

# UNE APPLICATION DU CORPS DES NORMES

Christophe Breuil  
Mathématiques, Bât. 425  
U.R.A. 752 du C.N.R.S.  
Université Paris-Sud  
F-91405 ORSAY cedex  
(France)  
E-mail : breuil@math.u-psud.fr

## TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	1
2. Représentations en caractéristique $p$ de $H_\infty$	2
3. Les catégories $\underline{\mathcal{M}}_{0,k}^h$	6
4. Les catégories $\underline{\mathcal{M}}_{0,k}^h$ côté corps des normes	8
5. Application à certaines représentations cristal-lines	13
Références	15

## 1. INTRODUCTION

Soient  $k$  un corps parfait de caractéristique  $p > 0$ ,  $W = W(k)$  l'anneau des vecteurs de Witt,  $K_0 = \text{Frac}(W)$  et  $\bar{K}_0$  une clôture algébrique de  $K_0$ . On sait le rôle crucial joué par la tour cyclotomique  $K_0(\sqrt[p^{-\infty}]{1}) \subset \bar{K}_0$  en arithmétique (théorie d'Iwasawa). Dans cet article, court et élémentaire, on s'intéresse à une autre extension infinie de  $K_0$  qui, bien qu'à priori moins riche que la tour cyclotomique, présente des propriétés vis à vis des représentations cristallines de  $G = \text{Gal}(\bar{K}_0/K_0)$  que ne possède pas cette dernière. Fixons  $\pi$  une uniformisante de  $K_0$ ,  $\pi_n$  ( $n \in \mathbf{N}$ ) des éléments de  $\bar{K}_0$  tels que  $\pi_0 = \pi$  et  $\pi_n^p = \pi_{n-1}$  si  $n \geq 1$  et soient  $K_n = K_0(\pi_n)$ ,  $K_\infty = \cup_{n \in \mathbf{N}} K_n$  et  $H_\infty = \text{Gal}(\bar{K}_0/K_\infty)$ , nous montrons ici :

**Théorème 1.1.** (5.2) *Soient  $g$  et  $h$  deux entiers tels que  $0 \leq h - g \leq p - 2$ ,  $\underline{\text{Rep}}_{\text{cris}}^{[g,h]}(G)$  la catégorie des représentations cristallines de  $G$  à poids de Hodge-Tate entre  $g$  et  $h$  et  $\underline{\text{Rep}}_{\mathbf{Q}_p}(H_\infty)$  la catégorie des représentations  $p$ -adiques de  $H_\infty$ , le foncteur restriction de l'action de Galois :  $\underline{\text{Rep}}_{\text{cris}}^{[g,h]}(G) \rightarrow \underline{\text{Rep}}_{\mathbf{Q}_p}(H_\infty)$  est pleinement fidèle. Son image essentielle est stable par sous-objet et quotient.*

Il est probable que ce résultat s'étende à toutes les représentations cristallines mais il est trivialement faux si l'on remplace  $K_\infty$  par la tour cyclotomique :  $\mathbf{Q}_p$  et

$\mathbf{Q}_p(1)$  sont des représentations cristallines distinctes, mais deviennent isomorphes sur  $K_0(\sqrt[p^{-\infty}]{1})!$

La preuve utilise la théorie du corps des normes de Fontaine-Wintenberger ([Wi]) et certains résultats de [Br1]. On se ramène d'abord à  $g = 0$  et, par dévissages, à des représentations modulo  $p$  (ce qui utilise les catégories de Fontaine-Laffaille et explique la restriction sur les poids de Hodge-Tate). Puis on relie la construction des représentations modulo  $p$  de  $H_\infty$  par le biais du corps des normes de  $K_\infty$  (en substance due à Fontaine) avec la construction de telles représentations de  $H_\infty$  par le biais de modules filtrés (catégories  $\underline{\mathcal{M}}_{0,k}^h$  de [Br1]) : le résultat central est ici l'équivalence (4.1.1), d'où on déduit que le foncteur de  $\underline{\mathcal{M}}_{0,k}^h$  dans les représentations modulo  $p$  de  $H_\infty$  est pleinement fidèle et que les représentations construites ainsi sont exactement les représentations de  $H_\infty$  de "hauteur" plus petite que  $p - 2$  (c.f. 2.3). Comme les représentations cristallines modulo  $p$  qui interviennent sont classifiées par les catégories de Fontaine-Laffaille  $\underline{MF}_k^{f,h}$  (voir section 5), il n'y a plus qu'à vérifier la pleine fidélité du foncteur naturel  $\underline{MF}_k^{f,h} \rightarrow \underline{\mathcal{M}}_{0,k}^h$  (5.1). Signalons que certains résultats devraient se généraliser dans plusieurs directions ( $p$ -torsion, ramification, etc... : voir 4.3) et que, dans le contexte (différent) de la tour cyclotomique, plusieurs études ont déjà vu le jour sur la façon de retrouver les représentations cristallines en termes de modules sur le corps des normes correspondant ([Co],[Fo1],[Wa1],[Wa2]).

Voici le plan : en 2, on donne la classification, en utilisant le corps des normes de  $K_\infty$ , des représentations modulo  $p$  de  $H_\infty$  et on définit la hauteur. En 3, on utilise des modules filtrés (catégories  $\underline{\mathcal{M}}_{0,k}^h$ ) pour construire aussi des représentations de  $H_\infty$ . En 4, on décrit exactement quelles sont les représentations construites en 3 dans la classification de 2 et en 5, on donne la preuve du théorème.

Je remercie J.-M. Fontaine pour ses explications sur le corps des normes.

## 2. REPRÉSENTATIONS EN CARACTÉRISTIQUE $p$ DE $H_\infty$

On rappelle la classification des représentations en caractéristique  $p$  de  $H_\infty$  à l'aide du corps des normes de  $K_\infty$ .

2.1. On renvoie à ([Wi],1.2) pour la définition de ce qu'est une extension APF et strictement APF.

**Lemme 2.1.1.** *L'extension  $K_\infty/K_0$  est strictement APF.*

*Preuve.* — La clôture galoisienne de  $K_\infty$  dans  $\bar{K}_0$  est égale à  $K_\infty(\sqrt[p^{-\infty}]{1})$  et on vérifie que  $\text{Gal}(K_\infty(\sqrt[p^{-\infty}]{1})/K_0) \simeq \mathbf{Z}_p(1) \cdot \mathbf{Z}_p^*$  (produit semi-direct) donc est un

groupe de Lie  $p$ -adique. Par ([Wi],1.2.2),  $K_\infty(\sqrt[p^{-\infty}]{1})/K_0$  est strictement APF, donc aussi  $K_\infty/K_0$  par ([Wi],1.2.3,(iii)).  $\square$

Soient  $\mathcal{O}_{K_n} \simeq \bigoplus_{i=0}^{p^n-1} W\pi_n^i$  l'anneau des entiers de  $K_n$  (donc  $\mathcal{O}_{K_0} = W$ ),  $N_{K_n/K_{n-1}}$  la norme de  $K_n$  à  $K_{n-1}$ , on pose  $X = (\varprojlim (K_n \setminus \{0\})) \cup \{0\}$  et  $\mathcal{X} = (\varprojlim (\mathcal{O}_{K_n} \setminus \{0\})) \cup \{0\}$ , les applications de transition  $K_n \setminus \{0\} \rightarrow K_{n-1} \setminus \{0\}$  et  $\mathcal{O}_{K_n} \setminus \{0\} \rightarrow \mathcal{O}_{K_{n-1}} \setminus \{0\}$  étant induites par  $N_{K_n/K_{n-1}}$ . On a  $\mathcal{X} \subset X$  et, la norme étant multiplicative,  $X$  et  $\mathcal{X}$  sont munis d'une loi multiplicative par  $(a_n) \cdot (b_n) = (a_n b_n)$ . Si  $a = (a_n), b = (b_n) \in X$  (resp.  $\mathcal{X}$ ),  $N_{K_m/K_n}(a_m + b_m)$  converge dans  $K_n$  (resp.  $\mathcal{O}_{K_n}$ ) quand  $m \rightarrow \infty$  vers un élément  $c_n$  et  $c = (c_n)$  est un élément de  $X$  (resp.  $\mathcal{X}$ ) ([Wi],2.1.3,(i)). En posant  $a + b = c$ , on définit une loi additive sur  $X$  (resp.  $\mathcal{X}$ ). Pour cette structure d'anneau,  $X$  est un corps de caractéristique  $p$  ([Wi],2.1.3,(ii)),  $\mathcal{X}$  est un anneau de valuation discrète complet et  $\text{Frac}(\mathcal{X}) = X$  ([Wi],2.3.1 et 2.2.4). En fait,  $\underline{\pi} = (\pi_n)$  est un élément de  $\mathcal{X}$  (puisque  $N_{K_n/K_{n-1}}(\pi_n) = \pi_{n-1}$ ) et comme sa valuation est 1 (voir [Wi],2.1.2), on a  $\mathcal{X} \simeq k[[\underline{\pi}]]$  et  $X \simeq k((\underline{\pi}))$ . Dans la suite, on identifiera souvent  $\mathcal{X}$  à  $k[[\underline{\pi}]]$ .

Plus généralement, soient  $L$  une extension finie de  $K_\infty$  contenue dans  $\bar{K}_0$ ,  $X_L = \left( \varprojlim_{K_0 \subset E \subset L} (E \setminus \{0\}) \right) \cup \{0\}$  et  $\mathcal{X}_L = \left( \varprojlim_{K_0 \subset E \subset L} (\mathcal{O}_E \setminus \{0\}) \right) \cup \{0\}$ , la limite étant prise sur les extensions finies  $E$  de  $K_0$  contenues dans  $L$ , d'anneaux d'entiers notés  $\mathcal{O}_E$ , et avec la norme comme application de transition. Comme  $L$  est encore strictement APF ([Wi],1.2.3,(ii)), on peut de même munir  $X_L$  d'une structure de corps de caractéristique  $p > 0$  complet pour une valuation discrète et d'anneau de valuation  $\mathcal{X}_L$  ([Wi],2). De plus, par ([Wi],3.1.2),  $X_L$  est une extension finie séparable de  $X$  de degré  $[L : K_\infty]$ . Si  $L \subset L'$  sont deux extensions finies de  $K_\infty$ , on a des injections canoniques  $X_L \subset X_{L'}$  et  $\mathcal{X}_L \subset \mathcal{X}_{L'}$  ([Wi],3.1.2) de sorte qu'on peut considérer  $X^s = \varprojlim_{K_\infty \subset L \subset \bar{K}_0} X_L$  et  $\mathcal{X}^s = \varprojlim_{K_\infty \subset L \subset \bar{K}_0} \mathcal{X}_L$ , la limite étant prise sur les extensions finies de  $K_\infty$  contenue dans  $\bar{K}_0$  : on montre que  $X^s$  est une clôture séparable de  $X$  et que  $H_\infty = \text{Gal}(\bar{K}_0/K_\infty)$  s'identifie canoniquement à  $\text{Gal}(X^s/X)$  ([Wi],3.2.3).

2.2. Dans ce paragraphe, on désigne par  $F$  un corps quelconque de caractéristique  $p > 0$  et  $F^s$  une clôture séparable de  $F$ . On note  $H = \text{Gal}(F^s/F)$  et  $\underline{\text{Rep}}_{\mathbf{F}_p}(H)$  la catégorie des représentations linéaires continues de  $H$  sur un  $\mathbf{F}_p$ -espace vectoriel de dimension finie. La condition de continuité équivaut, dans ce cas, à dire que la représentation se factorise par une extension finie séparable de  $F$ .

Soit  $\underline{\mathcal{D}}_F$  la catégorie suivante :

- un objet est la donnée d'un  $F$ -espace vectoriel de dimension finie  $\mathfrak{D}$  muni d'une application  $\phi : \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}$  injective et semi-linéaire par rapport au Frobenius de  $F$
- un morphisme est une application  $F$ -linéaire qui commute à  $\phi$ .

On vérifie facilement que  $\underline{\mathfrak{D}}_F$  est une catégorie abélienne (i.e. on s'assure de l'injectivité de  $\phi$  sur les "conoyaux"). Si  $T$  est un objet de  $\underline{Rep}_{\mathbf{F}_p}(H)$ , on définit le  $F$ -espace vectoriel  $\mathfrak{D}_F(T) = (F^s \otimes_{\mathbf{F}_p} T)^H$  : il résulte de  $H^1(H, GL_n(F^s)) = \{1\}$  ([Se],X.1.3) que l'application naturelle  $F^s \otimes_F \mathfrak{D}_F(T) \rightarrow F^s \otimes_{\mathbf{F}_p} T$  est un isomorphisme et donc que  $\mathfrak{D}_F(T)$  est de dimension finie sur  $F$  égale à  $\dim_{\mathbf{F}_p}(T)$ . En posant  $\phi(f \otimes t) = \phi(f) \otimes t$  si  $f \in F^s$  et  $t \in T$ , on munit  $\mathfrak{D}_F(T)$  d'une structure d'objet de  $\underline{\mathfrak{D}}_F$ .

**Proposition 2.2.1.** (*Fontaine*) *Le foncteur  $\underline{Rep}_{\mathbf{F}_p}(H) \rightarrow \underline{\mathfrak{D}}_F$  défini par  $T \mapsto \mathfrak{D}_F(T)$  est une équivalence de catégories.*

*Preuve.* — Voir ([Fo1],p.259).  $\square$

Le foncteur qui à  $\mathfrak{D}$ , objet de  $\underline{\mathfrak{D}}_F$ , associe  $T_F(\mathfrak{D}) = (F^s \otimes_F \mathfrak{D})_{\phi \otimes \phi=1}$  est un quasi-inverse. Nous utiliserons dans la suite la version contravariante  $T_F^*$  de ce quasi-inverse définie par  $T_F^*(\mathfrak{D}) = Hom_{\phi}(\mathfrak{D}, F^s)$  (il s'agit des applications  $F$ -linéaires qui commutent à  $\phi$ ) et où  $H_{\infty}$  agit par  $g(f)(x) = g(f(x))$  si  $g \in H_{\infty}$ ,  $f \in T_F^*(\mathfrak{D})$  et  $x \in \mathfrak{D}$ . On vérifie que  $T_F^*(\mathfrak{D}) = Hom_{\mathbf{F}_p}(T(\mathfrak{D}), \mathbf{F}_p)$  :  $T_F^*$  induit donc une anti-équivalence de catégories entre  $\underline{\mathfrak{D}}_F$  et  $\underline{Rep}_{\mathbf{F}_p}(H)$ .

2.3. En appliquant les résultats de (2.2) au cas où  $F$  est le corps  $X$  de (2.1), on obtient :

**Corollaire 2.3.1.** *Le foncteur :*

$$\begin{aligned} T_X^* : \underline{\mathfrak{D}}_X &\rightarrow \underline{Rep}_{\mathbf{F}_p}(H_{\infty}) \\ \mathfrak{D} &\mapsto Hom_{\phi}(\mathfrak{D}, X^s) \end{aligned}$$

*induit une anti-équivalence de catégories entre  $\underline{\mathfrak{D}}_X$  et  $\underline{Rep}_{\mathbf{F}_p}(H_{\infty})$ .*

Dans la suite, on abrège  $\underline{\mathfrak{D}}_X$  en  $\underline{\mathfrak{D}}$  et  $T_X^*$  en  $T^*$ . On va étudier d'un peu plus près les objets de  $\underline{\mathfrak{D}}$ . Soit  $\underline{\mathfrak{M}}$  la catégorie suivante :

- un objet est la donnée d'un  $\mathcal{X}$ -module libre de rang fini  $\mathfrak{M}$  muni d'une application  $\phi : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$  injective et semi-linéaire par rapport au Frobenius de  $\mathcal{X}$
- un morphisme est une application  $\mathcal{X}$ -linéaire qui commute à  $\phi$ .

On a un foncteur "extension des scalaires" fidèle :  $\underline{\mathfrak{M}} \rightarrow \underline{\mathfrak{D}}$  et il est clair que tout  $k[[\pi]]$ -réseau stable par  $\phi$  d'un objet de  $\underline{\mathfrak{D}}$  est un objet de  $\underline{\mathfrak{M}}$ .

**Lemme 2.3.2.** *Tout objet de  $\underline{\mathcal{D}}$  contient un  $k[[\pi]]$ -réseau stable par  $\phi$ .*

*Preuve.* — Soient  $(e_1, \dots, e_d)$  une base de  $\mathcal{D}$  et  $n$  la plus grande puissance de  $\pi$  en dénominateur qui intervient dans les coefficients de la matrice de  $\phi$  dans  $(e_1, \dots, e_d)$ . Si  $m$  désigne la partie entière de  $n \left( \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{p^j} \right) + 1$ , on vérifie qu'en remplaçant chaque  $e_i$  par  $\pi^m e_i$ , la nouvelle matrice est à coefficients dans  $k[[\pi]]$ .  $\square$

**Lemme 2.3.3.** *Soit  $\mathcal{D}$  un objet de  $\underline{\mathcal{D}}$  et  $\mathfrak{M}$  un  $k[[\pi]]$ -réseau de  $\mathcal{D}$  stable par  $\phi$ , alors  $\text{Hom}_\phi(\mathfrak{M}, \mathcal{X}^s) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_\phi(\mathcal{D}, X^s)$ .*

*Preuve.* — Notons  $\nu$  la valuation sur  $X^s$  normalisée par  $\nu(\pi) = 1$ . Soient  $f \in \text{Hom}_\phi(\mathcal{D}, X^s)$ ,  $(e_1, \dots, e_d)$  une base de  $\mathfrak{M}$  et  $n = \min_{1 \leq i \leq d} \{\nu(f(e_i))\}$ . Pour tout  $x \in \mathfrak{M}$ , on a  $\pi^{-n} f(x) \in \mathcal{X}^s$ . Soit  $i \in \{1, \dots, d\}$  tel que  $f(e_i) = \pi^n y$ ,  $y \in (\mathcal{X}^s)^*$ , alors  $f(\phi^r(e_i)) = \phi^r(f(e_i)) = \pi^{p^r n} \phi^r(y)$ ,  $\phi^r(y) \in (\mathcal{X}^s)^*$  donc  $-n + p^r n \geq 0$  pour tout  $r \in \mathbf{N}$  i.e.  $n \geq 0$  i.e.  $f(\mathfrak{M}) \subset \mathcal{X}^s$ ,  $\forall f \in \text{Hom}_\phi(\mathcal{D}, X^s)$  d'où le résultat.  $\square$

Soient  $\mathfrak{M}$  un objet de  $\underline{\mathfrak{M}}$ ,  $\mathfrak{M}^\phi = \mathcal{X} \otimes_{(\phi), \mathcal{X}} \mathfrak{M}$  le  $\mathcal{X}$ -module déduit de  $\mathfrak{M}$  par l'extension des scalaires  $\phi$ ,  $\nu$  la valuation  $\pi$ -adique sur  $\mathcal{X} = k[[\pi]]$  normalisée par  $\nu(\pi) = 1$  et  $\nu(\mathfrak{M})$  la valuation du déterminant de  $\phi$  dans une base (indépendante de la base choisie) : il est clair que  $\mathfrak{M}/(\text{Id} \otimes \phi)(\mathfrak{M}^\phi)$  est tué par  $\pi^{\nu(\mathfrak{M})}$ .

**Définition 2.3.4.** 1) *On dit qu'un objet de  $\underline{\mathfrak{M}}$  est de hauteur inférieure ou égale à  $h$  si  $\mathfrak{M}/(\text{Id} \otimes \phi)(\mathfrak{M}^\phi)$  est tué par  $\pi^h$ .*

2) *On dit qu'un objet de  $\underline{\mathcal{D}}$  est de hauteur inférieure ou égale à  $h$  s'il contient un  $k[[\pi]]$ -réseau stable par  $\phi$  de hauteur inférieure ou égale à  $h$ .*

Tout objet de  $\underline{\mathfrak{M}}$  est donc de hauteur inférieure ou égale à  $h$  pour  $h$  suffisamment grand et de même pour tout objet de  $\underline{\mathcal{D}}$  par (2.3.2). On note  $\underline{\mathcal{D}}^h$  (resp.  $\underline{\mathfrak{M}}^h$ ) la sous-catégorie pleine de  $\underline{\mathcal{D}}$  (resp.  $\underline{\mathfrak{M}}$ ) formée des objets de hauteur inférieure ou égale à  $h$ .

**Lemme 2.3.5.** *Soit  $\mathcal{D}$  un objet de  $\underline{\mathcal{D}}^h$  et  $\mathcal{D}'$  un sous-objet (resp. quotient) dans  $\underline{\mathcal{D}}$ , alors  $\mathcal{D}' \in \underline{\mathcal{D}}^h$ .*

*Preuve.* — Supposons d'abord  $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$  et soit  $\mathfrak{M}$  un  $k[[\pi]]$ -réseau de  $\mathcal{D}$  stable par  $\phi$  et de hauteur inférieure ou égale à  $h$ , il suffit de montrer que  $\mathfrak{M}' = \mathcal{D}' \cap \mathfrak{M}$ , qui est stable par  $\phi$ , est dans  $\underline{\mathfrak{M}}^h$ . Comme le Frobenius  $\mathcal{X} \xrightarrow{\phi} \mathcal{X}$  est plat, on a facilement  $\mathfrak{M}'^\phi = \mathcal{D}'^\phi \cap \mathfrak{M}^\phi$ . Soit  $x \in \mathfrak{M}'$ , il existe  $y \in \mathfrak{M}^\phi$  unique tel que  $\pi^h x = (\text{Id} \otimes \phi)(y)$  et il existe  $z \in \mathcal{D}'^\phi$  unique tel que  $\pi^h x = (\text{Id} \otimes \phi)(z)$ . Comme  $\text{Id} \otimes \phi : \mathcal{D}^\phi \rightarrow \mathcal{D}$  est un isomorphisme,  $y = z \in \mathcal{D}'^\phi \cap \mathfrak{M}^\phi = \mathfrak{M}'^\phi$ , d'où le résultat dans ce cas. Si  $\mathcal{D}'$  est un quotient de  $\mathcal{D}$ , soit  $\mathfrak{M}'$  l'image de  $\mathfrak{M}$  dans  $\mathcal{D}'$  muni du  $\phi$  quotient : il est clair que  $\mathfrak{M}' \in \underline{\mathfrak{M}}^h$ .  $\square$

**Corollaire 2.3.6.** *Les catégories  $\underline{\mathfrak{D}}^h$  sont abéliennes pour  $h \in \mathbf{N}$ .*

Pour les catégories  $\underline{\mathfrak{M}}^h$ , on a le résultat suivant :

**Proposition 2.3.7.** (Fontaine) *Pour  $0 \leq h \leq p-2$ ,  $\underline{\mathfrak{M}}^h$  est abélienne et le foncteur “extension des scalaires”  $\underline{\mathfrak{M}}^h \rightarrow \underline{\mathfrak{D}}^h$  est une équivalence de catégories.*

*Preuve.* — Voir ([Fo1],B.1.7.1).  $\square$

Remarque : Pour  $h \geq p-1$ , le résultat général ci-dessus est faux. Un contre-exemple standard consiste à prendre  $\mathfrak{M} = (\mathcal{X}e_1, \phi(e_1) = \pi^{p-1}e_1) \in \underline{\mathfrak{M}}^{p-1}$ ,  $\mathfrak{M}' = (\mathcal{X}e_1, \phi(e_1) = e_1) \in \underline{\mathfrak{M}}^0 \subset \underline{\mathfrak{M}}^{p-1}$  et  $f : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}'$  donné par la multiplication par  $\pi$ . On vérifie que  $f$  est bien un morphisme dans  $\underline{\mathfrak{M}}^{p-1}$  qui n’est pas un isomorphisme, que  $f$  n’a ni noyau, ni conoyau dans  $\underline{\mathfrak{M}}^{p-1}$  et que  $f$  devient un isomorphisme après extension des scalaires à  $X$ .

Notons  $T_h^*$  le foncteur de  $\underline{\mathfrak{M}}^h$  dans  $\underline{Rep}_{\mathbf{F}_p}(H_\infty)$  qui à  $\mathfrak{M}$  associe  $Hom_\phi(\mathfrak{M}, \mathcal{X}^s)$ . De (2.3.7), (2.3.3), (2.3.1) et (2.3.5), on déduit :

**Corollaire 2.3.8.** *Pour  $0 \leq h \leq p-2$ , le foncteur  $T_h^*$  est exact et pleinement fidèle. Son image essentielle est stable par sous-objet et quotient.*

### 3. LES CATÉGORIES $\underline{\mathcal{M}}_{0,k}^h$

Il existe une deuxième façon de construire des représentations de  $H_\infty$  qui consiste à utiliser, pour  $0 \leq h \leq p-2$ , les catégories  $\underline{\mathcal{M}}_{0,k}^h$  ou  $\tilde{\underline{\mathcal{M}}}_{0,k}^h$  de ([Br1],2.2).

3.1. Soit  $S = k\langle u \rangle$  la P.D. algèbre polynômiale en l’indéterminée  $u$ , on munit  $S$  d’une filtration positive décroissante  $Fil^h S =$  l’idéal engendré par les  $\gamma_i(u)$  pour  $i \geq h$  (on rappelle que  $\gamma_i(u)$  est la  $i^{\text{ième}}$  puissance divisée de  $u$ , c’est-à-dire moralement  $\frac{u^i}{i!}$ ). Voir ([BO],3) pour plus de précisions). Soit  $c = -\gamma_p(u) - \bar{w} \in S^*$  où  $\bar{w}$  est la réduction modulo  $p$  de l’unité  $w = \pi/p = \pi_0/p$ . On note  $\phi$  le Frobenius de  $S$  et, pour  $0 \leq h \leq p-2$ , on définit des opérateurs semi-linéaires  $\phi_h : Fil^h S \rightarrow S$  en posant  $\phi_h(\gamma_h(u)) = \frac{c^h}{h!}$  et  $\phi_h(\gamma_i(u)) = 0$  si  $i > h$ . On a donc  $\phi = \phi_0$  et  $\phi_h(Fil^{h+1} S) = 0$ .

Pour tout  $h \in \{0, \dots, p-2\}$ , soit  $\underline{\mathcal{M}}_{0,k}^h$  la catégorie suivante : les objets sont la donnée :

- d’un  $S$ -module  $\mathcal{M}$  libre de rang fini
- d’un sous- $S$ -module  $Fil^h \mathcal{M}$  de  $\mathcal{M}$  contenant  $Fil^h S \cdot \mathcal{M}$

- d'une flèche  $\phi$ -semi-linéaire  $\phi_h : Fil^h \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  telle que, pour tout  $s \in Fil^h S$  et  $x \in \mathcal{M}$ ,  $\phi_h(sx) = \frac{\phi_h(s)}{c^h} \phi_h(u^h x)$  et telle que  $\phi_h(Fil^h \mathcal{M})$  engendre  $\mathcal{M}$  sur  $S$ .

Les flèches sont les morphismes  $S$ -linéaires qui préservent  $Fil^h$  et commutent à  $\phi_h$ . Les catégories  $\underline{\mathcal{M}}_{0,k}^h$  sont des sous-catégories pleines les unes des autres quand  $h$  augmente ([Br1],2.1.2.1), par exemple,  $S$  est un objet de  $\underline{\mathcal{M}}_{0,k}^h$  pour  $0 \leq h \leq p-2$ .

En fait, on peut se débarrasser des puissances divisées : soient  $\tilde{S} = k[u]/(u^p)$ ,  $\tilde{c} = -\bar{w} \in \tilde{S}^*$ ,  $Fil^h(\tilde{S}) = u^h \tilde{S}$  ( $0 \leq h \leq p-2$ ) et  $\tilde{\phi}_h : Fil^h(\tilde{S}) \rightarrow \tilde{S}$  l'unique opérateur semi-linéaire tel que  $\tilde{\phi}_h(u^h) = \tilde{c}^h$ . Pour  $h \in \{0, \dots, p-2\}$ , soit  $\tilde{\underline{\mathcal{M}}}_{0,k}^h$  la catégorie dont les objets sont la donnée :

- d'un  $\tilde{S}$ -module  $\tilde{\mathcal{M}}$  libre de rang fini
- d'un sous- $\tilde{S}$ -module  $Fil^h \tilde{\mathcal{M}}$  contenant  $u^h \tilde{\mathcal{M}}$
- d'une application  $\tilde{S}$ -semi-linéaire  $\tilde{\phi}_h : Fil^h \tilde{\mathcal{M}} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$  dont l'image engendre  $\tilde{\mathcal{M}}$  sur  $\tilde{S}$ .

et dont les flèches sont les morphismes  $\tilde{S}$ -linéaires qui préservent  $Fil^h$  et commutent à  $\tilde{\phi}_h$ . On a un isomorphisme  $k[u]/(u^p)$ -linéaire  $S \simeq \tilde{S}[X_i]/(X_i^p)_{i \in \mathbf{N}^*}$  où  $\gamma_{p^i}(u) \mapsto X_i$ . Soit  $\sigma$  la surjection de  $k[u]/(u^p)$ -algèbres  $S \rightarrow \tilde{S}$ ,  $X_i \mapsto 0$  pour tout  $i$ . Pour  $\mathcal{M}$  dans  $\underline{\mathcal{M}}_{0,k}^h$ , posons  $\mathcal{T}_h(\mathcal{M}) = \tilde{S} \otimes_{(\sigma),S} \mathcal{M}$  et soit  $s$  la surjection canonique  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{T}_h(\mathcal{M})$ . On définit :

- $Fil^h \mathcal{T}_h(\mathcal{M}) = s(Fil^h \mathcal{M})$
- si  $x \in s(Fil^h \mathcal{M})$ ,  $\tilde{\phi}_h(x) = s(\phi_h(\hat{x}))$  où  $\hat{x}$  est un relevé quelconque de  $x$  dans  $Fil^h \mathcal{M}$  (c'est indépendant du relevé).

On obtient ainsi un foncteur  $\mathcal{T}_h : \underline{\mathcal{M}}_{0,k}^h \rightarrow \tilde{\underline{\mathcal{M}}}_{0,k}^h$ .

**Proposition 3.1.1.** *Le foncteur  $\mathcal{T}_h$  induit une équivalence de catégories entre  $\underline{\mathcal{M}}_{0,k}^h$  et  $\tilde{\underline{\mathcal{M}}}_{0,k}^h$ .*

*Preuve.* — Voir ([Br1],2.2.2.1) où on notait ce foncteur simplement  $T$ .  $\square$

On montre que les catégories  $\underline{\mathcal{M}}_{0,k}^h$  et  $\tilde{\underline{\mathcal{M}}}_{0,k}^h$  sont abéliennes ([Br1],2.2.3.2). Signalons enfin le lemme suivant dont nous aurons besoin :

**Lemme 3.1.2.** *Soit  $\tilde{\mathcal{M}}$  un objet de  $\tilde{\underline{\mathcal{M}}}_{0,k}^h$ , alors :*

- (1) *La flèche  $Id \otimes \tilde{\phi}_h : \tilde{S} \otimes_{(\phi),k} Fil^h \tilde{\mathcal{M}} / u Fil^h \tilde{\mathcal{M}} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$  est un isomorphisme de  $\tilde{S}$ -modules.*
- (2) *La flèche canonique  $\tilde{S} \otimes_k \tilde{\phi}_h(Fil^h \tilde{\mathcal{M}}) \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$  est un isomorphisme de  $\tilde{S}$ -modules.*

*Preuve.* — Voir ([Br1],2.2.1.2).  $\square$

ainsi que sa variante avec  $\underline{\mathcal{M}}_{0,k}^h$  qu'on laisse au lecteur le soin d'écrire ([Br1],2.2.2.2).

3.2. Soient  $\mathcal{O}_{\bar{K}_0}$  l'anneau des entiers de  $\bar{K}_0$  et  $R$  la limite projective du système projectif :

$$\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\mathcal{O}_{\bar{K}_0} \xleftarrow{Frob} \mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\mathcal{O}_{\bar{K}_0} \xleftarrow{Frob} \mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\mathcal{O}_{\bar{K}_0} \dots$$

par exemple  $(\bar{\pi}_0, \bar{\pi}_1, \dots)$ , où  $\bar{\pi}_i$  est l'image de  $\pi_i$  dans  $\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\mathcal{O}_{\bar{K}_0}$ , est un élément de  $R$  qu'on note encore  $\bar{\pi}$ . Soit  $R^{DP}$  l'enveloppe aux puissances divisées de  $R$  par rapport à l'idéal  $(\bar{\pi})$ , comme  $(\bar{\pi})$  est principal, on a un isomorphisme canonique  $R$ -linéaire  $:R[X_i]/(\bar{\pi}^p, X_i^p)_{i \in \mathbf{N}^*} \xrightarrow{\sim} R^{DP}$  qui envoie  $X_i$  sur  $\gamma_{p^i}(\bar{\pi})$ . Pour  $0 \leq h \leq p$ , on pose  $Fil^h(R^{DP}) =$  l'idéal engendré par  $\bar{\pi}^h$  et  $X_i$  ( $i \in \mathbf{N}^*$ ) et, pour  $0 \leq h \leq p-2$ ,  $\phi_h : Fil^h(R^{DP}) \rightarrow R^{DP}$  l'unique application additive telle que  $\phi_h(r\bar{\pi}^h) = r^p(-X_1 - \bar{w})^h$  ( $r \in R^{DP}$ ,  $w = \pi_0/p$ ) et  $\phi_h(Fil^{h+1}R^{DP}) = 0$ . L'anneau  $R^{DP}$  est muni d'une action naturelle de  $H_\infty$  (et même de  $Gal(\bar{K}_0/K_0)$ ) qui commute avec les structures précédentes. Enfin, on fait de  $R^{DP}$  une  $S$ -algèbre en envoyant  $\gamma_i(u)$  sur  $\gamma_i(\bar{\pi})$  : application qui laisse stable les  $Fil^h$  et commute avec les  $\phi_h$  et l'action de  $H_\infty$ , en faisant agir  $H_\infty$  de façon triviale sur  $S$ . A tout objet  $\mathcal{M}$  de  $\underline{\mathcal{M}}_{0,k}^h$ , on peut alors associer une représentation de  $H_\infty$  en posant  $T_{st,h}^*(\mathcal{M}) = Hom_{Fil^h, \phi_h}(\mathcal{M}, R^{DP})$  (il s'agit des applications  $S$ -linéaires qui laissent stables  $Fil^h$  et commutent avec  $\phi_h$ ) et en faisant agir  $H_\infty$  par  $g(f)(x) = g(f(x))$  si  $g \in H_\infty$ ,  $f \in T_{st,h}^*(\mathcal{M})$  et  $x \in \mathcal{M}$ . Bien sûr,  $T_{st,h+1}^*|_{\underline{\mathcal{M}}_{0,k}^h} = T_{st,h}^*$  (voir ([Br1],2.1.2.1) et ([Br1],3.1.2.2)).

**Lemme 3.2.1.** *Soit  $\mathcal{M}$  un objet de  $\underline{\mathcal{M}}_{0,k}^h$ , alors  $dim_{\mathbf{F}_p}(T_{st,h}^*(\mathcal{M})) = rg_S \mathcal{M}$ .*

*Preuve.* — Soit  $(e_1, \dots, e_d)$  une base de  $\mathcal{M}$  dans  $\phi_h(Fil^h \mathcal{M})$  ((3.1.2) version  $\underline{\mathcal{M}}_{0,k}^h$ ) et  $(y_1, \dots, y_d) \in Fil^h \mathcal{M}$  tels que  $\phi_h(y_i) = e_i$ . Quitte à modifier  $y_i$  par des éléments de  $Fil^{h+1} \mathcal{M}$ , on peut supposer  $y_i = u^{r_i} f_i$  où  $r_i$  est un entier convenable de  $\{0, \dots, h\}$ ,  $f_i \in \mathcal{M}$ ,  $f_i \notin Fil^1 \mathcal{M}$ . Alors,  $(f_1, \dots, f_d)$  est une autre base de  $\mathcal{M}$  (exercice). Soit  $\mathcal{G}$  la matrice des  $\phi_h(u^{r_i} f_i)$  dans la base  $(f_1, \dots, f_d)$ , alors  $\mathcal{G} \in GL_d(S)$  et il y a une bijection entre  $Hom_{Fil^h, \phi_h}(\mathcal{M}, R^{DP})$  et les solutions dans  $R^{DP}$  du système :

$$\begin{pmatrix} \phi_h(\bar{\pi}^{r_1} x_1) \\ \vdots \\ \phi_h(\bar{\pi}^{r_d} x_d) \end{pmatrix} = \tau \mathcal{G} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$$

où  $x_i \in Fil^{h-r_i} R^{DP}$  et  $\tau \mathcal{G}$  est la transposée de  $\mathcal{G}$ . C'est un résultat maintenant classique que les solutions d'un tel système forment un  $\mathbf{F}_p$ -espace vectoriel de dimension  $d$  (c.f. par exemple la fin de la preuve de ([Br1],3.2.2.1) ou ([Wa2],2.3.2.2)).  $\square$

On a donc un foncteur  $T_{st,h}^* : \underline{\mathcal{M}}_{0,k}^h \rightarrow \underline{Rep}_{\mathbf{F}_p}(H_\infty)$ . Nous verrons dans la suite que ce foncteur est exact et pleinement fidèle.

#### 4. LES CATÉGORIES $\underline{\mathcal{M}}_{0,k}^h$ CÔTÉ CORPS DES NORMES

En 2, on construit tous les objets de  $\underline{Rep}_{\mathbf{F}_p}(H_\infty)$ , en 3, on en construit certains : on compare ici les deux approches.

4.1. Notons  $\theta : \mathcal{X} = k[[\pi]] \longrightarrow S = k\langle u \rangle$  l'unique application de  $k$ -algèbres telle que  $\theta(\pi) = u$ . Soit  $0 \leq h \leq p-2$  et  $\mathfrak{M}$  un objet de  $\underline{\mathcal{M}}^h$ , on lui associe un objet  $\mathcal{M}$  de  $\underline{\mathcal{M}}_{0,k}^h$  de la façon suivante :

- en tant que  $S$ -module, on pose  $\mathcal{M} = S \otimes_{(\phi \circ \theta), \mathcal{X}} \mathfrak{M} \simeq S \otimes_{(\phi), k} \mathfrak{M} / \pi \mathfrak{M}$ . On a un “Frobenius relatif” :  
 $Id \otimes \phi : S \otimes_{(\phi \circ \theta), \mathcal{X}} \mathfrak{M} \longrightarrow S \otimes_{(\theta), \mathcal{X}} \mathfrak{M} \simeq S \otimes_{(\theta), \mathcal{X}} \mathfrak{M} / \pi^p \mathfrak{M}$
- on pose  $Fil^h \mathcal{M} = \{y \in S \otimes_{(\phi \circ \theta), \mathcal{X}} \mathfrak{M} / (Id \otimes \phi)(y) \in Fil^h S \otimes_{(\theta), \mathcal{X}} \mathfrak{M}\}$
- on définit  $\phi_h : Fil^h \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  comme la composée de  $Id \otimes \phi : Fil^h \mathcal{M} \longrightarrow Fil^h S \otimes_{(\theta), \mathcal{X}} \mathfrak{M}$  avec  $\phi_h \otimes Id : Fil^h S \otimes_{\theta, \mathcal{X}} \mathfrak{M} \longrightarrow S \otimes_{(\phi \circ \theta), \mathcal{X}} \mathfrak{M} \simeq \mathcal{M}$ .

Puisque  $\mathfrak{M}$  est de hauteur  $h$ , tout élément  $x$  de  $\mathfrak{M}$  est tel que  $\pi^h x = \sum_{i \in I} s_i \phi(x_i)$  où  $s_i \in \mathcal{X}$  et  $x_i \in \mathfrak{M}$ , d'où on déduit que  $\sum_{i \in I} \theta(s_i) \otimes x_i \in Fil^h \mathcal{M}$  et  $\phi_h(\sum_{i \in I} s_i \otimes x_i) = (\phi_h \otimes Id)(\pi^h \otimes x) = c^h \otimes x$  ce qui montre bien que  $\phi_h(Fil^h \mathcal{M})$  engendre  $\mathcal{M}$  sur  $S$  puisque  $c \in S^*$ . On vérifie qu'on obtient ainsi un foncteur  $\Theta_h : \underline{\mathcal{M}}^h \longrightarrow \underline{\mathcal{M}}_{0,k}^h$ . On note  $\tilde{\Theta}_h = \mathcal{T}_h \circ \Theta_h$  le foncteur composé :  $\underline{\mathcal{M}}^h \longrightarrow \tilde{\underline{\mathcal{M}}}_{0,k}^h$ .

**Théorème 4.1.1.** *Le foncteur  $\Theta_h$  induit une équivalence de catégories entre  $\underline{\mathcal{M}}^h$  et  $\underline{\mathcal{M}}_{0,k}^h$  ( $0 \leq h \leq p-2$ ).*

*Preuve.* — Par (3.1.1), il suffit de montrer que le foncteur  $\tilde{\Theta}_h$  est pleinement fidèle et essentiellement surjectif.

(1) Pleine fidélité : soient  $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$  deux objets de  $\underline{\mathcal{M}}^h$ ,  $\tilde{\mathcal{M}} = \tilde{\Theta}_h(\mathfrak{M}) = k[u]/u^p \otimes_{(\phi), k} \mathfrak{M} / \pi \mathfrak{M}$ ,  $\tilde{\mathcal{N}} = \tilde{\Theta}_h(\mathfrak{N}) = k[u]/u^p \otimes_{(\phi), k} \mathfrak{N} / \pi \mathfrak{N}$  et  $f : \tilde{\mathcal{M}} \rightarrow \tilde{\mathcal{N}}$  un morphisme de  $\tilde{\underline{\mathcal{M}}}_{0,k}^h$  : nous allons montrer qu'il existe un et un seul morphisme  $\hat{f} : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$  de  $\underline{\mathcal{M}}^h$  tel que  $\tilde{\Theta}_h(\hat{f}) = f$ . Remarquons que les objets étant de hauteur inférieure ou égale à  $h$ , on a  $\tilde{\phi}_h(Fil^h \tilde{\mathcal{M}}) = \mathfrak{M} / \pi \mathfrak{M}$  et  $\tilde{\phi}_h(Fil^h \tilde{\mathcal{N}}) = \mathfrak{N} / \pi \mathfrak{N}$  et comme  $f$  laisse stable  $\tilde{\phi}_h(Fil^h)$ ,  $f$  envoie  $\mathfrak{M} / \pi \mathfrak{M}$  dans  $\mathfrak{N} / \pi \mathfrak{N}$ . Soient  $(e_1, \dots, e_d)$  une base de  $\mathfrak{M}$ ,  $(1 \otimes \tilde{e}_1, \dots, 1 \otimes \tilde{e}_d)$  la base correspondante dans  $\tilde{\mathcal{M}} = \tilde{S} \otimes_{(\phi), k} \mathfrak{M} / \pi \mathfrak{M}$  et  $\hat{f}_i$  des relevés quelconques dans  $\mathfrak{N}$  des  $f(1 \otimes \tilde{e}_i) \in 1 \otimes \mathfrak{N} / \pi \mathfrak{N}$ . Si  $M_\phi$  désigne la matrice de  $\phi$  dans  $(e_1, \dots, e_d)$  et  ${}^\tau M_\phi$  sa transposée, on a  $\pi^{h\tau} M_\phi^{-1} \in M_d(k[[\pi]])$  car

$\mathfrak{M}$  est de hauteur plus petite que  $h$  et on montre facilement que les conditions  $f(Fil^h \tilde{\mathcal{M}}) \subset Fil^h \tilde{\mathcal{N}}$  et  $f \circ \tilde{\phi}_h = \tilde{\phi}_h \circ f$  entraînent :

$$\underline{\pi}^{h\tau} M_\phi^{-1} \begin{pmatrix} \phi(\hat{f}_1) \\ \vdots \\ \phi(\hat{f}_d) \end{pmatrix} = \underline{\pi}^h \begin{pmatrix} \hat{f}_1 + \underline{\pi}y_1 \\ \vdots \\ \hat{f}_d + \underline{\pi}y_d \end{pmatrix}$$

où  $(y_1, \dots, y_d) \in \mathfrak{N}^d$ , c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} \phi(\hat{f}_1) \\ \vdots \\ \phi(\hat{f}_d) \end{pmatrix} = {}^\tau M_\phi \begin{pmatrix} \hat{f}_1 + \underline{\pi}y_1 \\ \vdots \\ \hat{f}_d + \underline{\pi}y_d \end{pmatrix}.$$

On cherche des  $\delta_i \in \mathfrak{N}$  tels que, en posant  $\hat{f}(e_i) = \hat{f}_i + \underline{\pi}\delta_i$ , on ait  $\hat{f} \circ \phi = \phi \circ \hat{f}$  ou encore :

$$\begin{pmatrix} \phi(\hat{f}(e_1)) \\ \vdots \\ \phi(\hat{f}(e_d)) \end{pmatrix} = {}^\tau M_\phi \begin{pmatrix} \hat{f}(e_1) \\ \vdots \\ \hat{f}(e_d) \end{pmatrix}.$$

On en déduit l'équation :

$$\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_d \end{pmatrix} + \underline{\pi}^{p-1\tau} M_\phi^{-1} \begin{pmatrix} \phi(\delta_1) \\ \vdots \\ \phi(\delta_d) \end{pmatrix}.$$

Mais comme  $h \leq p - 2$ , les coefficients de  $\underline{\pi}^{p-1\tau} M_\phi^{-1}$  sont tous dans  $\underline{\pi}k[[\underline{\pi}]]$  et l'unique solution est donnée par la formule :

$$\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_d \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{\infty} \underline{\pi}^{p-1\tau} M_\phi^{-1} \cdot \phi(\underline{\pi}^{p-1\tau} M_\phi^{-1}) \cdots \phi^{i-1}(\underline{\pi}^{p-1\tau} M_\phi^{-1}) \begin{pmatrix} \phi^i(y_1) \\ \vdots \\ \phi^i(y_d) \end{pmatrix}$$

qui converge bien dans  $\mathfrak{N}^d$ .

(2) Surjectivité essentielle : soit  $\tilde{\mathcal{M}}$  un objet de  $\tilde{\mathcal{M}}_{0,k}^h$ , par (3.1.2,(2)), on peut choisir une base de  $\tilde{\mathcal{M}}$  de la forme  $(1 \otimes \tilde{e}_1, \dots, 1 \otimes \tilde{e}_d)$ , avec  $\tilde{e}_i \in \tilde{\phi}_h(Fil^h \tilde{\mathcal{M}})$ . Soient  $(y_1, \dots, y_d) \in Fil^h \tilde{\mathcal{M}}$  tels que  $\tilde{\phi}_h(y_i) = 1 \otimes \tilde{e}_i$ , de (3.1.2,(1)), on déduit facilement que  $(y_1, \dots, y_d)$  engendre  $Fil^h \tilde{\mathcal{M}}$ . Soient  $N$  la matrice des  $y_i$  dans la base  $(1 \otimes \tilde{e}_1, \dots, 1 \otimes \tilde{e}_d)$  et  $\hat{N}$  une matrice quelconque de  $M_d(k[[\underline{\pi}]])$  qui relève  $N$  (par la surjection  $\sigma \circ \theta : k[[\underline{\pi}]] \rightarrow k[u]/(u^p)$  (3.1)), je dis que  $\underline{\pi}^h \hat{N}^{-1} \in M_d(k[[\underline{\pi}]])$ . En effet, puisque  $u^h \tilde{\mathcal{M}} \subset Fil^h \tilde{\mathcal{M}}$  et que  $(y_1, \dots, y_d)$  engendre  $Fil^h \tilde{\mathcal{M}}$ , on déduit l'existence d'une matrice  $M \in M_d(k[u]/(u^p))$  telle que  $M \cdot N = u^h Id$ . Si  $\hat{M}$  relève  $M$  dans  $M_d(k[[\underline{\pi}]])$ , on a donc  $\hat{M} \cdot \hat{N} = \underline{\pi}^h Id + \underline{\pi}^p \hat{P}$  pour une matrice  $\hat{P}$  de  $M_d(k[[\underline{\pi}]])$ , d'où  $\hat{M} \cdot \hat{N} = \underline{\pi}^h (Id + \underline{\pi}^{p-h} \hat{P})$ , i.e.  $\underline{\pi}^h \hat{N}^{-1} = (Id + \underline{\pi}^{p-h} \hat{P})^{-1} \cdot \hat{M} \in M_d(k[[\underline{\pi}]])$ . On pose alors  $\mathfrak{M} = \bigoplus_{i=1}^d k[[\underline{\pi}]]e_i$  avec pour  $\phi$  l'unique application semi-linéaire dont la matrice dans la base  $(e_1, \dots, e_d)$  est  $\frac{\underline{\pi}^h}{\phi^{-1}(\tilde{c}^h)} \hat{N}^{-1}$  (c.f. (3.1) pour  $\tilde{c}$ ) : on laisse

au lecteur le soin de vérifier que  $\tilde{\Theta}_h(\mathfrak{M}) \simeq \tilde{\mathfrak{M}}$ .  $\square$

Remarque : Comme les catégories  $\underline{\mathfrak{M}}^h$  sont abéliennes pour  $0 \leq h \leq p-2$  (2.3.7), on en déduit une autre démonstration du fait que les catégories  $\underline{\mathfrak{M}}_{0,k}^h$  sont abéliennes ([Br1],2.2.3.2).

4.2. Soit  $L$  une extension finie de  $K_\infty$  contenue dans  $\bar{K}_0$  et  $K_0 \subset \dots \subset L_n \subset L_{n+1} \subset \dots \subset L$  une tour croissante d'extensions finies de  $K_0$  telle que  $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} L_n = L$ . On montre que  $[L_n : K_0]$  tend  $p$ -adiquement vers 0 quand  $n \rightarrow +\infty$  ([Wi],1.4). Soient  $\mathcal{O}_{L_n}$  les entiers de  $L_n$ ,  $a = (a_n) \in \mathcal{X}_L \simeq (\varprojlim (\mathcal{O}_{L_n} \setminus \{0\})) \cup \{0\}$  (1.1) et  $m \in \mathbf{N}$ , pour  $n \gg 0$ ,  $[L_n : K_0]/p^m$  est défini et on montre que la suite  $(\bar{a}_n^{[L_n:K_0]/p^m})$  est constante dans  $\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\mathcal{O}_{\bar{K}_0}$  à partir d'un certain rang, de valeur limite  $r_m(a)$  indépendante de la tour  $(L_n)$  choisie ([Wi],4.2.1). Comme il est clair que  $r_{m+1}(a)^p = r_m(a)$ ,  $(r_m(a))_{m \in \mathbf{N}} \in R$  (3.2) et définit ainsi une application  $\mathcal{X}_L \rightarrow R$ . Par ([Wi],4.2.1) et ([Wi],4.1.4.2), c'est un homomorphisme injectif de  $k$ -algèbres. Par passage à la limite inductive, on obtient ainsi un homomorphisme injectif canonique de  $k$ -algèbres  $\iota : \mathcal{X}^s \hookrightarrow R$  compatible avec l'action de  $H_\infty$  et qui envoie l'élément  $\underline{\pi}$  de  $\mathcal{X}^s$  (2.1) vers l'élément  $\underline{\pi}$  de  $R$  (3.2).

**Proposition 4.2.1.** *Soit  $h \in \{0, \dots, p-2\}$  et  $\mathfrak{M}$  un objet de  $\underline{\mathfrak{M}}^h$ , on a un isomorphisme  $\mathbf{F}_p$ -linéaire canonique et fonctoriel compatible à l'action de  $H_\infty$  :*

$$\mathrm{Hom}_\phi(\mathfrak{M}, \mathcal{X}^s) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fil}^h, \phi_h}(\Theta_h(\mathfrak{M}), R^{DP}).$$

En d'autres termes,  $T_{st,h}^* \circ \Theta_h \simeq T_h^*$ .

*Preuve.* — Notons  $\eta$  la composée  $\mathcal{X}^s \xrightarrow{\iota} R \rightarrow R^{DP}$ . Si  $f \in \mathrm{Hom}_\phi(\mathfrak{M}, \mathcal{X}^s)$ , on lui associe l'unique application  $S$ -linéaire  $\chi(f)$  de  $\Theta_h(\mathfrak{M}) \simeq S \otimes_{(\phi \circ \theta), \mathcal{X}} \mathfrak{M}$  dans  $R^{DP}$  telle que  $\chi(f)(1 \otimes x) = \phi(\eta(f(x)))$ . Comme  $\phi$  et  $\eta$  commutent à l'action de  $H_\infty$ , on a clairement  $\chi(g(f)) = g(\chi(f))$ ,  $\forall g \in H_\infty$ . Soit  $\sum s_i \otimes x_i \in \mathrm{Fil}^h \Theta_h(\mathfrak{M})$  ( $s_i \in S$ ,  $x_i \in \mathfrak{M}$ ). Quitte à retrancher de  $s_i$  un élément de  $\mathrm{Fil}^p S$ , on peut supposer  $s_i \in k[u]/(u^p) \hookrightarrow S$  et si  $\hat{s}_i$  en désigne un relèvement quelconque dans  $\mathcal{X} = k[[\underline{\pi}]]$  (par la surjection  $\sigma \circ \theta : k[[\underline{\pi}]] \rightarrow k[u]/u^p$  (3.1)), il est facile de voir qu'on a  $\sum \hat{s}_i \phi(x_i) = \underline{\pi}^h x$  pour un  $x \in \mathfrak{M}$ , d'où :

$$\begin{aligned} \chi(f)\left(\sum s_i \otimes x_i\right) &= \sum s_i \phi(\eta(f(x_i))) \\ &= \eta\left(\sum \hat{s}_i \phi(f(x_i))\right) \\ &= \eta\left(f\left(\sum \hat{s}_i \phi(x_i)\right)\right) \\ &= \underline{\pi}^h \eta(f(x)) \in \mathrm{Fil}^h R^{DP}. \end{aligned}$$

Donc  $\chi(f)$  préserve  $Fil^h$  et  $\phi_h(\chi(f)(\sum s_i \otimes x_i)) = c^h \phi(\eta(f(x)))$ . Mais :

$$\begin{aligned} \chi(f)(\phi_h(\sum s_i \otimes x_i)) &= \chi(f)((\phi_h \otimes Id)(\sum s_i \otimes \phi(x_i))) \quad (\text{c.f.}(4.1)) \\ &= \chi(f)((\phi_h \otimes Id)(u^h \otimes x)) \\ &= \chi(f)(c^h \otimes x) \\ &= c^h \phi(\eta(f(x))). \end{aligned}$$

Donc  $\chi(f) \in Hom_{Fil^h, \phi_h}(\Theta_h(\mathfrak{M}), R^{DP})$ . Pour montrer l'isomorphisme, il suffit de montrer l'injectivité puisque par (2.3.1), (2.3.3) et (3.2.1) les deux  $\mathbf{F}_p$ -espaces vectoriels ont la même dimension. Comme  $Ker(\phi \circ \eta) = \pi \mathcal{X}^s$ , si on suppose  $\chi(f) = 0$  on a  $f(x) \in \pi \mathcal{X}^s$  pour tout  $x \in \mathfrak{M}$ . Comme  $\mathfrak{M}$  est de hauteur  $h \leq p-2$ , on en déduit facilement  $f(x) \in \pi^{p-h} \mathcal{X}^s \subset \pi^2 \mathcal{X}^s$ ,  $\forall x \in \mathfrak{M}$ , puis  $f(x) \in \pi^{2p-h} \mathcal{X}^s$ , etc... Une récurrence facile donne donc  $f(x) = 0$  pour tout  $x$  d'où le résultat.  $\square$

En mettant bout à bout (2.3.8), (4.1.1) et (4.2.1), on obtient le :

**Corollaire 4.2.2.** *Le foncteur  $T_{st,h}^* : \underline{\mathcal{M}}_{0,k}^h \rightarrow \underline{Rep}_{\mathbf{F}_p}(H_\infty)$  est exact et pleinement fidèle. Son image essentielle est stable par sous-objet et quotient ( $0 \leq h \leq p-2$ ).*

Remarque : La pleine fidélité dans la preuve du théorème (4.1.1) découle aussi de (2.3.8), (4.2.1) et de la surjectivité essentielle.

4.3. On termine cette section par quelques remarques d'ordre spéculatif.

Comme le lecteur l'aura sûrement remarqué, il y a des chances pour que la théorie précédente s'étendent au cas de  $p$ -torsion, vraisemblablement en remplaçant  $k[[\pi]]$  par  $W[[\pi]]$ ,  $R$  (ou  $\mathcal{X}^s$ ) par  $W(R)$ ,  $\underline{\mathcal{M}}_{0,k}^h$  par  $\underline{\mathcal{M}}_0^h$  ([Br1],2) et en définissant correctement la notion de hauteur. Cela dit, le cas tué par  $p$  est à la fois simple et suffisant pour l'application qui suit, et c'est pourquoi nous nous y sommes limités.

Du côté "module filtré", on passe de représentations de  $H_\infty$  à des représentations de tout le groupe de Galois en rajoutant un opérateur  $N$  sur les objets de  $\underline{\mathcal{M}}_{0,k}^h$  (on obtient une catégorie notée  $\underline{\mathcal{M}}_k^h$  dans [Br1]). Dans l'esprit de [Fo1], on peut se demander s'il n'est pas possible de généraliser (4.1.1) à  $\underline{\mathcal{M}}_k^h$  en rajoutant sur les objets de  $\underline{\mathfrak{M}}^h$  une action semi-linéaire de  $Gal(K_\infty(\sqrt[p^{-\infty}]{1})/K_0)$  triviale sur  $Gal(K_\infty(\sqrt[p^{-\infty}]{1})/K_\infty)$ , quitte à étendre les scalaires à l'anneau de valuation du corps des normes de  $K_\infty(\sqrt[p^{-\infty}]{1})$ .

On peut aussi s'attendre à des résultats dans le cas où on travaille sur une base ramifiée  $K$ , ou plutôt sur l'anneau de ses entiers  $\mathcal{O}_K$ , et non plus sur  $K_0$  ou

$W$ . Par exemple, on peut généraliser la définition des catégories  $\underline{\mathcal{M}}_{0,k}^h$  (voir [Br3] pour le cas  $h = 1, p \geq 3$ ) ainsi que l'équivalence de catégories (4.1.1) sans restriction sur l'indice de ramification  $e$  (en définissant convenablement la hauteur). Les catégories ne sont plus alors forcément abéliennes et, bien sûr, on perd certaines propriétés de pleine fidélité si  $e$  est trop grand.

Enfin, dans [Br2], on construit des objets de  $\underline{\mathcal{M}}_{0,k}^h$  d'origine géométrique (par voie cohomologique) donc, par (4.1.1), des objets de  $\underline{\mathfrak{M}}^h$  d'origine géométrique. Il serait intéressant d'avoir une interprétation cohomologique directe, si une telle interprétation existe, de tels objets de  $\underline{\mathfrak{M}}^h$ .

## 5. APPLICATION À CERTAINES REPRÉSENTATIONS CRISTAL-LINES

Soient  $G = Gal(\bar{K}_0/K_0)$ ,  $L$  une extension totalement ramifiée de  $K_0$  dans  $\bar{K}_0$ ,  $G_L = Gal(\bar{K}_0/L)$ ,  $\underline{Rep}_{cris}(G)$  la catégorie des représentations cristallines de  $G$  ([Fo2],5.1.4) et  $\underline{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(G_L)$  la catégorie des représentations linéaires continues de  $G_L$  sur un  $\mathbf{Q}_p$ -espace vectoriel de dimension finie. Si  $[L : K_0] < +\infty$ , le foncteur restriction :  $\underline{Rep}_{cris}(G) \rightarrow \underline{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(G_L)$  est pleinement fidèle (et d'image essentielle contenue dans  $\underline{Rep}_{cris}(G_L)$ ) : cela se voit immédiatement à partir de la classification des représentations cristallines en termes de modules filtrés admissibles ([Fo2],5.3.5). En revanche, si  $[L : K_0] = +\infty$ , le foncteur  $\underline{Rep}_{cris}(G) \rightarrow \underline{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(G_L)$  n'est plus pleinement fidèle en général (voir contre-exemple avec la tour cyclotomique en introduction). Nous montrons ici, comme application de ce qui précède, que la pleine fidélité est conservée lorsque  $L = K_\infty$ , au moins pour une sous-catégorie pleine de  $\underline{Rep}_{cris}(G)$ .

On fixe deux entiers  $g$  et  $h$  tels que  $0 \leq h - g \leq p - 2$  et on note  $\underline{Rep}_{cris}^{[g,h]}(G)$  la sous-catégorie pleine de  $\underline{Rep}_{cris}(G)$  formée des représentations cristallines à poids de Hodge-Tate entre  $g$  et  $h$  ([Il],1.3.3). On rappelle la définition de la catégorie abélienne  $\underline{MF}_k^{f,h}$ ,  $0 \leq h \leq p - 2$  ([FL],3.2) : les objets sont la donnée :

- d'un  $k$ -espace vectoriel de dimension finie  $M$
- d'une filtration de  $M$  par des sous- $k$ -espaces vectoriels  $(Fil^i M)_{i \in \mathbf{Z}}$  telle que  $Fil^i M = M$  pour  $i \leq 0$  et  $Fil^i M = 0$  pour  $i \geq h + 1$
- pour chaque entier  $i$ , d'une application semi-linéaire  $\phi_i : Fil^i M \rightarrow M$ , ces applications étant telles que  $\phi_i|_{Fil^{i+1}M} = 0$  et  $\sum Im \phi_i = M$ .

Les flèches sont les applications  $k$ -linéaires compatibles avec la filtration et qui commutent aux  $\phi_i$ . On a un foncteur exact et pleinement fidèle  $\underline{MF}_k^{f,h} \rightarrow \underline{Rep}_{\mathbf{F}_p}(G)$  défini par  $M \mapsto Hom_{Fil, \phi}(M, R^{DP})$  ([FL],6.1) ou ([Br1],3.2.1)). Soit  $\mathcal{F}_h : \underline{MF}_k^{f,h} \rightarrow \underline{\mathcal{M}}_{0,k}^h$  le foncteur qui à  $M$  associe  $(\mathcal{M} = S \otimes_k M, Fil^h \mathcal{M} =$

$\sum_{i=0}^h \text{Fil}^i S \otimes_k \text{Fil}^{h-i} M, \phi_h = \sum_{i=0}^h \phi_i \otimes \phi_{h-i}$ , on vérifie qu'on a un isomorphisme  $\text{Hom}_{\text{Fil}, \phi}(M, R^{DP}) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\text{Fil}^h, \phi_h}(\mathcal{F}_h(M), R^{DP}) = T_{st, h}^*(\mathcal{F}_h(M))$  dans  $\underline{\text{Rep}}_{\mathbf{F}_p}(H_\infty)$  (même preuve que ([Br1], 3.2.1.1)).

**Lemme 5.1.** *Le foncteur  $\mathcal{F}_h$  est pleinement fidèle et son image essentielle est stable par sous-objet et quotient ( $0 \leq h \leq p-2$ ).*

*Preuve.* — Soient  $M, M' \in \underline{MF}_k^{f, h}$  et  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{M}_{0, k}^h}(\mathcal{F}_h(M), \mathcal{F}_h(M'))$ , il suffit de montrer  $f(M) \subset M'$  pour la pleine fidélité. Mais si  $x \in \text{Fil}^i M$  :

$$f(1 \otimes \phi_i(x)) = f\left(\frac{1}{c^{h-i}} \phi_h(u^{h-i} \otimes x)\right) = \frac{1}{c^{h-i}} \phi_h(u^{h-i} f(1 \otimes x))$$

donc  $f(1 \otimes \phi_i(x)) \in k[\gamma_p(u)] \otimes_k M'$  et comme  $M = \sum \phi_i(\text{Fil}^i M)$ , on a  $f(M) \subset k[\gamma_p(u)] \otimes_k M'$ . Mais alors  $\frac{1}{c^{h-i}} \phi_h(u^{h-i} f(1 \otimes x)) \in M'$  puisque  $\phi_i(\gamma_p(u)) = 0$ , donc  $f(1 \otimes \phi_i(x)) \in M' \forall x \in M$ , d'où  $f(M) \subset M'$ . Pour le reste, il suffit de montrer que les objets simples de  $\underline{MF}_k^{f, h}$  et  $\mathcal{M}_{0, k}^h$  se correspondent par  $\mathcal{F}_h$  et la même preuve qu'en ([Br1], 2.4.2) s'applique.  $\square$

**Théorème 5.2.** *Le foncteur restriction  $\underline{\text{Rep}}_{\text{cris}}^{[g, h]}(G) \rightarrow \underline{\text{Rep}}_{\mathbf{Q}_p}(H_\infty)$  est pleinement fidèle. Son image essentielle est stable par sous-objet et quotient.*

*Preuve.* — Quitte à remplacer une représentation  $V$  par sa tordue “à la Tate”  $V(-g)$ , on se ramène au cas  $g = 0$ ,  $0 \leq h \leq p-2$ . Commençons par la pleine fidélité : soient  $V, V' \in \underline{\text{Rep}}_{\text{cris}}^{[0, h]}(G)$ ,  $D = D_{\text{cris}}(V)^*$  et  $D' = D_{\text{cris}}(V')^*$  ([Fo2], 5.1.4 et 5.3.7),  $D$  et  $D'$  sont admissibles ([Fo2], 5.3.3), donc faiblement admissibles ([Fo2], 5.4.2) et par ([La], 3.2) contiennent des réseaux fortement divisibles ([La], 3.1) qui correspondent à deux  $\mathbf{Z}_p$ -réseaux  $T \subset V$  et  $T' \subset V'$  stables par  $G$  ([FL], 7.14). Comme  $\text{Hom}_G(V, V') = \text{Hom}_G(T, T') \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Q}_p$  (resp.  $\text{Hom}_{H_\infty}(V, V') = \text{Hom}_{H_\infty}(T, T') \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Q}_p$ ), il suffit de montrer  $\text{Hom}_G(T, T') = \text{Hom}_{H_\infty}(T, T')$ . Soit  $\underline{\text{Rep}}_{\mathbf{F}_p, \text{cris}}^{[0, h]}(G)$  l'image essentielle de la catégorie  $\underline{MF}_k^{f, h}$  par le foncteur  $M \mapsto \text{Hom}_{\text{Fil}, \phi}(M, R^{DP})$ , par un dévissage standard il suffit de montrer que la restriction  $\underline{\text{Rep}}_{\mathbf{F}_p, \text{cris}}^{[0, h]}(G) \rightarrow \underline{\text{Rep}}_{\mathbf{F}_p}(H_\infty)$  est pleinement fidèle. Mais le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \underline{MF}_k^{f, h} & \xrightarrow{\sim} & \underline{\text{Rep}}_{\mathbf{F}_p, \text{cris}}^{[0, h]}(G) \\ \mathcal{F}_h \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M}_{0, k}^h & \xrightarrow{T_{st, h}^*} & \underline{\text{Rep}}_{\mathbf{F}_p}(H_\infty) \end{array}$$

étant commutatif, cela se déduit de (5.1) et (4.2.2).

Soient  $V \in \underline{\text{Rep}}_{\text{cris}}^{[0, h]}(G)$ ,  $T$  comme précédemment,  $V' \subset V$  dans  $\underline{\text{Rep}}_{\mathbf{Q}_p}(H_\infty)$  et  $T' = V' \cap T$ . Par (4.2.2) et (5.1), l'image essentielle de  $\underline{\text{Rep}}_{\mathbf{F}_p, \text{cris}}^{[0, h]}(G)$  dans  $\underline{\text{Rep}}_{\mathbf{F}_p}(H_\infty)$  est stable par sous-objet et quotient. Donc tout sous-module de  $T/pT$  stable par  $H_\infty$  est en fait stable par  $G$ . Par un dévissage, on en déduit que pour

$n \in \mathbf{N}^*$ , tout sous-module de  $T/p^n T$  stable par  $H_\infty$  est stable par  $G$ , d'où  $T'$ , puis  $V'$ , stables par  $G$ . Soient  $V \in \underline{Rep}_{cris}^{[0,h]}(G)$  et  $V \rightarrow V'$  une surjection dans  $\underline{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(H_\infty)$ , en appliquant ce qui précède à  $\text{Ker}(V \rightarrow V') \subset V$ , c'est une surjection dans  $\underline{Rep}_{cris}^{[0,h]}(G)$ .  $\square$

Remarque 1 : Comme d'habitude, on peut s'attendre à ce que ce résultat soit vrai sans restriction ni sur les poids de Hodge-Tate ni sur la ramification (i.e.  $K_0$  remplacé par une extension finie totalement ramifiée  $K$ ).

Remarque 2 : Ce résultat ne s'étend pas aux représentations semi-stables quelconques ([Fo2],5.1.4), car la tour  $K_\infty$  y joue un rôle important. Soit  $T = \varprojlim \mu_{p^n}(\bar{K}_0/\pi^{\mathbf{Z}})$  le module de Tate de la courbe elliptique de Tate,  $V = \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} T$  est semi-stable et donne lieu à une extension non scindée  $0 \rightarrow \mathbf{Q}_p(1) \rightarrow V \rightarrow \mathbf{Q}_p \rightarrow 0$  qui devient triviale sur  $K_\infty$ .

Enfin, on a aussi :

**Proposition 5.3.** *Soit  $V$  une représentation de  $\underline{Rep}_{cris}^{[g,h]}(G)$ , alors  $V$  est irréductible modulo  $p$  si et seulement si  $V$  l'est en tant que représentation de  $H_\infty$ .*

*Preuve.* — Exercice.  $\square$

## RÉFÉRENCES

- [BO] Berthelot P., Ogus A., *Notes on crystalline cohomology*, Princeton University Press, Princeton, 1978.
- [Br1] Breuil C., *Construction de représentations  $p$ -adiques semi-stables*, à paraître aux Ann. Scient. de l'E.N.S.
- [Br2] Breuil C., *Cohomologie étale de  $p$ -torsion et cohomologie cristalline en réduction semi-stable*, à paraître à Duke Math. J.
- [Br3] Breuil C., *Schémas en groupes sur un anneau de valuation discrète complet très ramifié, en préparation.*
- [Co] Colmez P., *Représentations cristallines et représentations de hauteur finie*, preprint du LMENS, 1997.
- [Fo1] Fontaine J.-M., *Représentations  $p$ -adiques des corps locaux*, Grothendieck Festschrift II, Birkhauser, 1991, 249-309.
- [Fo2] Fontaine J.-M., *Représentations  $p$ -adiques semi-stables*, Astérisque 223, Soc. Math. de France, 1994, 113-184.
- [FL] Fontaine J.-M., Laffaille G., *Construction de représentations  $p$ -adiques*, Ann. Scient. E.N.S. 15, 1982, 547-608.
- [Il] Illusie L., *Cohomologie de de Rham et cohomologie étale  $p$ -adique [d'après G. Faltings, J.M. Fontaine et al.]*, Séminaire Bourbaki 726, juin 1990.
- [La] Laffaille G., *Groupes  $p$ -divisibles et modules filtrés : le cas peu ramifié*, Bull. Soc. math. France 108, 1980, 187-206.

- [Se] Serre J.-P., *Corps locaux*, 3<sup>ième</sup> édition, Hermann, 1968.
- [Wa1] Wach N., *Représentations  $p$ -adiques potentiellement cristallines*, Bull. Soc. math. France 124, 1996, 375-400.
- [Wa2] Wach N., *Représentations cristallines de torsion*, Comp. Math. 108, 1997, 185-240.
- [Wi] Wintenberger J.-P., *Le corps des normes de certaines extensions infinies de corps locaux ; applications*, Ann. Scient. E.N.S. 16, 1983, 59-89.