_s \to \mathcal{M}_n/p^m\mathcal{M}_n$, la suite $\big(u_{s,n}(\mathcal{M}_s/p^m\mathcal{M}_s)\big)_{s>n}$ est une suite décroissante (pour l'inclusion) d'objets de $\underline{\mathcal{M}}^r$, donc est constante pour s grand: notons $\mathcal{N}_n$ l'objet "limite" de $\underline{\mathcal{M}}^r$ (inclus dans $\mathcal{M}_n/p^m\mathcal{M}_n$). Il est clair que $\mathcal{N}_{n+1} \to \mathcal{N}_n$ est surjectif pour tout n et qu'on a des isomorphismes de S-modules: $\varprojlim_n \mathcal{N}_n \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n \mathcal{M}_n/p^m\mathcal{M}_n$ et $\varprojlim_n Fil^r\mathcal{N}_n \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n Fil^r(\mathcal{M}_n/p^m\mathcal{M}_n)$. Mais $lg(\mathcal{N}_n) \leq lg(\mathcal{M}_n/p^m\mathcal{M}_n)$ est bornée quand n varie (4.1.2) et $lg(\mathcal{N}_n) \leq lg(\mathcal{N}_{n+1})$, donc il existe $n_0 \in \mathbf{N}^*$ tel que $\mathcal{N}_{n+1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}_n$ pour $n \geq n_0$. On a donc des isomorphismes compatibles à N et ϕ_r (4.1.1): $\mathcal{N}_{n_0} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}/p^m\mathcal{M}$ et $Fil^r\mathcal{N}_{n_0} \xrightarrow{\sim} Fil^r(\mathcal{M}/p^m\mathcal{M})$, d'où le résultat. □

Soient $Fil^r\mathcal{M}_{tors} = \mathcal{M}_{tors} \cap Fil^r\mathcal{M}$ et ϕ_r et N les opérateurs induits.

Proposition 4.1.4 $(\mathcal{M}_{tors}, Fil^r\mathcal{M}_{tors}, \phi_r, N)$ *est un objet de* $\underline{\mathcal{M}}^r$.

Preuve. — De (4.1.3), on a des isomorphismes de S-modules $\mathcal{M}/p^m\mathcal{M} \simeq \bigoplus_{i \in I^{(m)}} S_{n_i}$ ($m \in \mathbf{N}^*$) et on laisse au lecteur le soin d'en déduire qu'il existe $m_0 < \infty$ tel que $p^{m_0}\mathcal{M}_{tors} = 0$ et qu'on a des suites exactes de S-modules pour $m \geq m_0$: $0 \to \mathcal{M}_{tors} \to \mathcal{M}/p^m\mathcal{M} \xrightarrow{p^{m_0}} \mathcal{M}/p^{m+m_0}\mathcal{M}$ où la flèche de droite associe à $x \in \mathcal{M}/p^m\mathcal{M}$ l'élément $p^{m_0}\hat{x}$, $\hat{x}$ relevant x dans $\mathcal{M}/p^{m+m_0}\mathcal{M}$. Cette flèche étant clairement un morphisme dans $\underline{\mathcal{M}}^r$ (4.1.3), $(\mathcal{M}_{tors}, \mathcal{M}_{tors} \cap Fil^r(\mathcal{M}/p^m\mathcal{M}), \phi_r, N)$ est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ pour $m \geq m_0$, et cela entraine $\mathcal{M}_{tors} \cap Fil^r(\mathcal{M}/p^m\mathcal{M}) = \mathcal{M}_{tors} \cap Fil^r(\mathcal{M}/p^{m+1}\mathcal{M})$ pour $m \geq m_0$, i.e. $= \varprojlim_m \mathcal{M}_{tors} \cap Fil^r(\mathcal{M}/p^m\mathcal{M}) = \mathcal{M}_{tors} \cap Fil^r\mathcal{M} = Fil^r\mathcal{M}_{tors}$. □

On rappelle ([Br3],4.1) qu'un S-module fortement divisible (de "niveau" r) est un objet $\mathcal{M}$ de $'\underline{\mathcal{M}}^r$ (Appendice A) vérifiant les trois conditions:

- le S-module $\mathcal{M}$ est libre de rang fini
- le S-module $\mathcal{M}/Fil^r\mathcal{M}$ est sans p-torsion
- le S-module $\mathcal{M}$ est engendré par $\phi_r(Fil^r\mathcal{M})$.

Soient $Fil^r(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{tors}) = Fil^r\mathcal{M}/Fil^r\mathcal{M}_{tors}$ et ϕ_r et N les opérateurs induits.

Proposition 4.1.5 *$(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{tors}, Fil^r(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{tors}), \phi_r, N)$ est un S-module fortement divisible.*

Preuve. — On laisse au lecteur le soin de vérifier à partir de (4.1.3) que $\mathcal{M}/\mathcal{M}_{tors}$ est libre de rang fini. Notons $\mathcal{N} = \mathcal{M}/\mathcal{M}_{tors}$, puisque $\mathcal{M}_{tors} \to \mathcal{M}/p\mathcal{M}$ est un morphisme de $\underline{\mathcal{M}}^r$ (4.1.4), on a une injection:

$$Fil^r(\mathcal{M}/p\mathcal{M})/Fil^r\mathcal{M}_{tors} \hookrightarrow (\mathcal{M}/p\mathcal{M})/\mathcal{M}_{tors}$$

i.e. $Fil^r\mathcal{N}/pFil^r\mathcal{N} \hookrightarrow \mathcal{N}/p\mathcal{N}$. Si $px \in Fil^r\mathcal{N}$, on a donc $px \in pFil^r\mathcal{N}$ c'est-à-dire $x \in Fil^r\mathcal{N}$ puisque $\mathcal{N}$ est sans p-torsion. Enfin, si $(e_1, ..., e_d)$ est une famille d'éléments de $\mathcal{N}$ tels que $(\phi_r(\bar{e}_1), ..., \phi_r(\bar{e}_d))$ engendre le S-module $\mathcal{N}/p\mathcal{N}$ ($\bar{e}_i$ est la réduction modulo p de e_i, une telle famille existe puisque $\mathcal{N}/p\mathcal{N}$ est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$), une récurrence triviale montre que $(\phi_r(e_1), ..., \phi_r(e_d))$ engendre $\mathcal{N}$ (on rappelle que S est p-adiquement complet). $\square$

4.2 Cohomologie étale entière

On suppose maintenant le modèle X propre et semi-stable, muni de sa log-structure canonique et on note $X_{K_0} = X \times_{Spec\ W} Spec\ K_0$ et $X_{\bar{K}_0} = X \times_{Spec\ W} Spec\ \bar{K}_0$. Les autres notations sont reprises de la section précédente. On montre les théorèmes de comparaison "entiers".

Soient T_n la représentation galoisienne $H^i((X_{\bar{K}_0})_{ét}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$, $T = \varprojlim_n T_n = H^i_{ét}(X_{\bar{K}_0}, \mathbf{Z}_p)$ et T_{tors} la partie de torsion de T.

Proposition 4.2.1 *On a un isomorphisme canonique de modules galoisiens: $V_{st}(\mathcal{M}/p^m\mathcal{M}) \simeq (T/p^mT)^\wedge$.*

Preuve. — On reprend les notations de la preuve de (4.1.3): on a facilement:

$$\varprojlim_n Fil^r\left(\widehat{A_{st}}\otimes_S(\mathcal{M}_n/p^m\mathcal{M}_n)\right)^{\phi_r=1}_{N=0} \simeq Fil^r(\widehat{A_{st}}\otimes_S\mathcal{N}_{n_0})^{\phi_r=1}_{N=0} \simeq Fil^r\left(\widehat{A_{st}}\otimes_S(\mathcal{M}/p^m\mathcal{M})\right)^{\phi_r=1}_{N=0}$$

car le foncteur $Fil^r(\widehat{A_{st}} \otimes_S .)_{N=0}^{\phi_r=1}$ est exact par (3.2.1.7) et ([Br3],3.2), d'où (3.2.4.5):

$$T/p^mT(r) \simeq \varprojlim_n T_n/p^mT_n(r) \simeq Fil^r\Big(\widehat{A_{st}} \otimes_S (\mathcal{M}/p^m\mathcal{M})\Big)_{N=0}^{\phi_r=1}$$

c'est-à-dire $V_{st}(\mathcal{M}/p^m\mathcal{M}) \simeq (T/p^mT)^\wedge$. $\square$

Si $(\mathcal{N}, Fil^r\mathcal{N}, \phi_r, N)$ est un S-module fortement divisible, on note encore $V_{st}(\mathcal{N}) = Hom_{'\underline{\mathcal{M}}^r}(\mathcal{N}, \widehat{A_{st}})$. Pour un $\mathbf{Z}_p$-module galoisien V, on note $V^* = Hom_{\mathbf{Z}_p}(V, \mathbf{Z}_p)$.

Théorème 4.2.2 *On a un isomorphisme canonique de modules galoisiens:*

$$V_{st}(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{tors}) \simeq (T/T_{tors})^*$$

Preuve. — De (4.2.1), on a: $\varprojlim_m V_{st}(\mathcal{M}/p^m\mathcal{M}) \simeq \varprojlim_m (T/p^mT)^\wedge$. Mais:

$$\begin{aligned}
\varprojlim_m V_{st}(\mathcal{M}/p^m\mathcal{M}) &= \varprojlim_m Hom_{'\underline{\mathcal{M}}^r}(\mathcal{M}/p^m\mathcal{M}, \widehat{A_{st}} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p) \\
&= Hom_{'\underline{\mathcal{M}}^r}(\varinjlim_m \mathcal{M}/p^m\mathcal{M}, \widehat{A_{st}} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p) \\
&= Hom_{'\underline{\mathcal{M}}^r}((\mathcal{M}/\mathcal{M}_{tors}) \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p, \widehat{A_{st}} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p) \\
&= Hom_{'\underline{\mathcal{M}}^r}(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{tors}, \widehat{A_{st}}) \\
&= V_{st}(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{tors})
\end{aligned}$$

et de même $\varprojlim_m (T/p^mT)^\wedge = (T/T_{tors})^*$ d'où le résultat. $\square$

Soit $H^i_{ét}(X_{\bar{K}_0}, \mathbf{Q}_p) = (T/T_{tors}) \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Q}_p$, on déduit de ([Br3],4.1.2.1):

Corollaire 4.2.3 *La représentation $H^i_{ét}(X_{\bar{K}_0}, \mathbf{Q}_p)$ est semi-stable ($0 \leq i \leq p-2$).*

Théorème 4.2.4 *On a un isomorphisme canonique de modules galoisiens:*

$$V_{st}(\mathcal{M}_{tors}) \simeq T_{tors}^\wedge$$

Preuve. — Soit $\mathcal{N} = \mathcal{M}/\mathcal{M}_{tors}$ et $U = T/T_{tors}$, de (4.2.2), on montre aisément $V_{st}(\mathcal{N}/p^m\mathcal{N}) = U^*/p^mU^* = (U/p^mU)^\wedge$. La suite exacte dans $\underline{\mathcal{M}}^r$ ($m >> 0$): $0 \to \mathcal{M}_{tors} \to \mathcal{M}/p^m\mathcal{M} \to \mathcal{N}/p^m\mathcal{N} \to 0$ donne la suite exacte par (4.2.1) et ce qui précède:

$$0 \to (U/p^mU)^\wedge \to (T/p^mT)^\wedge \to V_{st}(\mathcal{M}_{tors}) \to 0$$

d'où le résultat. □

Remarque 1: Tsuji a montré que $H^i_{ét}(X_{\bar{K}_0}, \mathbf{Q}_p)$ est semi-stable pour tout i et sans restriction sur la ramification ([Ts2]). Mais si on suppose seulement X saturé, propre, log-lisse, de fibre spéciale du type de Cartier et $\bar{X}$ saturé, par (3.2.4.7), on a exactement les mêmes théorèmes en remplaçant $H^i_{ét}(X_{\bar{K}_0}, \mathbf{Z}_p)$ par $H^i_{ét}(X_{triv,\bar{K}_0}, \mathbf{Z}_p)$. En particulier, on obtient donc le:

Corollaire 4.2.5 *La représentation $H^i_{ét}(X_{triv,\bar{K}_0}, \mathbf{Q}_p)$ est semi-stable ($0 \leq i \leq p-2$).*

qui est intéressant, car il s'agit d'un résultat dans le cas ouvert.

Remarque 2: En utilisant la suite exacte de la preuve de (3.2.5.1), on montre que les facteurs invariants de $H^i_{ét}(X_{\bar{K}_0}, \mathbf{Z}_p)_{tors}$ ne dépendent que de $H^{i-1}_{ét}(X_{\bar{K}_0}, \mathbf{Z}_p)$ et des $H^{i-1}((X_{\bar{K}_0})_{ét}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$. On déduit donc que les facteurs invariants de la torsion de $H^i_{ét}(X_{\bar{K}_0}, \mathbf{Z}_p)$, pour i allant de 0 à $p-1$, ne dépendent que de la fibre spéciale du modèle avec sa structure logarithmique (([FM],6.4) pour le cas classique).

4.3 Isomorphisme de Hyodo-Kato et cohomologies rationnelles

On montre que la théorie de [Br2], qui consiste à se débarrasser des coefficients en u lorsque p est inversible, permet de retrouver le théorème de comparaison de Kato-Tsuji ([Ka3],[Ts2]) tel que conjecturé par Fontaine-Jannsen ([Ka3],1.1). Au passage, on répond à une question d'Illusie sur la torsion de la cohomologie étale entière en réduction semi-stable.

4.3.1 Préliminaires

On ne suppose plus X nécessairement semi-stable et on note $\mathcal{O}_n^{HK}$ (resp. $\mathcal{O}_n^{dr}$) le faisceau sur $(Spec\, k, L)_{SYN}$ qui à U associe $H^0\Big((U/(Spec\, W_n, \mathcal{L}(0))_{cris}, \mathcal{O}_{U/(Spec\ W_n,\mathcal{L}(0))}\Big)$ (resp. $H^0\Big((U/(Spec\ W_n, \mathcal{L}(p))_{cris}, \mathcal{O}_{U/(Spec\ W_n,\mathcal{L}(p))}\Big)$, $\mathcal{O}_1^{HK} = \mathcal{O}_1^{dR}$). On a pour $i \in \mathbf{N}$ ([Br1],3):

$$\begin{aligned} H^i((U)_{SYN}, \mathcal{O}_n^{HK}) &= H^i\Big((U/(Spec\ W_n, \mathcal{L}(0))_{cris}, \mathcal{O}_{U/(Spec\ W_n,\mathcal{L}(0))}\Big) \\ H^i((U)_{SYN}, \mathcal{O}_n^{dR}) &= H^i\Big((U/(Spec\ W_n, \mathcal{L}(p))_{cris}, \mathcal{O}_{U/(Spec\ W_n,\mathcal{L}(p))}\Big) \end{aligned}$$

Lemme 4.3.1.1 *Les faisceaux $\mathcal{O}_n^{HK}$ et $\mathcal{O}_n^{dR}$ sur $(Spec\ k, L)_{syn}$ sont plats sur W_n.*

Preuve. — On reprend les notations de (2.1.2.1) et (2.2.2.1): il suffit de voir que $\mathcal{O}_n^{HK}(A^\infty, P^\infty)$ et $\mathcal{O}_n^{dR}(A^\infty, P^\infty)$ sont plats sur W_n. Soit $f_0 : S \to W$ (resp.

$f_p : S \to W$) le morphisme d'algèbre W-linéaires tel que $f_0(\gamma_i(u)) = 0$ (resp. $f_p(\gamma_i(u)) = \gamma_i(p)$) si $i \geq 1$. On montre facilement (c.f. Appendice D):

$$\mathcal{O}_n^{HK}(A^\infty, P^\infty) \simeq \mathcal{O}_n^{st}(A^\infty, P^\infty) \otimes_{S,f_0} W$$
$$\mathcal{O}_n^{dR}(A^\infty, P^\infty) \simeq \mathcal{O}_n^{st}(A^\infty, P^\infty) \otimes_{S,f_p} W$$

Mais $\mathcal{O}_n^{st}(A^\infty, P^\infty)$ est plat sur S_n (2.1.2.1), d'où le résultat par changement de base des morphismes plats. $\square$

On peut, comme en (2.1.2), déduire des suites exactes: $0 \to \mathcal{O}_i^{HK} \xrightarrow{p^n} \mathcal{O}_{n+i}^{HK} \to \mathcal{O}_n^{HK} \to 0$ (resp. avec $\mathcal{O}_n^{dR}$).

Lemme 4.3.1.2 *Soit $r \in \{0, ..., p-2\}$ et $0 \to \mathcal{M}' \to \mathcal{M} \to \mathcal{M}'' \to 0$ une suite exacte dans $\underline{\mathcal{M}}^r$, alors on a des suites exactes de W-modules:*

$$0 \to \mathcal{M}' \otimes_{S,f_0} W \to \mathcal{M} \otimes_{S,f_0} W \to \mathcal{M}'' \otimes_{S,f_0} W \to 0$$
$$0 \to \mathcal{M}' \otimes_{S,f_p} W \to \mathcal{M} \otimes_{S,f_p} W \to \mathcal{M}'' \otimes_{S,f_p} W \to 0$$

Preuve. — On fait la preuve pour f_0, l'autre cas étant identique. Il y a juste l'injectivité de gauche à montrer et on fait une récurrence sur le plus petit entier $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $p^n\mathcal{M} = 0$. Si $n = 1$, tout objet $\mathcal{M}$ de $\underline{\mathcal{M}}^r$ s'écrit $\mathcal{M} \simeq S_1 \otimes_k \phi_r(Fil^r\mathcal{M})$ comme S-module ([Br3],2.2.2) et le résultat est clair. Soit $\mathcal{M}^1$ la limite projective (dans $\underline{\mathcal{M}}^r$) du diagramme: $\mathcal{M}' \to \mathcal{M} \leftarrow p\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}^2$ l'image de $\mathcal{M}'$ dans $\mathcal{M}/p\mathcal{M}$. En tensorisant par W, on a clairement un diagramme commutatif à lignes exactes:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
 & & \mathcal{M}^1 \otimes_{S,f_0} W & \to & \mathcal{M}' \otimes_{S,f_0} W & \to & \mathcal{M}^2 \otimes_{S,f_0} W & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & p\mathcal{M} \otimes_{S,f_0} W & \to & \mathcal{M} \otimes_{S,f_0} W & \to & \mathcal{M}/p\mathcal{M} \otimes_{S,f_0} W & \to & 0
\end{array}$$

où les flèches verticales de gauche et de droite sont injectives par récurrence et le cas $n = 1$. Il s'ensuit que la flèche $\mathcal{M}^1 \otimes_{S,f_0} W \to \mathcal{M}' \otimes_{S,f_0} W$ est aussi injective et une chasse au diagramme triviale achève la preuve. $\square$

Proposition 4.3.1.3 *Pour $0 \leq i \leq p-2$, on a des isomorphismes canoniques de W-modules:*

$$H^i((X_1)_{syn}, \mathcal{O}_n^{st}) \otimes_{S,f_0} W \xrightarrow{\sim} H^i((X_1)_{syn}, \mathcal{O}_n^{HK})$$
$$H^i((X_1)_{syn}, \mathcal{O}_n^{st}) \otimes_{S,f_p} W \xrightarrow{\sim} H^i((X_1)_{syn}, \mathcal{O}_n^{dR})$$

Preuve. — Le cas $i = 0$, $p = 2$ se faisant à la main, on suppose $p \geq 3$. Comme précédemment, on ne traite que le cas f_0. On fait une récurrence sur n: le résultat est vrai pour $n = 1$ par (2.2.3.3). Pour alléger les notations, on écrit $H^i(\mathcal{O}_n^{st})$ au lieu de $H^i((X_1)_{syn}, \mathcal{O}_n^{st})$ (resp. avec $\mathcal{O}_n^{HK}$). De (2.1.2.1) et (4.3.1.1), on tire des suites exactes longues:

$$... \to H^{i-1}(\mathcal{O}_{n-1}^{st}) \to H^i(\mathcal{O}_1^{st}) \to H^i(\mathcal{O}_n^{st}) \to H^i(\mathcal{O}_{n-1}^{st}) \to H^{i+1}(\mathcal{O}_1^{st}) \to ...$$

$$... \to H^{i-1}(\mathcal{O}_{n-1}^{HK}) \to H^i(\mathcal{O}_1^{HK}) \to H^i(\mathcal{O}_n^{HK}) \to H^i(\mathcal{O}_{n-1}^{HK}) \to H^{i+1}(\mathcal{O}_1^{HK}) \to ...$$

Par (4.3.1.2), on a des diagrammes commutatifs de suites exactes pour $0 \leq i \leq p-2$, où les isomorphismes proviennent de la récurrence et du cas $n = 1$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
H^{i-1}(\mathcal{O}_{n-1}^{st})\otimes_{S,f_0}W & \to & H^i(\mathcal{O}_1^{st})\otimes_{S,f_0}W & \to & H^i(\mathcal{O}_n^{st})\otimes_{S,f_0}W & \to & H^i(\mathcal{O}_{n-1}^{st})\otimes_{S,f_0}W & \to & H^{i+1}(\mathcal{O}_1^{st})\otimes_{S,f_0}W \\
\wr\downarrow & & \wr\downarrow & & \downarrow & & \downarrow\wr & & \downarrow\wr \\
H^{i-1}(\mathcal{O}_{n-1}^{HK}) & \to & H^i(\mathcal{O}_1^{HK}) & \to & H^i(\mathcal{O}_n^{HK}) & \to & H^i(\mathcal{O}_{n-1}^{HK}) & \to & H^{i+1}(\mathcal{O}_1^{HK})
\end{array}$$

$\Big($pour l'exactitude de la ligne supérieure dans le cas $i = p-2$, on utilise qu'on a une injection dans $\underline{\mathcal{M}}_k^{p-1}$:

$$H^{p-2}(\mathcal{O}_{n-1}^{st})/H^{p-2}(\mathcal{O}_n^{st}) \hookrightarrow H^{p-1}(\mathcal{O}_1^{st})$$

(voir preuve de 2.3.2.1) qui donne, comme pour $\underline{\mathcal{M}}_k^{p-2}$, une injection de k-espaces vectoriels:

$$(H^{p-2}(\mathcal{O}_{n-1}^{st}) \otimes_{S,f_0} W)/(H^{p-2}(\mathcal{O}_n^{st}) \otimes_{S,f_0} W) \hookrightarrow H^{p-1}(\mathcal{O}_1^{st}) \otimes_{S,f_0} W\Big)$$

On conclut par le lemme des cinq. $\square$

Soient $i \in \{0, ..., p-2\}$, $\mathcal{M} = \varprojlim_n H^i((X_1)_{syn}, \mathcal{O}_n^{st})$, $M^{HK} = \varprojlim_n H^i((X_1)_{syn}, \mathcal{O}_n^{HK})$, $M^{dR} = \varprojlim_n H^i((X_1)_{syn}, \mathcal{O}_n^{dR})$, $\mathcal{D} = \mathcal{M} \otimes_W K_0$, $D^{HK} = M^{HK} \otimes_W K_0$ et $D^{dR} = M^{dR} \otimes_W K_0$.

Corollaire 4.3.1.4 *On a des isomorphismes canoniques de W-modules (resp. de K_0-espaces vectoriels):*

$$\begin{array}{cccc}
 & \mathcal{M} \otimes_{S,f_0} W \simeq M^{HK} & et & \mathcal{M} \otimes_{S,f_p} W \simeq M^{dR} \\
(resp. & \mathcal{D} \otimes_{S,f_0} W \simeq D^{HK} & et & \mathcal{D} \otimes_{S,f_p} W \simeq D^{dR})
\end{array}$$

Preuve. — On n'écrit la preuve que pour f_0 et on note $\mathcal{M}_n = H^i((X_1)_{syn}, \mathcal{O}_n^{st})$ et $M_n^{HK} = H^i((X_1)_{syn}, \mathcal{O}_n^{HK}) \overset{(4.3.1.3)}{\simeq} \mathcal{M}_n \otimes_{S,f_0} W$. Soit $m \in \mathbf{N}^*$ et reprenons les notations de la preuve de (4.1.3): on a $\mathcal{M}/p^m\mathcal{M} \simeq \mathcal{N}_{n_0}$ où n_0 est un entier suffisamment grand et $\mathcal{N}_{n_0}$ un sous-objet de $\mathcal{M}_{n_0}/p^m\mathcal{M}_{n_0}$. Le foncteur $. \otimes_{S,f_0} W$ étant exact (4.3.1.2), on a par les mêmes raisonnements qu'en (4.1) $M^{HK}/p^m M^{HK} \simeq \varprojlim_n M_n^{HK}/p^m M_n^{HK} \simeq \mathcal{N}_{n_0} \otimes_{S,f_0} W$, d'où des isomorphismes pour $m \in \mathbf{N}^*$:

$$(\mathcal{M}/p^m\mathcal{M}) \otimes_{S,f_0} W \xrightarrow{\sim} M^{HK}/p^m M^{HK}$$

qui donnent le résultat à la limite projective ($\mathcal{M}$ est de la forme $\mathcal{M}_{tors} \oplus S^d$ par (4.1.4) et (4.1.5)). $\square$

En particulier, on obtient par (4.2.4) le corollaire suivant, qui répond à une question d'Illusie ([Il3]):

Corollaire 4.3.1.5 *Supposons de plus X semi-stable, alors, pour $0 \leq i \leq p-2$, les groupes de cohomologie $\varprojlim_n H^i((X_1)_{syn}, \mathcal{O}_n^{dR})$, $\varprojlim_n H^i((X_1)_{syn}, \mathcal{O}_n^{HK})$ et $\varprojlim_n H^i((X_{\bar{K}_0})_{ét}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$ ont les mêmes facteurs invariants.*

Remarque: On a aussi une version dans le cas ouvert, par la remarque finale de (4.2). D'autre part, de ([HK],4.13) et ([HK],5.4), on déduit facilement que les isomorphismes $\mathcal{D} \otimes_{S,f_0} W \simeq D^{HK}$ et $\mathcal{D} \otimes_{S,f_p} W \simeq D^{dR}$ sont en fait valables pour $i \in \mathbf{N}$.

4.3.2 Le théorème de comparaison de Hyodo-Kato-Tsuji

On suppose à nouveau X propre et semi-stable comme en (4.2), on fixe deux entiers $0 \leq i \leq r \leq p-2$ et on garde les notations précédentes. Soient $Fil^r\mathcal{D} = \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \varprojlim_n H^i((X_n)_{syn}, \mathcal{J}_n^{[r]})$, $Fil^j\mathcal{D} = \{x \in \mathcal{D} / (u-p)^{r-j}x \in Fil^r\mathcal{D}\}$ si $0 \leq j \leq r$, $Fil^j\mathcal{D} = \mathcal{D}$ si $j \leq 0$ et $Fil^j\mathcal{D} = \sum_{l=0}^{j-1} Fil^{j-l}S_{K_0}.Fil^l\mathcal{D}$ si $j \geq r+1$, où $Fil^jS_{K_0} = Fil^jS \otimes_W K_0$ pour $j \in \mathbf{N}$. De ([Br2],6.2.2), on déduit facilement la:

Proposition 4.3.2.1 *La filtration $(Fil^j\mathcal{D})_{0 \leq j \leq r}$ est l'unique filtration décroissante par des sous-S_{K_0}-modules telle que:*

- *$Fil^r\mathcal{D}$ est le $Fil^r\mathcal{D}$ déjà défini et $Fil^0\mathcal{D} = \mathcal{D}$*
- *$Fil^{j-l}S_{K_0}.Fil^l\mathcal{D} \subset Fil^j\mathcal{D}$, $0 \leq l \leq j \leq r$*
- *$N(Fil^j\mathcal{D}) \subset Fil^{j-1}\mathcal{D}$*

C'est-à-dire qu'il y a une et une seule "filtration admissible" (c.f. 3.2.1.1) lorsque p est inversible (ce qui est faux sur S ou S_n). En particulier, $Fil^j\mathcal{D}$ coïncide avec l'image de $\mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \varprojlim_n H^i((X_n)_{syn}, \mathcal{J}_n^{[j]})$ pour $0 \leq j \leq r$ (et même en fait pour $j \in \mathbf{Z}$ si on utilise le fait que la composée:

$$\mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \varprojlim_n H^i((X_n)_{syn}, \mathcal{J}_n^{[j]}) \to \mathcal{D} \to \mathcal{D} \otimes_{S,f_p} W \overset{(4.3.1.4)}{\simeq} D^{dR}$$

est nulle pour $j \geq i+1$). Soient $\widehat{B_{st}^+} = \widehat{A_{st}} \otimes_W K_0$ et $Fil^r(\widehat{B_{st}^+} \otimes_{S_{K_0}} \mathcal{D}) = \sum_{s=0}^{r} Fil^s\widehat{B_{st}^+} \otimes_{S_{K_0}} Fil^{r-s}\mathcal{D}$.

Lemme 4.3.2.2 *Avec les notations de (4.1), on a des isomorphismes:*

$$\begin{array}{rcl}\widehat{B_{st}^{+}} \otimes_{S_{K_0}} \mathcal{D} & \simeq & \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \varprojlim_n (\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M}_n) \\ Fil^r(\widehat{B_{st}^{+}} \otimes_{S_{K_0}} \mathcal{D})_{N=0} & \simeq & \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \varprojlim_n Fil^r(\widehat{A_{st}} \otimes_S \mathcal{M}_n)_{N=0}\end{array}$$

Preuve. — Le premier isomorphisme est (presque) évident. Pour le deuxième, on laisse les détails au lecteur, les ingrédients essentiels sont: les résultats de (4.1), le fait que le foncteur $Fil^r(\widehat{A}_{st} \otimes_S .)_{N=0}$ est exact et ne dépend pas de la filtration admissible choisie (3.2.1.5 et 3.2.1.4) et un passage à la limite projective sur des suites exactes de Künneth analogues à celles de (3.2.1.2). $\square$

Pour $x \in \mathcal{D}$, on rappelle que $\phi(x) = \phi_r((u-p)^r x)/\phi_r((u-p)^r)$ et on étend N par K_0-linéarité: puisque $\mathcal{M}/\mathcal{M}_{tors}$ est fortement divisible (4.1.5), on voit facilement que $(\mathcal{D}, (Fil^j\mathcal{D})_{j\in\mathbf{Z}}, \phi, N)$ est un objet de la catégorie notée $\mathcal{MF}_{S_{K_0}}(\Phi, \mathcal{N})$ dans [Br2] et il lui correspond un certain (ϕ, N)-K_0-espace vectoriel filtré par l'équivalence de catégories de [Br2]. D'autre part, Hyodo et Kato construisent dans [HK] un isomorphisme canonique de K_0-espaces vectoriels: $D^{HK} \to D^{dR}$ (isomorphisme de Hyodo-Kato) de sorte que $D^{dR} = H^i_{dR}(X_{K_0})$ muni de la filtration de Hodge $(Fil^j_H D^{dR})_{j\in\mathbf{Z}}$ et D^{HK} muni des opérateurs ϕ et N ([HK],3.6) leur fournissent aussi un (ϕ, N)-K_0-espace vectoriel filtré $(D = D^{dR} \simeq D^{HK}, (Fil^j_H D)_{j\in\mathbf{Z}}, \phi, N)$.

Proposition 4.3.2.3 *Le (ϕ, N)-K_0-espace vectoriel filtré associé à $(\mathcal{D}, (Fil^j\mathcal{D})_{j\in\mathbf{Z}}, \phi, -N)$ par l'équivalence de catégories de [Br2] s'identifie canoniquement au (ϕ, N)-K_0-espace vectoriel filtré $(D, (Fil^j_H D)_{j\in\mathbf{Z}}, \phi, N)$ construit par Hyodo-Kato.*

Preuve. — Il y a trois points à vérifier:
(1) L'isomorphisme $D^{HK} = \mathcal{D} \otimes_{S,f_0} W \xrightarrow{\sim} \mathcal{D} \otimes_{S,f_p} W = D^{dR}$ construit dans [Br2] s'identifie à l'isomorphisme de Hyodo-Kato.
(2) L'opérateur de monodromie construit par Hyodo-Kato sur D^{HK} s'identifie à l'opposé de celui provenant de $\mathcal{D}$ (construit ici par voie "syntomique").
(3) La filtration $Fil^j D^{dR}$ image de la filtration $Fil^j\mathcal{D}$ sur $\mathcal{D} \otimes_{S,f_p} W = D^{dR} = H^i_{dR}(X_{K_0})$ s'identifie à la filtration de Hodge $Fil^j_H D^{dR}$.
Le (1) est évident, car les deux isomorphismes s'obtiennent en définissant une section $\mathcal{D} \otimes_{S,f_0} W \to \mathcal{D}$ qui commute aux Frobenius et en la composant avec $\mathcal{D} \to \mathcal{D} \otimes_{S,f_p} W$. Mais une telle section est précisément unique ([Br2],6.2.1.1). On note désormais $D = D^{dR} = D^{HK}$. Soit $\mathcal{J}_n^{dR} = Ker(\mathcal{O}_n^{dR} \to \mathcal{O}_n)$ où $\mathcal{O}_n$ est le faisceau structural sur $(X_n)_{syn}$, du diagramme commutatif de faisceaux sur $(X_n)_{syn}$:

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{J}_n^{[j]} & \to & \mathcal{O}_n^{st} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{J}_n^{dR,[j]} & \to & \mathcal{O}_n^{dR}\end{array}$$

on déduit aisément $Fil^j D \subset Fil^j_H D$. Notons $Fil^r(B^+_{st} \otimes_{K_0} D) = \sum_{s=0}^{r} Fil^s B^+_{st} \otimes_{K_0} Fil^{r-s} D$ (resp. $Fil^r_H(B^+_{st} \otimes_{K_0} D) = \sum_{s=0}^{r} Fil^s B^+_{st} \otimes_{K_0} Fil^{r-s}_H D$) et:

$$H^i((\bar{X}_n)_{syn}, \mathcal{O}_n^{cris}) = \varinjlim_L H^i((X_{n,L})_{syn}, \mathcal{O}_n^{cris}) = H^i((\bar{X}_n/Spec\, W_n)_{cris}, \mathcal{O}_{\bar{X}_n/Spec\ W_n})$$

(resp. $H^i((\bar{X}_n)_{syn}, \mathcal{J}_n^{cris,[r]})$, $H^i((\bar{X}_n)_{syn}, \mathcal{O}_n^{cris}/\mathcal{J}_n^{cris,[r]})$), par (3.2.3.5), (4.3.2.2) et ([Br2],9.1.2), on a:

$$\mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \varprojlim_n H^i((\bar{X}_n)_{syn}, \mathcal{O}_n^{cris}) \simeq (\widehat{B^+_{st} \otimes_{S_{K_0}} \mathcal{D}})_{N=0} \simeq (B^+_{st} \otimes_{K_0} D)_{N=0}$$

$$\mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \varprojlim_n H^i((\bar{X}_n)_{syn}, \mathcal{J}_n^{cris,[r]}) \simeq Fil^r(\widehat{B^+_{st} \otimes_{S_{K_0}} \mathcal{D}})_{N=0} \simeq Fil^r(B^+_{st} \otimes_{K_0} D)_{N=0}$$

(il s'agit du N "syntomique"). Kato montre ([Ka3],4.1):

$$\mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \varprojlim_n H^i((\bar{X}_n)_{syn}, \mathcal{O}_n^{cris}) \simeq (B^+_{st} \otimes_{K_0} D)_{N=0}$$

($i \in \mathbf{N}$) avec sa définition de N sur B^+_{st} qui est l'opposée de la nôtre (voir la remarque de (2.2.4)) donc $(B^+_{st} \otimes_{K_0} D)_{N=0}$ est le même avec les deux définitions de N (et conventions de signe opposées sur B^+_{st}): cela entraine facilement que les deux N sont opposés sur D (exercice) d'où (2). Dans ([Ka3],6.4.2), Kato dispose d'un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \varprojlim_n H^i((\bar{X}_n)_{syn}, \mathcal{O}_n^{cris}) & \rightarrow & \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \varprojlim_n H^i((\bar{X}_n)_{syn}, \mathcal{O}_n^{cris}/\mathcal{J}_n^{cris,[r]}) \\ \downarrow & & \downarrow \wr \\ B^+_{dR} \otimes_{K_0} D & \rightarrow & (B^+_{dR} \otimes_{K_0} D)/Fil^r_H(B^+_{dR} \otimes_{K_0} D) \end{array}$$

où la flèche horizontale supérieure provient de $\mathcal{O}_n^{cris} \rightarrow \mathcal{O}_n^{cris}/\mathcal{J}_n^{cris,[r]}$ et où la flèche verticale de droite est un isomorphisme ([KM] pour le cas classique). Par ce qui précède, il se factorise en un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \dfrac{\varprojlim_n H^i((\bar{X}_n)_{syn}, \mathcal{O}_n^{cris})}{\varprojlim_n H^i((\bar{X}_n)_{syn}, \mathcal{J}_n^{cris,[r]})} & \hookrightarrow & \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \varprojlim_n H^i((\bar{X}_n)_{syn}, \dfrac{\mathcal{O}_n^{cris}}{\mathcal{J}_n^{cris,[r]}}) \\ \downarrow & & \downarrow \wr \\ \dfrac{B^+_{dR} \otimes_{K_0} D}{Fil^r(B^+_{dR} \otimes_{K_0} D)} & \longrightarrow & \dfrac{B^+_{dR} \otimes_{K_0} D}{Fil^r_H(B^+_{dR} \otimes_{K_0} D)} \end{array}$$

Mais on laisse au lecteur l'exercice de vérifier que les flèches canoniques:

$$\frac{(B^+_{st} \otimes_{K_0} D)_{N=0}}{Fil^r(B^+_{st} \otimes_{K_0} D)_{N=0}} \rightarrow \frac{B^+_{st} \otimes_{K_0} D}{Fil^r(B^+_{st} \otimes_{K_0} D)} \rightarrow \frac{B^+_{dR} \otimes_{K_0} D}{Fil^r(B^+_{dR} \otimes_{K_0} D)}$$

sont toutes des isomorphismes (utiliser $B_{st}^+/Fil^r B_{st}^+ = B_{cris}^+/Fil^r B_{cris}^+ = B_{dR}^+/Fil^r B_{dR}^+$), d'où on déduit que la flèche verticale de gauche (du diagramme ci-dessus) est aussi un isomorphisme ce qui entraine: $(B_{dR}^+ \otimes_{K_0} D)/Fil^r(B_{dR}^+ \otimes_{K_0} D) \simeq (B_{dR}^+ \otimes_{K_0} D)/Fil_H^r(B_{dR}^+ \otimes_{K_0} D)$ c'est-à-dire $Fil^r(B_{dR}^+ \otimes_{K_0} D) = Fil_H^r(B_{dR}^+ \otimes_{K_0} D)$ d'où on déduit aisément (3). $\square$

Soient $i \in \{0, ..., p-2\}$ et $V = H_{ét}^i(X_{\bar{K}_0}, \mathbf{Q}_p)$, par (4.2.2) et ([Br3],4.1.1.2), on retrouve ainsi:

Corollaire 4.3.2.4 *(cas particulier de ([Ts2],0.2)) Il existe un isomorphisme canonique: $B_{st} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \simeq B_{st} \otimes_{K_0} D$ qui préserve ϕ, N, l'action de $Gal(\bar{K}_0/K_0)$ et la filtration.*

Remarque: La version logarithmique de l'isomorphisme de Kato-Messing:

$$\mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \varprojlim_n H^i((\bar{X}_n)_{syn}, \mathcal{O}_n^{cris}/\mathcal{J}_n^{cris,[r]}) \xrightarrow{\sim} (B_{dR}^+ \otimes_{K_0} D)/Fil_H^r(B_{dR}^+ \otimes_{K_0} D)$$

est vraie sans restriction ni sur i, ni sur la ramification, et probablement encore si X est seulement propre, log-lisse et de fibre spéciale du type de Cartier. On peut penser que la correspondance (4.3.2.3) est aussi vraie dans ce cas général. En particulier, la même démonstration donnerait, pour $0 \leq i \leq p-2$, $K = K_0$, X saturé, propre, log-lisse, de fibre spéciale du type de Cartier et $\bar{X}$ saturé, que (4.3.2.4) est encore valable en remplaçant $H_{ét}^i(X_{\bar{K}_0}, \mathbf{Q}_p)$ par $H_{ét}^i(X_{triv,\bar{K}_0}, \mathbf{Q}_p)$ (la preuve de (4.3.2.3) n'utilise l'hypothèse particulière de semi-stabilité que pour l'isomorphisme de Kato-Messing). Tsuji m'a suggéré une stratégie alternative pour prouver (4.3.2.3) dans le cas général.

4.4 Le cas des H^i, $i = 0, 1$

On reprend les hypothèses générales de (4) (i.e. X n'est plus nécessairement semi-stable). On va préciser, pour le H^0 et le H^1, la structure d'objet de $\underline{\mathcal{M}}^1$ $(0 \leq r \leq 1)$, ce qui permettra de répondre dans ce cas à une question d'Illusie sur les réseaux de la cohomologie log-cristalline.

Soit $r \in \{0, ..., p-2\}$, on note $\underline{NMF}_{tor}^{f,r}$ la catégorie des couples (N, M) où M est un objet de $\underline{MF}_{tor}^{f,r}$ (Appendice A) et N un morphisme W-linéaire de M dans M tel que $N(Fil^i M) \subset Fil^{i-1}M$ et $N\phi_i = \phi_{i-1}N$ $(i \in \{0, ..., r\})$. La catégorie $\underline{NMF}_{tor}^{f,r}$ est abélienne et le foncteur $\mathcal{F}^r : \underline{MF}_{tor}^{f,r} \to \underline{\mathcal{M}}^r$ se prolonge de manière évidente en un foncteur exact et pleinement fidèle encore noté $\mathcal{F}^r : \underline{NMF}_{tor}^{f,r} \to \underline{\mathcal{M}}^r$.

Proposition 4.4.1 *Soit $r \in \{0, 1\}$ (donc $p \geq 3$ si $r = 1$), alors $\mathcal{F}^r$ induit une équivalence de catégories entre $\underline{NMF}_{tor}^{f,r}$ et $\underline{\mathcal{M}}^r$.*

Preuve. — On le montre pour $r=1$ et $p\geq 3$, laissant le cas particulier $r=0$, $p=2$ au lecteur. Commençons par $\underline{\mathcal{M}}_k^1=\underline{\widetilde{\mathcal{M}}}_k^1$ (c.f. Appendice A): soit $\tilde{\mathcal{M}}\in\underline{\widetilde{\mathcal{M}}}_k^1$ et soit $M=\tilde{\phi}_1(Fil^1\tilde{\mathcal{M}})$ muni du Fil^1, du ϕ_1 et du N induits (en oubliant $\tilde{}$ pour M). Pour $x\in M$, posons $\phi(x)=\tilde{\phi}_1(u.x)/\tilde{\phi}_1(u)=-\tilde{\phi}_1(u.x)$: je dis que (M,Fil^1M,ϕ,ϕ_1,N) est un objet de $\underline{NMF}_{tor}^{f,1}$. Soit $x\in M$, par définition, il existe $y\in Fil^1\mathcal{M}$ tel que $x=\tilde{\phi}_1(y)$. Puisque $k[u]/u^p\otimes_k M\xrightarrow{\sim}\tilde{\mathcal{M}}$ ([Br3],2.2.1.1), y s'écrit: $y=\sum_{i=0}^{p-1}x_iu^i$ avec $x_i\in M$ et $x_0\in Fil^1M$ (car $u.M\subset Fil^1M$), d'où $\tilde{\phi}_1(y)=\tilde{\phi}_1(x_0)-\tilde{\phi}(x_1)$, i.e. $x\in\phi(M)+\phi_1(Fil^1M)$, i.e. $M=\phi(M)+\phi_1(Fil^1M)$. Soit $\mathcal{M}\in\underline{\mathcal{M}}^1$, on fait une récurrence sur le plus petit entier $n\in\mathbf{N}$ tel que $p^{n+1}\mathcal{M}=0$: considérons la suite exacte $0\to p^n\mathcal{M}\to\mathcal{M}\to\mathcal{M}/p^n\mathcal{M}\to 0$ d'objets de $\underline{\mathcal{M}}^1$ et posons $\mathcal{M}'=p^n\mathcal{M}$, $\mathcal{M}''=\mathcal{M}/p^n\mathcal{M}$ et $\phi(x)=\phi_1((u-p).x)/\phi_1(u-p)$ pour $x\in\mathcal{M}$, $\mathcal{M}'$ ou $\mathcal{M}''$. Soient $\mathcal{M}_1=\phi(\mathcal{M})+\phi_1(Fil^1\mathcal{M})$ muni du Fil^1, du ϕ, du ϕ_1 et du N induits, $\mathcal{M}_2=\phi(\mathcal{M}_1)+\phi_1(Fil^1\mathcal{M}_1)$ avec de même les structures induites, $\mathcal{M}_3=\phi(\mathcal{M}_2)+\phi_1(Fil^1\mathcal{M}_2)$, etc ... De $\phi(\gamma_i(u))=p^i/i!(u^p/p)^i=0$ pour $i>>0$ et $\phi_1(\gamma_i(u-p))=p^{i-1}/i!(u^p/p-1)^i=0$ pour $i>>0$ (car $p\geq 3$), on déduit que $\mathcal{M}_1$, et donc $\mathcal{M}_j$, $j\in\mathbf{N}^*$, sont des W-modules de longueur finie et on pose $M=\bigcap_{j\in\mathbf{N}^*}\mathcal{M}_j$: c'est aussi un W-module de longueur finie. La suite décroissante (pour l'inclusion) de W-modules de longueur finie $(\mathcal{M}_j)_{j\in\mathbf{N}^*}$ devient constante ($=M$) pour $j\geq j_0>>0$. En particulier, $\phi(\mathcal{M}_{j_0})+\phi_1(Fil^1\mathcal{M}_{j_0})=\mathcal{M}_{j_0}=M$ et M est un objet de $\underline{NMF}_{tor}^{f,1}$. Notons M' et M'' les objets de $\underline{NMF}_{tor}^{f,1}$ correspondant à $\mathcal{M}'$ et $\mathcal{M}''$ (cas $n=1$ et récurrence), on laisse au lecteur l'exercice de vérifier que le même procédé inductif sur $\mathcal{M}'$ et $\mathcal{M}''$ aboutit à M' et M''. On a des suites exactes de W-modules:

$$0\to M\cap\mathcal{M}'\to M\to M''\quad,\quad 0\to Fil^1(M\cap\mathcal{M}')\to Fil^1M\to Fil^1M''$$

d'où on déduit que $(M\cap\mathcal{M}',Fil^1(M\cap\mathcal{M}'),\phi,\phi_1,N)$ est un objet de $\underline{NMF}_{tor}^{f,1}$ contenant M' ($\underline{NMF}_{tor}^{f,1}$ est abélienne). Mais $M\cap\mathcal{M}'\subset M'$ puisque $\phi(M\cap\mathcal{M}')+\phi_1(Fil^1(M\cap\mathcal{M}'))=M\cap\mathcal{M}'$, donc $M\cap\mathcal{M}'=M'$. Montrons que la flèche $M\to M''$ est surjective: il suffit de montrer les surjectivités de $\mathcal{M}_j\to\mathcal{M}''_j$ pour $j\in\mathbf{N}$. On fait l'hypothèse de récurrence $\mathcal{M}_j\to\mathcal{M}''_j$ et $Fil^1\mathcal{M}_j\to Fil^1\mathcal{M}''_j$ surjectives, qui est trivialement vraie pour $j=0$ (en posant $\mathcal{M}_0=\mathcal{M}$, $\mathcal{M}''_0=\mathcal{M}''$). Les deux surjectivités entrainent facilement celle de $\mathcal{M}_{j+1}\to\mathcal{M}''_{j+1}$. Soient $x\in Fil^1\mathcal{M}''_{j+1}$ et $\hat{x}$ un relevé de x dans $\mathcal{M}_{j+1}$: il existe $\hat{y}\in Fil^1\mathcal{M}$ tel que $\hat{x}-\hat{y}\in\mathcal{M}'=S\otimes_W M'$ d'où on déduit qu'il existe $\hat{z}\in M'$ tel que $\hat{x}-\hat{z}\in Fil^1\mathcal{M}$. Mais pour tout j, on a $M'\subset\mathcal{M}'_j\subset\mathcal{M}_j$, d'où $\hat{x}-\hat{z}\in\mathcal{M}_{j+1}\cap Fil^1\mathcal{M}=Fil^1\mathcal{M}_{j+1}$ ce qui montre la surjectivité de $Fil^1\mathcal{M}_{j+1}\to Fil^1\mathcal{M}''_{j+1}$. On déduit finalement de ce qui précède une suite exacte dans $\underline{NMF}_{tor}^{f,1}$: $0\to M'\to M\to M''\to 0$ et on laisse au lecteur le soin d'en tirer $S\otimes_W M\simeq\mathcal{M}$ dans $\underline{\mathcal{M}}^1$. $\square$

Par (2.3.2.1), (4.4.1) et (4.3.1.3), $(H^r((X_n)_{syn},\mathcal{O}_n^{st}),H^r((X_n)_{syn},\mathcal{J}_n^{[r]}),\phi_r,N)$

est l'image par $\mathcal{F}^r$ pour $r \in \{0,1\}$ d'un objet $(M_n, Fil^r M_n, \phi, \phi_r, N)$ de $\underline{NMF}_{tor}^{f,r}$ dont le module sous-jacent M_n s'identifie à $H^r((X_n)_{syn}, \mathcal{O}_n^{dR})$. Le lemme suivant précise $Fil^r M_n$. On rappelle que $\mathcal{J}_n^{dR} = Ker(\mathcal{O}_n^{dR} \to \mathcal{O}_n)$ où $\mathcal{O}_n$ est le faisceau structural sur $(X_n)_{syn}$.

Lemme 4.4.2 *Pour $r \in \{0,1\}$, $Fil^r H^r((X_n)_{syn}, \mathcal{O}_n^{dR})$ s'identifie à $H^r((X_n)_{syn}, \mathcal{J}_n^{dR,[r]})$.*

Preuve. — Pour $r = 0$, il n'y a rien à montrer, on suppose donc $r = 1$ et $p \geq 3$. On écrit encore $H^i(\mathcal{F})$ au lieu de $H^i((X_n)_{syn}, \mathcal{F})$ si $\mathcal{F}$ est un faisceau sur $(X_n)_{syn}$. Pour $n = 1$, on a un diagramme commutatif de suites exactes:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \to & H^0(\mathcal{J}_1) & \to & H^0(\mathcal{O}_1^{st}) & \to & H^0(\mathcal{O}_1^{st}/\mathcal{J}_1) & \to & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \downarrow & & \\ 0 & \to & H^0(\mathcal{J}_1^{dR}) & \to & H^0(\mathcal{O}_1^{dR}) & \to & H^0(\mathcal{O}_1^{dR}/\mathcal{J}_1^{dR}) & \to & H^1(\mathcal{J}_1^{dR}) & \to & H^1(\mathcal{O}_1^{dR}) \end{array}$$

car $H^1(\mathcal{J}_1) \hookrightarrow H^1(\mathcal{O}_1^{st})$ (2.3.2.1), ce qui montre que $H^1(\mathcal{J}_1^{dR}) \to H^1(\mathcal{O}_1^{dR})$ est injective. Du diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^1(\mathcal{J}_1) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{O}_1^{st}) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{O}_1^{st}/\mathcal{J}_1) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \| \\ 0 & \longrightarrow & H^1(\mathcal{J}_1^{dR}) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{O}_1^{dR}) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{O}_1^{dR}/\mathcal{J}_1^{dR}) \end{array}$$

et de (4.3.1.3), on déduit la surjectivité de la flèche verticale de gauche, ce qui achève le cas $n = 1$. Pour $r \in \{0, ..., p-2\}$, soit $K_n^r = Ker(H^r(\mathcal{O}_n^{st}) \to H^r(\mathcal{O}_n^{dR})) \overset{(4.3.1.3)}{=} Fil^1 S.H^r(\mathcal{O}_n^{st})$. Pour $r \in \{0,1\}$, on a donc des inclusions $K_n^r \subset H^r(\mathcal{J}_n) \subset H^r(\mathcal{O}_n^{st})$ et on voit qu'il est équivalent de montrer que la flèche $H^r(\mathcal{J}_n) \to H^r(\mathcal{J}_n^{dR})$ induit un isomorphisme $H^r(\mathcal{J}_n)/K_n^r \overset{\sim}{\to} H^r(\mathcal{J}_n^{dR})$. On le fait par récurrence sur n en remarquant qu'on a déjà (par le cas $n = 1$) $H^0(\mathcal{J}_1)/K_1^0 \overset{\sim}{\to} H^0(\mathcal{J}_1^{dR})$ et $H^1(\mathcal{J}_1)/K_1^1 \overset{\sim}{\to} H^1(\mathcal{J}_1^{dR})$. Par la remarque suivant (2.2.6.3) et la preuve de (2.3.2.1), la flèche $H^2(\mathcal{J}_1) \to H^2(\mathcal{O}_1^{st})$ est encore injective pour $p \geq 3$ et on a encore $Fil^1 S.H^2(\mathcal{O}_1^{st}) = Ker(H^2(\mathcal{O}_1^{st}) \to H^2(\mathcal{O}_1^{dR})) = K_1^2$ pour $p = 3$. Par récurrence, le cas $n = 1$ et diverses platitudes et chasses au diagramme faciles, on obtient alors un diagramme commutatif de suites exactes:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & H^0(\mathcal{J}_1)/K_1^0 & \to & H^0(\mathcal{J}_n)/K_n^0 & \to & H^0(\mathcal{J}_{n-1})/K_{n-1}^0 & \to \\ & & \wr\downarrow & & \downarrow & & \downarrow\wr & \\ 0 & \to & H^0(\mathcal{J}_1^{dR}) & \to & H^0(\mathcal{J}_n^{dR}) & \to & H^0(\mathcal{J}_{n-1}^{dR}) & \to \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} H^1(\mathcal{J}_1)/K_1^1 & \to & H^1(\mathcal{J}_n)/K_n^1 & \to & H^1(\mathcal{J}_{n-1})/K_{n-1}^1 & \to & H^2(\mathcal{J}_1)/K_1^2 \\ \wr\downarrow & & \downarrow & & \downarrow\wr & & \downarrow \\ H^1(\mathcal{J}_1^{dR}) & \to & H^1(\mathcal{J}_n^{dR}) & \to & H^1(\mathcal{J}_{n-1}^{dR}) & \to & H^2(\mathcal{J}_1^{dR}) \end{array}$$

où la dernière flèche verticale de droite est injective. On conclut par le lemme des cinq. $\square$

En passant à la limite projective sur les identifications $H^r((X_n)_{syn}, \mathcal{O}_n^{st}) \simeq S_n \otimes_{W_n} H^r((X_1)_{syn}, \mathcal{O}_n^{HK})$ déduites de (4.4.1) et (4.3.1.3) ($r \in \{0,1\}$), on obtient le corollaire suivant, qui répond dans ce cas particulier à une question d'Illusie (c.f. remarque ci-après):

Corollaire 4.4.3 *Pour $r \in \{0,1\}$ et avec les notations de (4.3.1.4), l'isomorphisme de Hyodo-Kato (4.3.2.3) induit un isomorphisme de réseaux $M^{HK}/M^{HK}_{tors} \stackrel{\sim}{\to} M^{dR}/M^{dR}_{tors}$ où M^{HK}_{tors} (resp. M^{dR}_{tors}) est la partie de torsion de M^{HK} (resp. M^{dR}).*

Remarque: Lorsque l'isomorphisme de Hyodo-Kato ne préserve plus les réseaux, on peut se demander avec Illusie ([Il3]) quelle est la "taille" des dénominateurs qui interviennent alors (c.f. [BO2] pour le cas lisse ramifié).

A Les catégories abéliennes de Fontaine-Laffaille semi-stable

Ce qui suit est tiré pour l'essentiel de ([Br3]). On rappelle juste les définitions et on renvoie à ([Br3]) pour les preuves.

A.1 Les catégories

Soient r un entier compris entre 0 et $p-2$ et $c = (p-1)!\gamma_p(u) - 1$.

Soit $'\underline{\mathcal{M}}^r$ la catégorie suivante: les objets sont la donnée:

- d'un S-module $\mathcal{M}$
- d'un sous-S-module $Fil^r\mathcal{M}$ de $\mathcal{M}$ contenant $Fil^r S.\mathcal{M}$
- d'une application S-semi-linéaire $\phi_r : Fil^r\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ telle que, pour tout $s \in Fil^r S$ et $x \in \mathcal{M}$, on a $c^r.\phi_r(s.x) = \phi_r(s).\phi_r((u-p)^r.x)$
- d'une application W-linéaire $N : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ telle que:
  (1) si $\lambda \in S$ et $x \in \mathcal{M}$, $N(\lambda.x) = N(\lambda).x + \lambda.N(x)$
  (2) $(u-p).N(Fil^r\mathcal{M}) \subset Fil^r\mathcal{M}$
  (3) le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc} Fil^r\mathcal{M} & \stackrel{\phi_r}{\to} & \mathcal{M} \\ {\scriptstyle (u-p).N} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle c.N} \\ Fil^r\mathcal{M} & \stackrel{\phi_r}{\to} & \mathcal{M} \end{array}$$

Les flèches sont les applications S-linéaires qui préservent $Fil^r\mathcal{M}$ et commutent à ϕ_r et N. On note $\underline{\mathcal{M}}^r$ la sous-catégorie pleine de $'\underline{\mathcal{M}}^r$ formée des objets $\mathcal{M}$ qui vérifient les deux conditions supplémentaires:

- le S-module $\mathcal{M}$ est de la forme de la forme $\mathcal{M} \simeq \bigoplus_{i \in I} S_{n_i}$ pour I fini et $n_i \in \mathbf{N}^*$
- le S-module $\mathcal{M}$ est engendré par l'image de ϕ_r.

Quand r augmente, les catégories $\underline{\mathcal{M}}^r$ sont des sous-catégories pleines les unes des autres. En particulier, ce sont toutes des sous-catégories pleines de $\underline{\mathcal{M}}^{p-2}$.

Soit $\underline{MF}_{tor}^{f,r}$ la catégorie suivante ([FL],3.2): les objets sont la donnée:

- d'un W-module de longueur finie M
- d'une filtration de M par des sous-W-modules $(Fil^i M)_{i \in \mathbf{Z}}$ telle que $Fil^i M = M$ pour $i \leq 0$ et $Fil^i M = 0$ pour $i \geq r+1$
- pour chaque entier i, d'une application W-semi-linéaire $\phi_i : \ Fil^i M \to M$, ces applications étant telles que:
  (1) $\phi_i|_{Fil^{i+1}} = p\phi_{i+1}$
  (2) $\sum Im\ \phi_i = M$.

Les flèches sont les applications W-linéaires qui préservent la filtration et commutent aux ϕ_i. Quand r augmente, les catégories $\underline{MF}_{tor}^{f,r}$ sont des sous-catégories pleines les unes des autres. En particulier, ce sont toutes des sous-catégories pleines de $\underline{MF}_{tor}^{f,p-2}$.

Proposition A.1.1 *([FL],1.8 et 3.2) Les catégories $\underline{MF}_{tor}^{f,r}$ sont abéliennes.*

Soit M un objet de $\underline{MF}_{tor}^{f,r}$, on définit un foncteur $\mathcal{F}^r : \underline{MF}_{tor}^{f,r} \to \underline{\mathcal{M}}^r$ en posant $\mathcal{F}^r(M) = S \otimes_W M$, $Fil^r \mathcal{F}^r(M) = \sum_{j=0}^{r} Fil^{r-j} S \otimes_W Fil^j M$, $\phi_r = \sum_{j=0}^{r} \phi_{r-j} \otimes \phi_j$ et $N(P(u) \otimes x) = N(P(u)) \otimes x$.

Proposition A.1.2 *([Br3],2.4.1.1) Le foncteur $\mathcal{F}^r$ est exact et pleinement fidèle.*

Théorème A.1.3 *([Br3],2.1.2.2 et 2.4.2.2) Les catégories $\underline{\mathcal{M}}^r$ sont abéliennes et admettent les mêmes objets simples que les catégories $\underline{MF}_{tor}^{f,r}$ (via $\mathcal{F}^r$).*

A.2 Les objets tués par p

On note $\underline{MF}_k^{f,r}$ et $\underline{\mathcal{M}}_k^r$ les sous-catégories pleines respectivement de $\underline{MF}_{tor}^{f,r}$ et $\underline{\mathcal{M}}_{tor}^r$ formées des objets tués par p. La catégorie $\underline{\mathcal{M}}_k^r$ se décrit plus simplement sur $\tilde{S}_1 = k[u]/u^p$: soit $\underline{\widetilde{\mathcal{M}}}_k^r$ la catégorie dont les objets sont la donnée:

- d'un $\tilde{S}_1$-module $\tilde{\mathcal{M}}$ libre de rang fini

- d'un sous-$\tilde{S}_1$-module $Fil^r\tilde{\mathcal{M}}$ contenant $u^r.\tilde{\mathcal{M}}$
- d'une application $\tilde{S}_1$-semi-linéaire $\tilde{\phi}_r : Fil^r\tilde{\mathcal{M}} \to \tilde{\mathcal{M}}$ dont l'image engendre le $\tilde{S}_1$-module $\tilde{\mathcal{M}}$
- d'une application k-linéaire $\tilde{N} : \tilde{\mathcal{M}} \to \tilde{\mathcal{M}}$ telle que:
  (1) si $\lambda \in \tilde{S}_1$ et $x \in \tilde{\mathcal{M}}$, $\tilde{N}(\lambda.x) = \tilde{N}(\lambda).x + \lambda.\tilde{N}(x)$
  (2) $u.\tilde{N}(Fil^r\tilde{\mathcal{M}}) \subset Fil^r\tilde{\mathcal{M}}$
  (3) le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc} Fil^r\tilde{\mathcal{M}} & \stackrel{\tilde{\phi}_r}{\to} & \tilde{\mathcal{M}} \\ {\scriptstyle u.\tilde{N}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle -\tilde{N}} \\ Fil^r\tilde{\mathcal{M}} & \stackrel{\tilde{\phi}_r}{\to} & \tilde{\mathcal{M}} \end{array}$$

et dont les flèches sont les applications $\tilde{S}_1$-linéaires qui préservent $Fil^r\tilde{\mathcal{M}}$ et commutent à $\tilde{\phi}_r$ et $\tilde{N}$ (sur $\tilde{S}_1$, $\tilde{N}$ est l'unique dérivation k-linéaire telle que $N(u) = -u$). Quand r augmente, les catégories $\underline{\widetilde{\mathcal{M}}}^r$ sont des sous-catégories pleines les unes des autres. Soit σ la surjection k-linéaire $S_1 \to \tilde{S}_1$, $\gamma_i(u) \mapsto \gamma_i(u)$ si $0 \leq i \leq p-1$ et $\gamma_i(u) \mapsto 0$ sinon. Pour $\mathcal{M}$ dans $\underline{\mathcal{M}}_k^r$, posons $T(\mathcal{M}) = \tilde{S}_1 \otimes_{(\sigma),S_1} \mathcal{M}$ et soit s la surjection canonique $\mathcal{M} \to T(\mathcal{M})$. On définit:

- $Fil^rT(\mathcal{M}) = s(Fil^r\mathcal{M})$
- si $x \in s(Fil^r\mathcal{M})$, $\tilde{\phi}_r(x) = s(\phi_r(\hat{x}))$ où $\hat{x}$ est un relevé quelconque de x dans $Fil^r\mathcal{M}$ (c'est indépendant du relevé)
- $\tilde{N}(P(u) \otimes x) = P(u) \otimes N(x) + \tilde{N}(P(u)) \otimes x$ ou $x \in \mathcal{M}$ et $P(u) \in \tilde{S}_1$

On obtient ainsi un foncteur $T : \underline{\mathcal{M}}_k^r \to \underline{\widetilde{\mathcal{M}}}_k^r$.

Proposition A.2.1 *([Br3],2.2.2.1) Le foncteur T induit une équivalence de catégories entre $\underline{\mathcal{M}}_k^r$ et $\underline{\widetilde{\mathcal{M}}}_k^r$.*

B Sur les faisceaux $\mathcal{O}_1^{car,\Xi}$: preuve du théorème (2.2.1.2)

Dans toute cette partie, Σ désigne l'une des trois algèbres S_1, $\tilde{S}_1$ ou k et Ξ le log-schéma correspondant (2.2.1).

B.1 Site p-infinitésimal

Soit $Spec\ A \hookrightarrow Spec\ B$ une $\mathbf{F}_p$-immersion fermée et $I = Ker(B \to A)$, on dit que I est un p-idéal si pour tout $x \in I$, $x^p = 0$. Soit $X \hookrightarrow Y$ une $\mathbf{F}_p$-immersion fermée de schémas (classiques) d'idéal noyau $\mathcal{I}$, on dit que $\mathcal{I}$ est un p-idéal si c'est un faisceau de p-idéaux. Soit X un log-schéma fin localement de type fini sur Ξ, on définit le petit (resp. gros) site p-infinitésimal $(X/\Xi)_{p-inf}$ (resp. $(X/\Xi)_{p-INF}$) en remplaçant dans la définition des sites $(X/\Xi)_{cris}$ (resp. $(X/\Xi)_{CRIS}$) les immersions fermées exactes définies par un idéal muni de puissances divisées par les immersions fermées exactes définies par un p-idéal (et en prenant de même les recouvrements pour la topologie étale avec structure logarithmique induite). On définit aussi le site $(X/\Xi)_{SYN-p-INF}$ en prenant les recouvrements pour la topologie log-syntomique. A noter que $(X/\Xi)_{cris}$ (resp. $(X/\Xi)_{CRIS}$, resp. $(X/\Xi)_{SYN-CRIS}$) est un sous-site de $(X/\Xi)_{p-inf}$ (resp. $(X/\Xi)_{p-INF}$, resp.$(X/\Xi)_{SYN-p-INF}$). On dispose également dans ce contexte d'un analogue de l'enveloppe aux puissances divisées:

(1) Soit $X \hookrightarrow Y$ une $\mathbf{F}_p$-immersion fermée de schémas (classiques), $F_Y : Y \to Y$ le Frobenius absolu de Y, et D le produit fibré:

$$\begin{array}{ccc} D & \to & Y \\ \downarrow & & \downarrow_{F_Y} \\ X & \hookrightarrow & Y \end{array}$$

Du diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & Y \\ {\scriptstyle F_X}\downarrow & & \downarrow_{F_Y} \\ X & \hookrightarrow & Y \end{array}$$

où F_X est le Frobenius absolu de X, on déduit un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} & & D \\ & \nearrow & \downarrow \\ X & \hookrightarrow & Y \end{array}$$

et il est facile de voir que D a la propriété d'universalité requise.

(2) Soit $i : X \hookrightarrow Y$ une $\mathbf{F}_p$-immersion fermée de log-schémas fins, étale localement, i peut se factoriser sous la forme $i = gi'$ avec $i' : X \hookrightarrow Z$ une immersion fermée exacte et $g : Z \to Y$ log-étale ([Ka2],4.10). Soit F_Z le Frobenius absolu du log-schéma Z (voir 2.1.1) et D le produit fibré:

$$\begin{array}{ccc} D & \to & Z \\ \downarrow & & \downarrow_{F_Z} \\ X & \hookrightarrow & Z \end{array}$$

la log-structure sur D étant, dans ce cas, automatiquement intègre, le log-schéma D s'identifie au schéma $\dot{D}$ produit fibré:

$$\begin{array}{ccc} \dot{D} & \rightarrow & \dot{Z} \\ \downarrow & & \downarrow_{F_{\dot{Z}}} \\ \dot{X} & \hookrightarrow & \dot{Z} \end{array}$$

et muni de la log-structure provenant de Z. Par universalité du produit fibré, on a comme précédemment une immersion fermée exacte $X \hookrightarrow D$ qui est de plus purement inséparable ([Ka2],4.9) et en utilisant ([Ka2],4.11), on montre qu'elle ne dépend pas de Z, ce qui permet de définir un log-schéma D global (voir [Ka2],5.6).

On appelle p-enveloppe de X dans Y, et on note $D_X^p(Y)$, le log-schéma D précédent. On définit les faisceaux sur $(X/\Xi)_{p-INF}$ et le foncteur "sections globales" comme pour $(X/\Xi)_{CRIS}$. Si $\mathcal{F}$ est un faisceau de groupes abéliens sur $(X/\Xi)_{p-INF}$ et si $X \hookrightarrow Y$ est une Ξ-immersion fermée dans un log-schéma fin Y log-lisse sur Ξ, on peut calculer les groupes de cohomologie $H^i((X/\Xi)_{p-INF}, \mathcal{F})$ par le complexe de Čech habituel: notons $Y^\nu = \underbrace{Y \times_\Xi ... \times_\Xi Y}_{\nu\ fois}$, on a des immersions fermées $X \hookrightarrow Y^\nu$ (en composant $X \hookrightarrow Y$ avec l'immersion diagonale $Y \hookrightarrow Y^\nu$), donc $(X \hookrightarrow D_X^p(Y^\nu))$ est un objet de $(X/\Xi)_{p-INF}$. Notons $\mathcal{F}_{D_X^p(Y^\nu)}$ la restriction de $\mathcal{F}$ à $(D_X^p(Y^\nu))_{ét} = (X)_{ét}$, on considère alors le complexe de faisceaux sur $(X)_{ét}$ (où les morphismes sont les sommes alternées des diverses projections):

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_{D_X^p(Y)} \rightarrow \mathcal{F}_{D_X^p(Y^2)} \rightarrow ... \rightarrow \mathcal{F}_{D_X^p(Y^\nu)} \rightarrow \mathcal{F}_{D_X^p(Y^{\nu+1})} \rightarrow ...$$

et on montre exactement comme dans ([Be],V.1.2) que l'hypercohomologie de ce complexe calcule les $H^i((X/\Xi)_{p-INF}, \mathcal{F})$.

B.2 Lemmes préliminaires

Soit P un monoïde intègre de type fini et $\mathbf{N} \rightarrow P$ un morphisme injectif de monoïdes. On peut toujours écrire P sous la forme $P = Q/G$ pour un certain monoïde intègre de type fini Q sur $\mathbf{N}$ et un certain sous-groupe G de Q^{gp} et on peut supposer en outre $Q^{gp}/\mathbf{Z}$ sans p-torsion (par exemple $Q = \mathbf{N}^r$ pour r assez grand). Soit $Q^i = \underbrace{Q \oplus_\mathbf{N} ... \oplus_\mathbf{N} Q}_{i\ fois}$ et s_i la surjection naturelle: $Q^i \rightarrow Q/G$, on note $(Q^i)^e = \{x \in (Q^i)^{gp}\ tq\ s_i^{gp}(x) \in Q/G\}$ et e_j les morphismes de monoïdes: $(Q^i)^e \rightarrow (Q^{i+1})^e$, $e_j(x_0 \oplus ... \oplus x_{i-1}) = x_0 \oplus ... \oplus x_{j-1} \oplus 1_Q \oplus x_j \oplus ... \oplus x_{i-1}$ (1_Q est l'élément neutre de Q en notation multiplicative). On note $\mathbf{N} \oplus_{(\phi),\mathbf{N}} P$ (resp. $(Q^i)^e \oplus_{(\phi),(Q^i)^e} P$) le monoïde limite inductive du diagramme: $\mathbf{N} \overset{p}{\leftarrow} \mathbf{N} \rightarrow P$ (resp. $(Q^i)^e \overset{p}{\leftarrow} (Q^i)^e \rightarrow P$) et $(\mathbf{N} \oplus_{(\phi),\mathbf{N}} P)^e = \{a \oplus b \in \mathbf{Z} \oplus_{(\phi),\mathbf{Z}} P^{gp}\ tq\ a.b^p \in P\}$. On vérifie qu'on a des morphismes canoniques de monoïdes $(\mathbf{N} \oplus_{(\phi),\mathbf{N}} P)^e \rightarrow (Q^i)^e \oplus_{(\phi),(Q^i)^e} P$, $a \oplus b \mapsto a\hat{b}^p$ où $\hat{b}$ est un relevé de b dans $(Q^i)^{gp}$

Lemme B.2.1 *Soit M un $k[\mathbf{N} \oplus_{(\phi),\mathbf{N}} P]$-module, alors le complexe:*

$$0 \to k[(\mathbf{N} \oplus_{(\phi),\mathbf{N}} P)^e] \otimes_{k[\mathbf{N}\oplus_{(\phi),\mathbf{N}}P]} M \to k[Q^e \oplus_{(\phi),Q^e} P] \otimes_{k[\mathbf{N}\oplus_{(\phi),\mathbf{N}}P]} M \xrightarrow{d^1}$$

$$\xrightarrow{d^1} k[(Q^2)^e \oplus_{(\phi),(Q^2)^e} P] \otimes_{k[\mathbf{N}\oplus_{(\phi),\mathbf{N}}P]} M \xrightarrow{d^2} ...$$

(où $d^i = \sum_{j=0}^{i}(-1)^i(e_j \oplus Id_P) \otimes Id_M$) est exact.

Preuve. — Si N est un monoïde intègre et H un sous-groupe de N^{gp}, si $NH \oplus_{(\phi),NH} (N/H)$ désigne comme précédemment la limite inductive du diagramme: $NH \xleftarrow{p} NH \to N/H$ et si $H^p = \{h^p,\ h \in H\}$, on vérifie facilement que le morphisme de monoïdes: $NH \oplus_{(\phi),NH} (N/H) \to NH/H^p$, $n_1 \oplus \bar{n_2} \mapsto n_1\hat{n_2}^p$, où $\hat{n_2}$ est un relevé de $\bar{n_2}$ dans N/H^p, est un isomorphisme. Soit $R = QG/G^p$ (= par ce qui précède $Q^e \oplus_{(\phi),Q^e} P$), $R^i = \underbrace{R \oplus_{\mathbf{N}} ... \oplus_{\mathbf{N}} R}_{i\ fois}$ et $G_i = Ker((R^i)^{gp} \mapsto R^{gp})$, on vérifie donc que $(Q^i)^e \oplus_{(\phi),(Q^i)^e} P = R^iG_i/G_i^p$. Notons $S = (\mathbf{N} \oplus_{(\phi),\mathbf{N}} P)^e$, quitte à remplacer M par $k[S] \otimes_{k[\mathbf{N}\oplus_{(\phi),\mathbf{N}}P]} M$, on est ramené à montrer que le complexe:

$$C_M^{\cdot} = 0 \to M \to k[R] \otimes_{k[S]} M \xrightarrow{d^1} k[R^2G_2/G_2^p] \otimes_{k[S]} M \xrightarrow{d^2} ...$$

est exact. Le morphisme $S^{gp} \to Q^{gp}/G^p$ est injectif, car si $a \oplus b \mapsto 1$ ($a \in \mathbf{Z}$, $b \in Q^{gp}/G$), on a $a\hat{b}^p = g^p$ ($g \in G$, $\hat{b}$ relève b dans Q^{gp}), d'où $(\hat{b}g^{-1})^p = 1$ dans $Q^{gp}/\mathbf{Z}$, i.e. $\hat{b}g^{-1} \in \mathbf{Z}$ puisque $Q^{gp}/\mathbf{Z}$ est sans p-torsion, soit $a \oplus b \in \mathbf{Z}$ qui s'injecte dans S^{gp} (car $\mathbf{Z} \hookrightarrow Q^{gp}/G$), donc $a \oplus b = 1$. D'autre part, $(R^iG_i/G_i^p)^{gp} \simeq \underbrace{R^{gp} \oplus_{S^{gp}} ... \oplus_{S^{gp}} R^{gp}}_{i\ fois}$ ($i \in \mathbf{N}^*$) et un élément x de $(R^iG_i/G_i^p)^{gp}$ est de la forme suivante: soit il appartient à S^{gp}, soit il existe un unique j-uplet $(\alpha_1, ..., \alpha_j)$ de $\{0, ..., i-1\}$ ($j \leq i$) avec $\alpha_k < \alpha_{k+1}$ et tel que $x = 1 \oplus ... \oplus r_{\alpha_1} \oplus ... \oplus 1 \oplus r_{\alpha_2} \oplus ... \oplus r_{\alpha_j} \oplus ...$ où r_{α_k} est en $\alpha_k^{ième}$ position (en partant de zéro), $r_{\alpha_k} \in R^{gp} \setminus S^{gp}$.
On vérifie facilement que:
1) $S^{gp} \cap R^iG_i/G_i^p = S$
2) si $x = 1 \oplus 1 \oplus ... \oplus r_{\alpha_1} \oplus ... \oplus 1 \oplus r_{\alpha_2} \oplus ... \oplus r_{\alpha_j} \oplus ... \in R^iG_i/G_i^p$ avec $r_{\alpha_k} \in R^{gp}$, alors $r_{\alpha_1} \oplus r_{\alpha_2} \oplus ... \oplus r_{\alpha_j} \in R^jG_j/G_j^p$.
Un élément x de R^iG_i/G_i^p, si on le voit dans $R^{gp} \oplus_{S^{gp}} ... \oplus_{S^{gp}} R^{gp}$, est donc aussi de la forme suivante: soit $x \in S$, soit il existe un unique j-uplet $(\alpha_1, ..., \alpha_j)$ de $\{0, ..., i-1\}$ ($j \leq i$, $\alpha_k < \alpha_{k+1}$) tel que $x = 1 \oplus 1 \oplus ... \oplus r_{\alpha_1} \oplus ... \oplus 1 \oplus r_{\alpha_2} \oplus ... \oplus r_{\alpha_j} \oplus ...$ avec r_{α_k} en $\alpha_k^{ième}$ position, $r_{\alpha_k} \in R^{gp} \setminus S^{gp}$ et $r_{\alpha_1} \oplus r_{\alpha_2} \oplus ... \oplus r_{\alpha_j} \in R^jG_j/G_j^p$. Pour $i \in \mathbf{N}^*$ et $1 \leq j \leq i$, notons $C^i_{\alpha_1,...,\alpha_j}$ le sous-$k[S]$-module de $k[R^iG_i/G_i^p]$ engendré par les éléments de la forme précédente (le j-uplet $(\alpha_1, ..., \alpha_j)$ étant fixé) et C^i_j le sous-$k[S]$-module engendré par les $C^i_{\alpha_1,...,\alpha_j}$ pour tous les j-uplets $(\alpha_1, ..., \alpha_j)$

comme précédemment de $\{0,...,i-1\}$, on a donc $C^i_j = \bigoplus_{(\alpha_1,...,\alpha_j)} C^i_{\alpha_1,...,\alpha_j}$. En notant $C^{\cdot}_{0,M} = 0 \to M \xrightarrow{Id} M \xrightarrow{0} M \xrightarrow{Id} M \xrightarrow{0} ...$ et:

$$C^{\cdot}_{j,M} = 0 \to C^j_j \otimes_{k[S]} M \xrightarrow{d^j} C^{j+1}_j \otimes_{k[S]} M \xrightarrow{d^{j+1}} C^{j+2}_j \otimes_{k[S]} M \xrightarrow{d^{j+1}} ...$$

on obtient $C^{\cdot}_M = \bigoplus_{j\in\mathbf{N}} C^{\cdot}_{j,M}$ et il suffit de montrer que tous les $C^{\cdot}_{j,M}$ $(j \geq 1)$ sont exacts. Soit $s^{i+1}_j : C^{i+1}_j \to C^i_j$ l'application $k[S]$-linéaire qui envoie $C^{i+1}_{\alpha_1,...,\alpha_j}$ sur 0 si $\alpha_1 = 0$, et $C^{i+1}_{\alpha_1,...,\alpha_j}$ sur $C^i_{\alpha_1,...,\alpha_j}$ par $\underbrace{1 \oplus ... \oplus 1}_{\alpha_1\ fois\ 1} \oplus r_{\alpha_1} \oplus ... \mapsto \underbrace{1 \oplus ... \oplus 1}_{\alpha_1-1\ fois\ 1} \oplus r_{\alpha_1} \oplus ...$ si $\alpha_1 \geq 1$. On laisse au lecteur le soin de vérifier que $Id \otimes s^{\cdot}_j$ est une homotopie contractante de $C^{\cdot}_{j,M}$, d'où le résultat. $\square$

Soit maintenant $(Spec\, A, P)$ un log-schéma fin (non vide) sur $\bar{E}_1 = (Spec\, k, L)$ où A est une k-algèbre de type fini, on écrit comme précédemment $P = Q/G$ avec $Q^{gp}/\mathbf{Z}$ sans p-torsion. On plonge $(Spec\ A, P)$ dans un log-schéma log-lisse sur Ξ de la forme $(Spec\ B, Q)$ avec $B = \Sigma \otimes_{k[\mathbf{N}]} k[Q][X_1, ..., X_n]$ (n suffisamment grand). On note $B' = \Sigma \otimes_{k[\mathbf{N}]} k[Q]$, $B^i = \underbrace{B \otimes_\Sigma ... \otimes_\Sigma B}_{i\ fois}$ (resp. B'^i) et, avec les notations de (B.2.1), $(B^i)^e = B^i \otimes_{\mathbf{Z}[Q^i]} \mathbf{Z}[(Q^i)^e]$ (resp. $(B'^i)^e$). Pour toute k-algèbre C et toute C-algèbre D, on note $C \otimes_{(\phi),C} D$ le tensorisé à droite par D en tordant à gauche par le Frobenius de C. On a des applications $f_j : (B^i)^e \to (B^{i+1})^e, (b_0 \otimes ... \otimes b_{i-1}) \otimes [q] \mapsto (b_0 \otimes ... \otimes b_{j-1} \otimes 1 \otimes b_j ... \otimes b_{i-1}) \otimes [e_j(q)]$ (où les e_j sont les applications en (B.2.1)).

Lemme B.2.2 *Soit M un A-module, alors le complexe:*

$$C^{\cdot} = 0 \to \mathcal{O}^{car,\Xi}_1(Spec\ A,P) \otimes_A M \to (B^e \otimes_{(\phi),B^e} A) \otimes_A M \xrightarrow{d^1} ((B^2)^e \otimes_{(\phi),(B^2)^e} A) \otimes_A M \xrightarrow{d^2} ...$$

(où $d^i = \sum_{j=0}^{i} (-1)^i (f_j \otimes Id_A) \otimes Id_M$) est exact.

Preuve. — Posons $\mathcal{L} = \left(\Sigma \otimes_{k[\mathbf{N}]} k[(Q^i)^e]\right) \otimes_{(\phi),\Sigma \otimes_{k[\mathbf{N}]} k[(Q^i)^e]} (k \otimes_{k[\mathbf{N}]} k[P])$, on remarque d'abord que:

$$\begin{aligned} ((B'^i)^e \otimes_{(\phi),(B'^i)^e} A) \otimes_A M &= \mathcal{L} \otimes_{k \otimes_{k[\mathbf{N}]} k[P]} M \\ &= k[(Q^i)^e \oplus_{(\phi),(Q^i)^e} P] \otimes_{k[\mathbf{N} \oplus_{(\phi),\mathbf{N}} P]} (\Sigma \otimes_{(\phi),k} M) \end{aligned}$$

et, puisque:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^{car,\Xi}_1(Spec\ A, P) \otimes_A M &= \left((\Sigma \otimes_{(\phi),\Sigma} A) \otimes_{k[\mathbf{N} \oplus_{(\phi),\mathbf{N}} P]} k[(\mathbf{N} \oplus_{(\phi),\mathbf{N}} P)^e]\right) \otimes_A M \\ &= k[(\mathbf{N} \oplus_{(\phi),\mathbf{N}} P)^e] \otimes_{k[\mathbf{N} \oplus_{(\phi),\mathbf{N}} P]} (\Sigma \otimes_{(\phi),k} M) \end{aligned}$$

le complexe:

$$C'^{\cdot} = 0 \longrightarrow \mathcal{O}_1^{car,\Xi}(Spec\ A,P)\otimes_A M \longrightarrow (B'^e\otimes_{(\phi),B'^e}A)\otimes_A M \xrightarrow{d^1} ((B'^2)^e\otimes_{(\phi),(B'^2)^e}A)\otimes_A M \xrightarrow{d^2} \ldots$$

n'est autre que le complexe en (B.2.1) où M est remplacé par $\Sigma \otimes_{(\phi),k} M$, et est donc exact. Mais $(B^i)^e \otimes_{(\phi),(B^i)^e} A = B^i \otimes_{\left((Id\otimes\phi),B'^i\otimes_{(\phi),B'^i}B^i\right)} \left((B'^i)^e \otimes_{(\phi),(B'^i)^e} A\right)$ où on tord à gauche par le Frobenius relatif: $B'^i \otimes_{(\phi),B'^i} B^i \to B^i$, $x\otimes y \mapsto x.y^p$. Pour $i=1$, on a par exemple:

$$B^e \otimes_{(\phi),B^e} A = \bigoplus_{0\le r\le n} \bigoplus_{\substack{(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)\in\{1,\ldots n\}^r \\ \lambda_i<\lambda_j \ si \ i<j}} \bigoplus_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)\in\{1,\ldots,p-1\}^r} \left(B'^e \otimes_{(\phi),B'^e} A\right).X_{\lambda_1}^{\alpha_1}\ldots X_{\lambda_r}^{\alpha_r},$$

Un examen de la preuve en (B.2.1) montre qu'elle marche encore en remplaçant R^iG_i/G_i^p par $(R^i \oplus (\mathbf{N}^n)^i)G_i/G_i^p$: on peut en déduire l'exactitude de $C^{\cdot}$. $\square$

B.3 Les preuves

Soit Xun log-schéma fin localement de type fini sur $\bar{E}_1$ et $\mathcal{M}_X$ un faisceau quasi-cohérent sur le site zariskien de X (= site zariskien de $\dot{X}$). On étend $\mathcal{M}_X$ au gros site zariskien en posant $\mathcal{M}_Y = \mathcal{M}_X|_Y = \mathcal{O}_Y \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_X} f^{-1}\mathcal{M}_X$ pour tout morphisme localement de type fini $f: Y \to X$ de log-schémas fins et $\mathcal{M}_X$ est alors un faisceau sur $(X)_{SYN}$ (car les morphismes des recouvrements dans $(X)_{SYN}$ sont plats sur les schémas sous-jacents). On va associer à $\mathcal{M}_X$ un faisceau sur $(X/\Xi)_{p-INF}$ (ou $(X/\Xi)_{SYN-p-INF}$): pour tout objet $U \hookrightarrow T$ de $(X/\Xi)_{p-INF}$, on a un morphisme canonique $F: T \to U$ donné dans une carte locale par le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{p} & Q \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{s} & B \end{array}$$

où $s(a) = \hat{a}^p$ si $a \in A$ et $\hat{a}$ relève a dans B. On pose $\mathcal{M}_T = \mathcal{O}_T \otimes_{F^{-1}\mathcal{O}_U} F^{-1}\mathcal{M}_U$ et on vérifie que la collection des $(\mathcal{M}_T)_{(U\hookrightarrow T)\in(X/\Xi)_{p-INF}}$ forme bien un faisceau, noté $\mathcal{M}_{X/\Xi}$, sur $(X/\Xi)_{p-INF}$ (ou $(X/\Xi)_{SYN-p-INF}$). Comme en (2.2.1), si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux faisceaux de modules sur un site $\mathcal{S}$, on écrit $\mathcal{F} \otimes^{\mathcal{S}} \mathcal{G}$ le faisceau associé (sur $\mathcal{S}$) au préfaisceau produit tensoriel.

Proposition B.3.1 *(1)* $\mathcal{O}_X^{car,\Xi} \otimes_{\mathcal{O}_X}^{ET} \mathcal{M}_X$ *est un faisceau sur* $(X)_{SYN}$
(2) pour $i \in \mathbf{N}$*:*

$$\begin{aligned} H^i((X)_{SYN}, \mathcal{O}_X^{car,\Xi} \otimes_{\mathcal{O}_X}^{SYN} \mathcal{M}_X) &= H^i((X)_{ET}, \mathcal{O}_X^{car,\Xi} \otimes_{\mathcal{O}_X}^{ET} \mathcal{M}_X) \\ &= H^i((X/\Xi)_{p-INF}, \mathcal{M}_{X/\Xi}) \end{aligned}$$

(3) si $X = (Spec\ A, P)$ *comme en (B.2.2), alors* $H^i((X)_{ET}, \mathcal{O}_X^{car,\Xi} \otimes_{\mathcal{O}_X}^{ET} \mathcal{M}_X) = 0$ *pour* $i \geq 1$.

Preuve. — (1) Soit $U \overset{i}{\hookrightarrow} T$ un objet de $(X/\Xi)_{p-INF}$ et $U \xrightarrow{F''_U} U'' \xrightarrow{F'_U} U' \xrightarrow{f_U} U$ la factorisation du Frobenius absolu de U (2.2.1), le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{F} & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Xi & \xrightarrow{F_\Xi} & \Xi \end{array}$$

étant commutatif, on a une unique flèche $F' : T \to U'$ et le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{F''_U} & U'' \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow {\scriptstyle F'_U} \\ T & \xrightarrow{F'} & U' \end{array}$$

est commutatif. Puisque i est purement inséparable et F'_U log-étale, il existe un unique morphisme $F'' : T \to U''$ tel que $F'' \circ i = F''_U$ et $F'_U \circ F'' = F'$ ([Ka2],4.11) et le diagramme:

$$\begin{array}{ccccc} T & \xrightarrow{F''} & U'' & \longrightarrow & X'' \\ {\scriptstyle F}\downarrow & & \downarrow {\scriptstyle f_U \circ F'_U} & & \downarrow {\scriptstyle f_X \circ F'_X} \\ U & = & U & \longrightarrow & X \end{array}$$

est commutatif. En posant $\mathcal{M}_{X''} = \mathcal{O}_{X''} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}_X$, on a donc $\mathcal{O}_T \otimes_{\mathcal{O}_{X''}} \mathcal{M}_{X''} = \mathcal{M}_T$, d'où une flèche $\Gamma(X'', \mathcal{M}_{X''}) \longrightarrow \Gamma(T, \mathcal{M}_T)$. Mais, par définition et puisque $(X'')_{ét} = (X)_{ét}$, on a $\mathcal{O}_X^{car,\Xi} \otimes_{\mathcal{O}_X}^{ét} \mathcal{M}_X = \mathcal{O}_{X''} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}_X = \mathcal{M}_{X''}$, d'où une flèche $\Gamma(X, \mathcal{O}_X^{car,\Xi} \otimes_{\mathcal{O}_X}^{ET} \mathcal{M}_X) \longrightarrow \Gamma(T, \mathcal{M}_T)$. Si:

$$\begin{array}{ccc} U_1 & \hookrightarrow & T_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_2 & \hookrightarrow & T_2 \end{array}$$

est un morphisme de $(X/\Xi)_{p-INF}$, le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} T_1 & \longrightarrow & X'' \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_2 & \longrightarrow & X'' \end{array}$$

est commutatif, d'où finalement une flèche:

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X^{car,\Xi} \otimes_{\mathcal{O}_X}^{ET} \mathcal{M}_X) \longrightarrow H^0((X/\Xi)_{p-INF}, \mathcal{M}_{X/\Xi})$$

Soit $\mathcal{M}_1^{p-inf}$ le faisceau sur $(X)_{ET}$ qui à U associe $H^0((U/\Xi)_{p-INF}, \mathcal{M}_{U/\Xi})$, on a donc un morphisme de faisceaux sur $(X)_{ET}$: $\mathcal{O}_X^{car,\Xi} \otimes_{\mathcal{O}_X}^{ET} \mathcal{M}_X \longrightarrow \mathcal{M}_1^{p-inf}$. Mais, lorsque $X = (Spec\ A, P)$, le lemme (B.2.2) entraine $\mathcal{O}_X^{car,\Xi} \otimes_{\mathcal{O}_X}^{ét} \mathcal{M}_X \simeq \mathcal{M}_1^{p-inf} |_{(X)_{ét}}$ (voir B.1) d'où un isomorphisme $\mathcal{O}_X^{car,\Xi} \otimes_{\mathcal{O}_X}^{ET} \mathcal{M}_X \simeq \mathcal{M}_1^{p-inf}$. De plus, on montre exactement comme dans ([Br1],3.1.3), en utilisant la propriété (2.1.1.2,(3)) de relèvement local des morphismes log-syntomiques, que $\mathcal{M}_1^{p-inf}$ est

en fait un faisceau sur $(X)_{SYN}$, d'où (1) et $\mathcal{O}_X^{car,\Xi} \otimes_{\mathcal{O}_X}^{ET} \mathcal{M}_X \simeq \mathcal{O}_X^{car,\Xi} \otimes_{\mathcal{O}_X}^{SYN} \mathcal{M}_X$.
(2) Soit u^p le morphisme de topoï : $(\widetilde{X/\Xi})_{p-INF} \to (\tilde{X})_{ét}$, $R^i u^p_*(\mathcal{M}_{X/\Xi})$ est le faisceau sur $(X)_{ét}$ associé au préfaisceau $U \mapsto H^i((U/\Xi)_{p-INF}, \mathcal{M}_{U/\Xi})$ pour $i \in \mathbf{N}$. Mais pour $U = (Spec\ A, P)$ et $i \geq 1$, on a par (B.2.2) et (B.1) $H^i((U/\Xi)_{p-INF}, \mathcal{M}_{U/\Xi}) = 0$, d'où $R^i u^p_*(\mathcal{M}_{X/\Xi}) = 0$ si $i \geq 1$ et, pour $i \in \mathbf{N}$:

$$H^i((X)_{ét}, u^p_*\mathcal{M}_{X/\Xi}) = H^i((X/\Xi)_{p-INF}, \mathcal{M}_{X/\Xi}) = H^i((X)_{ET}, \mathcal{O}_X^{car,\Xi} \otimes_{\mathcal{O}_X}^{ET} \mathcal{M}_X)$$

puisque, par (1), $u^p_*\mathcal{M}_{X/\Xi} = \mathcal{M}_1^{p-inf}|_{(X)_{ét}} = \mathcal{O}_X^{car,\Xi} \otimes_{\mathcal{O}_X}^{ét} \mathcal{M}_X$. On montre d'autre part comme dans ([Br1],3.2.3) que $H^i((X/\Xi)_{SYN-p-INF}, \mathcal{M}_{X/\Xi}) = H^i((X/\Xi)_{p-INF}, \mathcal{M}_{X/\Xi})$ (car $\mathcal{M}_{X/\Xi}$ est à composantes quasi-cohérentes) et la même preuve que précédemment, en remplaçant $p-INF$ par $SYN-p-INF$ et ET par SYN, donne finalement $H^i((X)_{SYN}, \mathcal{O}_X^{car,\Xi} \otimes_{\mathcal{O}_X}^{SYN} \mathcal{M}_X) = H^i((X)_{ET}, \mathcal{O}_X^{car,\Xi} \otimes_{\mathcal{O}_X}^{ET} \mathcal{M}_X)$.
(3) Clair d'après la preuve de (2). $\square$

On prouve maintenant le théorème (2.2.1.2).

Preuve de (1): En recopiant les arguments de ([BO1],6.13), et en adoptant leurs notations, on montre de même qu'on a une résolution dans $(\widetilde{X/\Upsilon})_{cris}$:

$$0 \to \mathcal{J}_{X/\Upsilon}^{[r]} \to F^r L(\mathcal{O}_Y) \to F^{r-1} L(\omega^1_{Y/\Upsilon}) \to F^{r-2} L(\omega^2_{Y/\Upsilon}) \to ...$$

qui, sur un épaississement $U \hookrightarrow T$ et en un point géométrique $\bar{x}$ de $(U)_{ét} = (T)_{ét}$ s'écrit:

$$0 \to \mathcal{J}_{T,\bar{x}}^{[r]} \to \mathcal{K}^{[r]}(\mathcal{O}_{T,\bar{x}} < T_1, ..., T_n >) \to \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{K}^{[r-1]}(\mathcal{O}_{T,\bar{x}} < T_1, ..., T_n >).dlogt_i \to$$

$$\to \bigoplus_{1 \leq i < j \leq n} \mathcal{K}^{[r-2]}(\mathcal{O}_{T,\bar{x}} < T_1, ..., T_n >).dlogt_i \wedge dlogt_j \to ...$$

(avec $\omega^1_{D,\bar{x}} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{D,\bar{x}} dlogt_i$) où les différentielles sont $\mathcal{O}_{T,\bar{x}}$-linéaires telles que $dT_i^{[l]} = T_i^{[l-1]}.(1+T_i).dlogt_i$ (voir [Ka2],6.5) et où $\mathcal{K}(\mathcal{O}_{T,\bar{x}} < T_1, ..., T_n >) = Ker(\mathcal{O}_{T,\bar{x}} \to \mathcal{O}_{U,\bar{x}}) + (T_i^{[l]})_{\substack{l \geq 1 \\ 1 \leq i \leq n}}$. On a donc encore une résolution:

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}_T^{[r]}/\mathcal{J}_T^{[r+1]} \xrightarrow{d^0} F^r L(\mathcal{O}_Y)/F^{r+1} L(\mathcal{O}_Y) \xrightarrow{d^1} F^{r-1} L(\omega^1_{Y/\Upsilon})/F^r L(\omega^1_{Y/\Upsilon}) \xrightarrow{d^2} ...$$

qui s'écrit localement:

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}_{T,\bar{x}}^{[r]}/\mathcal{J}_{T,\bar{x}}^{[r+1]} \xrightarrow{d^0_{\bar{x}}} \bigoplus_{l=0}^{r} \bigoplus_{\sum l_i = l} \mathcal{J}_{T,\bar{x}}^{[r-l]}/\mathcal{J}_{T,\bar{x}}^{[r+1-l]}.T_1^{[l_1]}...T_n^{[l_n]} \xrightarrow{d^1_{\bar{x}}} ...$$

Le complexe suivant:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{U,\bar{x}}^{car,\Xi} \otimes_{\mathcal{O}_{U,\bar{x}}} \frac{\mathcal{J}_{T,\bar{x}}^{[r]}}{\mathcal{J}_{T,\bar{x}}^{[r+1]}} \overset{Id\otimes d_{\bar{x}}^0}{\longrightarrow} \bigoplus_{l=0}^{r} \bigoplus_{\sum l_i = l} \Big(\mathcal{O}_{U,\bar{x}}^{car,\Xi} \otimes_{\mathcal{O}_{U,\bar{x}}} \frac{\mathcal{J}_{T,\bar{x}}^{[r-l]}}{\mathcal{J}_{T,\bar{x}}^{[r+1-l]}}\Big).T_1^{[l_1]}...T_n^{[l_n]} \overset{Id\otimes d_{\bar{x}}^1}{\longrightarrow} ...$$

est donc encore exact, d'où une résolution:

$$0 \to \mathcal{O}_X^{car,\Xi} \otimes_{\mathcal{O}_X}^{cris} \frac{\mathcal{J}_{X/\Upsilon}^{[r]}}{\mathcal{J}_{X/\Upsilon}^{[r+1]}} \to \mathcal{O}_X^{car,\Xi} \otimes_{\mathcal{O}_X}^{cris} \frac{F^r L(\mathcal{O}_Y)}{F^{r+1} L(\mathcal{O}_Y)} \to \mathcal{O}_X^{car,\Xi} \otimes_{\mathcal{O}_X}^{cris} \frac{F^{r-1} L(\mathcal{O}_Y)}{F^r L(\mathcal{O}_Y)} \to ...$$

Mais, avec les notations de ([BO1],6.10), on montre comme dans ([BO1],7.2) qu'il existe des faisceaux, notés ici $\mathcal{F}_{l,q}$, sur $(X/\Upsilon)_{cris}|_{\tilde{Y}}$ tels que $F^l L(\omega_{Y/\Upsilon}^q) = j_{\tilde{Y}*} \mathcal{F}_{l,q}$ et $u_* F^l L(\omega_{Y/\Upsilon}^q) = \mathcal{F}_{l,q}|_{(D)_{ét}} = \mathcal{J}_D^{[l]} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega_{Y/\Upsilon}^q$ où $j_{\tilde{Y}}$ est un morphisme de topoï : $(\widetilde{X/\Upsilon})_{cris}|_{\tilde{Y}} \to (\widetilde{X/\Upsilon})_{cris}$ tel que $j_{\tilde{Y}*}$ est exact. On a donc $F^l L(\omega_{Y/\Upsilon}^q)/F^{l+1} L(\omega_{Y/\Upsilon}^q) = j_{\tilde{Y}*}(\mathcal{F}_{l,q}/\mathcal{F}_{l+1,q})$, d'autre part, il est trivial que:

$$\mathcal{O}_X^{car,\Xi} \otimes_{\mathcal{O}_X}^{cris} j_{\tilde{Y}*}(\mathcal{F}_{l,q}/\mathcal{F}_{l+1,q}) = j_{\tilde{Y}*}\Big(\mathcal{O}_X^{car,\Xi}|_{\tilde{Y}} \otimes_{\mathcal{O}_X|_{\tilde{Y}}}^{cris} (\mathcal{F}_{l,q}/\mathcal{F}_{l+1,q})\Big)$$

et on déduit comme dans ([BO1],5.27) que:

$$R^i u_*\Big(\mathcal{O}_X^{car,\Xi} \otimes_{\mathcal{O}_X}^{CRIS} F^l L({\omega^q}_{Y/\Upsilon})/F^{l+1} L({\omega^q}_{Y/\Upsilon})\Big) = 0$$

pour $i \geq 1$, et, comme dans ([BO1],7.2), que:

$$\begin{aligned} u_*\Big(\mathcal{O}_X^{car,\Xi} \otimes_{\mathcal{O}_X}^{CRIS} F^l L({\omega^q}_{Y/\Upsilon})/F^{l+1} L({\omega^q}_{Y/\Upsilon})\Big) &= \mathcal{O}_X^{car,\Xi} \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{J}_D^{[l]}/\mathcal{J}_D^{[l+1]}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} {\omega^q}_{Y/\Upsilon} \\ &= \mathcal{O}_{X''} \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{J}_D^{[l]}/\mathcal{J}_D^{[l+1]}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} {\omega^q}_{Y/\Upsilon} \end{aligned}$$

d'où (1).

Preuve de (2): Soit $U \overset{i}{\hookrightarrow} T$ un objet de $(X/\Upsilon)_{CRIS}$ et $\mathcal{M}_U = \mathcal{O}_U \otimes_{i^{-1}\mathcal{O}_T} i^{-1}(\mathcal{J}_T^{[r]}/\mathcal{J}_T^{[r+1]})$ vu, comme précédemment, sur $(U)_{SYN}$ par extension des scalaires. Soit i_{ET*} (resp. i_{SYN*}, resp. i_{syn*}) le foncteur sur les catégories de faisceaux: $(\tilde{U})_{ET} \to (\tilde{T})_{ET}$ (resp. avec les gros et petit sites log-syntomiques), on a:

$$i_{SYN*}(\mathcal{O}_U^{car,\Xi} \otimes_{\mathcal{O}_U}^{SYN} \mathcal{M}_U) \overset{(1)}{=} i_{ET*}(\mathcal{O}_U^{car,\Xi} \otimes_{\mathcal{O}_U}^{ET} \mathcal{M}_U) = i_{ET*}\mathcal{O}_U^{car,\Xi} \otimes_{i_{ET*}\mathcal{O}_U}^{ET} i_{ET*}\mathcal{M}_U$$

donc $i_{ET*}\mathcal{O}_U^{car,\Xi} \otimes_{i_{ET*}\mathcal{O}_U}^{ET} i_{ET*}\mathcal{M}_U$ est un faisceau sur $(T)_{SYN}$ d'où:

$$i_{SYN*}\mathcal{O}_U^{car,\Xi} \otimes_{i_{SYN*}\mathcal{O}_U}^{SYN} i_{SYN*}\mathcal{M}_U \simeq i_{ET*}\mathcal{O}_U^{car,\Xi} \otimes_{i_{ET*}\mathcal{O}_U}^{ET} i_{ET*}\mathcal{M}_U$$

Comme $(i_{SYN*}\mathcal{M}_U)|_{(T)_{syn}} = \mathcal{J}_T^{[r]}/\mathcal{J}_T^{[r+1]}$ (par platitude des morphismes log-syntomiques sur les schémas sous-jacents), on en déduit facilement $v_*(\mathcal{O}_X^{car,\Xi} \otimes_{\mathcal{O}_X}^{SYN-CRIS} (\mathcal{J}_{X/\Upsilon}^{[r]}/\mathcal{J}_{X/\Upsilon}^{[r+1]})) \simeq \mathcal{O}_X^{car,\Xi} \otimes_{\mathcal{O}_X}^{CRIS} (\mathcal{J}_{X/\Upsilon}^{[r]}/\mathcal{J}_{X/\Upsilon}^{[r+1]})$. En projetant les égalités ci-dessus sur le petit site log-syntomique, on a $i_{syn*}\mathcal{O}_U^{car,\Xi}\otimes^{syn}_{i_{syn*}\mathcal{O}_U} i_{syn*}\mathcal{M}_U\simeq i_{syn*}(\mathcal{O}_U^{car,\Xi}\otimes^{syn}_{\mathcal{O}_U}\mathcal{M}_U)$ d'où, puisque i_{syn*} est exact:

$$\begin{aligned} H^i((T)_{syn}, i_{syn*}\mathcal{O}_U^{car,\Xi}\otimes^{syn}_{i_{syn*}\mathcal{O}_U}(\mathcal{J}_T^{[r]}/\mathcal{J}_T^{[r+1]})) &= H^i((T)_{syn}, i_{syn*}(\mathcal{O}_U^{car,\Xi}\otimes^{syn}_{\mathcal{O}_U}\mathcal{M}_U)) \\ &= H^i((U)_{syn}, \mathcal{O}_U^{car,\Xi}\otimes^{syn}_{\mathcal{O}_U}\mathcal{M}_U) \\ &= H^i((U)_{SYN}, \mathcal{O}_U^{car,\Xi}\otimes^{SYN}_{\mathcal{O}_U}\mathcal{M}_U) \end{aligned}$$

et donc $H^i((T)_{syn}, i_{syn*}\mathcal{O}_U^{car,\Xi}\otimes^{syn}_{i_{syn*}\mathcal{O}_U}(\mathcal{J}_T^{[r]}/\mathcal{J}_T^{[r+1]}))=0$ pour $i\geq 1$ et $U=(Spec\ A,P)$ par (B.3.1,(3)). Mais on montre comme dans ([Br1],3.2.2) que $R^iv_*(\mathcal{O}_X^{car,\Xi}\otimes^{SYN-CRIS}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{J}_{X/\Upsilon}^{[r]}/\mathcal{J}_{X/\Upsilon}^{[r+1]}))$ est le faisceau sur $(X/\Upsilon)_{CRIS}$ associé au préfaisceau:

$$\begin{aligned} (U\hookrightarrow T) &\mapsto H^i((X/\Upsilon)_{SYN-CRIS}|_{\tilde{T}}, \mathcal{O}_X^{car,\Xi}\otimes^{SYN-CRIS}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{J}_{X/\Upsilon}^{[r]}/\mathcal{J}_{X/\Upsilon}^{[r+1]})) \\ &= H^i((T)_{syn}, i_{syn*}\mathcal{O}_U^{car,\Xi}\otimes^{syn}_{i_{syn*}\mathcal{O}_U}(\mathcal{J}_T^{[r]}/\mathcal{J}_T^{[r+1]})) \end{aligned}$$

donc $R^iv_*(\mathcal{O}_X^{car,\Xi}\otimes^{SYN-CRIS}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{J}_{X/\Upsilon}^{[r]}/\mathcal{J}_{X/\Upsilon}^{[r+1]}))=0$ pour $i\geq 1$, ce qui fournit l'isomorphisme (2).
Preuve de (3): Par (2), $R^iw_*(\mathcal{O}_X^{car,\Xi}\otimes^{SYN-CRIS}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{J}_{X/\Upsilon}^{[r]}/\mathcal{J}_{X/\Upsilon}^{[r+1]}))$ est le faisceau sur $(X)_{SYN}$ associé au préfaisceau $U\mapsto H^i((U/\Upsilon)_{CRIS}, \mathcal{O}_U^{car,\Xi}\otimes^{CRIS}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{J}_{U/\Upsilon}^{[r]}/\mathcal{J}_{U/\Upsilon}^{[r+1]}))$. Par (1), la cohomologie de $\mathcal{O}_U^{car,\Xi}\otimes^{CRIS}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{J}_{U/\Upsilon}^{[r]}/\mathcal{J}_{U/\Upsilon}^{[r+1]})$ se calcule (localement) par un complexe de de Rham (logarithmique) et la même preuve que dans ([Br1],3.2.3) montre qu'on peut annuler les différentielles par des recouvrements log-syntomiques, d'où $R^iw_*(\mathcal{O}_X^{car,\Xi}\otimes^{SYN-CRIS}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{J}_{X/\Upsilon}^{[r]}/\mathcal{J}_{X/\Upsilon}^{[r+1]}))=0$ pour $i\geq 1$. Enfin, avec les notations de (2.1.2.1), on a facilement, en posant $X^i=(Spec\ A^i, Q^i/G)$ et pour $\Upsilon=E_1$:

$$\varinjlim_i H^0((X^i/E_1)_{CRIS}, \mathcal{O}_{X^i}^{car,\Xi}\otimes^{CRIS}_{\mathcal{O}_{X^i}}\frac{\mathcal{J}_{X^i/E_1}^{[r]}}{\mathcal{J}_{X^i/E_1}^{[r+1]}})\simeq\left(\varinjlim_i\mathcal{O}_1^{car,\Xi}(X^i)\right)\otimes_{A^\infty}\frac{\mathcal{J}^{[r]}}{\mathcal{J}^{[r+1]}}$$

(voir Appendice D) d'où on déduit $w_*(\mathcal{O}_X^{car,\Xi}\otimes^{SYN-CRIS}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{J}_{X/E_1}^{[r]}/\mathcal{J}_{X/E_1}^{[r+1]}))=\mathcal{O}_1^{car,\Xi}\otimes^{SYN}_{\mathcal{O}_1}(\mathcal{J}_1^{[r]}/\mathcal{J}_1^{[r+1]})$. Les cas $\Upsilon=\tilde{E}_1$ et $\Upsilon=\bar{E}_1$ se traitent de même. $\square$

C Quelques compatibilités

Cet appendice fait le pont entre l'approche "topologie étale" de Kato et Tsuji ([Ka1], [Ka3], [Ts2]) et l'approche "topologie syntomique" de Fontaine-Messing ([FM]) et de l'auteur.

C.1 Compatibilité des ϕ_r, $0 \leq r \leq p-1$

Soit X un log-schéma fin log-syntomique sur $Spec\ W$. On suppose qu'on a une immersion fermée $X \hookrightarrow Y$ où Y est log-lisse sur $Spec\ W$ et muni d'un relèvement F_Y du Frobenius de $Y_1 = Y \times_{Spec\ W} Spec\ k$. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note $X_n = X \times_{Spec\ W} Spec\ W_n$, $Y_n = Y \times_{Spec\ W} Spec\ W_n$, $D_n = D_{X_n}(Y_n)$ l'enveloppe aux puissances divisées de X_n dans Y_n et $\phi : \mathcal{O}_{D_n} \to \mathcal{O}_{D_n}$ le relèvement du Frobenius. Si $\mathcal{J}_{D_n} = Ker(\mathcal{O}_{D_n} \to \mathcal{O}_{X_n})$, les faisceaux $\mathcal{J}_{D_n}^{[s]} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_n}} \omega^{r-s}_{Y_n/Spec\ W_n}$ sont plats sur $Spec\ W_n$ et tels que, pour $0 \leq r \leq p-1$, $\phi(\mathcal{J}_{D_n}^{[s]} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_n}} \omega^{r-s}_{Y_n/Spec\ W_n}) \subset p^r \mathcal{O}_{D_n} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_n}} \omega^{r-s}_{Y_n/Spec\ W_n}$, ce qui permet comme d'habitude de définir ($0 \leq r \leq p-1$):

$$\phi_r^K = \phi/p^r : \mathcal{J}_{D_n}^{[s]} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_n}} \omega^{r-s}_{Y_n/Spec\ W_n} \to \mathcal{O}_{D_n} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_n}} \omega^{r-s}_{Y_n/Spec\ W_n}$$

(en "passant par" $\mathcal{J}_{D_{n+r}}^{[s]} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_{n+r}}} \omega^{r-s}_{Y_{n+r}/Spec\ W_{n+r}}$). Soit α le morphisme de topoï $(\widetilde{X_{n+r}})_{syn} \to (\widetilde{X_{n+r}})_{ét}$, on a donc des morphismes dans la catégorie dérivée: $R\alpha_* \mathcal{J}_n^{cris,[r]} \xrightarrow{\phi_r^K} R\alpha_* \mathcal{O}_n^{cris}$. Si Y n'existe pas globalement, Kato définit encore un morphisme $\phi_r^K : R\alpha_* \mathcal{J}_n^{cris,[r]} \to R\alpha_* \mathcal{O}_n^{cris}$ par un procédé de Čech (voir section suivante) et montre qu'il est indépendant des plongements locaux et des relèvements de Frobenius ([Ka3],5). Notons $\phi_r : R\alpha_* \mathcal{J}_n^{cris,[r]} \to R\alpha_* \mathcal{O}_n^{cris}$ le morphisme déduit de $\phi_r : \mathcal{J}_n^{cris,[r]} \to \mathcal{O}_n^{cris}$ (3.1.4).

Proposition C.1.1 *Avec les notations précédentes, $\phi_r = \phi_r^K$.*

Preuve. — C'est un problème local, et on peut donc supposer $X \hookrightarrow Y$ avec X de la forme (2.1.1):

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{\mathbf{N}x_1 \oplus ... \oplus \mathbf{N}x_r}{G} & \rightarrow & \dfrac{W[(\mathbf{N}x_1 \oplus ... \oplus \mathbf{N}x_r)G][X_1, ..., X_s]}{(f_1, ..., f_t)} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \{1\} & \longrightarrow & W \end{array}$$

avec $(f_1, ..., f_t)$ transversalement régulière relativement à W, et Y de la forme:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{N}x_1 \oplus ... \oplus \mathbf{N}x_r)G & \rightarrow & W[(\mathbf{N}x_1 \oplus ... \oplus \mathbf{N}x_r)G][X_1, ..., X_s] \\ \uparrow & & \uparrow \\ \{1\} & \longrightarrow & W \end{array}$$

avec $F_Y(x_i) = x_i^p$ et $F_Y(X_i) = X_i^p$. Pour $j \in \mathbf{N}$, notons $\omega^j_{D_n} = \mathcal{O}_{D_n} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_n}} \omega^j_{Y_n/Spec\ W_n}$, on définit comme dans ([BO1],6.9) ou ([Ka2],6.9) des faisceaux de $\mathcal{O}_{X_n/Spec\ W_n}$-modules à composantes quasi-cohérentes $L\omega^j_{D_n}$ sur $(X_n/Spec\ W_n)_{CRIS}$, acycliques pour la projection sur $(X_1)_{ét} = (D_n)_{ét}$ et tels que:

$$H^i((X_1/Spec\ W_n)_{CRIS}, L\omega^j_{D_n}) \simeq H^i((X_n/Spec\ W_n)_{CRIS}, L\omega^j_{D_n})$$

(ce sont même des cristaux). Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur $(X_1/Spec\ W_n)_{CRIS}$ et $F^*_{cris}\mathcal{F}$ le faisceau (sur $(X_1/Spec\ W_n)_{CRIS}$) qui à l'objet:

$$\begin{array}{ccc} U & \hookrightarrow & T \\ {}_g\downarrow & & | \\ X_1 & & \vdots \\ \downarrow & & \downarrow \\ Spec\ W_n & = & Spec\ W_n \end{array}$$

associe $\mathcal{F}\Big((U \hookrightarrow T)_F\Big)$ où $(U \hookrightarrow T)_F$ est l'objet:

$$\begin{array}{ccc} U & \hookrightarrow & T \\ {}_{F_{X_1}\circ g}\downarrow & & \downarrow \\ X_1 & & Spec\ W_n \\ \downarrow & & \downarrow{}_\phi \\ Spec\ W_n & = & Spec\ W_n \end{array}$$

(F_{X_1} est le Frobenius absolu de X_1). On montre facilement que le relèvement du Frobenius sur $\omega^j_{D_n}$ induit des morphismes de faisceaux sur $(X_1/Spec\ W_n)_{CRIS}$ $F : F^*_{cris}(L\omega^j_{D_n}) \to L\omega^j_{D_n}$ qui donnent des applications ϕ:

$$H^0((X_1/Spec\ W_n)_{CRIS}, L\omega^j_{D_n}) \to H^0((X_1/Spec\ W_n)_{CRIS}, F^*_{cris}(L\omega^j_{D_n})) \to H^0((X_1/Spec\ W_n)_{CRIS}, L\omega^j_{D_n})$$

Soient $(X_n/Spec\ W_n)_{syn-cris}$ le *petit* site syntomique cristallin et w la projection: $(X_n/Spec\ W_n)^{\sim}_{syn-cris} \to (\tilde{X}_n)_{syn}$, puisque:

$$\begin{aligned} H^0((X_1/Spec\ W_n)_{CRIS}, L\omega^j_{D_n}) &= H^0((X_n/Spec\ W_n)_{CRIS}, L\omega^j_{D_n}) \\ &= H^0((X_n/Spec\ W_n)_{SYN-CRIS}, L\omega^j_{D_n}) \\ &= H^0((X_n/Spec\ W_n)_{syn-cris}, L\omega^j_{D_n}) \end{aligned}$$

on a finalement des morphismes de faisceaux sur $(X_n)_{syn}$ $\phi : w_*L\omega^j_{D_n} \to w_*L\omega^j_{D_n}$ (qui redonnent le relèvement du Frobenius par projection sur $(X_n)_{ét}$). Soient $F^rL\mathcal{O}_{D_n} = Ker(L\mathcal{O}_{D_n} \to \mathcal{O}_{X_n})^{[r]}$ et $F^rL\omega^j_{D_n} = F^rL\mathcal{O}_{D_n}.L\omega^j_{D_n}$ $(r, j \in \mathbf{N})$, nous allons montrer:
(1) $Rw_*F^rL\omega^j_{D_n} \simeq w_*F^rL\omega^j_{D_n}$
(2) les faisceaux $w_*F^rL\omega^j_{D_n}$ sont plats sur W_n
(3) $\phi(w_*F^sL\omega^{r-s}_{D_n}) \subset p^rw_*L\omega^{r-s}_{D_n}$ pour $0 \leq r \leq p-1$.
Pour $j \in \mathbf{N}$, il existe $d_j \in \mathbf{N}$ tel que $\omega^j_{D_n} \simeq (\mathcal{O}_{D_n})^{d_j}$ (en tant que $\mathcal{O}_{D_n}$-modules), $F^rL\omega^j_{D_n} \simeq (F^rL\mathcal{O}_{D_n})^{d_j}$ et on a $F\Big(F^*_{cris}(L\omega^j_{D_n})\Big) \subset p^jL\omega^j_{D_n}$ et $\phi(w_*L\omega^j_{D_n}) \subset p^jw_*L\omega^j_{D_n}$: il suffit donc de montrer (1), (2) et (3) avec $F^rL\mathcal{O}_{D_n}$.
(1) La méthode qui suit est inspirée de ([ES],1.6). Soit $\mathcal{M}$ un faisceau sur $(X_n/Spec\ W_n)_{syn-cris}$ à composantes quasi-cohérentes et notons $Q^m = \mathbf{N}x_1^{p^{-m}} \oplus \ldots \oplus \mathbf{N}x_r^{p^{-m}}$, $B^m = W_n[Q^mG][X_1^{p^{-m}}, \ldots, X_s^{p^{-m}}]$, $A^m = B^m/(f_1, \ldots, f_t)$, $Y^m_n =$

$(Spec\ B^m, Q^m G)$, $X_n^m = (Spec\ A^m, Q^m/G)$ et, pour $k \in \mathbf{N}$, $D_n^m(k)$ l'enveloppe aux puissances divisées de X_n^m dans $\underbrace{Y_n^m \times_{Spec\ W_n} \dots \times_{Spec\ W_n} Y_n^m}_{k\ fois}$ ($Y_n^0 = Y_n$, $X_n^0 = X_n$, $D_n^0 = D_n$). Un calcul explicite montre que $D_n^m(k+1) = D_n^m(k) \otimes_{D_n^m(0)} D_n^m(1)$, $\mathcal{O}_{D_n^m(1)} = \mathcal{O}_{D_n^m(0)} < T_1, ..., T_{r+s} >$ et que le morphisme de log-schémas $D_n^m(1) \to D_n^0(1)$ se factorise par $D_n^m(1) \xrightarrow{p_1} D_n^m(0) \to D_n^0(0) \xrightarrow{s} D_n^0(1)$ pour $m \geq n$ (s provient de l'immersion diagonale $Y_n \hookrightarrow Y_n \times_{Spec\ W_n} Y_n$ et p_1 de la projection sur la première composante $Y_n^m \times_{Spec\ W_n} Y_n^m \to Y_n^m$). Pour $k \in \mathbf{N}$ et $m \geq n$, on en déduit que le morphisme de log-schémas $D_n^m(k) \to D_n^0(k)$ se factorise aussi par $D_n^m(k) \xrightarrow{p_1} D_n^m(0) \to D_n^0(0) \xrightarrow{s} D_n^0(k)$ et que le morphisme de complexes de Čech:

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathcal{M}^{0,\cdot} & = & \mathcal{M}_{D_n^0(0)} & \to & \mathcal{M}_{D_n^0(1)} & \to & \mathcal{M}_{D_n^0(2)} & \to & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathcal{M}^{m,\cdot} & = & \mathcal{M}_{D_n^m(0)} & \to & \mathcal{M}_{D_n^m(1)} & \to & \mathcal{M}_{D_n^m(2)} & \to & \dots \end{array}$$

se factorise par le complexe $\mathcal{M}_{D_n} \xrightarrow{0} \mathcal{M}_{D_n} \xrightarrow{Id} \mathcal{M}_{D_n} \xrightarrow{0} \dots$ Mais pour $i, m \in \mathbf{N}$:

$$H^i((X_n^m/Spec\ W_n)_{syn-cris}, \mathcal{M}) = H^i((X_n^m/Spec\ W_n)_{cris}, \mathcal{M}) = H^i(\mathcal{M}^{m,\cdot})$$

(pour la deuxième égalité, la preuve est la même que dans ([Be],V.1.2)) et la flèche $H^i((X_n/Spec\ W_n)_{syn-cris}, \mathcal{M}) \to H^i((X_n^m/Spec\ W_n)_{syn-cris}, \mathcal{M})$ est donc nulle pour $m \geq n$ et $i \geq 1$. Le même calcul étant valable (localement) en remplaçant X_n par un log-schéma log-syntomique sur X_n, on en déduit $Rw_*\mathcal{M} \simeq w_*\mathcal{M}$ d'où (1) en faisant $\mathcal{M} = F^r L\mathcal{O}_{D_n}$.
(2) Du calcul de Čech, on déduit facilement $\varinjlim_m H^0((X_n^m/Spec\ W_n)_{cris}, \mathcal{M}) = \varinjlim_m \mathcal{M}_{D_n^m(0)}$, en particulier:

$$\begin{aligned} \varinjlim_m H^0((X_n^m/Spec\ W_n)_{cris}, L\mathcal{O}_{D_n}) &\simeq \mathcal{O}_{D_n^\infty(0)} \otimes_{\mathcal{O}_{D_n}} \mathcal{O}_{D_n(1)} \\ &\simeq (W_n[Q^\infty G][X_1^{p^{-\infty}}, ..., X_r^{p^{-\infty}}])^{DP} < T_1, ..., T_{r+s} > \\ &\simeq \mathcal{O}_n^{cris}(A^\infty, P^\infty) < T_1, ..., T_{r+s} > \end{aligned}$$

et:

$$\varinjlim_m H^0((X_n^m/Spec\ W_n)_{cris}, F^r L\mathcal{O}_{D_n}) \simeq \bigoplus_{(m_1,...,m_{r+s}) \in \mathbf{N}^{r+s}} \mathcal{J}_n^{cris,[r-\sum m_i]}(A^\infty, P^\infty).\gamma_{m_1}(T_1)...\gamma_{m_{r+s}}(T_{r+s})$$

(avec des notations similaires à (2.2.2.1)), ce qui montre la platitude (c.f. début de 3.1.4).
(3) Evident puisque $\phi\Big(\mathcal{J}_n^{cris}(A^\infty, P^\infty)\Big) \subset p\mathcal{O}_n^{cris}(A^\infty, P^\infty)$ et $\phi(T_j) \in p\mathcal{O}_{D_n(1)}$.
Comme pour $\mathcal{J}_n^{cris,[r]}$, on en déduit des morphismes de faisceaux sur $(\widetilde{X_{n+r}})_{syn}$ pour $0 \leq r \leq p-1$ $\phi_r = \phi/p^r : w_* F^s L\omega_{D_n}^{r-s} \to w_* L\omega_{D_n}^{r-s}$ (les faisceaux $w_* F^s L\omega_{D_n}^{r-s}$

sont vus sur $(X_{n+r})_{syn}$ par le foncteur exact $i_* : (\widetilde{X_n})_{syn} \to (\widetilde{X_{n+r}})_{syn})$. On a donc un diagramme commutatif de faisceaux sur $(X_{n+r})_{syn}$:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathcal{J}_n^{cris,[r]} & \to & w_*F^rL\mathcal{O}_{D_n} & \to & w_*F^{r-1}L\omega^1_{D_n} & \to & \dots \\ & & \phi_r\downarrow & & \phi_r\downarrow & & \phi_r\downarrow & & \\ 0 & \to & \mathcal{O}_n^{cris} & \to & w_*L\mathcal{O}_{D_n} & \to & w_*L\omega^1_{D_n} & \to & \dots \end{array}$$

Mais le complexe $F^rL\mathcal{O}_{D_n} \to F^{r-1}L\omega^1_{D_n} \to F^{r-2}L\omega^2_{D_n} \to \dots$ est une résolution de $\mathcal{J}^{[r]}_{X_n/Spec\ W_n}$ par des faisceaux acycliques pour la projection sur $(X_n)_{ét}$ (([Ka2],6.9), la preuve est la même que ([BO1],6.12) à partir de ([Ka2],6.5)). Par (1) et les égalités $Rw_*\mathcal{J}^{[r]}_{X_n/Spec\ W_n} \simeq w_*\mathcal{J}^{[r]}_{X_n/Spec\ W_n} = \mathcal{J}_n^{cris,[r]}$, le complexe $w_*F^rL\mathcal{O}_{D_n} \to w_*F^{r-1}L\omega^1_{D_n} \to w_*F^{r-2}L\omega^2_{D_n} \to \dots$ est aussi une résolution acyclique de $\mathcal{J}_n^{cris,[r]}$. Sachant que $\alpha_*w_*F^sL\omega^{r-s}_{D_n} = \mathcal{J}^{[s]}_{D_n} \otimes_{\mathcal{O}_{D_n}} \omega^{r-s}_{D_n}$ et que le Frobenius sur $w_*L\omega^{r-s}_{D_n}$ redonne le relèvement du Frobenius sur $\omega^{r-s}_{D_n}$, on laisse au lecteur le soin de montrer qu'après projection sur $(X_n)_{ét}$: $\phi_r = \phi_r^K$. $\square$

C.2 Sur les complexes $s^{log}_{n,X}(r)$ et $s^{log}_{n,\bar{X}}(r)$

C.2.1 Preuve de la proposition (3.2.4.2)

Rappelons la définition de Kato des complexes $s^{log}_{n,X}(r)$ (dans la catégorie dérivée): on choisit d'abord un système de plongements ("embedding system") $(X^i \hookrightarrow Z^i)_{i\in\mathbf{N}}$ où X^i et Z^i sont des log-schémas simpliciaux, X^i est un hyper-recouvrement étale de X et Z^i est log-lisse sur *Spec W* ([HK],2.18). Soient $X^i_n = X^i \times_{Spec\ W} Spec\ W_n$, $Z^i_n = Z^i \times_{Spec\ W} Spec\ W_n$ et supposons que $Z^\cdot$ est muni d'un système de relèvements du Frobenius de $Z_1^\cdot$. Soit D^i_n l'enveloppe aux puissances divisées de X^i_n dans Z^i_n et:

$$\phi : \mathcal{O}_{D^i_n} \otimes_{\mathcal{O}_{Z^i_n}} \omega^j_{Z^i_n/Spec\ W_n} \longrightarrow \mathcal{O}_{D^i_n} \otimes_{\mathcal{O}_{Z^i_n}} \omega^j_{Z^i_n/Spec\ W_n}$$

le relèvement du Frobenius. Notons $\theta_{ét} : (\widetilde{X^\cdot_{n+r}})_{ét} \to (\widetilde{X_{n+r}})_{ét}$ et $\theta_{syn} : (\widetilde{X^\cdot_{n+r}})_{syn} \to (\widetilde{X_{n+r}})_{syn}$ les morphismes naturels de topoï où $(\widetilde{X^\cdot_{n+r}})_{ét}$ (resp. $(\widetilde{X^\cdot_{n+r}})_{syn}$) est le topos associé à l'hyper-recouvrement $(X^i_{n+r})_{i\in\mathbf{N}}$. On vérifie qu'on a un diagramme commutatif de topoï :

$$\begin{array}{ccc} (\widetilde{X^\cdot_{n+r}})_{syn} & \xrightarrow{\alpha^\cdot} & (\widetilde{X^\cdot_{n+r}})_{ét} \\ \theta_{syn}\downarrow & & \downarrow\theta_{ét} \\ (\widetilde{X_{n+r}})_{syn} & \xrightarrow{\alpha} & (\widetilde{X_{n+r}})_{ét} \end{array}$$

Les arguments classiques de platitude fournissent pour $0 \le r \le p-1$, des morphismes:

$$\phi_r = \phi/p^r : \mathcal{J}^{[r-.]}_{D^i_n} \otimes_{\mathcal{O}_{Z^i_n}} \omega^\cdot_{Z^i_n/Spec\ W_n} \longrightarrow \mathcal{O}_{D^i_n} \otimes_{\mathcal{O}_{Z^i_n}} \omega^\cdot_{Z^i_n/Spec\ W_n}$$

et on note $s^{log}_{n,X^\cdot,Z^\cdot}(r)$ le complexe de faisceaux sur $(X^\cdot_{n+r})_{ét}$ qui sur chaque X^i_{n+r} donne le complexe:

$$s^{log}_{n,X^i,Z^i}(r) = c\hat{o}ne(\mathcal{J}^{[r-.]}_{D^i_n} \otimes_{\mathcal{O}_{Z^i_n}} \omega^\cdot_{Z^i_n/Spec\ W_n} \xrightarrow{\phi_r - Id} \mathcal{O}_{D^i_n} \otimes_{\mathcal{O}_{Z^i_n}} \omega^\cdot_{Z^i_n/Spec\ W_n})[-1]$$

et $s^{log}_{n,X}(r) = R\theta_{ét*}(s^{log}_{n,X^\cdot,Z^\cdot}(r))$. En utilisant les résolutions en (C.1.1) des faisceaux $\mathcal{J}^{cris,[r]}_n|_{X^i_{n+r}}$ et $\mathcal{O}^{cris}_n|_{X^i_{n+r}}$, on laisse au lecteur le soin de montrer qu'on a des isomorphismes dans la catégorie dérivée $(R\alpha_*\mathcal{S}^r_n)|_{X^i_{n+r}} \simeq s^{log}_{n,X^i,Z^i}(r)$. De $\theta_{ét*}\alpha^\cdot_* = \alpha_*\theta_{syn*}$, on déduit d'une part:

$$R(\theta_{ét*}\alpha^\cdot_*)(\theta^*_{syn}\mathcal{S}^r_n) = R\theta_{ét*}\Big(R\alpha^\cdot_*(\theta^*_{syn}\mathcal{S}^r_n)\Big) \simeq R\theta_{ét*}(s^{log}_{n,X^\cdot,Z^\cdot}(r)) = s^{log}_{n,X}(r)$$

d'autre part:

$$R(\theta_{ét*}\alpha^\cdot_*)(\theta^*_{syn}\mathcal{S}^r_n) = R(\alpha_*\theta_{syn*})(\theta^*_{syn}\mathcal{S}^r_n) = R\alpha_*\Big(R\theta_{syn*}(\theta^*_{syn}\mathcal{S}^r_n)\Big) \simeq R\alpha_*\mathcal{S}^r_n$$

d'où le résultat.

C.2.2 Preuve du lemme (3.2.4.3)

Comme X est séparé, en prenant X^i et Z^i affines, on montre facilement ([Ts3],3.2) $R^q\theta_{i*}(s^{log,j}_{n,X^i,Z^i}(r)) = 0$ pour $q \geq 1$ et $(i,j) \in \mathbf{N}^2$ (où $\theta_i : (\widetilde{X^i_n})_{ét} \to (\widetilde{X_n})_{ét})$, donc $s^{log}_{n,X}(r)$ est isomorphe au complexe simple, noté $s^{log}_{n,X,Z}(r)$, associé au complexe double:

$$\theta_{0*}s^{log}_{n,X^0,Z^0}(r) \longrightarrow \theta_{1*}s^{log}_{n,X^1,Z^1}(r) \longrightarrow \theta_{2*}s^{log}_{n,X^2,Z^2}(r) \longrightarrow \dots$$

Pour L extension finie de K_0, soit $\bar{u}_L : (\bar{X}_n)^{\sim}_{ét} \to (X_{n,L})^{\sim}_{ét}$. On se donne un système compatible de plongements $((Spec\ \mathcal{O}_L, \mathcal{O}_L\backslash\{0\}) \hookrightarrow V_L)_L$ avec V_L affine, log-lisse sur $Spec\ W$ et muni d'un relèvement du Frobenius. En utilisant $(X^i_{n,L} \hookrightarrow Z^i_n \times_{Spec\ W} V_L)_{i\in\mathbf{N}}$, on construit de même les complexes $s^{log}_{n,X_L,Z\times V_L}(r)$ sur $(X_{n,L})_{ét}$ et on note $s^{log}_{n,\bar{X}}(r)$ l'image de $\varinjlim_L \bar{u}^*_L s^{log}_{n,X_L,Z\times V_L}(r)$ dans la catégorie dérivée: $s^{log}_{n,\bar{X}}(r)$ est indépendant des choix faits. Par (SGA4,VII.5.7), puisque les schémas $X^\cdot_{n,L}$ sont quasi-compacts et que les morphismes de transition sont affines, on a pour $i \in \mathbf{N}$:

$$H^i((\bar{X}_n)_{ét}, s^{log}_{n,\bar{X}}(r)) = H^i((\bar{X}_n)_{ét}, \varinjlim_L \bar{u}^*_L s^{log}_{n,X_L,Z\times V_L}(r)) = \varinjlim_L H^i((X_{n,L})_{ét}, s^{log}_{n,X_L,Z\times V_L}(r))$$

(dans SGA4, il s'agit seulement d'une limite filtrante de faisceaux, mais on généralise au cas d'une limite filtrante de complexes de faisceaux bornés à gauche par un dévissage facile). On achève avec (3.2.4.2).

D Un calcul de limite inductive

Soit $(SpecA^i, P^i)_{i\in I}$ un système inductif filtrant de log-schémas fins affines sur $(Spec\ W_n, \mathcal{L}(p))$, i.e. pour tout $i \to j$ un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} P^j & \to & A^j \\ \uparrow & & \uparrow \\ P^i & \to & A^i \end{array}$$

On suppose qu'il existe un deuxième système inductif de log-schémas fins affines $(SpecB^i, Q^i)_{i\in I}$ sur $(Spec\, W_n, \mathcal{L}(p))$ ainsi qu'un morphisme de systèmes inductifs $(SpecA^i, P^i)_{i\in I} \to (SpecB^i, Q^i)_{i\in I}$ (sur $(Spec\ W_n, \mathcal{L}(p))$) vérifiant les conditions suivantes:

- les monoïdes Q^i et P^i sont fins et les flèches $Q^i \to P^i$ sont surjectives pour tout $i \in I$
- les log-schémas $(Spec\ B^i, Q^i)$ sont log-lisses sur $Spec\, W_n$ (avec log-structure triviale) et les flèches $B^i \to A^i$ sont surjectives pour tout $i \in I$
- le Frobenius sur $Q^\infty = \varinjlim_{i\in I} Q^i$ est une bijection
- le Frobenius sur $B^\infty/p = \varinjlim_{i\in I} B^i/p$ est un automorphisme

On note $P^\infty = \varinjlim_{i\in I} P^i$, $A^\infty = \varinjlim_{i\in I} A^i$, $\mathbf{N} \oplus_{(\phi^n),\mathbf{N}} P^\infty$ la limite inductive du diagramme $\mathbf{N} \stackrel{p^n}{\leftarrow} \mathbf{N} \to P^\infty$ et $(\mathbf{N} \oplus_{(\phi^n),\mathbf{N}} P^\infty)^e = \{x \oplus y \in \mathbf{Z} \oplus_{(\phi^n),\mathbf{Z}} (P^\infty)^{gp}\ tq\ xy^{p^n} \in P^\infty\}$.

Lemme D.1 *On a un isomorphisme canonique:*

$$\left(W_n(A^\infty/p) \otimes_{\mathbf{Z}[P^\infty]} \mathbf{Z}[(\mathbf{N} \oplus_{(\phi^n),\mathbf{N}} P^\infty)^e]\right)^{DP} \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{i\in I} \mathcal{O}_n^{st}(Spec\ A^i, P^i)$$

où les puissances divisées à gauche (compatibles avec celles sur l'idéal (p)) sont prises par rapport à l'idéal noyau de la flèche dans A^∞ qui envoie $(a_0, ..., a_{n-1}) \in W_n(A^\infty/p)$ sur $\hat{a}_0^{p^n} + p\hat{a}_1^{p^{n-1}} + ... + p^{n-1}\hat{a}_{n-1}^p$ (les $\hat{a}_i$ relevant les a_i dans A^∞) et $x \oplus y \in (\mathbf{N} \oplus_{(\phi^n),\mathbf{N}} P^\infty)^e$ sur l'image de $xy^{p^n} \in P^\infty$. On a un énoncé analogue avec $\mathcal{J}_n^{[r]}$ à droite et la $r^{ième}$ puissance divisée de l'idéal noyau à gauche.

Preuve. — La flèche est canonique car induite par les flèches canoniques:

$$\left(W_n(A^i/p) \otimes_{\mathbf{Z}[P^i]} \mathbf{Z}[(\mathbf{N} \oplus_{(\phi^n),\mathbf{N}} P^i)^e]\right)^{DP} \to \mathcal{O}_n^{st}(Spec\ A^i, P^i)$$

qu'on laisse en exercice au lecteur (voir (D.2) et ([Br1],4.2.2)). Le morphisme de log-schémas:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{N} \oplus Q^i & \to & W_n\!<\!u\!>\!\otimes_{W_n} B^i \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{N} & \to & W_n\!<\!u\!> \end{array}$$

est log-lisse par changement de base, ce qui donne, par un calcul de de Rham et puisque les différentielles sont nulles sur B^∞ vu les hypothèses:

$$\varinjlim_{i\in I} \mathcal{O}_n^{st}(Spec\ A^i, P^i) \xrightarrow{\sim} \left(B^\infty \otimes_{\mathbf{Z}[Q^\infty]} \mathbf{Z}[(\mathbf{N} \oplus Q^\infty)^e]\right)^{DP}$$

où $(\mathbf{N}\oplus Q^\infty)^e$ est formé des éléments de $\mathbf{Z}\oplus(Q^\infty)^{gp}$ dont l'image dans $(P^\infty)^{gp}$ tombe dans P^∞ et où les puissances divisées sont prises par rapport au noyau de la flèche canonique dans A^∞ (et compatibles avec celles sur $W_n < u >$). Une utilisation répétée de ([BO],3.20.7) montre que la flèche canonique:

$$\Big(W_n(B^\infty/p)\otimes_{\mathbf{Z}[Q^\infty]}\mathbf{Z}[(\mathbf{N}\oplus Q^\infty)^{e'}]\Big)^{DP}\to\Big(W_n(A^\infty/p)\otimes_{\mathbf{Z}[P^\infty]}\mathbf{Z}[(\mathbf{N}\oplus_{(\phi^n),\mathbf{N}}P^\infty)^e]\Big)^{DP}$$

où $(\mathbf{N}\oplus Q^\infty)^{e'}=\{x\oplus y\in\mathbf{Z}\oplus(Q^\infty)^{gp}\ tq\ x\oplus y^{p^n}\in(\mathbf{N}\oplus Q^\infty)^e\}$ et où les puissances divisées à gauche sont prises par rapport au noyau de la flèche composée dans A^∞ (et compatibles avec (p)) est un isomorphisme. Mais on a un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} W_n(B^\infty/p)\otimes_{\mathbf{Z}[Q^\infty]}\mathbf{Z}[(\mathbf{N}\oplus Q^\infty)^{e'}] & \xrightarrow{\sim} & B^\infty\otimes_{\mathbf{Z}[Q^\infty]}\mathbf{Z}[(\mathbf{N}\oplus Q^\infty)^e] \\ \downarrow & & \downarrow \\ A^\infty & = & A^\infty \end{array}$$

où la flèche supérieure envoie $(b_0,...,b_{n-1})$ sur $\hat{b}_0^{p^n}+p\hat{b}_1^{p^{n-1}}+...+p^{n-1}\hat{b}_{n-1}^p$ (les $\hat{b}_i$ relevant les b_i dans B^∞) et $x\oplus y$ sur $x\oplus y^{p^n}$ et est un isomorphisme vu les hypothèses et ([Il1],1.3.22). En prenant l'enveloppe aux puissances divisées et en vérifiant la compatibilité avec la flèche déjà définie, on a donc le résultat pour $\mathcal{O}_n^{st}$. La suite s'en déduit aisément. □

Remarque: Il me semble que ce lemme est vrai si on suppose seulement le Frobenius surjectif sur P^∞ et A^∞, mais je ne sais le montrer que dans le cas ci-dessus, i.e. en faisant intervenir un système inductif auxiliaire, ce qui est suffisant pour les applications.

En quotientant le membre de gauche par l'idéal à puissances divisées engendré par l'image de u (resp. $u-p$), on a des énoncés analogues avec $\mathcal{O}_n^{dR}$ et $\mathcal{O}_n^{HK}$. De même avec $\mathcal{O}_n^{cris}$ en remplaçant $(\mathbf{N}\oplus_{(\phi^n),\mathbf{N}}P^\infty)^e$ par $P^{\infty,e}=\{x\in(P^\infty)^{gp}\ tq\ x^{p^n}\in P^\infty\}$. Le lien avec la formule de ([Br1],5.1) (où $(.)^e$ était noté $(.)^{(n)}$) est donnée par le:

Lemme D.2 *Soit $g\in P^\infty$ l'image de $1\in\mathbf{N}$ et h une racine $p^{n^{ième}}$ de g dans P^∞, l'application canonique:*

$$(\mathbf{N}\oplus_{(\phi^n),\mathbf{N}}P^\infty)^e\to P^{\infty,e}\oplus_{\mu_{p^n}((P^\infty)^{gp})}\mu_{p^n}((P^\infty)^{gp}/\mathbf{Z}),\ n\oplus p_1/p_2\mapsto h^n p_1/p_2\oplus\bar{h}^{-n}$$

($n\in\mathbf{Z}$ et $p_i\in P^\infty$) est un isomorphisme indépendant de h.

Preuve. — Exercice. □

On a enfin:

Lemme D.3 *Avec les notations précédentes, à toute racine $p^{n^{\text{ième}}}$ h de g dans P^∞ est associé un isomorphisme:*

$$\begin{array}{ccc} \left(W_n(A^\infty/p) \otimes_{\mathbf{Z}[P^\infty]} \mathbf{Z}[P^{\infty,e}]\right)^{DP} < X > & \xrightarrow{\sim} & \left(W_n(A^\infty/p) \otimes_{\mathbf{Z}[P^\infty]} \mathbf{Z}[(\mathbf{N} \oplus_{(\phi^n),\mathbf{N}} P^\infty)^e]\right)^{DP} \\ X & \mapsto & (1 \otimes (-1 \oplus h)) - 1 \end{array}$$

Preuve. — Utiliser (D.2) et voir ([Br1],6). □

Bibliographie

[Be] Berthelot P., *Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique $p > 0$*, Lecture Notes in Maths 407, Springer-Verlag, 1974.

[BO1] Berthelot P., Ogus A., *Notes on crystalline cohomology*, Princeton University Press, Princeton, 1978.

[BO2] Berthelot P., Ogus A., *F-isocristals and de Rham cohomology I*, Inv. Math. 72, 1983, 159-199.

[Br1] Breuil C., *Topologie log-syntomique, cohomologie log-cristalline et cohomologie de Čech*, Bulletin de la S.M.F. 124, 1996, 587-647.

[Br2] Breuil C., *Représentations p-adiques semi-stables et transversalité de Griffiths*, Math. Annalen 307, 1997, 191-224.

[Br3] Breuil C., *Construction de représentations p-adiques semi-stables*, à paraître aux Ann. Scient. de l'E.N.S.

[DI] Deligne P., Illusie L., *Relèvement modulo p^2 et décomposition du complexe de de Rham*, Inv. Math. 89, 1987, 247-270.

[ES] Etesse J.-Y., Le Stum B., *Fonctions L associées aux F-isocristaux surconvergents II: zéros et pôles unités*, Inv. Math. 127, 1997, 1-31.

[Fa1] Faltings G., *Crystalline cohomology and p-adic Galois representations*, Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory, John Hopkins Univ. Press, 1989, 25-79.

[Fa2] Faltings G., *Cristalline cohomology of semi-stable curves, and p-adic Galois representations*, Journal of Algebraic Geometry 1, 1992, 61-82.

[Fo] Fontaine J.-M., *Le corps des périodes p-adiques*, Astérisque 223, Soc. Math. de France, 1994, 59-111.

[FL] Fontaine J.-M., Laffaille G., *Construction de représentations p-adiques*, Ann. Scient. E.N.S. 15, 1982, 547-608.

[FM] Fontaine J.-M., Messing W., *P-adic periods and p-adic étale cohomology*, Contemporary Math. 67, 1987, 179-207.

[Hy] Hyodo O., *A note on p-adic etale cohomology in the semi-stable reduction case*, Inv. Math. 91, 1988, 543-557.

[HK] Hyodo O., Kato K., *Semi-stable reduction and crystalline cohomology with logarithmic poles*, Astérisque 223, Soc. Math. de France, 1994, 221-268.

[Il1] Illusie L., *Complexe de de Rham-Witt et cohomologie cristalline*, Ann. scient. E.N.S. 12, 1979, 501-661.

[Il2] Illusie L., *Cohomologie de de Rham et cohomologie étale p-adique [d'après G. Faltings, J.M. Fontaine et al.]*, Séminaire Bourbaki 726, juin 1990.

[Il3] Illusie L., *Lettre*, 8 juin 1996.

[Ka1] Kato K., *On p-adic Vanishing Cycles (Application of ideas of Fontaine-Messing)*, Advanced Studies in Pure Maths. 10, 1987, 207-251.

[Ka2] Kato K., *Logarithmic structures of Fontaine-Illusie*, Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory, John Hopkins University Press, 1989, 191-224.

[Ka3] Kato K, *Semi-stable reduction and p-adic étale cohomology*, Astérisque 223, Soc. Math. de France, 1994, 269-293.

[KM] Kato K., Messing W., *Syntomic cohomology and p-adic étale cohomology*, Tôhoku Math. J. 44, 1992, 1-9.

[Ma] Matsumura H., *Commutative ring theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 8, 1989.

[Mi] Milne J., *Etale cohomology*, Princeton University Press, Princeton, 1980.

[Se] Serre J.-P., *Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques*, Inv. Math. 15, 1972, 259-331.

[Ts1] Tsuji T., *Syntomic complexes and p-adic vanishing cycles*, J. reine angew. Math. 472, 1996, 69-138.

[Ts2] Tsuji T., *P-adic-étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case*, preprint, Kyoto, 1996.

[Ts3] Tsuji T., *A note on log-crystalline cohomology and log-syntomic cohomology*, preprint, Kyoto, 1994.