INDUCTION PARABOLIQUE ET (φ, Γ)-MODULES

par

Christophe Breuil

Résumé. — Soit L une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ et B un sous-groupe de Borel d'un groupe réductif déployé connexe G sur L de centre connexe. On définit un foncteur contravariant et exact à droite de la catégorie des représentations lisses de $B(L)$ sur $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ vers la catégorie des limites projectives de (φ, Γ)-modules étales (pour $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$) sur $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$. On montre que ce foncteur est insensible à l'induction parabolique et que, restreint aux représentations de longueur finie dont les constituants sont des sous-quotients de séries principales, il est exact et donne de "vrais" (φ, Γ)-modules. Par passage à la limite projective, on en déduit que, convenablement normalisé, il envoie la $G(\mathbb{Q}_p)$-représentation $\Pi(\rho)^{\mathrm{ord}}$ de [**5**] vers le (φ, Γ)-module de la représentation $\big(L^{\otimes}|_{\widehat{B}_{C_\rho}}\big)^{\mathrm{ord}} \circ \rho$ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$, reliant ainsi les deux constructions de [**5**].

Abstract. — Let L be a finite extension of $\mathbb{Q}_p$ and B a Borel subgroup of a split reductive connected algebraic group G over L with a connected center. We define a right exact contravariant functor from the category of smooth representations of $B(L)$ over $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ to the category of projective limits of étale (φ, Γ)-modules (for $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$) over $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$. We show that this functor is insensitive to parabolic induction and that, when restricted to finite length representations with all constituents being subquotients of principal series, it is exact and yields "genuine" (φ, Γ)-modules. By a projective limit process, we deduce that, conveniently normalized, it sends the $G(\mathbb{Q}_p)$-representation $\Pi(\rho)^{\mathrm{ord}}$ of [**5**] to the (φ, Γ)-module of the representation $\big(L^{\otimes}|_{\widehat{B}_{C_\rho}}\big)^{\mathrm{ord}} \circ \rho$ of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$, thus connecting the two constructions of [**5**].

Je remercie pour leur soutien le CNRS, l'université Paris-Sud et le projet ThéHopaD ANR-2011-BS01-005. Je remercie Benjamin Schraen et Stefano Morra pour m'avoir informé de leurs travaux en cours ([**22**], [**18**]) qui, avec l'article [**21**] de Benjamin Schraen, ont joué un rôle très important dans la gestation de cet article. Le travail en collaboration avec Florian Herzig ([**5**]) ainsi que les dévissages astucieux de Julien Hauseux ([**15**]) ont aussi eu une influence décisive.

Table des matières

1. Introduction

Soit p un nombre premier, L une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ et B un sous-groupe de Borel d'un groupe algébrique réductif déployé connexe G sur L de centre connexe. L'objectif de cet article est d'une part de construire un foncteur de la catégorie des représentations lisses de $B(L)$ sur des $\mathcal{O}_E/(\varpi_E^m)$-modules (où E est une extension finie quelconque de $\mathbb{Q}_p$ d'anneau d'entiers $\mathcal{O}_E$, $\varpi_E\in\mathcal{O}_E$ une uniformisante et $m\geq 1$ un entier fixé) vers les pro-(φ,Γ)-modules étales sur $\mathcal{O}_E/(\varpi_E^m)$ (= les limites projectives de (φ,Γ)-modules étales usuels pour $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ à coefficients dans $\mathcal{O}_E/(\varpi_E^m)$), d'autre part de montrer que ce foncteur, convenablement tordu et après un passage à la limite projective, envoie la $G(\mathbb{Q}_p)$-représentation $\Pi(\rho)^{\mathrm{ord}}$ de [**5**, § 3.4] (pour ρ une représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ sur E "générique ordinaire" comme dans *loc.cit.*) vers le (φ,Γ)-module du dual de la représentation $\big(L^{\otimes}|_{\widehat{B}_{C_\rho}}\big)^{\mathrm{ord}}\circ\rho$ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ ([**5**, § 2.5]), réalisant ainsi l'un des espoirs de [**5**].

Rappelons brièvement l'histoire, encore courte, du sujet. Il a été très tôt remarqué (voir e.g. [**4**]) que la correspondance de Langlands modulo p pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ devait attacher aux représentations réductibles de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ des représentations lisses de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *également réductibles* et génériquement de longueur 2 (en fait des extensions - éventuellement scindées - entre deux séries principales), montrant ainsi une différence fondamentale d'avec la correspondance locale classique. Ce phénomène a été expliqué par Colmez qui a construit dans [**7**] un *foncteur* exact de la catégorie des représentations lisses de longueur finie de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur des $\mathcal{O}_E/(\varpi_E^m)$-modules (la définition ne nécessite en fait que l'action du Borel $B(\mathbb{Q}_p)$) vers la catégorie des (φ,Γ)-modules étales sur $\mathcal{O}_E/(\varpi_E^m)$, qui elle-même par un résultat de Fontaine ([**13**]) est équivalente à la catégorie des représentations de longueur finie de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ sur des $\mathcal{O}_E/(\varpi_E^m)$-modules. Ce foncteur exact envoie une série principale de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ vers un caractère de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$, et donc une extension entre deux séries principales vers une représentation réductible de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$. Un peu plus tard, dans [**20**], Schneider et Vignéras ont proposé un δ-foncteur étendant les constructions de [**7**] à un groupe algébrique réductif déployé connexe G comme au début, mais à valeurs dans des catégories de (φ,Γ)-modules à plusieurs variables. Malgré quelques résultats (voir e.g. [**25**], [**19**]), le δ-foncteur de Schneider et Vignéras reste à ce jour plutôt mystérieux.

Dans [**5**], les auteurs ont associé à une représentation modulo p (resp. p-adique) suffisamment générique ρ de dimension n de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ à valeurs dans le Borel une représentation modulo p (resp. continue unitaire p-adique) de longueur finie $\Pi(\rho)^{\mathrm{ord}}$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ dont les constituants sont tous des séries principales (en fait la construction de $\Pi(\rho)^{\mathrm{ord}}$ est valable avec un groupe réductif déployé connexe de centre connexe et de dual de centre connexe). La bonne représentation $\Pi(\rho)$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ associée à ρ par une hypothétique correspondance locale modulo p (resp. p-adique) n'est pas connue si $n > 2$, mais $\Pi(\rho)^{\mathrm{ord}}$ devrait être sa plus grande sous-représentation formée de séries principales. On sait par exemple dans de nombreux cas que $\Pi(\rho)^{\mathrm{ord}}$ apparaît dans des espaces de formes automorphes modulo p (resp. p-adiques), cf. [**5**, § 4] ou [**2**]. Un point fondamental est que la construction de $\Pi(\rho)^{\mathrm{ord}}$ semble fonctoriellement reliée plutôt à une sous-représentation explicite de la représentation galoisienne $\otimes_{i=1}^{n-1}\bigwedge^i\rho$ qu'à la représentation ρ elle-même (si $n > 2$). Une question ouverte posée dans [**5**, § 3.5] est de savoir s'il existe un foncteur exact généralisant le foncteur défini par Colmez pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et qui envoie $\Pi(\rho)^{\mathrm{ord}}$ sur le (φ,Γ)-module de cette sous-représentation (à torsion près par un caractère). Il n'est pas clair que le δ-foncteur de Schneider-Vignéras, au moins tel que, satisfasse cette condition.

Dans le présent article, on propose une nouvelle généralisation du foncteur de Colmez, dont la définition est relativement simple et naturelle, et qui envoie bien $\Pi(\rho)^{\mathrm{ord}}$ sur le (φ,Γ)-module de la sous-représentation voulue de $\otimes_{i=1}^{n-1}\bigwedge^i\rho$ (à twist près). En général ce foncteur est à valeurs dans les pro-(φ,Γ)-modules étales de Fontaine. Ses relations avec le δ-foncteur de Schneider-Vignéras ont commencé à être étudiées par Erdélyi et Zábrádi ([**12**]).

Expliquons brièvement la définition du foncteur de cet article, qui combine des idées de Colmez ([**7**]), Emerton ([**10**], [**11**]), Schneider-Vignéras ([**20**]) et Schraen ([**21**], [**22**]). Soit N le radical unipotent de B, on choisit d'abord un sous-groupe ouvert compact N_0 de $N(L)$ totalement décomposé (cf. § 3), un morphisme de groupes algébriques $\ell : N \to \mathbb{G}_{\mathrm{a}}$ qui se factorise par $\prod_{\alpha\in S} N_\alpha$ et qui est non nul sur chaque facteur N_α (où S désigne les racines simples de (G,B,T) et $N_\alpha \subseteq N$ le sous-groupe radiciel de la racine α) et des cocaractères fondamentaux $(\lambda_{\alpha^\vee})_{\alpha\in S} \in X^\vee(T)^S$ (qui existent car G est de centre connexe). Soit $N_1 = \mathrm{Ker}\big(N_0 \overset{\ell}{\to} L \overset{\mathrm{Tr}_{L/\mathbb{Q}_p}}{\longrightarrow} \mathbb{Q}_p\big)$ et $\xi = \sum_{\alpha\in S}\lambda_{\alpha^\vee} \in X^\vee(T)$. Si π est une représentation lisse de $B(L)$ sur un $\mathcal{O}_E/(\varpi_E^m)$-module, alors π^{N_1}

est naturellement muni d'une structure de $\mathcal{O}_E/(\varpi_E^m)[[N_0/N_1]] \cong \mathcal{O}_E/(\varpi_E^m)[[X]]$-module, d'une action lisse de $\mathbb{Z}_p^\times$ via l'action de $\xi(\mathbb{Z}_p^\times)$ sur π (qui préserve π^{N_1}) et d'un endomorphisme $\mathcal{O}_E/(\varpi_E^m)[[X]]$-semi-linéaire F donné par l'action de Hecke de $\xi(p)$ sur π^{N_1} à la manière de [**11**] (mais avec N_1 au lieu de N_0). Si $M \subseteq \pi^{N_1}$ est un sous-$\mathcal{O}_E/(\varpi_E^m)[[X]][F]$-module de type fini qui est admissible comme $\mathcal{O}_E/(\varpi_E^m)[[X]]$-module (i.e. tel que $\{m \in M,\ Xm = 0\}$ est un $\mathcal{O}_E/(\varpi_E^m)$-module de type fini) et stable par $\mathbb{Z}_p^\times$, alors la même preuve que dans [**7**] montre que $M^\vee[1/X] = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E/(\varpi_E^m)}\big(M, \mathcal{O}_E/(\varpi_E^m)\big)[1/X]$ est naturellement muni d'une structure de (φ,Γ)-module étale sur $\mathcal{O}_E/(\varpi_E^m)$. On définit alors (voir § 3) :

$$D_\xi^\vee(\pi) \overset{\text{déf}}{=} \varprojlim_M \Big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E/(\varpi_E^m)}\big(M, \mathcal{O}_E/(\varpi_E^m)\big)[1/X]\Big)$$

la limite projective étant prise sur les sous-$\mathcal{O}_E/(\varpi_E^m)[[X]][F]$-modules de type fini M de π^{N_1} admissibles comme $\mathcal{O}_E/(\varpi_E^m)[[X]]$-modules et stables par $\mathbb{Z}_p^\times$.

Alternativement, on peut définir $D_\xi^\vee(\pi)$ comme la limite projective des $\mathcal{O}_E/(\varpi_E^m)[[X]][1/X]$-modules quotients de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E/(\varpi_E^m)}\big(\pi^{N_1}, \mathcal{O}_E/(\varpi_E^m)\big)[1/X]$ qui sont des (φ,Γ)-modules étales, voir le (iii) de la Remarque 5.6.

Cette définition, assez simple et directe, a quelques inconvénients, par exemple j'ignore en général quand $D_\xi^\vee(\pi)$ est non nul ou quand c'est un "vrai" (φ,Γ)-module (étale). Par ailleurs, contrairement au cas de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, il est impossible en général de retrouver π à partir de $D_\xi^\vee(\pi)$, comme le montre déjà le cas des séries principales (cf. Exemple 7.6). Mais elle a aussi des avantages car elle permet de montrer les résultats suivants :

(i) $D_\xi^\vee$ transforme une suite exacte $0 \to \pi' \to \pi \to \pi''$ de représentations lisses de $B(L)$ en une suite exacte $D_\xi^\vee(\pi'') \to D_\xi^\vee(\pi) \to D_\xi^\vee(\pi') \to 0$ (i.e. $D_\xi^\vee$ est contravariant exact à droite), cf. Proposition 3.2;

(ii) $D_\xi^\vee$ est insensible aux inductions paraboliques, i.e. $D_\xi^\vee\big(\mathrm{Ind}_{P^-(L)}^{G(L)}\pi_P\big) \cong D_\xi^\vee(\pi_P)$ où P est un parabolique de G contenant B, P^- le parabolique opposé et π_P une représentation lisse du Levi $L_P(L)$, cf. Théorème 6.1;

(iii) $D_\xi^\vee$ est exact et donne de "vrais" (φ,Γ)-modules étales lorsque restreint à la catégorie abélienne des représentations de longueur finie de $G(L)$ dont les constituants sont des sous-quotients de séries principales, cf. Corollaire 9.3.

(Et bien sûr $D_\xi^\vee$ ne dépend à isomorphisme près que de ξ, cf. § 4, et coïncide à normalisation près avec le foncteur défini par Colmez dans [**7**] lorsque $G(L) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, cf. Proposition 3.2). Par un passage à la limite projective, la propriété (iii) permet d'étendre facilement $D_\xi^\vee$ à la catégorie abélienne des représentations continues unitaires topologiquement de longueur finie de $G(L)$ sur E dont les constituants sont des sous-quotients de séries principales continues unitaires, cf. § 9. Une motivation à l'origine de la définition de $D_\xi^\vee$ ci-dessus est de se débarrasser des constructions par "intersection" dont le comportement par suite exacte courte semble en général problématique, cf. par exemple [**20**, § 2]. Une deuxième motivation provient des calculs de Schraen et Morra ([**18**], [**22**], cf. la Remarque 3.3). Une troisième motivation est la propriété (ii) ci-dessus, suggérée par les constructions de [**5**]. En fait, les propriétés (ii) et (iii), combinées avec une compatibilité de $D_\xi^\vee$ au produit tensoriel (dont la preuve occupe le § 5, cf. Proposition 5.5) et un passage à la limite projective, permettent de répondre à une question importante de [**5**, § 3.5] qui avait motivé les constructions de *loc.cit.* (on renvoie au § 9 pour plus de détails et pour un énoncé totalement précis) :

Théorème 1.1 **(cf. Corollaire 9.8)**. — *Supposons que $L=\mathbb{Q}_p$ et que le dual $\widehat{G}$ de G a un centre connexe. Soit :*

$$\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \longrightarrow \widehat{B}(E)$$

une représentation continue générique au sens de [**5**, § 3.3] *où $\widehat{B}$ est le Borel dual de B et soit $\Pi(\rho)^{\mathrm{ord}}$ la représentation de $G(\mathbb{Q}_p)$ associée à ρ construite dans* [**5**, § 3.3] *(extension successive convenable de séries principales continues unitaires). Alors à torsion près on a un isomorphisme de (φ,Γ)-modules étales sur E :*

$$D_\xi^\vee\big(\Pi(\rho)^{\mathrm{ord}}\big) \cong (\varphi,\Gamma) - \text{module du dual de } \Big(\big(L^\otimes|_{\widehat{B}_{C_\rho}}\big)^{\mathrm{ord}} \circ \rho\Big)$$

où $L^\otimes$ est le produit tensoriel des représentations algébriques fondamentales de G sur E, $\widehat{B}_{C_\rho}$ le plus petit sous-groupe fermé de $\widehat{B}$ contenant l'image de ρ et $\big(L^\otimes|_{\widehat{B}_{C_\rho}}\big)^{\mathrm{ord}}$ la "partie ordinaire" de $L^\otimes|_{\widehat{B}_{C_\rho}}$ (cf. [**5**, § 2.3]*).*

La même preuve (en plus simple) donne également une version en caractéristique p de ce théorème.

Bien entendu, on ne peut guère espérer faire de progrès substantiels sur $D_\xi^\vee$ sans avancer dans la compréhension des supersingulières de $G(L)$ sur $\mathcal{O}_E/(\varpi_E)$ lorsque $G(L) \neq \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, comme le montre par exemple la propriété (ii) précédente combinée avec le résultat principal de [**1**], [**16**] (cf. aussi la Remarque 8.7 et [**18**]). On peut par contre poser plusieurs questions naturelles sur le foncteur $D_\xi^\vee$, voir la Remarque 3.3 pour deux d'entre elles. Je mentionnerai ici juste le sentiment suivant : l'exactitude de $D_\xi^\vee$ en restriction à la sous-catégorie des représentations de $G(L)$ dont les constituants sont des sous-quotients de séries principales (propriété (iii) ci-dessus, cf. aussi Corollaire 9.2) suggère que cela pourrait être vrai plus généralement.

Voici les principales notations de l'article. Dans tout le texte, L (le corps de base) et E (le corps des coefficients) sont deux extensions finies quelconques de $\mathbb{Q}_p$. On note $\mathcal{O}_L$, $\mathcal{O}_E$ leurs anneaux d'entiers respectifs, $\varpi_E \in \mathcal{O}_E$ une uniformisante de $\mathcal{O}_E$ et $k_E = \mathcal{O}_E/(\varpi_E)$ son corps résiduel. On normalise l'application de réciprocité de la théorie du corps de classes local de sorte que les Frobenius géométriques s'envoient sur les uniformisantes. On désigne par ε le caractère cyclotomique p-adique.

Si $A = \mathcal{O}_E/(\varpi_E^m)$ (pour un entier $m \geq 1$) et H est un groupe analytique p-adique compact, on note $A[[H]]$ l'algèbre d'Iwasawa de H à coefficients dans A. Si M est un A-module, on note $M^\vee \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}_A(M, A)$ le dual algébrique. Si π est une représentation lisse d'un groupe analytique p-adique sur un A-module, on commet souvent (toujours) l'abus de notation d'identifier π et son A-module sous-jacent.

On munit $A[[X]][1/X]$ d'une action A-linéaire de $\mathbb{Z}_p^\times$ par $a(S(X)) \overset{\text{déf}}{=} S((1+X)^a - 1)$ et d'un endomorphisme de Frobenius A-linéaire φ par $\varphi(S(X)) \overset{\text{déf}}{=} S((1+X)^p - 1)$ qui commute à $\mathbb{Z}_p^\times$ ($a \in \mathbb{Z}_p^\times$, $S(X) \in A[[X]][1/X]$). Ces actions respectent le sous-anneau $A[[X]]$. On appelle (φ, Γ)-module de longueur finie un $A[[X]][1/X]$-module de longueur finie D muni d'un endomorphisme $\varphi : D \to D$ tel que $\varphi(S(X)v) = \varphi(S(X))\varphi(v)$ et d'une action continue de $\Gamma \overset{\sim}{\to} \mathbb{Z}_p^\times$ (pour la topologie X-adique sur D) commutant à φ telle que $a(S(X)v) = a(S(X))a(v)$ ($S(X) \in A[[X]][1/X]$, $v \in D$, $a \in \mathbb{Z}_p^\times$). On dit qu'un (φ, Γ)-module de longueur finie D est étale si l'image de φ engendre D comme $A[[X]][1/X]$-module, ou de manière équivalente si l'on a un isomorphisme $\mathrm{Id} \otimes \varphi : A[[X]][1/X] \otimes_{\varphi, A[[X]][1/X]} D \overset{\sim}{\to} D$. La catégorie des (φ, Γ)-modules de longueur finie étales est abélienne et équivalente à la catégorie des représentations continues de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ sur un A-module de longueur finie ([**13**]). On la note $\Phi\Gamma_A^{ét}$.

2. Les $A[[X]][F]$-modules de torsion sur $A[[X]]$

On donne quelques définitions et résultats préliminaires sur les $A[[X]][F]$-modules qui sont de torsion sur $A[[X]]$.

On fixe un entier $m \geq 1$ et on pose $A \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{O}_E/(\varpi_E^m)$. On note $A[[X]][F]$ l'algèbre non commutative des polynômes en F à coefficients dans les séries formelles $A[[X]]$ avec $FX = ((1+X)^p - 1)F$. Rappelons qu'un $A[[X]]$-module M est de torsion si tout sous-$A[[X]]$-module de type fini est de type fini sur A et qu'un $A[[X]]$-module de torsion est admissible si $M[X] \overset{\text{déf}}{=} \{m \in M,\ Xm = 0\}$ est de type fini sur A (de manière équivalente $M[X^n] \overset{\text{déf}}{=} \{m \in M,\ X^n m = 0\}$ est de type fini sur A pour tout entier $n > 0$). De même un $A[F]$-module est de torsion si tout sous-$A[F]$-module de type fini est de type fini sur A. Nous ne considérons dans cet article que des $A[[X]][F]$-modules M qui sont de torsion comme $A[[X]]$-modules (que l'on appelle $A[[X]][F]$-modules de torsion sur $A[[X]]$), et parmi eux ceux vérifiant en particulier les conditions :

$$(1) \qquad \begin{cases} M \text{ est de type fini comme } A[[X]][F]-\text{module} \\ M \text{ est admissible comme } A[[X]]-\text{module.} \end{cases}$$

Rappelons que, $A[[X]][F]$ n'étant pas noethérien, un sous-$A[[X]][F]$-module d'un $A[[X]][F]$-module de type fini n'est pas de type fini en général.

Lemme 2.1. — *(i) Si M est un $A[[X]][F]$-module de torsion sur $A[[X]]$ vérifiant les conditions (1), alors tout $A[[X]][F]$-module sous-quotient de M vérifie (1).*
(ii) Si N est un $A[[X]][F]$-module de torsion sur $A[[X]]$ et $M, M' \subseteq N$ deux sous-$A[[X]][F]$-modules vérifiant (1), alors $M + M'$ vérifie aussi (1).

Démonstration. — Le (ii) découle du (i) et du fait que $M \oplus M'$ vérifie (1). Le (i) découle de [**10**, Prop.3.3] après un dévissage pour se ramener à $A = k_E$. □

Définition 2.2. — *On dit qu'un $A[[X]][F]$-module de torsion sur $A[[X]]$ satisfait la propriété Ad (pour Admissible) si tout sous-$A[[X]][F]$-module de type fini est admissible comme $A[[X]]$-module.*

Lemme 2.3. — *Soit N un $A[[X]][F]$-module de torsion sur $A[[X]]$ qui satisfait la propriété Ad.*
(i) Tout $A[[X]][F]$-module sous-quotient de N satisfait la propriété Ad.
(ii) Le $A[F]$-module N/XN est de torsion.

Démonstration. — (i) C'est clair pour un sous-$A[[X]][F]$-module. Pour un $A[[X]][F]$-module quotient $\overline{N}$ de N, il suffit de relever dans N des générateurs d'un sous-$A[[X]][F]$-module de type fini de $\overline{N}$ et d'appliquer le (i) du Lemme 2.1. Un sous-quotient étant un quotient d'un sous-objet, cela montre (i).
(ii) Soit $v \in N/XN$, il faut montrer que le sous-$A[F]$-module $A[F]v$ de N/XN engendré par v est de type fini sur A. Par un dévissage facile (notons que tout sous-$A[F]$-module de $A[F]v$ est de type fini sur $A[F]$), on peut supposer $A = k_E$. Soit $\widehat{v} \in N$ qui relève v, alors le $k_E[[X]][F]$-sous-module $k_E[[X]][F]\widehat{v}$ de N engendré par $\widehat{v}$ est admissible comme $k_E[[X]]$-module par hypothèse. Par [**10**, Prop.3.5], le $k_E[F]$-module $k_E[[X]][F]\widehat{v}/Xk_E[[X]][F]\widehat{v}$ est de torsion. Comme on a une surjection $k_E[F]$-linéaire $k_E[[X]][F]\widehat{v}/Xk_E[[X]][F]\widehat{v} \twoheadrightarrow k_E[F]v$, il en est de même du $k_E[F]$-module $k_E[F]v$. □

Notons qu'un $A[[X]][F]$-module de torsion sur $A[[X]]$ qui est aussi de torsion sur $A[F]$ satisfait en particulier la propriété Ad (puisque tout sous-$A[[X]][F]$-module de type fini est dans ce cas de type fini sur A).

Lemme 2.4. — *Soit $0 \to M' \to M \to M''$ une suite exacte de $A[[X]][F]$-modules de torsion sur $A[[X]]$ tels que M est de type fini sur $A[[X]][F]$ et M'' est admissible comme $A[[X]]$-module. Supposons que M' satisfait la propriété Ad, alors M' est un $A[[X]]$-module admissible et un $A[[X]][F]$-module de type fini, et M est un $A[[X]]$-module admissible.*

Démonstration. — Par le (i) du Lemme 2.1 il suffit de montrer que M est un $A[[X]]$-module admissible. Quitte à remplacer M'' par l'image de M (encore le (i) du Lemme 2.1), on peut supposer que la suite est exacte à droite. Par un dévissage facile (utilisant le (i) du lemme 2.3) on se ramène au cas $A = k_E$. On a une suite exacte courte de $k_E[F]$-modules :

$$0 \to M'/(M' \cap XM) \to M/XM \to M''/XM'' \to 0.$$

Comme M'/XM' est un $k_E[F]$-module de torsion par le (ii) du Lemme 2.3, il en est de même du quotient $M'/(M' \cap XM)$. Comme M'' est un $k_E[[X]]$-module admissible, le $k_E[F]$-module M''/XM'' est de torsion par [**10**, Prop.3.5]. On déduit alors de la suite exacte courte ci-dessus que M/XM est aussi un $k_E[F]$-module de torsion, et donc par [**10**, Prop.3.5] que M est un $k_E[[X]]$-module admissible. □

Lemme 2.5. — *Soit $N' \to N \to N''$ une suite exacte de $A[[X]][F]$-modules de torsion sur $A[[X]]$.*
(i) Si N' et N'' sont de torsion sur $A[F]$, alors il en est de même de N.
(ii) Si N' et N'' satisfont la propriété Ad, alors il en est de même de N.

Démonstration. — (i) est clair.
(ii) Par le (i) du Lemme 2.3, on peut remplacer N' par son image dans N et donc supposer la suite exacte à gauche. Soit $M \subseteq N$ un sous $A[[X]][F]$-module de type fini, M'' son image dans N'', qui est un $A[[X]]$-module admissible car N'' satisfait Ad, et $M' \overset{\text{déf}}{=} M \cap N'$, qui satisfait Ad par le (i) du Lemme 2.3. Alors la suite exacte $0 \to M' \to M \to M''$ vérifie les hypothèses du Lemme 2.4 et donc M est un $A[[X]]$-module admissible. □

Soit N un $A[[X]][F]$-module de torsion sur $A[[X]]$ muni d'une action A-linéaire lisse de $\mathbb{Z}_p^\times$ vérifiant ($a \in \mathbb{Z}_p^\times$, $S(X) \in A[[X]]$, $n \geq 0$, $v \in N$) :

$$a\big(S(X)F^n(v)\big) = S((1+X)^a - 1)F^n\big(a(v)\big). \tag{2}$$

On note $\mathcal{M}(N)$ l'ensemble des sous-$A[[X]][F]$-modules de N stables par $\mathbb{Z}_p^\times$ et vérifiant (1).

Lemme 2.6. — *Si $M \in \mathcal{M}(N)$ alors $M^\vee[1/X] = \mathrm{Hom}_A(M, A)[1/X]$ est naturellement muni d'une structure d'objet de $\Phi\Gamma_A^{ét}$.*

Démonstration. — Cette preuve est déjà dans [**7**] ou [**10**]. On munit $M^\vee$ d'une structure de $A[[X]]$-module (à gauche) par $(S(X)f)(m) \overset{\text{déf}}{=} f(S(X)m)$, d'une action de $\mathbb{Z}_p^\times$ par $\big(x(f)\big)(m) \overset{\text{déf}}{=} f\big(x^{-1}(m)\big)$ et d'un endomorphisme F par $F(f)(m) \overset{\text{déf}}{=} f(F(m))$ ($S(X) \in A[[X]]$, $x \in \mathbb{Z}_p^\times$, $f \in M^\vee$, $m \in M$). Noter que $M^\vee$ est un $A[[X]]$-module de type fini puisque M est admissible comme $A[[X]]$-module. Il faut munir $M^\vee[1/X]$ d'un Frobenius semi-linéaire φ. Soit C le conoyau de $A[[X]] \otimes_{\varphi, A[[X]]} M \overset{\mathrm{Id}\otimes F}{\longrightarrow} M$, c'est un $A[[X]]$-module de type fini (car M est un $A[[X]][F]$-module de type fini) et de torsion, donc de longueur finie.

On a donc $C^\vee[1/X]=0$ d'où on déduit une injection $A[[X]][1/X]$-linéaire, donc un isomorphisme, entre $A[[X]][1/X]$-modules de (même) longueur finie :

$$M^\vee[1/X] \xrightarrow{\sim} \big(A[[X]]\otimes_{\varphi,A[[X]]} M\big)^\vee[1/X] \cong A[[X]]\otimes_{\varphi,A[[X]]} M^\vee[1/X] \tag{3}$$

dont l'inverse est par définition l'application $\mathrm{Id}\otimes\varphi$ (le deuxième isomorphisme provient de l'isomorphisme $A[[X]]$-linéaire $(A[[X]]\otimes_{\varphi,A[[X]]}M)^\vee \cong A[[X]]\otimes_{\varphi,A[[X]]} M^\vee$ donné par $f\mapsto \sum_{i=0}^{p-1}(1+X)^i\otimes(\frac{f_{p-i}}{1+X})$ où $f_{p-i}\in M^\vee$ est défini par $f_{p-i}(v)\overset{\text{déf}}{=} f((1+X)^{p-i}\otimes v)$ pour $v\in M$). On laisse le lecteur vérifier que le $A[[X]][1/X]$-module $M^\vee[1/X]$ muni de l'action induite de $\mathbb{Z}_p^\times$ et de φ est bien un (φ,Γ)-module, nécessairement étale par (3). $\square$

Rappelons que $A[[X]][1/X]$ est un anneau artinien, donc pseudo-compact lorsqu'on le munit de la topologie discrète, et qu'un $A[[X]][1/X]$-module pseudo-compact est un $A[[X]][1/X]$-module topologique isomorphe à une limite projective $\varprojlim_{i\in I} D_i$ de $A[[X]][1/X]$-modules D_i de longueur finie (ou de manière équivalente de type fini) avec la topologie de la limite projective (et la topologie discrète sur chaque D_i) pour un ensemble d'indices I préordonné filtrant quelconque. En prenant comme morphismes les applications $A[[X]][1/X]$-linéaires continues, on obtient une catégorie abélienne (voir e.g. [**14**, § IV.3]).

Appelons *(φ,Γ)-module pseudo-compact étale* tout $A[[X]][1/X]$-module topologique D muni d'actions de $\mathbb{Z}_p^\times$ et φ tel que D est topologiquement isomorphe à une limite projective $\varprojlim_{i\in I} D_i$ comme ci-dessus où les $D_i\to D_j$ sont des morphismes dans la catégorie $\Phi\Gamma_A^{ét}$ et où l'isomorphisme est compatible aux actions de $\mathbb{Z}_p^\times$ et φ (les actions sur $\varprojlim D_i$ étant induites par celles sur chaque D_i). Le $A[[X]][1/X]$-module sous-jacent à un (φ,Γ)-module pseudo-compact étale est donc en particulier pseudo-compact. En prenant comme morphismes les applications $A[[X]][1/X]$-linéaires continues qui commutent à $\mathbb{Z}_p^\times$ et φ, on obtient une catégorie abélienne $\widehat{\Phi\Gamma}_A^{ét}$ avec limites projectives exactes (la preuve est comme celle de [**14**, § IV.3 Thm.3]).

Notons Mod_A la catégorie des $A[[X]][F]$-modules de torsion sur $A[[X]]$ qui sont munis d'une action A-linéaire lisse de $\mathbb{Z}_p^\times$ comme en (2) (les flèches étant les applications $A[[X]][F]$-linéaires commutant à $\mathbb{Z}_p^\times$). C'est une catégorie abélienne de manière évidente. Si N est un objet de Mod_A, on pose :

$$D^\vee(N) \overset{\text{déf}}{=} \varprojlim_{M\in\mathcal{M}(N)} \big(M^\vee[1/X]\big). \tag{4}$$

En particulier $D^\vee(M)=M^\vee[1/X]\in\Phi\Gamma_A^{ét}$ si M est un objet de Mod_A dont le $A[[X]][F]$-module sous-jacent vérifie (1). La proposition suivante rassemble les propriétés de $D^\vee$.

Proposition 2.7. — *(i) Pour tout N dans* Mod_A*,* $D^\vee(N)$ *est un objet de* $\widehat{\Phi\Gamma}_A^{\acute{e}t}$ *et* $N \longmapsto D^\vee(N)$ *induit un foncteur contravariant de la catégorie* Mod_A *vers la catégorie* $\widehat{\Phi\Gamma}_A^{\acute{e}t}$*.*
(ii) Si $0 \to N' \to N \to N''$ *est une suite exacte dans* Mod_A *alors* $D^\vee(N'') \to D^\vee(N) \to D^\vee(N') \to 0$ *est une suite exacte dans* $\widehat{\Phi\Gamma}_A^{\acute{e}t}$*.*
(iii) Si N est un objet de Mod_A *de torsion comme $A[F]$-module, alors* $D^\vee(N) = 0$*.*
(iv) Si $0 \to N' \to N \to N'' \to N'''$ *est une suite exacte dans* Mod_A*, si le $A[[X]][F]$-module N' satisfait la propriété Ad et si N''' est de torsion sur $A[F]$, alors* $0 \to D^\vee(N'') \to D^\vee(N) \to D^\vee(N') \to 0$ *est une suite exacte dans* $\widehat{\Phi\Gamma}_A^{\acute{e}t}$*.*

Démonstration. — La première assertion du (i) découle du (ii) du Lemme 2.1, qui montre que l'ensemble $\mathcal{M}(N)$ préordonné par l'inclusion est filtrant, et du Lemme 2.6. Un morphisme $f : N' \to N$ dans Mod_A induit une application $\mathcal{M}(N') \to \mathcal{M}(N)$, $M' \mapsto f(M')$ par le (i) du Lemme 2.1. En particulier on a une inclusion $\{f(M'),\ M' \in \mathcal{M}(N')\} \subseteq \mathcal{M}(N)$. De plus le morphisme $M' \to f(M')$ dans Mod_A induit par fonctorialité de $(\cdot)^\vee[1/X]$ un morphisme $D^\vee(f(M')) \to D^\vee(M')$ dans $\Phi\Gamma_A^{\acute{e}t}$. On en déduit des morphismes dans $\widehat{\Phi\Gamma}_A^{\acute{e}t}$ dont le premier est surjectif :

$$\varprojlim_{M\in\mathcal{M}(N)} D^\vee(M) \twoheadrightarrow \varprojlim_{M'\in\mathcal{M}(N')} D^\vee(f(M')) \to \varprojlim_{M'\in\mathcal{M}(N')} D^\vee(M') \tag{5}$$

d'où la fonctorialité de $D^\vee$.
(ii) En remplaçant N'' par l'image de N, il suffit de traiter le cas où l'application $N \to N''$ est surjective. Si $M \in \mathcal{M}(N)$, on a $M \cap N' \in \mathcal{M}(N')$ par le (i) du Lemme 2.1 et tous les éléments de $\mathcal{M}(N')$ sont de cette forme (car $\mathcal{M}(N') \subseteq \mathcal{M}(N)$). On en déduit :

$$D^\vee(N') \cong \varprojlim_{M\in\mathcal{M}(N)} D^\vee\big(M \cap N'\big). \tag{6}$$

Soit f la surjection $N \twoheadrightarrow N''$, pour tout $M \in \mathcal{M}(N)$ on a en particulier une suite exacte dans Mod_A :

$$0 \to M \cap N' \to M \to f(M) \to 0$$

d'où on déduit une suite exacte dans $\Phi\Gamma_A^{\acute{e}t}$:

$$0 \to D^\vee(f(M)) \to D^\vee(M) \to D^\vee(M \cap N') \to 0.$$

puisque dans ce cas $D^\vee(\cdot) = \mathrm{Hom}_A(\cdot, A)[1/X]$ est un foncteur exact (rappelons que $A = \mathcal{O}_E/(\varpi_E^m)$). Par exactitude des limites projectives dans $\widehat{\Phi\Gamma}_A^{\acute{e}t}$, on obtient encore une suite exacte dans $\widehat{\Phi\Gamma}_A^{\acute{e}t}$:

$$0 \to \varprojlim_{M\in\mathcal{M}(N)} D^\vee(f(M)) \to \varprojlim_{M\in\mathcal{M}(N)} D^\vee(M) \to \varprojlim_{M\in\mathcal{M}(N)} D^\vee(M \cap N') \to 0$$

d'où on déduit une suite exacte $D^\vee(N'') \to D^\vee(N) \to D^\vee(N') \to 0$ dans $\widehat{\Phi\Gamma}_A^{ét}$ par (6) et la surjectivité de la première flèche en (5) appliquée à $f : N \to N''$.
(iii) Tout M dans $\mathcal{M}(N)$ est alors un A-module de type fini, d'où $M^\vee[1/X] = 0$ et donc $D^\vee(N) = \varprojlim D^\vee(M) = 0$.
(iv) Soit f le morphisme $N \to N''$, on a deux suites exactes $0 \to N' \to N \to f(N) \to 0$ et $0 \to f(N) \to N'' \to N'''$ dans Mod_A. Par (ii) appliqué à $0 \to f(N) \to N'' \to N'''$ et (iii), on en déduit un isomorphisme $D^\vee(N'') \xrightarrow{\sim} D^\vee(f(N))$ dans $\widehat{\Phi\Gamma}_A^{ét}$. Il suffit donc de montrer l'énoncé (iv) en supposant $N''' = 0$, i.e. en supposant f surjectif. En procédant comme dans la preuve du (ii), on a une injection :

$$\varprojlim_{M\in\mathcal{M}(N)} D^\vee(f(M)) \hookrightarrow \varprojlim_{M\in\mathcal{M}(N)} D^\vee(M) = D^\vee(N). \tag{7}$$

Soit $M \in \mathcal{M}(N'')$ et $\widehat{M} \subseteq N$ un sous-$A[[X]][F]$-module de type fini stable par $\mathbb{Z}_p^\times$ relevant M (il en existe car f est surjectif, M est de type fini sur $A[[X]][F]$ et l'action de $\mathbb{Z}_p^\times$ est lisse). On a une suite exacte $0 \to \widehat{M} \cap N' \to \widehat{M} \to M \to 0$ où M est admissible comme $A[[X]]$-module (par définition) et où $\widehat{M} \cap N'$ satisfait Ad (car N' satisfait Ad). Par le Lemme 2.4, $\widehat{M}$ est admissible comme $A[[X]]$-module, donc est dans $\mathcal{M}(N)$. Ainsi l'application $\mathcal{M}(N) \to \mathcal{M}(N'')$ induite par f est surjective ce qui implique $\{f(M),\ M \in \mathcal{M}(N)\} = \mathcal{M}(N'')$ et donc un isomorphisme dans $\widehat{\Phi\Gamma}_A^{ét}$:

$$D^\vee(N'') = \varprojlim_{M\in\mathcal{M}(N'')} D^\vee(M) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{M\in\mathcal{M}(N)} D^\vee(f(M)). \tag{8}$$

En combinant (7) et (8), on voit que la flèche $D^\vee(N'') \to D^\vee(N)$ est injective, ce qui par (ii) achève la preuve. □

Si $N' \to N \to N'' \to N'''$ est une suite exacte dans Mod_A et si N', N''' sont de torsion sur $A[F]$, on déduit aussi du (iii) et du (iv) de la Proposition 2.7 un isomorphisme $D^\vee(N'') \xrightarrow{\sim} D^\vee(N)$ dans $\widehat{\Phi\Gamma}_A^{ét}$.

3. Un foncteur vers les (pro-)(φ,Γ)-modules

On définit un foncteur contravariant de la catégorie des représentations lisses du Borel vers la catégorie $\widehat{\Phi\Gamma}_A^{ét}$.

On conserve les notations du § 2. On fixe pour toute la suite (G,B,T) où G est un groupe algébrique réductif connexe déployé sur L, $B \subset G$ est un sous-groupe de Borel (défini sur L) et $T \subset B$ un tore maximal (déployé sur L). On note N le radical unipotent de B. On note $X(T) \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr}}(T,\mathbb{G}_{\mathrm{m}})$ le groupe des caractères algébriques de T, $X^\vee(T) \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr}}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}},T) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X(T),\mathbb{Z})$ le groupe des cocaractères, $\big(X(T), R, X^\vee(T), R^\vee\big)$ la donnée radicielle de (G,T), $R^+ \subset X(T)$ les racines positives relativement à B, $S \subset R^+$ les racines simples et $R^{\vee +}$, $S^\vee$ les coracines correspondantes. Pour $\alpha \in R^+$, on note $N_\alpha \subseteq N$ le sous-groupe radiciel (commutatif) associé et, pour $\alpha \in S$, on fixe un isomorphisme $\iota_\alpha : N_\alpha \xrightarrow{\sim} \mathbb{G}_{\rm a}$ de groupes algébriques sur L tel que (cf. [**17**, § II.1.2]) :

$$\iota_\alpha(tn_\alpha t^{-1}) = \alpha(t)\iota_\alpha(n_\alpha) \ \ \forall\, t \in T, \ \ \forall\, n_\alpha \in N_\alpha. \tag{9}$$

L'application produit donne un isomorphisme de variétés algébriques sur L (pour un ordre quelconque des α) $\prod_{\alpha \in R^+} N_\alpha \xrightarrow{\sim} N$. L'isomorphisme inverse composé avec la projection sur $\prod_{\alpha \in S} N_\alpha$, vu comme groupe produit commutatif, induit une surjection $N \twoheadrightarrow \prod_{\alpha \in S} N_\alpha$ de groupes algébriques sur L. Comme dans [**20**, § 5] on note ℓ la composée $N \twoheadrightarrow \prod_{\alpha \in S} N_\alpha \xrightarrow{\sum_{\alpha \in S}\iota_\alpha} \mathbb{G}_{\rm a}$, qui est un morphisme de groupes algébriques sur L.

On suppose désormais que le centre Z_G de G est connexe. Par [**5**, Prop.2.1.1] (par exemple), il existe un cocaractère $\xi \in X^\vee(T)$ tel que $\alpha \circ \xi = \mathrm{Id}_{\mathbb{G}_{\rm m}}$ pour toute racine simple α (prendre $\xi = \sum_{\alpha^\vee \in S^\vee} \lambda_{\alpha^\vee}$ où les $\lambda_{\alpha^\vee}$ sont des cocaractères fondamentaux). Un tel cocaractère n'est pas unique mais tout autre est de la forme $\xi + \zeta$ (en notation additive) où $\zeta \in X^\vee(Z_G) \subseteq X^\vee(T)$. *On fixe un tel cocaractère ξ dans la suite.* Si $n = \prod_{\alpha \in R^+} n_\alpha \in N$ et $x \in \mathbb{G}_{\rm m}$, on a :

$$\begin{aligned} \ell\big(\xi(x)n\xi(x^{-1})\big) &= \ell\Big(\prod_{\alpha \in R^+} \xi(x)n_\alpha\xi(x^{-1})\Big) \\ &= \sum_{\alpha \in S} \iota_\alpha\big(\xi(x)n_\alpha\xi(x^{-1})\big) \\ &= \sum_{\alpha \in S} \alpha\big(\xi(x)\big)\iota_\alpha(n_\alpha) \ = \ x\ell(n). \end{aligned} \tag{10}$$

On fixe un sous-groupe ouvert compact $N_0 \subset N(L)$ que l'on suppose *totalement décomposé* comme dans [**20**], c'est-à-dire tel que $\prod_{\alpha \in R^+} N_\alpha \xrightarrow{\sim} N$ induit une bijection $\prod_{\alpha \in R^+} N_\alpha(L) \cap N_0 \xrightarrow{\sim} N_0$ pour tout ordre sur les $\alpha \in R^+$. Le morphisme ℓ induit un morphisme de groupes encore noté $\ell : N_0 \to L$ et on définit :

$$N_1 \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Ker}\,\big(N_0 \xrightarrow{\ell} L \xrightarrow{\mathrm{Tr}_{L/\mathbb{Q}_p}} \mathbb{Q}_p\big) \tag{11}$$

qui est un sous-groupe compact distingué de N_0. Lorsque $N \neq 0$, i.e. lorsque $G \neq T$, le groupe N_0/N_1 s'identifie à un sous-$\mathbb{Z}_p$-module (libre de rang 1) de $\mathbb{Q}_p$, et donc est isomorphe à $\mathbb{Z}_p$.

Lemme 3.1. — *On a $\xi(\mathbb{Z}_p\backslash\{0\}) \subseteq \{t \in T(L),\ tN_0t^{-1} \subseteq N_0\}$ et $\xi(\mathbb{Z}_p\backslash\{0\}) \subseteq \{t \in T(L),\ tN_1t^{-1} \subseteq N_1\}$.*

Démonstration. — La première inclusion découle de (9), de l'égalité $\alpha(\xi(x)) = x$ et du fait que N_0 est totalement décomposé. La deuxième découle de la première, de (10) et du fait que la trace est $\mathbb{Z}_p$-linéaire. □

Soit π une représentation lisse de $B(L)$ sur un A-module. De manière analogue à [**11**, Def.3.1.3], on munit le $A[[N_0/N_1]]$-module π^{N_1} d'une action (de Hecke) A-linéaire du monoïde $\mathbb{Z}_p\backslash\{0\}$ comme suit :

$$x\cdot_\xi v \overset{\text{déf}}{=} \sum_{n_1\in N_1/\xi(x)N_1\xi(x^{-1})} n_1\xi(x)v \quad\in\ \pi^{N_1}, \tag{12}$$

l'indice ξ rappelant que cela dépend du choix du cocaractère ξ (notons que cela a bien un sens par le Lemme 3.1). Cette action est $A[[N_0/N_1]]$-semi-linéaire car on vérifie que l'on a :

$$x\cdot_\xi\Big(\sum_i a_i[n_i]\Big)v=\Big(\sum_i a_i[\xi(x)n_i\xi(x^{-1})]\Big)(x\cdot_\xi v)$$

pour $x\in\mathbb{Z}_p\backslash\{0\}$, $\sum_i a_i[n_i]\in A[[N_0/N_1]]$, $v\in\pi^{N_1}$. Si $x\in\mathbb{Z}_p^\times$, (12) donne simplement $x\cdot_\xi v=\xi(x)v$.

On fixe un isomorphisme $N_0/N_1\cong\mathbb{Z}_p$ lorsque $G\neq T$. En envoyant F sur l'endomorphisme (12) pour $x=p\in\mathbb{Z}_p\backslash\{0\}$, en faisant agir $A[[X]]$ via $A[[X]]/(X)$ si $G=T$, via l'isomorphisme $A[[X]]\cong A[[\mathbb{Z}_p]]\cong A[[N_0/N_1]]$ envoyant X sur $[1]-1$ si $G\neq T$, et en faisant agir $\mathbb{Z}_p^\times$ via (12), on vérifie avec (10) que l'on munit π^{N_1} d'une structure de $A[[X]][F]$-module avec action lisse de $\mathbb{Z}_p^\times$ qui en fait un objet de la catégorie Mod_A (cf. § 2, cette structure dépend donc du choix de ξ). On dispose donc de l'ensemble $\mathcal{M}(\pi^{N_1})$ des sous-$A[[X]][F]$-modules M de π^{N_1} stables par $\mathbb{Z}_p^\times$ et vérifiant (1). Lorsque $G=T$ (ou de manière équivalente $B=T$), X agit par 0, et $\mathcal{M}(\pi^{N_1})=\mathcal{M}(\pi)$ est l'ensemble des sous-A-modules de type fini de π stables par l'action de $\xi(\mathbb{Q}_p^\times)$, ou de manière équivalente de $\xi(\mathbb{Z}_p\backslash\{0\})$. Lorsque $G\neq T$, l'ensemble $\mathcal{M}(\pi^{N_1})$ est mystérieux en général (par exemple on ignore s'il est non vide), voir la remarque 3.3.

Supposons d'abord $G\neq T$. Si $M\in\mathcal{M}(\pi^{N_1})$, rappelons que $D^\vee(M)=M^\vee[1/X]$ muni de sa structure d'objet de $\Phi\Gamma_A^{\text{ét}}$ (Lemme 2.6).

Supposons ensuite $G=T$. Si $M\in\mathcal{M}(\pi^{N_1})=\mathcal{M}(\pi)$, l'action de $\mathbb{Q}_p^\times$ via ξ sur M se factorise par un quotient fini (car M est de cardinal fini) et en particulier s'étend par continuité via la réciprocité locale en une action continue de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$. On note $D^\vee(M)$ le (φ,Γ)-module de la représentation *duale* de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ (via le foncteur covariant de [**13**, Thm.A.3.4.3]), c'est-à-dire par le Lemme 7.5 ci-dessous $D^\vee(M)=A[[X]][1/X]\otimes_A M^\vee$ où l'action de $\Gamma\cong\mathbb{Z}_p^\times$ est l'unique action $A[[X]][1/X]$-semi-linéaire telle que $x(f)(m)=f(\xi(x^{-1})(m))$ et φ est l'unique endomorphisme $A[[X]][1/X]$-semi-linéaire tel que $\varphi(f)(m)=f(\xi(p^{-1})(m))$ ($f\in M^\vee$, $x\in\mathbb{Z}_p^\times$, $m\in M$). Notons que dans ce cas $D^\vee(M)$ *n'est pas* $M^\vee[1/X]$ (qui est nul).

Pour toute représentation lisse π de $B(L)$ sur un A-module, on pose :

$$D_\xi^\vee(\pi)\overset{\text{déf}}{=}\varprojlim_{M\in\mathcal{M}(\pi^{N_1})} D^\vee(M)\ \cong\ \varprojlim_{M\in\mathcal{M}(\pi^{N_1})}\big(M^\vee[1/X]\big), \tag{13}$$

autrement dit $D_\xi^\vee(\pi) = D^\vee(\pi^{N_1})$ si $G \neq T$ avec les notations de (4).

Proposition 3.2. — *(i) Pour tout π, $D_\xi^\vee(\pi)$ est un objet de $\widehat{\Phi\Gamma}_A^{\acute{e}t}$ et $\pi \longmapsto D_\xi^\vee(\pi)$ induit un foncteur contravariant de la catégorie des représentations lisses de $B(L)$ sur A vers la catégorie $\widehat{\Phi\Gamma}_A^{\acute{e}t}$.*
(ii) Si $0 \to \pi' \to \pi \to \pi''$ est une suite exacte de représentations lisses de $B(L)$ sur A, alors $D_\xi^\vee(\pi'') \to D_\xi^\vee(\pi) \to D_\xi^\vee(\pi') \to 0$ est une suite exacte dans $\widehat{\Phi\Gamma}_A^{\acute{e}t}$.
*(iii) Lorsque $G(L) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et π est la restriction à $B(\mathbb{Q}_p)$ d'une représentation de longueur finie de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur A, le foncteur $D_\xi^\vee$ coïncide (à torsion près) avec le foncteur défini par Colmez ([**7**]).*

Démonstration. — (i) Clair par le (i) de la Proposition 2.7.
(ii) Cela découle du (ii) de la Proposition 2.7 appliqué à la suite exacte dans $\mathrm{Mod}_A : 0 \to \pi'^{N_1} \to \pi^{N_1} \to \pi''^{N_1}$.
(iii) Nous utilisons certains résultats de [**10**] qui ne sont écrits là que pour $A = \mathcal{O}_E/(\varpi_E)$ mais dont les preuves s'étendent directement à $A = \mathcal{O}_E/(\varpi_E^n)$ (voir aussi [**7**] et [**3**]). Lorsque π est la restriction à $B(\mathbb{Q}_p)$ d'une représentation admissible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur A, alors π satisfait la propriété Ad (Définition 2.2). En effet, un sous-$A[[X]][F]$-module de type fini de π est toujours contenu dans un des modules de type fini $M(V, V_0)$ de [**10**, Def.4.1] qui est admissible par [**10**, Thm.4.7]. Par ailleurs si $M \in \mathcal{M}(\pi)$ contient un sous-A-module de type fini stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times$ qui engendre π sous $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, alors le (φ, Γ)-module $D^\vee(M)$ ne dépend plus de M (voir la preuve de [**10**, Prop.4.4] et [**10**, Rem.4.8]). Lorsque π est de longueur finie comme représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, donc en particulier de type fini et admissible, ceci est toujours vérifié pour un sous-$A[[X]][F]$-module de type fini de π stable par $\mathbb{Z}_p^\times$ assez grand. On en déduit $D_\xi^\vee(\pi) = D^\vee(M) \in \Phi\Gamma_A^{\acute{e}t}$, d'où le résultat. □

Remarque 3.3. — Comme rien, ou presque, n'est connu sur $\mathcal{M}(\pi^{N_1})$ en dehors du cas $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, j'ignore en général si $D_\xi^\vee(\pi)$ est non nul ou s'il est de longueur finie (i.e. dans $\Phi\Gamma_A^{\acute{e}t}$). Notons que Schraen montre dans [**22**], par un calcul explicite faisant intervenir certains des diagrammes de [**6**, §13], que, au moins lorsque L est l'extension quadratique non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$, alors $D_\xi^\vee(\pi)$ est non nul pour les représentations supersingulières de $\mathrm{GL}_2(L)$ sur k_E qui apparaissent dans [**6**, Th.19.10]. Ces calculs sont étendus par Morra et Schraen dans [**18**] à des cas où L est non ramifiée de degré 3. Rappelons les deux questions naturelles qui se posent sur $\mathcal{M}(\pi^{N_1})$ lorsque, disons, π est une représentation lisse admissible de $G(L)$ sur A de longueur finie (comme représentation de $G(L)$) :
(1) Est-ce que $\mathcal{M}(\pi^{N_1})$ coïncide avec l'ensemble des sous-$A[[X]][F]$-modules de type fini de π^{N_1} stables par $\mathbb{Z}_p^\times$ (de manière équivalente puisque l'action de $\mathbb{Z}_p^\times$ est lisse : est-ce que le $A[[X]][F]$-module π^{N_1} satisfait la propriété Ad) ?
(2) Est-ce que $D_\xi^\vee(\pi) \in \Phi\Gamma_A^{\acute{e}t}$ (de manière équivalente puisque les objets de $\Phi\Gamma_A^{\acute{e}t}$

sont de longueur finie : est-ce que $D^\vee(M)$ se "stabilise" pour $M\in\mathcal{M}(\pi^{N_1})$ assez grand) ?

Pour π représentation lisse de $B(L)$ sur A, on peut par ailleurs aussi considérer les groupes de cohomologie continue $H^i(N_1,\pi)$ pour $i\geq 1$. Ils sont nuls si $G=T$ (puisque N_1 est nul), mais si $G\neq T$ ils sont naturellement munis d'une structure d'objet de Mod_A via l'isomorphisme $A[[X]]\cong A[[N_0/N_1]]$ où l'action de N_0 (qui se factorise par N_0/N_1) est induite par l'application $\phi\to n_0(\phi)$ envoyant une cochaîne continue $\phi : N_1^i\to\pi$ sur la cochaîne $n_0(\phi)(\cdot)\overset{\text{déf}}{=} n_0\big(\phi(n_0^{-1}\cdot n_0)\big)$ et où l'action de $\xi(x)$ pour $x\in\mathbb{Z}_p\backslash\{0\}$ (donnant l'action de $F=\xi(p)$ et de $\mathbb{Z}_p^\times$) est la composée :

$$H^i(N_1,\pi)\xrightarrow{\xi(x)} H^i(\xi(x)N_1\xi(x^{-1}),\pi)\longrightarrow H^i(N_1,\pi) \tag{14}$$

la première flèche étant induite par l'action de $\xi(x)$ sur π et la deuxième étant la corestriction de $\xi(x)N_1\xi(x^{-1})$ à N_1 (voir e.g. [**15**, § 3.1], noter que cette deuxième flèche est l'identité si $x\in\mathbb{Z}_p^\times$). On dispose donc pour tout $i\geq 1$ de foncteurs contravariants $\pi\longmapsto D^\vee\big(H^i(N_1,\pi)\big)$ de la catégorie des représentations lisses de $B(L)$ sur A vers la catégorie $\widehat{\Phi\Gamma}_A^{\acute{e}t}$.

Remarque 3.4. — La catégorie des représentations lisses de $B(L)$ sur A ayant assez d'injectifs, on peut aussi considérer les foncteurs dérivés $R^iD_\xi^\vee$ du foncteur contravariant exact à droite $D_\xi^\vee$. La question du lien éventuel entre les foncteurs $D^\vee\big(H^i(N_1,\pi)\big)$ et $R^iD_\xi^\vee$ n'est pas abordée dans cet article.

Lorsque π est une représentation lisse de $G(L)$ sur A, on commet dans la suite l'abus de notation $D_\xi^\vee(\pi)=D_\xi^\vee(\pi|_{B(L)})$.

4. Indépendance des choix

On montre que le foncteur $D_\xi^\vee$ dépend seulement du choix de ξ.

On conserve les notations des sections précédentes.

Si $G=T$, il n'y a que le choix de ξ qui intervient, on suppose donc $G\neq T$.

Soit π une représentation lisse de $B(L)$ sur A. Nous allons montrer que $D_\xi^\vee(\pi)$ en tant qu'objet de $\widehat{\Phi\Gamma}_A^{\acute{e}t}$ ne dépend pas des choix des $(\iota_\alpha)_{\alpha\in S}$ satisfaisant (9), du sous-groupe ouvert compact $N_0\subseteq N(L)$ totalement décomposé et de l'isomorphisme $N_0/N_1\cong\mathbb{Z}_p$, et ce de manière fonctorielle en π. Rappelons que $(\iota_\alpha)_{\alpha\in S}$ et N_0 déterminent N_1 par (11).

Notons déjà que, à $(\iota_\alpha)_{\alpha\in S}$ et N_0 fixés, comme tout automorphisme de $\mathbb{Z}_p$-module de $\mathbb{Z}_p$ est de la forme $x\mapsto ax$ pour $a\in\mathbb{Z}_p^\times$, c'est un exercice trivial (laissé au lecteur) que l'objet π^{N_1} de Mod_A, et donc *a fortiori* $D_\xi^\vee(\pi)$, ne dépendent pas de l'isomorphisme choisi $N_0/N_1 \cong \mathbb{Z}_p$. On ne se préoccupe donc plus du choix d'un tel isomorphisme dans la suite.

Fixons $(\iota_\alpha)_{\alpha\in S}$ et soit N_0, N_0' deux sous-groupes ouverts compacts de $N(L)$ totalement décomposés. Notons $s : N_0 \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_p$ la surjection induite par l'isomorphisme fixé $N_0/N_1 \cong \mathbb{Z}_p$. Quitte à remplacer N_0' par $N_0 \cap N_0'$ (encore totalement décomposé), on peut supposer $N_0' \subseteq N_0$. On note m l'entier ≥ 0 tel que $s(N_0') = p^m\mathbb{Z}_p$. On a $N_0' \subseteq N_0'' \subseteq N_0$ où $N_0'' \stackrel{\text{déf}}{=} s^{-1}(p^m\mathbb{Z}_p)$ et il suffit de passer de N_0 à N_0'', puis de N_0'' à N_0'. Autrement dit, en remarquant que $N_1 = \mathrm{Ker}(s : N_0'' \twoheadrightarrow p^m\mathbb{Z}_p)$ et en posant $N_1' \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{Ker}(s : N_0' \twoheadrightarrow p^m\mathbb{Z}_p)$, il suffit de traiter les deux cas suivants : le cas $N_1' = N_1$ (mais $m \geq 0$), le cas $m = 0$ (mais $N_1' \subseteq N_1$).

Commençons par le cas $m = 0$. Considérons l'application :

$$j_{N_1',N_1} : \pi^{N_1'} \longrightarrow \pi^{N_1}, \quad v \longmapsto \sum_{n_1\in N_1/N_1'} n_1 v. \tag{15}$$

Lemme 4.1. — *L'application j_{N_1',N_1} est un morphisme dans* Mod_A.

Démonstration. — Comme l'inclusion $N_0' \subseteq N_0$ induit $N_0'/N_1' \xrightarrow{\sim} N_0/N_1$ (car $m = 0$), il suffit de vérifier la commutation de j_{N_1',N_1} à l'action de N_0' pour avoir sa commutation à l'action de $A[[X]]$. Cette commutation est claire car, si $(n_{1,i})_{i\in I}$ est un système de représentants de N_1/N_1' dans N_1, alors $(n_0'^{-1}n_{1,i}n_0')_{i\in I}$ en est un autre pour tout $n_0' \in N_0'$ puisque N_1' est distingué dans N_0'. La commutativité à l'action de $\xi(\mathbb{Z}_p^\times)$ est aussi claire puisque $(\xi(x)^{-1}n_{1,i}\xi(x))_{i\in I}$ est un système de représentants de N_1/N_1' dans N_1 pour tout $x \in \mathbb{Z}_p^\times$. Rappelons que, si $G'' \subseteq G' \subseteq G$ sont trois groupes et si $(g_{i'}')_{i'\in I'}$, $(g_i)_{i\in I}$ sont des systèmes de représentants respectivement dans G' et dans G de G'/G'' et de G/G', alors $(g_ig_{i'}')_{(i,i')\in I\times I'}$ est un système de représentants dans G de G/G''. En appliquant cela à $\xi(p)N_1'\xi(p^{-1}) \subseteq N_1' \subseteq N_1$ et $\xi(p)N_1'\xi(p^{-1}) \subseteq \xi(p)N_1\xi(p^{-1}) \subseteq N_1$, on obtient $(j_{N_1',N_1} \circ F)(v) = (F \circ j_{N_1',N_1})(v) = \sum_{n_1\in N_1/\xi(p)N_1'\xi(p^{-1})} n_1\xi(p)v$ qui donne la commutativité à l'action de F. $\square$

Lemme 4.2. — *(i) Soit $M' \in \mathcal{M}(\pi^{N_1'})$ et $M \stackrel{\text{déf}}{=} j_{N_1',N_1}(M') \in \mathcal{M}(\pi^{N_1})$ son image par j_{N_1',N_1}. Alors* $\mathrm{Ker}(M' \to M)$ *est un $A[F]$-module de torsion.*
(ii) Soit $M \in \mathcal{M}(\pi^{N_1})$, alors il existe $M' \in \mathcal{M}(\pi^{N_1'})$ tel que l'on a une suite exacte dans Mod_A *:*

$$0 \longrightarrow M'' \longrightarrow M' \xrightarrow{j_{N_1',N_1}} M \longrightarrow M/M' \longrightarrow 0$$

avec M'' et M/M' de torsion comme $A[F]$-modules.

Démonstration. — (i) Notons d'abord que M est dans $\mathcal{M}(\pi^{N_1})$ par le Lemme 4.1 et le (i) du Lemme 2.1. Soit $d \geq 0$ tel que $\xi(p^d)N_0\xi(p^{-d}) \subseteq N_0'$ (un tel entier d

existe car $\xi(p^d)N_\alpha(L)\cap N_0\xi(p^{-d}) = \alpha(\xi(p^d))N_\alpha(L)\cap N_0 \subseteq p^d N_\alpha(L)\cap N_0$ pour tout $\alpha \in R^+$, en voyant $N_\alpha(L)\cap N_0$ comme $\mathbb{Z}_p$-module). On a donc $\xi(p^d)N_1'\xi(p^{-d}) \subseteq \xi(p^d)N_1\xi(p^{-d}) \subseteq N_1'$ d'où on déduit de manière similaire à la fin de la preuve du Lemme 4.1 que l'endomorphisme de $\pi^{N_1'}$:

$$F^d = F\circ\cdots\circ F = \sum_{n_1'\in N_1'/\xi(p^d)N_1'\xi(p^{-d})} n_1'\xi(p^d)$$

se factorise comme suit :

$$\pi^{N_1'} \xrightarrow{j_{N_1',N_1}} \pi^{N_1} \xrightarrow{\phi_{N_1',N_1}} \pi^{N_1'}$$

où ϕ_{N_1',N_1} envoie $v\in\pi^{N_1}$ sur $\sum_{n_1'\in N_1'/\xi(p^d)N_1\xi(p^{-d})} n_1'\xi(p^d)v \in \pi^{N_1'}$. En particulier $\mathrm{Ker}\left(j_{N_1',N_1} : M'\to M\right) \subseteq \mathrm{Ker}\left(F^d : M'\to M'\right)$ est un $A[F]$-module de torsion.
(ii) Comme dans la preuve du (i) mais en considérant cette fois $\xi(p^d)N_1\xi(p^{-d}) \subseteq N_1' \subseteq N_1$ on en déduit que l'endomorphisme F^d de π^{N_1} se factorise par :

$$\pi^{N_1} \xrightarrow{\phi_{N_1',N_1}} \pi^{N_1'} \xrightarrow{j_{N_1',N_1}} \pi^{N_1}. \tag{16}$$

Noter que ϕ_{N_1',N_1} commute à F (considérer $\xi(p^{d+1})N_1\xi(p^{-d-1}) \subseteq \xi(p^d)N_1\xi(p^{-d}) \subseteq N_1'$ et $\xi(p^{d+1})N_1\xi(p^{-d-1}) \subseteq \xi(p)N_1'\xi(p^{-1}) \subseteq N_1'$ comme à la fin de la preuve du Lemme 4.1) et est φ^d-semi-linéaire (pour le Frobenius φ sur $A[[X]]$). On en déduit que le sous-$A[[X]]$-module M' de $\pi^{N_1'}$ engendré par $\phi_{N_1',N_1}(M)$ est un $A[[X]][F]$-module de type fini et que l'on a une surjection $A[[X]]$-linéaire :

$$\mathrm{Id}\otimes\phi_{N_1',N_1} : A[[X]]\otimes_{\varphi^d,A[[X]]} M \twoheadrightarrow M'.$$

Comme $A[[X]]\otimes_{\varphi^d,A[[X]]} M$ est un $A[[X]]$-module admissible (car $(A[[X]]\otimes_{\varphi^d,A[[X]]} M)^\vee \cong A[[X]]\otimes_{\varphi^d,A[[X]]} M^\vee)$, on en déduit que M' est admissible comme $A[[X]]$-module, donc est dans $\mathcal{M}(\pi^{N_1'})$. On déduit aussi de la factorisation (16) et du fait que j_{N_1',N_1} est $A[[X]]$-linéaire que l'on a $F^d(M)\subseteq j_{N_1',N_1}(M')\subseteq M$, et donc que $M/j_{N_1',N_1}(M')$ est annulé par F^d. Le fait que $M''=\mathrm{Ker}(j_{N_1',N_1} : M'\to M)$ est de $A[F]$-torsion résulte du (i). $\square$

On déduit facilement du Lemme 4.2 et du commentaire qui suit la Proposition 2.7 que j_{N_1',N_1} induit un isomorphisme dans $\widehat{\Phi\Gamma}_A^{\acute{e}t}$:

$$\varprojlim_{M\in\mathcal{M}(\pi^{N_1})} D^\vee(M) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{M'\in\mathcal{M}(\pi^{N_1'})} D^\vee(M')$$

qui est clairement fonctoriel en π.

Considérons maintenant le cas $N_1'=N_1$, qui implique $N_0' = s^{-1}(p^m\mathbb{Z}_p)$. On a une suite exacte par (10) :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & N_1 & \to & N_0' & \xrightarrow{s} & p^m\mathbb{Z}_p & \to & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \| & & \\ 0 & \to & \xi(p^m)N_1\xi(p^{-m}) & \to & \xi(p^m)N_0\xi(p^{-m}) & \xrightarrow{s} & p^m\mathbb{Z}_p & \to & 0 \end{array}$$

où les flèches verticales sont des inclusions. Par le cas $m = 0$, on sait que N_0' et $\xi(p^m)N_0\xi(p^{-m})$ donnent le même foncteur $D_\xi^\vee$. On est donc ramené à comparer les foncteurs pour N_0 et $\xi(p^m)N_0\xi(p^{-m})$. Il suffit de vérifier que π^{N_1} et $\pi^{\xi(p^m)N_1\xi(p^{-m})}$ (ce dernier avec l'action induite de $\xi(p^m)N_0\xi(p^{-m})$) sont isomorphes de manière fonctorielle dans Mod_A. Le lecteur pourra vérifier que l'application :

$$\pi^{N_1} \longrightarrow \pi^{\xi(p^m)N_1\xi(p^{-m})}, \quad v \longmapsto \xi(p^m)v$$

induit bien un tel isomorphisme.

Fixons maintenant N_0 et soit $(\iota_\alpha)_{\alpha\in S}$, $(\iota'_\alpha)_{\alpha\in S}$ satisfaisant (9). Soit ℓ, ℓ' comme au § 3 (avec des notations évidentes) et $N_1' \subset N_0$ le sous-groupe défini par (11) avec ℓ' au lieu de ℓ. Par le même argument que [**20**, § 7 p.27], il existe $t \in T(L)$ tel que $\ell' = \ell(t^{-1} \cdot t)$. Par ce que l'on a démontré ci-dessus, on obtient le même foncteur si l'on travaille avec N_0 et $(\iota'_\alpha)_{\alpha\in S}$ ou avec tN_0t^{-1} et $(\iota'_\alpha)_{\alpha\in S}$. Il suffit donc de montrer que les $D_\xi^\vee$ obtenus avec N_0 et $(\iota_\alpha)_{\alpha\in S}$ d'une part, tN_0t^{-1} et $(\iota'_\alpha)_{\alpha\in S}$ d'autre part sont les mêmes. Pour cela il suffit de montrer que π^{N_1} et $\pi^{tN_1t^{-1}}$ (ce dernier avec l'action induite de tN_0t^{-1}) sont isomorphes (de manière fonctorielle) dans Mod_A. Comme précédemment, l'application ($\pi^{N_1} \to \pi^{tN_1t^{-1}}$, $v \mapsto tv$) induit un tel isomorphisme.

Remarque 4.3. — Soit ξ' un autre choix de cocaractère, il existe $\zeta : \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \to Z_G$ tel que $\xi'(x) = \zeta(x)\xi(x)$ pour $x \in L^\times$ (voir § 3). Lorsque $Z_G(L)$ agit sur π par un caractère $\chi_\pi : Z_G(L) \to A^\times$ (ce qui est le cas dans la plupart des applications), on laisse le lecteur vérifier en utilisant le Lemme 7.5 ci-dessous que $D_{\xi'}^\vee(\pi)$ est isomorphe à $D_\xi^\vee(\pi)$ tordu par le (φ, Γ)-module de l'inverse du caractère lisse $\chi_\pi \circ \zeta : \mathbb{Q}_p^\times \to A^\times$ (via la réciprocité locale).

5. Compatibilité au produit tensoriel

On montre une compatibilité au produit tensoriel du foncteur $D_\xi^\vee$.

On conserve les notations des §§ 2 et 3.

Lemme 5.1. — *Soit M un $k_E[[X]][F]$-module de torsion sur $k_E[[X]]$. On suppose :*

(i) *$M^\vee \cong k_E[[X]]^d$ pour $d > 0$ comme $k_E[[X]]$-module;*
(ii) *il existe une suite d'entiers positifs $(N_n)_{n>0}$ croissante et non bornée telle que, pour tout $n > 0$, il existe $v_n \in M[X^{N_n}]\backslash M[X^{N_n-1}]$ avec $F(v_n) \in M[X^{N_n}]$.*

Alors il existe un sous-$k_E[[X]]$-module admissible $M' \subseteq M$ tel que $M'^\vee \cong k_E[[X]]$ et $F(m') = 0$ pour tout $m' \in M'$.

Démonstration. — Par la dualité modules compacts - modules discrets ([**14**, § IV.4]) l'hypothèse (i) est équivalente à :

$$M \cong \big(\varinjlim_n k_E[X]/(X^n)\big)^d \cong \big(k_E[[X]][1/X]/k_E[[X]]\big)^d.$$

Pour tout $i > n$, on a $X^{N_i-N_n}v_i \in M[X^{N_n}]\backslash M[X^{N_n-1}]$ et :

$$F(X^{N_i-N_n}v_i) = X^{p(N_i-N_n)}F(v_i) \in X^{p(N_i-N_n)}M[X^{N_i}] \subseteq M[X^{N_n}].$$

Comme $M[X^{N_n}]$ est un ensemble fini (car k_E est fini et M est admissible), quitte à remplacer v_n par l'un des $X^{N_i-N_n}v_i$ pour $i > n$ on peut supposer par un procédé diagonal que l'on a $v_n = X^{N_i-N_n}v_i$ pour tout $n > 0$ et tout $i > n$. Le sous-$k_E[[X]]$-module M' de M engendré par les v_n pour $n > 0$ est alors clairement isomorphe à $\varinjlim_n k_E[X]/(X^{N_n}) \cong k_E[[X]][1/X]/k_E[[X]]$. Par ailleurs, comme pour tout $i > n$:

$$F(v_n) = F\big(X^{N_i-N_n}v_i\big) \in X^{(p-1)(N_i-N_n)}M[X^{N_n}],$$

on en déduit $F(v_n) = 0$ pour tout $n > 0$ puisque $(p-1)(N_i - N_n) \to +\infty$ quand $i \to +\infty$. Ceci achève la preuve. □

Lemme 5.2. — *Soit M un $A[[X]][F]$-module de torsion sur $A[[X]]$. On suppose :*

(i) *M est admissible comme $A[[X]]$-module;*
(ii) *l'application* $\mathrm{Id}\otimes F : A[[X]] \otimes_{\varphi,A[[X]]} M \longrightarrow M$ *induit un isomorphisme comme en (3) en dualisant puis en inversant X.*

Alors M est un $A[[X]][F]$-module de type fini.

Démonstration. — Soit $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ une suite exacte de $A[[X]][F]$-modules de torsion sur $A[[X]]$ avec M comme dans l'énoncé. En particulier M' et M'' sont aussi admissibles comme $A[[X]]$-modules. Comme $\varphi : A[[X]] \to A[[X]]$ est plat et comme la localisation est exacte, les applications $\mathrm{Id}\otimes F$ induisent un diagramme commutatif de suites exactes courtes de $A[[X]][1/X]$-modules :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & M''^{\vee}[1/X] & \to & M^{\vee}[1/X] & \to & M'^{\vee}[1/X] & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & (A[[X]]\otimes_{\varphi,A[[X]]}M'')^{\vee}[\frac{1}{X}] & \to & (A[[X]]\otimes_{\varphi,A[[X]]}M)^{\vee}[\frac{1}{X}] & \to & (A[[X]]\otimes_{\varphi,A[[X]]}M')^{\vee}[\frac{1}{X}] & \to & 0 \end{array}$$

où l'application verticale du milieu est un isomorphisme par hypothèse. On en déduit que l'application verticale de droite est surjective, donc est un isomorphisme puisque les deux $A[[X]][1/X]$-modules sont de même longueur (finie). La flèche verticale de gauche est donc aussi un isomorphisme. Comme M est un $A[[X]][F]$-module de type fini si et seulement si M' et M'' le sont, on voit que par dévissage on est ramené à montrer le lemme pour $A = k_E$, ce que l'on suppose désormais.

Comme M est admissible, on a $M^\vee \cong k_E[[X]]^d \oplus (M^\vee)_{\mathrm{tors}}$ où $d \geq 0$ et $(M^\vee)_{\mathrm{tors}} \subseteq M^\vee$ est le sous-$k_E[[X]]$-module de torsion de $M^\vee$ (de dimension finie sur k_E). Comme $(M^\vee)_{\mathrm{tors}}$ est stable par F dans $M^\vee$ (utiliser $X^nF(f) = F(X^{pn}f)$ si

$f \in M^\vee$) et vérifie $(M^\vee)_{\mathrm{tors}}[1/X] = 0$, quitte à remplacer M par $\mathrm{Ker}\big(M \twoheadrightarrow ((M^\vee)_{\mathrm{tors}})^\vee\big)$ on peut supposer $M^\vee \cong k_E[[X]]^d$ et $d > 0$. En particulier on a alors $M[X^n]\backslash M[X^{n-1}] \neq \emptyset$ pour tout $n > 0$.
Pour $n > 0$ soit $M_n \subseteq M$ le sous-$k_E[[X]][F]$-module engendré par $M[X^n]$. Supposons d'abord que, pour tout $n > 0$, $M_n^\vee[1/X] = 0$. Alors $M_n^\vee$ est un $k_E[[X]]$-module de type fini qui est de torsion, donc est de dimension finie sur k_E. Il en est de même pour M_n et il existe donc $R_n \geq n$ tel que $M_n \subseteq M[X^{R_n}]$. On en déduit l'existence d'une suite d'entiers positifs $(R_n)_{n>0}$ telle que $M_n \subseteq M[X^{R_n}]$ pour tout $n > 0$. Montrons l'existence de (N_1, v_1) tel que $1 \leq N_1$ et $v_1 \in M[X^{N_1}]\backslash M[X^{N_1-1}]$ avec $F(v_1) \in M[X^{N_1}]$. Soit $v \in M[X]\backslash\{0\} \subseteq M_1$, si $F(v) \in M[X]$ (dans M_1), on prend $N_1 \overset{\text{déf}}{=} 1$ et $v_1 \overset{\text{déf}}{=} v$. Sinon, on regarde $F(v) \in M_1$. On a $F(v) \in M[X^{S_1}]\backslash M[X^{S_1-1}]$ pour un entier S_1 tel que $2 \leq S_1 \leq R_1$. Si $F(F(v)) \in M[X^{S_1}]$, on prend $N_1 = S_1$ et $v_1 = F(v)$, sinon on recommence avec $F^2(v) \in M_1$. Comme $M_1 \subseteq M[X^{R_1}]$, on est certain que l'un des $F^i(v)$ va marcher. En recommençant ce procédé avec M_{N_1+1} au lieu de M_1, i.e. en partant de $v \in M[X^{N_1+1}]\backslash M[X^{N_1}] \subseteq M_{N_1+1}$, on trouve (N_2, v_2) tel que $N_1 < N_2$ et $v_2 \in M[X^{N_2}]\backslash M[X^{N_2-1}]$ avec $F(v_2) \in M[X^{N_2}]$. En continuant on obtient ainsi une suite $(N_n, v_n)_{n>0}$ comme dans le Lemme 5.1. Par le Lemme 5.1, il existe un sous-$k_E[[X]]$-module M' de M tel que $M'^\vee[1/X] \neq 0$ et $F|_{M'} \equiv 0$ (en particulier M' est stable par F dans M). Considérons maintenant le diagramme commutatif de $k_E[[X]][1/X]$-espaces vectoriels de dimension finie :

$$\begin{array}{ccc} M^\vee[1/X] & \overset{(\mathrm{Id}\otimes F)^\vee}{\longrightarrow} & \big(k_E[[X]] \otimes_{\varphi, k_E[[X]]} M\big)^\vee[1/X] \\ \downarrow & & \downarrow \\ M'^\vee[1/X] & \overset{(\mathrm{Id}\otimes F)^\vee}{\longrightarrow} & \big(k_E[[X]] \otimes_{\varphi, k_E[[X]]} M'\big)^\vee[1/X]. \end{array}$$

Comme l'application horizontale du haut est un isomorphisme (par hypothèse) et comme les deux applications verticales sont surjectives (car duales d'injections tensorisées par $k_E[[X]][1/X]$), l'application horizontale du bas est aussi surjective. Mais comme elle est en fait nulle (puisque $F|_{M'} \equiv 0$), on en déduit :

$$0 = \big(k_E[[X]] \otimes_{\varphi, k_E[[X]]} M'\big)^\vee[1/X] \cong k_E[[X]] \otimes_{\varphi, k_E[[X]]} (M'^\vee[1/X])$$

(cf. le deuxième isomorphisme en (3)), ce qui est une contradiction puisque $M'^\vee[1/X] \neq 0$.
Donc il existe $n > 0$ tel que $M_n^\vee[1/X] \neq 0$. En dévissant comme au début de la preuve selon la suite exacte $0 \to M_n \to M \to M/M_n \to 0$ et en remarquant que M_n est un $k_E[[X]][F]$-module de type fini (puisque $M[X^n]$ est de dimension finie sur k_E), on voit qu'il suffit de montrer le lemme pour M/M_n (pour un $n > 0$) au lieu de M. Comme $\dim_{k_E[[X]][1/X]}((M/M_n)^\vee[1/X]) < \dim_{k_E[[X]][1/X]}(M^\vee[1/X]) = d$, en faisant une récurrence descendante sur d, on est ainsi ramené à $d = 0$, i.e. au cas $M^\vee \cong (M^\vee)_{\mathrm{tors}}$ que l'on a traité au début. $\square$

Soit N et N' deux objets de Mod_A. On munit $N^\vee$ d'une structure de $A[[X]][F]$-module avec action de $\mathbb{Z}_p^\times$ comme dans la preuve du Lemme 2.6. On note

$\mathrm{Hom}_A^{\mathrm{cont}}(N^\vee,N')$ le A-module des homomorphismes continus A-linéaires de $N^\vee$ dans N' où $N^\vee$ est muni de la topologie profinie et N' de la topologie discrète. Tout $\mathcal{F}\in\mathrm{Hom}_A^{\mathrm{cont}}(N^\vee,N')$ se factorise donc par un quotient fini de $N^\vee$. On munit $\mathrm{Hom}_A^{\mathrm{cont}}(N^\vee,N')$ d'un endomorphisme F défini par $F(\mathcal{F})(f)\overset{\text{déf}}{=}F\big(\mathcal{F}(F(f))\big)$ et d'une action de $\mathbb{Z}_p^\times$ par $x(\mathcal{F})(f)\overset{\text{déf}}{=}x\big(\mathcal{F}(x^{-1}(f))\big)$ (où $\mathcal{F}\in\mathrm{Hom}_A^{\mathrm{cont}}(N^\vee,N')$, $f\in N^\vee$ et $x\in\mathbb{Z}_p^\times$). C'est aussi naturellement un $A[[X]]\otimes_A A[[X]]$ module via $(S'(X)\otimes S(X)\cdot\mathcal{F})(f)\overset{\text{déf}}{=}S'(X)\mathcal{F}(S(X)f)$.

Soit $Y\overset{\text{déf}}{=}(1+X)\otimes 1-1\otimes(1+X)=X\otimes 1-1\otimes X\in A[[X]]\otimes_A A[[X]]$, on a $F(Y)=Y\big(\sum_{i=0}^{p-1}(1+X)^{p-1-i}\otimes(1+X)^i\big)$ dans $A[[X]]\otimes_A A[[X]]$ et on voit que :

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_A^{\mathrm{cont}}(N^\vee,N')[Y]&\overset{\text{déf}}{=}\{\mathcal{F}\in\mathrm{Hom}_A^{\mathrm{cont}}(N^\vee,N'),\ Y\mathcal{F}=0\}\\&=\{\mathcal{F}\in\mathrm{Hom}_A^{\mathrm{cont}}(N^\vee,N'),\ X\mathcal{F}(f)=\mathcal{F}(Xf)\ \forall\ f\in N^\vee\}\\&=\mathrm{Hom}_{A[[X]]}^{\mathrm{cont}}(N^\vee,N')\end{aligned}$$

est un $A[[X]]$-module de torsion (X^j agissant par $X^j\otimes 1$ ou $1\otimes X^j$) stable par l'action de $\mathbb{Z}_p^\times$ et par :

$$\Big(\sum_{i=0}^{p-1}(1+X)^{p-1-i}\otimes(1+X)^i\Big)F \tag{17}$$

dans $\mathrm{Hom}_A^{\mathrm{cont}}(N^\vee,N')$ (il s'agit du sous-A-module de $\mathrm{Hom}_A^{\mathrm{cont}}(N^\vee,N')$ des homomorphismes $A[[X]]$-linéaires). En *définissant* l'action de F sur $\mathrm{Hom}_{A[[X]]}^{\mathrm{cont}}(N^\vee,N')$ par (17), on obtient un objet de Mod_A.

Lemme 5.3. — *Soit M et M' deux objets de Mod_A dont les $A[[X]]$-modules sous-jacents sont admissibles. Le dual de l'application :*

$$\mathrm{Id}\otimes F : A[[X]]\otimes_{\varphi,A[[X]]}\mathrm{Hom}_{A[[X]]}^{\mathrm{cont}}(M^\vee,M')\longrightarrow\mathrm{Hom}_{A[[X]]}^{\mathrm{cont}}(M^\vee,M')$$

s'identifie à l'application $(\mathrm{Id}\otimes F_M)^\vee\otimes(\mathrm{Id}\otimes F_{M'})^\vee$ *(avec des notations évidentes) :*

$$\begin{aligned}M^\vee\otimes_{A[[X]]}M'^\vee&\longrightarrow\big(A[[X]]\otimes_{\varphi,A[[X]]}M\big)^\vee\otimes_{A[[X]]}\big(A[[X]]\otimes_{\varphi,A[[X]]}M'\big)^\vee\\&\cong\big(A[[X]]\otimes_{\varphi,A[[X]]}M^\vee\big)\otimes_{A[[X]]}\big(A[[X]]\otimes_{\varphi,A[[X]]}M'^\vee\big)\\&\cong A[[X]]\otimes_{\varphi,A[[X]]}\big(M^\vee\otimes_{A[[X]]}M'^\vee\big).\end{aligned}$$

Démonstration. — Notons d'abord que $\mathrm{Hom}_{A[[X]]}^{\mathrm{cont}}(M^\vee,M')=\mathrm{Hom}_{A[[X]]}(M^\vee,M')$ (car $M^\vee$ est de type fini sur $A[[X]]$) et que le $A[[X]]$-module $\mathrm{Hom}_{A[[X]]}(M^\vee,M')$ est admissible (car $\mathrm{Hom}_{A[[X]]}(M^\vee,M')[X]=\mathrm{Hom}_A(M^\vee/(X),M'[X])$ est de type fini sur A puisque $M^\vee/(X)$ et $M'[X]$ le sont). Considérons l'application entre $A[[X]]$-modules de type fini :

$$\begin{aligned}M^\vee\otimes_{A[[X]]}M'^\vee&\longrightarrow\mathrm{Hom}_A\big(\mathrm{Hom}_{A[[X]]}(M^\vee,M'),A\big)\\f\otimes f'&\longmapsto\big(\mathcal{F}\mapsto f'(\mathcal{F}(f))\big)\end{aligned} \tag{18}$$

($f \in M^\vee, f' \in M'^\vee, \mathcal{F} \in \mathrm{Hom}_{A[[X]]}(M^\vee, M')$). Elle est bien définie et $A[[X]]$-linéaire car $(S(X)f')(\mathcal{F}(f)) = f'(S(X)\mathcal{F}(f)) = f'(\mathcal{F}(S(X)f))$ ($S(X) \in A[[X]]$). Il est facile de vérifier qu'elle est de plus $\mathbb{Z}_p^\times$-invariante. Montrons qu'il s'agit d'un isomorphisme. Par dualité, il suffit de montrer que l'application $A[[X]]$-linéaire induite sur les $A[[X]]$-modules admissibles de torsion :

$$\begin{array}{rcl}\mathrm{Hom}_{A[[X]]}(M^\vee, M') & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A^{\mathrm{cont}}(M^\vee \otimes_{A[[X]]} M'^\vee, A) \\ \mathcal{F} & \longmapsto & \big(f \otimes f' \mapsto f'(\mathcal{F}(f))\big)\end{array} \tag{19}$$

est un isomorphisme. Comme on a des isomorphismes de $A[[X]]$-modules :

$$\begin{array}{rcl}\mathrm{Hom}_{A[[X]]}(M^\vee, M') & \cong & \varinjlim_n \mathrm{Hom}_{A[[X]]}\big(M^\vee/(X^n), M'[X^n]\big) \\ \mathrm{Hom}_A^{\mathrm{cont}}(M^\vee \otimes_{A[[X]]} M'^\vee, A) & \cong & \varinjlim_n \mathrm{Hom}_A\big(M^\vee/(X^n) \otimes_{A[[X]]} M'^\vee/(X^n), A\big),\end{array}$$

il suffit de montrer l'analogue de (19) en remplaçant M (resp. M') par $M[X^n]$ (resp. $M'[X^n]$), i.e. il suffit de le démontrer avec M et M' des $A[[X]]$-modules de torsion de type fini (donc finis). Changeant de notations, il suffit donc de montrer que :

$$\begin{array}{rcl}\mathrm{Hom}_{A[[X]]}(M, M'^\vee) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(M \otimes_{A[[X]]} M', A) \\ \mathcal{F} & \longmapsto & \big(m \otimes m' \mapsto \mathcal{F}(m)(m')\big)\end{array} \tag{20}$$

est un isomorphisme, ce qui est clair car l'application réciproque est donnée par :

$$\mathcal{G} \in \mathrm{Hom}_A(M \otimes_{A[[X]]} M', A) \longmapsto \big(m \mapsto (m' \mapsto \mathcal{G}(m \otimes m'))\big).$$

Reste enfin à montrer que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} M^\vee \otimes_{A[[X]]} M'^\vee & \stackrel{(18)}{\longrightarrow} & \mathrm{Hom}_A\big(\mathrm{Hom}_{A[[X]]}^{\mathrm{cont}}(M^\vee, M'), A\big) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A[[X]]\otimes_{\varphi,A[[X]]}(M^\vee \otimes_{A[[X]]} M'^\vee) & \stackrel{\mathrm{Id}\otimes(18)}{\longrightarrow} & A[[X]]\otimes_{\varphi,A[[X]]}\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_{A[[X]]}^{\mathrm{cont}}(M^\vee, M'), A) \end{array} \tag{21}$$

est commutatif où les deux applications verticales sont les duales de $\mathrm{Id}\otimes F$. Si N est un objet quelconque de Mod_A, l'application $N^\vee \stackrel{(\mathrm{Id}\otimes F)^\vee}{\longrightarrow} \big(A[[X]]\otimes_{\varphi,A[[X]]} N\big)^\vee \cong A[[X]] \otimes_{\varphi,A[[X]]} N^\vee$ est donnée par :

$$f \longmapsto \sum_{i=0}^{p-1} (1+X)^{p-1-i} \otimes f_i \tag{22}$$

où $f \in N^\vee$ et $f_i \in N^\vee$ est défini par $f_i(n) \stackrel{\text{déf}}{=} f\big((1+X)^i F(n)\big)$ pour $n \in N$. La commutation de (21) est alors un calcul un petit peu laborieux mais sans difficulté et laissé au lecteur. $\square$

Proposition 5.4. — *Soit M et M' deux objets de* Mod_A *dont les $A[[X]][F]$-modules sous-jacents vérifient (1). Alors* $\mathrm{Hom}_{A[[X]]}^{\mathrm{cont}}(M^\vee, M')$ *vérifie aussi (1).*

Démonstration. — On a vu dans la preuve du Lemme 5.3 que le $A[[X]]$-module $\mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{A[[X]]}(M^\vee, M') = \mathrm{Hom}_{A[[X]]}(M^\vee, M')$ est admissible. Il faut montrer qu'il est de type fini sur $A[[X]][F]$. L'application $(\mathrm{Id}\otimes F_M)^\vee \otimes (\mathrm{Id}\otimes F_{M'})^\vee$:

$$\begin{aligned} M^\vee \otimes_{A[[X]]} M'^\vee &\longrightarrow \big(A[[X]] \otimes_{\varphi,A[[X]]} M\big)^\vee \otimes_{A[[X]]} \big(A[[X]] \otimes_{\varphi,A[[X]]} M'\big)^\vee \\ &\cong A[[X]] \otimes_{\varphi,A[[X]]} \big(M^\vee \otimes_{A[[X]]} M'^\vee\big) \end{aligned}$$

est un isomorphisme $A[[X]][1/X]$-linéaire lorsque l'on inverse X car tel est le cas de $(\mathrm{Id}\otimes F_M)^\vee$ et $(\mathrm{Id}\otimes F_{M'})^\vee$ (puisque M, M' vérifient (1), cf. (3)). Le Lemme 5.2 (que l'on peut appliquer à $\mathrm{Hom}_{A[[X]]}(M^\vee, M')$ par le Lemme 5.3) implique alors que $\mathrm{Hom}_{A[[X]]}(M^\vee, M')$ est de type fini sur $A[[X]][F]$. $\square$

La catégorie $\widehat{\Phi\Gamma}_A^{\acute{e}t}$ est munie d'un produit tensoriel naturel comme suit : si $D = \varprojlim_{i\in I} D_i$ et $D' = \varprojlim_{i'\in I'} D'_{i'}$ sont dans $\widehat{\Phi\Gamma}_A^{\acute{e}t}$, on pose :

$$D\widehat{\otimes}D' \overset{\text{déf}}{=} \varprojlim_{(i,i')\in I\times I'} \big(D_i \otimes_{A[[X]][1/X]} D'_{i'}\big) \in \widehat{\Phi\Gamma}_A^{\acute{e}t} \tag{23}$$

où $D_i \otimes_{A[[X]][1/X]} D'_{i'}$ est le produit tensoriel dans $\Phi\Gamma_A^{\acute{e}t}$ (on vérifie que cela est indépendant des D_i, $D'_{i'}$ tels que $D = \varprojlim D_i$ et $D' = \varprojlim D'_{i'}$). Notons que $D\widehat{\otimes}D' = D \otimes_{A[[X]][1/X]} D'$ si $D, D' \in \Phi\Gamma_A^{\acute{e}t}$.

Nous montrons maintenant le résultat principal de cette section. Notons d'abord que, comme le foncteur $D_\xi^\vee$ du § 3 ne dépend que du choix de ξ, quitte à modifier ι_α et N_0 il n'est pas difficile de voir que l'on peut de plus supposer que ι_α induit des isomorphismes pour $\alpha \in S$:

$$N_\alpha(L) \cap N_0 \overset{\sim}{\longrightarrow} \mathcal{O}_L \subset L = \mathbb{G}_{\mathrm{a}}(L). \tag{24}$$

On supposera toujours dans la suite que N_0 vérifie (24). De plus, on fixe une fois pour toute un isomorphisme de $\mathbb{Z}_p$-modules $\psi : \mathrm{Tr}_{L/\mathbb{Q}_p}(\mathcal{O}_L) \overset{\sim}{\to} \mathbb{Z}_p$, ce qui fixe donc un isomorphisme (si $G \neq T$) :

$$N_0/N_1 \overset{\mathrm{Tr}_{L/\mathbb{Q}_p}\circ\ell}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} \mathrm{Tr}_{L/\mathbb{Q}_p}(\mathcal{O}_L) \overset{\psi}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} \mathbb{Z}_p.$$

Soit G' un autre groupe algébrique réductif connexe déployé sur L de centre connexe, $B' \subseteq G'$ un sous-groupe de Borel et $T' \subseteq B'$ un tore maximal déployé dans B'. Comme pour (G, B, T) on fixe $(\iota_{\alpha'})_{\alpha'\in S'}$ (où S' désigne les racines simples associées à (G', B', T')), $\xi' \in X^\vee(T')$ et N'_0 totalement décomposé vérifiant (24). On définit N'_1 par (11) et, comme ci-dessus, l'isomorphisme ψ induit un isomorphisme de $\mathbb{Z}_p$-modules $N'_0/N'_1 \cong \mathbb{Z}_p$ si $G' \neq T'$. On considère $(G\times G', B\times B', T\times T')$ avec les choix $((\iota_\alpha)_{\alpha\in S},\ (\iota_{\alpha'})_{\alpha'\in S'})$, $\xi\oplus\xi' \in X^\vee(T\times T')$ et $N_0 \times N'_0$ (qui est totalement décomposé et vérifie (24)) et on note :

$$N''_1 \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Ker}\big(N_0 \times N'_0 \overset{\sum\iota_\alpha+\sum\iota_{\alpha'}}{\longrightarrow} \mathcal{O}_L \overset{\mathrm{Tr}_{L/\mathbb{Q}_p}}{\longrightarrow} \mathrm{Tr}_{L/\mathbb{Q}_p}(\mathcal{O}_L) \overset{\psi}{\longrightarrow} \mathbb{Z}_p\big). \tag{25}$$

Pour toute représentation lisse de $B(L) \times B'(L)$ sur A on dispose donc de $D^\vee_{\xi\oplus\xi'}(\cdot) \in \widehat{\Phi\Gamma}_A^{\acute{e}t}$.

Proposition 5.5. — *Soit π et π' des représentations lisses respectivement de $B(L)$ et $B'(L)$ sur des A-modules libres. On suppose que les $A[[X]][F]$-modules π^{N_1} et ${\pi'}^{N'_1}$ satisfont la propriété Ad de la Définition 2.2. Alors on a un isomorphisme dans $\widehat{\Phi\Gamma}_A^{\acute{e}t}$:*

$$D^\vee_{\xi\oplus\xi'}(\pi \otimes_A \pi') \cong D^\vee_\xi(\pi)\widehat{\otimes} D^\vee_{\xi'}(\pi'). \tag{26}$$

Démonstration. — Notons $\mathrm{Hom}_A^{\mathrm{cont}}(\pi^\vee, \pi')$ le A-module des homomorphismes A-linéaires continus de $\pi^\vee$ dans π' où $\pi^\vee$ est muni de la topologie profinie et π' de la topologie discrète. En écrivant $\pi = \varinjlim_n V_n$ et $\pi' = \varinjlim_{n'} V'_{n'}$ où $V_n, V'_{n'}$ sont des sous-A-modules *libres* de type fini quelconques de (l'espace sous-jacent à) respectivement π et π', on a :

$$\mathrm{Hom}_A^{\mathrm{cont}}(\pi^\vee, \pi') = \varinjlim_n \mathrm{Hom}_A(V_n^\vee, \pi') = \varinjlim_{n,n'} \mathrm{Hom}_A(V_n^\vee, V'_{n'}). \tag{27}$$

L'application $\pi \otimes_A \pi' \to \mathrm{Hom}_A^{\mathrm{cont}}(\pi^\vee, \pi')$, $v \otimes v' \mapsto \big(f \mapsto f(v)v'\big)$ est un isomorphisme, car par (27) et $\pi \otimes_A \pi' = \varinjlim_{n,n'} V_n \otimes_A V_{n'}$ il suffit de le vérifier avec les A-modules libres de type fini V_n et $V_{n'}$ au lieu de π et π' où c'est évident.
Supposons d'abord $G \neq T$ et $G' \neq T'$. On déduit de ce qui précède un isomorphisme :

$$\begin{aligned}(\pi \otimes_A \pi')^{N_1 \times N'_1} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A^{\mathrm{cont}}(\pi^\vee, \pi')^{N_1 \times N'_1} &\cong \mathrm{Hom}_A^{\mathrm{cont}}\big(\pi^\vee, {\pi'}^{N'_1}\big)^{N_1} \\ &\cong \mathrm{Hom}_A^{\mathrm{cont}}\big((\pi^{N_1})^\vee, {\pi'}^{N'_1}\big)\end{aligned} \tag{28}$$

(le dernier isomorphisme se montre en écrivant $\pi = \varinjlim_n W_n$ où la limite inductive est prise sur des sous-A-modules de type finis W_n de π stables par N_1 et en utilisant que les coinvariants $(W_n^\vee)_{N_1}$ de $W_n^\vee$ pour l'action de N_1 sont isomorphes à $(W_n^{N_1})^\vee$, ce qui découle en dualisant puis en remplaçant W_n par son dual du fait que, si V est une représentation lisse de N_1 sur un A-module de type fini, on a $(V^\vee)^{N_1} = (V_{N_1})^\vee$). Il n'est pas difficile de vérifier que l'action de $N_0 \times N'_0$ sur $(\pi \otimes_A \pi')^{N_1 \times N'_1}$ induit la structure de $A[[N_0/N_1]]\otimes_A A[[N'_0/N'_1]] \cong A[[N'_0/N'_1]]\otimes_A A[[N_0/N_1]] \cong A[[X]]\otimes_A A[[X]]$-module définie ci-dessus sur $\mathrm{Hom}_A^{\mathrm{cont}}\big((\pi^{N_1})^\vee, {\pi'}^{N'_1}\big)$ (rappelons que π^{N_1} et ${\pi'}^{N'_1}$ sont dans Mod_A) et que, par (25), cela induit un isomorphisme de $A[[X]]$-modules :

$$(\pi \otimes_A \pi')^{N''_1} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A^{\mathrm{cont}}\big((\pi^{N_1})^\vee, {\pi'}^{N'_1}\big)[Y] \cong \mathrm{Hom}_{A[[X]]}^{\mathrm{cont}}\big((\pi^{N_1})^\vee, {\pi'}^{N'_1}\big) \tag{29}$$

qui commute aux actions de $\mathbb{Z}_p^\times$ et de F (avec l'action (17) de F à droite). Soit $H \subseteq \mathrm{Hom}_{A[[X]]}^{\mathrm{cont}}((\pi^{N_1})^\vee, {\pi'}^{N'_1})$ un sous-$A[[X]][F]$-module de type fini et $\mathcal{F}_1, \cdots, \mathcal{F}_d$ des générateurs de H sur $A[[X]][F]$. Par continuité chaque $\mathcal{F}_i : (\pi^{N_1})^\vee \to {\pi'}^{N'_1}$

se factorise par un quotient $M_i^\vee$ de $(\pi^{N_1})^\vee$ où $M_i\subseteq \pi^{N_1}$ est un sous-A-module de type fini que l'on peut prendre stable par $\mathbb{Z}_p^\times$, et est à valeurs dans un sous-A-module de type fini M_i' (stable par $\mathbb{Z}_p^\times$) de ${\pi'}^{N_1'}$. Soit M (resp. M') le sous-$A[[X]][F]$-module de π^{N_1} (resp. ${\pi'}^{N_1'}$) engendré par $\sum_{i=1}^d M_i$ (resp. $\sum_{i=1}^d M_i'$), alors M et M' sont des $A[[X]][F]$-modules de type fini (stables par $\mathbb{Z}_p^\times$) et donc des $A[[X]]$-modules admissibles puisque π^{N_1} et ${\pi'}^{N_1'}$ satisfont la propriété Ad. De plus, par construction on a $\mathcal{F}_i\in \mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{A[[X]]}(M^\vee,M')=\mathrm{Hom}_{A[[X]]}(M^\vee,M')$ pour tout i et donc $H=\sum_{i=1}^d A[[X]][F]\mathcal{F}_i\subseteq \mathrm{Hom}_{A[[X]]}(M^\vee,M')$. Comme par la Proposition 5.4 et (29), on a :

$$\mathrm{Hom}_{A[[X]]}(M^\vee,M')\in \mathcal{M}\big(\mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{A[[X]]}\big((\pi^{N_1})^\vee,{\pi'}^{N_1'}\big)\big)=\mathcal{M}\big((\pi\otimes_A\pi')^{N_1''}\big),$$

on en déduit que H est un $A[[X]]$-module admissible et que les $A[[X]][F]$-modules $\mathrm{Hom}_{A[[X]]}(M^\vee,M')$ pour (M,M') parcourant $\mathcal{M}(\pi^{N_1})\times\mathcal{M}({\pi'}^{N_1'})$ forment un système cofinal dans $\mathcal{M}\big((\pi\otimes_A\pi')^{N_1''}\big)$. Cela implique :

$$\begin{aligned}D^\vee\big((\pi\otimes_A\pi')^{N_1''}\big) &\cong \varprojlim_{(M,M')} D^\vee\big(\mathrm{Hom}_{A[[X]]}(M^\vee,M')\big)\\ &\cong \varprojlim_{(M,M')}\big(M^\vee[1/X]\otimes_{A[[X]][1/X]}{M'}^\vee[1/X]\big)\\ &\cong D^\vee(\pi^{N_1})\widehat{\otimes}D^\vee({\pi'}^{N_1'})\end{aligned}$$

où la limite projective est prise sur $(M,M')\in\mathcal{M}(\pi^{N_1})\times\mathcal{M}({\pi'}^{N_1'})$ et où le deuxième isomorphisme résulte du Lemme 5.3. Cela donne l'isomorphisme de l'énoncé lorsque $G\neq T,\ G'\neq T'$.

Traitons le cas $G=T$ et $G'\neq T'$ et notons que $\pi^{N_1}=\pi$ est un $A[F]$-module de torsion puisqu'il satisfait la propriété Ad. Pour $(M,M')\in\mathcal{M}(\pi)\times\mathcal{M}({\pi'}^{N_1})$ on a $\mathrm{Hom}_A^{\mathrm{cont}}(M^\vee,M')=\mathrm{Hom}_A(M^\vee,M')$ et un isomorphisme $A[[X]]$-linéaire analogue à (18) :

$$(A[[X]]\otimes_A M^\vee)\otimes_{A[[X]]}{M'}^\vee\cong M^\vee\otimes_A{M'}^\vee\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_A\big(\mathrm{Hom}_A(M^\vee,M'),A\big).$$

Par une preuve analogue (en plus simple) à celle du cas $G\neq T$, $G'\neq T'$, on obtient que les $\mathrm{Hom}_A(M^\vee,M')$ pour $(M,M')\in\mathcal{M}(\pi)\times\mathcal{M}({\pi'}^{N_1})$ forment un système cofinal dans $\mathcal{M}\big(\mathrm{Hom}_A^{\mathrm{cont}}\big(\pi^\vee,{\pi'}^{N_1'}\big)\big)=\mathcal{M}(\pi\otimes_A{\pi'}^{N_1})$ et que $D^\vee(\mathrm{Hom}_A(M^\vee,M'))\cong D^\vee(M)\otimes_{A[[X]][1/X]}D^\vee(M')$. On conclut comme dans le cas $G\neq T$, $G'\neq T'$. Enfin, le cas $G=T$, $G'=T'$ est encore plus simple et laissé au lecteur. □

Remarque 5.6. — (i) La preuve de la Proposition 5.5 donne aussi que le $A[[X]][F]$-module $(\pi\otimes_A\pi')^{N_1''}\cong\mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{A[[X]]}\big((\pi^{N_1})^\vee,{\pi'}^{N_1'}\big)$ satisfait la propriété Ad. Par une récurrence immédiate, on en déduit pour tout entier $n>0$ un isomorphisme (avec des notations évidentes) $D^\vee_{\xi_1\oplus\cdots\oplus\xi_n}(\pi_1\otimes_A\cdots\otimes_A\pi_n)\cong D^\vee_{\xi_1}(\pi_1)\widehat{\otimes}\cdots\widehat{\otimes}D^\vee_{\xi_n}(\pi_n)$ lorsque tous les π_i vérifient les hypothèses de la Proposition 5.5.

(ii) L'énoncé de la Proposition 5.5 est peut-être valable sans supposer que π^{N_1}

et ${\pi'}^{N_1'}$ satisfont la propriété Ad ou que les espaces sous-jacents à π et π' sont libres sur A. Par exemple, on peut montrer que, lorsque $A = k_E$, l'isomorphisme (26) est vrai pour *toutes* représentations lisses π, π' de $B(L)$ et $B'(L)$ sur k_E sans hypothèse supplémentaire. Mais n'ayant qu'une preuve assez laborieuse de ce dernier résultat (pour $A = k_E$), et n'ayant de toute façon pas à appliquer (26) ici en dehors des conditions de la Proposition 5.5 (cf. § 9), j'ai finalement opté pour l'énoncé *a minima* ci-dessus.
(iii) Soit N dans Mod_A et munissons $N^\vee = \mathrm{Hom}_A(N, A)$ de sa structure de $A[[X]][F]$-module avec action de $\mathbb{Z}_p^\times$ comme ci-dessus. Alors tout quotient D de $N^\vee[1/X]$ de type fini comme $A[[X]][1/X]$-module, stable par $\mathbb{Z}_p^\times$ et tel que $(\mathrm{Id} \otimes F)^\vee : N^\vee[1/X] \to A[[X]] \otimes_{\varphi, A[[X]]} N^\vee[1/X]$ induit un isomorphisme $D \xrightarrow{\sim} A[[X]] \otimes_{\varphi, A[[X]]} D$ est de la forme $M^\vee[1/X]$ pour un $M \in \mathcal{M}(N)$. En effet, il suffit de considérer l'image du $A[[X]]$-module compact $N^\vee$ dans le $A[[X]][1/X]$-module de type fini D, d'utiliser la dualité modules compacts - modules discrets [**14**, § IV.4] et d'appliquer le Lemme 5.2 au dual M de cette image. Comme réciproquement tout $M \in \mathcal{M}(N)$ donne un tel quotient $D = M^\vee[1/X]$ (Lemme 2.6), on obtient que $D^\vee(N)$ s'identifie à la limite projective des quotients de $N^\vee[1/X]$ qui sont dans $\Phi\Gamma_A^{\acute{e}t}$. En appliquant cela à $N = \pi^{N_1}$ pour π représentation lisse de $B(L)$ sur A (et $G \neq T$), on voit que $D_\xi^\vee(\pi)$ s'identifie à la limite projective des $A[[X]][1/X]$-modules quotients de $(\pi^{N_1})^\vee[1/X]$ qui sont dans $\Phi\Gamma_A^{\acute{e}t}$. On a une identification analogue lorsque $G = T$ en remplaçant $(\pi^{N_1})^\vee[1/X]$ par $\pi^\vee \otimes_A A[[X]][1/X]$ que l'on laisse au lecteur.
(iv) On peut donner une variante comme suit de la preuve du Lemme 5.2 (je remercie un rapporteur anonyme pour cette remarque). Via le même argument qu'au début du (iii) ci-dessus et une récurrence comme au début de la preuve du Lemme 5.2, on peut supposer que $M^\vee[1/X]$ est un φ-module (étale) irréductible sur $k_E[[X]][1/X]$ (on utilise que la catégorie des φ-modules étales de dimension finie est abélienne, noter qu'il n'y a pas de Γ ici). Dès lors (avec les notations de la preuve du Lemme 5.2) : soit $M = M_n$ pour un $n > 0$, et c'est fini puisque M_n est de type fini sur $k_E[[X]][F]$, soit $M_n^\vee[1/X] = 0$ pour tout $n > 0$ par irréductibilité de M, ce qui conduit à l'existence de M' et une contradiction.
(v) La construction de $D_\xi^\vee(\pi)$ donnée en (iii) ci-dessus peut aussi s'interpréter comme une propriété universelle de $D_\xi^\vee(\pi)$. Nous renvoyons pour cela le lecteur à l'article récent [**12**] d'Erdélyi et Zábrádi où les auteurs utilisent [**25**] pour généraliser cette interprétation de $D_\xi^\vee(\pi)$ et faire le lien avec le foncteur construit dans [**20**].

6. Le cas des induites paraboliques I

Dans cette section et la suivante on calcule le $D_\xi^\vee$ d'une induite parabolique en fonction du $D_\xi^\vee$ de la représentation induisante du Levi.

On conserve les notations du § 3, en particulier on fixe des isomorphismes $\iota_\alpha : N_\alpha \overset{\sim}{\to} \mathbb{G}_{\mathrm{a}}$ pour $\alpha \in S$ vérifiant (9), un sous-groupe ouvert compact $N_0 \subset N(L)$ totalement décomposé et vérifiant (24), un isomorphisme de $\mathbb{Z}_p$-modules $\psi : \mathrm{Tr}_{L/\mathbb{Q}_p}(\mathcal{O}_L) \overset{\sim}{\to} \mathbb{Z}_p$ (ce qui détermine un isomorphisme $N_0/N_1 \cong \mathbb{Z}_p$ lorsque $G \neq T$) et un cocaractère $\xi \in X^\vee(T)$ tel que $\alpha \circ \xi = \mathrm{Id}_{\mathbb{G}_{\mathrm{m}}}$ pour $\alpha \in S$.

Soit $P \subseteq G$ un sous-groupe parabolique contenant B, L_P son sous-groupe de Levi, N_P son radical unipotent, P^- le parabolique opposé à P et N_{P^-} le radical unipotent de P^-. Le groupe L_P est réductif connexe déployé et on fixe $B \cap L_P$ comme sous-groupe de Borel de L_P, dont le radical unipotent est $N_{L_P} = N \cap L_P$. On note R_P les racines de (L_P, T), $R_P^+ \subseteq R_P$ les racines positives relativement à $B \cap L_P$ et $S_P \subseteq R_P^+$ les racines simples. Comme Z_G est connexe par hypothèse, ou de manière équivalente le $\mathbb{Z}$-module $X(T)/(\oplus_{\alpha\in S}\mathbb{Z}\alpha)$ est sans torsion, on a que le centre Z_{L_P} de L_P est aussi connexe (car $X(T)/(\oplus_{\alpha\in S_P}\mathbb{Z}\alpha)$ est aussi sans torsion puisque $X(T)/(\oplus_{\alpha\in S}\mathbb{Z}\alpha)$ est sans torsion et $\oplus_{\alpha\in S_P}\mathbb{Z}\alpha$ est facteur direct de $\oplus_{\alpha\in S}\mathbb{Z}\alpha$).

Pour pouvoir appliquer à $(L_P, B\cap L_P, T)$ les constructions et résultats du § 3 on doit fixer des choix pour le groupe réductif L_P. On le fait de manière compatible à ceux pour G comme suit. On garde le même $\xi \in X^\vee(T)$ et les mêmes ι_α (pour $\alpha \in S_P$) et on note $\ell_P : N_{L_P} \twoheadrightarrow \prod_{\alpha\in S_P} N_\alpha \xrightarrow{\sum_{\alpha\in S_P}\iota_\alpha} \mathbb{G}_{\mathrm{a}}$. On a donc un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} N_{L_P} & \hookrightarrow & N \\ \ell_P \downarrow & & \downarrow \ell \\ \mathbb{G}_{\mathrm{a}} & = & \mathbb{G}_{\mathrm{a}}\,. \end{array} \tag{30}$$

On pose $N_{L_P,0} \overset{\text{déf}}{=} N_{L_P}(L) \cap N_0 = \prod_{\alpha\in R_P^+} N_\alpha(L) \cap N_0$ de sorte que :

$$N_{L_P,1} \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Ker}\left(N_{L_P,0} \overset{\ell_P}{\to} L \xrightarrow{\mathrm{Tr}_{L/\mathbb{Q}_p}} \mathbb{Q}_p\right)$$

vérifie $N_{L_P,1} = N_{L_P}(L) \cap N_1 = N_{L_P,0} \cap N_1$ par (30). Lorsque $P \neq B$, l'hypothèse (24) implique que l'on a des suites exactes courtes :

$$0 \to N_{L_P,1} \to N_{L_P,0} \to \mathrm{Tr}_{L/\mathbb{Q}_p}(\mathcal{O}_L) \to 0\ ,\quad 0 \to N_1 \to N_0 \to \mathrm{Tr}_{L/\mathbb{Q}_p}(\mathcal{O}_L) \to 0$$

d'où il suit que l'injection $N_{L_P,0} \subseteq N_0$ induit un isomorphisme (pour $P \neq B$) :

$$N_{L_P,0}/N_{L_P,1} \overset{\sim}{\longrightarrow} N_0/N_1. \tag{31}$$

Toujours lorsque $P \neq B$, l'isomorphisme ψ induit $N_{L_P,0}/N_{L_P,1} \cong \mathbb{Z}_p$ qui coïncide avec (31) composé avec $N_0/N_1 \cong \mathbb{Z}_p$.

L'objectif de cette section et la suivante est de démontrer le théorème suivant.

Théorème 6.1. — *Soit π_P une représentation lisse de $L_P(L)$ sur A, que l'on voit par inflation comme représentation lisse de $P^-(L)$. On a un isomorphisme* *fonctoriel en π_P dans la catégorie* $\widehat{\Phi\Gamma}_A^{\acute{e}t}$ *:*

$$D_\xi^\vee\Big(\operatorname{Ind}_{P^-(L)}^{G(L)}\pi_P\Big)\cong D_\xi^\vee(\pi_P).$$

On suppose $G\neq T$ dans la suite sinon il n'y a rien à montrer. On note $W\cong N_G(T)/T$ et $W_P\cong N_{L_P}(T)/T$ les groupes de Weyl respectifs de G et L_P, et $w_0\in W$ l'élément de longueur maximale. On a $W_P\subseteq W$ et l'ensemble :

$$K_P\overset{\text{déf}}{=}\{w\in W,\ w^{-1}(R_P^+)\subseteq R^+\}$$

est un système de représentants (dits de Kostant) des classes à gauche $W_P\backslash W$. En utilisant que $\{ww_0, w\in K_P\}$ est encore un système de représentants de $W_P\backslash W$, on déduit de la décomposition de Bruhat généralisée ([**9**, Lem.5.5]) que l'on a une décomposition :

$$G=\coprod_{w\in K_P}P^-wB=\coprod_{w\in K_P}P^-wN. \tag{32}$$

En procédant comme dans [**11**, § 4.3] ou [**24**] ou encore [**15**, § 2.1], rappelons que la représentation $\operatorname{Ind}_{P^-(L)}^{G(L)}\pi_P$ admet une filtration croissante par des sous-$B(L)$-représentations dont les gradués sont contenus dans :

$$\mathcal{C}_w(\pi_P)\overset{\text{déf}}{=}\text{c-Ind}_{P^-(L)}^{P^-(L)wN(L)}\pi_P$$

pour $w\in K_P$ où c-Ind signifie les fonctions (localement constantes) à support compact modulo $P^-(L)$ et où l'action de $B(L)$ sur $\mathcal{C}_w(\pi_P)$ est la translation à droite sur les fonctions. De plus $\mathcal{C}_1(\pi_P)$ est le premier cran (ou premier gradué) de la filtration. En fait, au moins lorsque $P=B$, les gradués sont tous exactement les $\mathcal{C}_w(\pi_P)$, cf. par exemple [**15**, § 2.1] (nous n'aurons pas besoin de ce résultat pour $P\neq B$). Par exactitude à droite du foncteur contravariant $D_\xi^\vee$ (cf. (ii) de la Proposition 3.2) et un dévissage évident, on voit qu'il suffit de démontrer les deux propositions suivantes.

Proposition 6.2. — *On a $D_\xi^\vee\big(\mathcal{C}_w(\pi_P)\big)=0$ pour tout $w\in K_P\backslash\{1\}$.*

Proposition 6.3. — *On a un isomorphisme fonctoriel en π_P dans la catégorie $\widehat{\Phi\Gamma}_A^{\acute{e}t}$:*

$$D_\xi^\vee\big(\mathcal{C}_1(\pi_P)\big)\cong D_\xi^\vee(\pi_P).$$

Pour $w\in K_P$ soit π_P^w la représentation de $w^{-1}P^-(L)w$ dont l'espace sous-jacent est le même que π_P et telle que $w^{-1}p^-w\in w^{-1}P^-(L)w$ agit par $\pi_P(p^-)$. On a un isomorphisme $B(L)$-équivariant :

$$\mathcal{C}_w(\pi_P)\xrightarrow{\sim}\text{c-Ind}_{w^{-1}P^-(L)w\cap N(L)}^{N(L)}\pi_P^w\ ,\quad f\mapsto\big(n\mapsto f(wn)\big) \tag{33}$$

où l'action de $N(L)$ est la translation à droite sur les fonctions et où l'action de $T(L)$ est donnée par :

$$(th)(n)=\pi_P^w(t)\big(h(t^{-1}nt)\big) \tag{34}$$

si $t \in T(L)$, $n \in N(L)$ et $h \in \text{c-Ind}_{w^{-1}P^-(L)w\cap N(L)}^{N(L)} \pi_P^w$ (noter que $T(L) \subseteq w^{-1}P^-(L)w$).

Le reste de cette section est consacré à la démonstration de la Proposition 6.2.

Lemme 6.4. — *Notons R^- (resp. R_P^-) les racines négatives de (G,T) (resp. (L_P,T)) relativement à B (resp. $B \cap L_P$). Soit $w \in K_P\backslash\{1\}$, alors on a $w^{-1}(R^-\backslash R_P^-) \cap S \neq \emptyset$.*

Démonstration. — Comme $w \neq 1$, on a $R^- \cap w(R^+) \neq \emptyset$ et donc $R^- \cap w(S) \neq \emptyset$ (puisqu'une racine de $w(R^+)$ est somme à coefficients positifs de racines de $w(S)$). Comme $w \in K_P$, on a $w^{-1}(R_P^-) \subseteq R^-$, donc $w^{-1}(R_P^-) \cap S = \emptyset$ c'est-à-dire $R_P^- \cap w(S) = \emptyset$. On en déduit $(R^-\backslash R_P^-) \cap w(S) \neq \emptyset$, d'où le résultat. □

Le lemme suivant s'inspire de [**20**, Prop.12.2].

Lemme 6.5. — *Soit $w \in K_P\backslash\{1\}$, alors $(w^{-1}N_{P^-}(L)w \cap N_0)\backslash N_0/N_1 = \{1\}$.*

Démonstration. — Par le Lemme 6.4, il existe $\alpha \in S$ tel que $N_\alpha \subseteq w^{-1}N_{P^-}w$, donc $N_\alpha(L) \cap N_0 \subseteq w^{-1}N_{P^-}(L)w \cap N_0$ et il suffit de montrer $(N_\alpha(L) \cap N_0)\backslash N_0/N_1 = \{1\}$. Soit $N_2 \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Ker}(N_0 \overset{\ell}{\to} \mathcal{O}_L)$, on a $N_2 \subseteq N_1$ et il suffit de montrer $(N_\alpha(L) \cap N_0)\backslash N_0/N_2 = \{1\}$. Comme $\ell : N_0/N_2 \overset{\sim}{\to} \mathcal{O}_L$ par (24), il suffit de montrer $\ell(N_\alpha(L) \cap N_0)\backslash \mathcal{O}_L = \{0\}$. Mais c'est clair puisque $\ell(N_\alpha(L) \cap N_0) = \iota_\alpha(N_\alpha(L) \cap N_0) = \mathcal{O}_L$ (encore) par (24). □

Pour tout $w \in K_P$ on munit $\mathcal{C}_w(\pi_P)^{N_1} \cong \big(\text{c-Ind}_{w^{-1}P^-(L)w\cap N(L)}^{N(L)} \pi_P^w\big)^{N_1}$ de sa structure d'objet de Mod_A définie au § 3.

Lemme 6.6. — *(i) Soit $M \subseteq \big(\text{c-Ind}_{w^{-1}P^-(L)w\cap N(L)}^{N(L)} \pi_P^w\big)^{N_1}$ un sous-$A[[X]][F]$-module de type fini. Alors il existe un entier $n \geq 0$ tel que $F^n(M) \subseteq \big(\mathrm{Ind}_{w^{-1}P^-(L)w\cap N_0}^{N_0} \pi_P^w\big)^{N_1}$.*
(ii) Le sous-$A[[X]]$-module $\big(\mathrm{Ind}_{w^{-1}P^-(L)w\cap N_0}^{N_0} \pi_P^w\big)^{N_1}$ de $\big(\text{c-Ind}_{w^{-1}P^-(L)w\cap N(L)}^{N(L)} \pi_P^w\big)^{N_1}$ est un sous-objet dans Mod_A.

Démonstration. — (i) Par [**15**, Lem.3.1.3] on a $N(L) = \bigcup_{n\geq 0} \xi(p^{-n})N_0\xi(p^n)$ et par (34) on a :

$$\xi(p)\Big(\mathrm{Ind}_{w^{-1}P^-(L)w\cap\xi(p^{-n})N_0\xi(p^n)}^{\xi(p^{-n})N_0\xi(p^n)} \pi_P^w\Big) \subseteq \mathrm{Ind}_{w^{-1}P^-(L)w\cap\xi(p^{-n+1})N_0\xi(p^{n-1})}^{\xi(p^{-n+1})N_0\xi(p^{n-1})} \pi_P^w.$$

Soit $n \geq 0$ et $M_n \overset{\text{déf}}{=} \big(\mathrm{Ind}_{w^{-1}P^-(L)w\cap\xi(p^{-n})N_0\xi(p^n)}^{\xi(p^{-n})N_0\xi(p^n)} \pi_P^w\big)^{N_1}$, on en déduit avec (12) (et $N_0 \subseteq \xi(p^{-n})N_0\xi(p^n)$) que les M_n sont des sous-$A[[X]][F]$-modules croissants (quand n grandit) du $A[[X]][F]$-module $\big(\text{c-Ind}_{w^{-1}P^-(L)w\cap N(L)}^{N(L)} \pi_P^w\big)^{N_1}$, que

$F(M_n) \subseteq M_{n-1}$ si $n > 0$, et que :

$$\big(\,\text{c-Ind}_{w^{-1}P^-(L)w\cap N(L)}^{N(L)}\,\pi_P^w\big)^{N_1} = \bigcup_{n\geq 0} M_n.$$

Si $M \subseteq \big(\,\text{c-Ind}_{w^{-1}P^-(L)w\cap N(L)}^{N(L)}\,\pi_P^w\big)^{N_1}$ est de type fini sur $A[[X]][F]$, il existe donc un entier $n \geq 0$ tel que $M \subseteq M_n$ d'où on déduit $F^n(M) \subseteq F^n(M_n) \subseteq M_0$.
(ii) Par le preuve du (i), $M_0 = \big(\,\text{Ind}_{w^{-1}P^-(L)w\cap N_0}^{N_0}\,\pi_P^w\big)^{N_1}$ est stable par F dans $\big(\,\text{c-Ind}_{w^{-1}P^-(L)w\cap N(L)}^{N(L)}\,\pi_P^w\big)^{N_1}$. Comme M_0 est clairement stable par $\mathbb{Z}_p^\times$ (cf. (34)), c'est donc un sous-objet dans Mod_A. $\square$

Proposition 6.7. — *Pour tout $w \in K_P$, on a un isomorphisme dans $\widehat{\Phi\Gamma}_A^{\acute{e}t}$:*

$$D_\xi^\vee\big(\,\text{c-Ind}_{w^{-1}P^-(L)w\cap N(L)}^{N(L)}\,\pi_P^w\big) \xrightarrow{\sim} D^\vee\Big(\big(\,\text{Ind}_{w^{-1}P^-(L)w\cap N_0}^{N_0}\,\pi_P^w\big)^{N_1}\Big).$$

Démonstration. — Le (i) du Lemme 6.6 montre que :

$$\mathcal{C}_w(\pi_P)^{N_1}/\big(\text{Ind}_{w^{-1}P^-(L)w\cap N_0}^{N_0}\,\pi_P^w\big)^{N_1}$$

est un $A[F]$-module de torsion. Le résultat découle donc de la Proposition 2.7. $\square$

On démontre maintenant la Proposition 6.2. Par la Proposition 6.7, il suffit de montrer que tout sous-$A[[X]][F]$-module M de $\big(\,\text{Ind}_{w^{-1}P^-(L)w\cap N_0}^{N_0}\,\pi_P^w\big)^{N_1}$ vérifiant les conditions (1) est tel que $M^\vee[1/X] = 0$ si $w \neq 1$. Comme $w^{-1}N_{P^-}(L)w$ agit trivialement sur π_P^w, on a une injection N_0-équivariante (qui n'est pas un isomorphisme si $P \neq B$) :

$$\text{Ind}_{w^{-1}P^-(L)w\cap N_0}^{N_0}\,\pi_P^w \hookrightarrow \mathcal{C}\big((w^{-1}N_{P^-}(L)w\cap N_0)\backslash N_0, \pi_P^w\big) \tag{35}$$

où le terme de droite désigne le A-module des fonctions localement constantes avec action de N_0 par translation à droite (et triviale sur π_P^w). Cette injection en induit une de $A[[X]]$-modules :

$$\begin{aligned}\big(\,\text{Ind}_{w^{-1}P^-(L)w\cap N_0}^{N_0}\,\pi_P^w\big)^{N_1} &\hookrightarrow \mathcal{C}\big((w^{-1}N_{P^-}(L)w\cap N_0)\backslash N_0, \pi_P^w\big)^{N_1}\\ &\cong \mathcal{C}\big((w^{-1}N_{P^-}(L)w\cap N_0)\backslash N_0/N_1, \pi_P^w\big).\end{aligned}$$

Or, si $w \neq 1$, le Lemme 6.5 implique que X agit par 0 sur ce dernier terme, donc aussi sur $\big(\,\text{Ind}_{w^{-1}P^-(L)w\cap N_0}^{N_0}\,\pi_P^w\big)^{N_1}$, donc *a fortiori* sur tout $M \subseteq \big(\,\text{Ind}_{w^{-1}P^-(L)w\cap N_0}^{N_0}\,\pi_P^w\big)^{N_1}$ vérifiant (1), donc enfin sur $M^\vee$ (cf. la preuve du Lemme 2.6). On en déduit $M^\vee[1/X] = 0$ ce qui achève la preuve.

Lorsque $P = B$, on peut préciser la Proposition 6.2.

Proposition 6.8. — *Supposons $P = B$ et π_B localement admissible (comme représentation de $T(L)$), alors $\mathcal{C}_w(\pi_B)^{N_1}$ est un $A[F]$-module de torsion pour tout $w \in W\backslash\{1\}$ (en particulier on retrouve $D_\xi^\vee\big(\mathcal{C}_w(\pi_B)\big) = 0$ par le (iii) de la Proposition 2.7).*

La preuve est le cas particulier $i=0$ du (ii) du Théorème 8.1 ci-après, auquel on renvoie le lecteur.

Remarque 6.9. — Il est possible que, pour $P\neq B$ et π_P localement admissible (comme représentation de $L_P(L)$), le $A[F]$-module $\mathcal{C}_w(\pi_P)^{N_1}$ soit en fait encore de torsion pour $w\in K_P\backslash\{1\}$ (voir aussi à ce propos la Remarque 8.7).

7. Le cas des induites paraboliques II

On démontre la Proposition 6.3, ce qui achève la preuve du Théorème 6.1.

On conserve les notations des sections précédentes et on suppose $P\neq G$ sinon il n'y a rien à montrer. On pose $N_{P,0}\overset{\text{déf}}{=}N_P(L)\cap N_0=\prod_{\alpha\in R^+\backslash R_P^+}(N_\alpha(L)\cap N_0)$ et $N_{P,1}\overset{\text{déf}}{=}N_P(L)\cap N_1=N_{P,0}\cap N_1$. Comme N_0 est totalement décomposé, on a un produit semi-direct $N_0=N_{L_P,0}N_{P,0}$ (avec $N_{P,0}$ distingué). Comme $(R^+\backslash R_P^+)\cap S\neq\emptyset$ (car $P\neq G$), on a par (24) une suite exacte courte :

$$0\to N_{P,1}\to N_{P,0}\to \mathrm{Tr}_{L/\mathbb{Q}_p}(\mathcal{O}_L)\to 0$$

d'où on déduit que l'inclusion $N_{P,0}\subseteq N_0$ induit un isomorphisme $N_{P,0}/N_{P,1}\overset{\sim}{\to} N_0/N_1$. Notons que $N_{L_P,1}N_{P,1}\subsetneq N_1$ si $P\neq B$ et que $tN_{P,1}t^{-1}\subseteq N_{P,1}$, $tN_{L_P,1}t^{-1}\subseteq N_{L_P,1}$ (puisque $tN_P(L)t^{-1}=N_P(L)$, $tN_{L_P}(L)t^{-1}=N_{L_P}(L)$ et $tN_1t^{-1}\subseteq N_1$) pour tout $t\in\xi(\mathbb{Z}_p\backslash\{0\})$.

Lemme 7.1. — *Les inclusions $N_{L_P,0}\subseteq N_{L_P,0}N_{P,0}$ et $N_{P,0}\subseteq N_{L_P,0}N_{P,0}$ induisent un isomorphisme de groupes abéliens :*

$$N_{L_P,0}/N_{L_P,1}\times N_{P,0}/N_{P,1}\overset{\sim}{\longrightarrow} N_0/(N_{L_P,1}N_{P,1}).$$

Démonstration. — Par définition de $N_{L_P,1}$ et de $N_{P,1}$, on a :

$$\prod_{\alpha\in R_P^+\backslash S_P}(N_\alpha(L)\cap N_0)\subset N_{L_P,1}\quad\text{et}\quad\prod_{\alpha\in(R^+\backslash R_P^+)\backslash(S\backslash S_P)}(N_\alpha(L)\cap N_0)\subset N_{P,1}$$

qui entraîne $\prod_{\alpha\in R^+\backslash S}N_\alpha(L)\cap N_0\subset N_{L_P,1}N_{P,1}$. On a par ailleurs un isomorphisme de groupes abéliens (rappelons que N_0 est totalement décomposé) :

$$N_0/\Big(\prod_{\alpha\in R^+\backslash S}(N_\alpha(L)\cap N_0)\Big)\cong\prod_{\alpha\in S}(N_\alpha(L)\cap N_0)=\prod_{\alpha\in S_P}(N_\alpha(L)\cap N_0)\prod_{\alpha\in S\backslash S_P}(N_\alpha(L)\cap N_0).\tag{36}$$

De plus l'image de $N_{L_P,1}$ (resp. de $N_{P,1}$) dans le quotient (36) est clairement :

$$\mathrm{Ker}_{S_P}\overset{\text{déf}}{=}\mathrm{Ker}\Big(\prod_{\alpha\in S_P}(N_\alpha(L)\cap N_0)\overset{\sum_{\alpha\in S_P}\iota_\alpha}{\longrightarrow}\mathcal{O}_L\overset{\psi\circ\mathrm{Tr}_{L/\mathbb{Q}_p}}{\longrightarrow}\mathbb{Z}_p\Big)$$

(resp. avec partout $S\backslash S_P$ au lieu de S_P) de sorte que l'on a un isomorphisme de groupes abéliens :

$$(N_{L_P,1}N_{P,1})/\Big(\prod_{\alpha\in R^+\backslash S}(N_\alpha(L)\cap N_0)\Big)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Ker}_{S_P}\times\mathrm{Ker}_{S\backslash S_P}. \tag{37}$$

En utilisant les isomorphismes :

$$\begin{aligned} N_{L_P,0}/N_{L_P,1} &\overset{\sim}{\to} \Big(\prod_{\alpha\in S_P}(N_\alpha(L)\cap N_0)\Big)/\,\mathrm{Ker}_{S_P}\\ N_{P,0}/N_{P,1} &\overset{\sim}{\to} \Big(\prod_{\alpha\in S\backslash S_P}(N_\alpha(L)\cap N_0)\Big)/\,\mathrm{Ker}_{S\backslash S_P}\end{aligned}$$

on en déduit le résultat en faisant le quotient de (36) par (37). $\square$

Via les isomorphismes $N_0/N_1\cong\mathbb{Z}_p$, $N_{L_P,0}/N_{L_P,1}\overset{\sim}{\to}N_0/N_1\cong\mathbb{Z}_p$ (si $P\neq B$), $N_{P,0}/N_{P,1}\overset{\sim}{\to}N_0/N_1\cong\mathbb{Z}_p$, on voit que la suite exacte courte de groupes abéliens $0\to N_1/(N_{L_P,1}N_{P,1})\to N_0/(N_{L_P,1}N_{P,1})\to N_0/N_1\to 0$ s'identifie à $0\to 0\to\mathbb{Z}_p\to\mathbb{Z}_p\to 0$ si $P=B$ et via le Lemme 7.1 à :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_p & \longrightarrow & \mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_p & \longrightarrow & \mathbb{Z}_p & \longrightarrow & 0\\ & & x & \mapsto & (x,-x) & & & & \\ & & & & (z,y) & \mapsto & z+y & & \end{array} \tag{38}$$

si $P\neq B$.

Rappelons que, par (33) et la Proposition 6.7, on a :

$$D_\xi^\vee\big(\mathcal{C}_1(\pi_P)\big)=D_\xi^\vee\big(\,\text{c-Ind}_{P^-(L)\cap N(L)}^{N(L)}\pi_P\big)\xrightarrow{\sim}D^\vee\Big(\big(\,\mathrm{Ind}_{P^-(L)\cap N_0}^{N_0}\pi_P\big)^{N_1}\Big). \tag{39}$$

La restriction à $N_{P,0}$ induit un isomorphisme :

$$\mathrm{Ind}_{P^-(L)\cap N_0}^{N_0}\pi_P\overset{\sim}{\to}\mathcal{C}(N_{P,0},\pi_P)\cong\mathcal{C}(N_{P,0},A)\otimes_A\pi_P \tag{40}$$

où le terme de droite désigne les fonctions localement constantes à valeurs dans π_P ou A, où l'action de $N_{P,0}$ est par translation à droite sur les fonctions (et triviale sur π_P), et où l'action de $N_{L_P,0}$ est donnée par :

$$(n_{L_P,0}h)(n_{P,0})=\pi_P(n_{L_P,0})\big(h(n_{L_P,0}^{-1}n_{P,0}n_{L_P,0})\big) \tag{41}$$

si $n_{L_P,0}\in N_{L_P,0}$, $n_{P,0}\in N_{P,0}$ et $h\in\mathcal{C}(N_{P,0},\pi_P)$.

Lemme 7.2. — *On a un isomorphisme de $A[[N_0/(N_{L_P,1}N_{P,1})]]$-modules :*

$$\big(\,\mathrm{Ind}_{P^-(L)\cap N_0}^{N_0}\pi_P\big)^{N_{L_P,1}N_{P,1}}\cong\mathcal{C}\big(N_{P,0}/N_{P,1},\pi_P^{N_{L_P,1}}\big)\cong\mathcal{C}(N_{P,0}/N_{P,1},A)\otimes_A\pi_P^{N_{L_P,1}}$$

où la structure de $A[[N_0/(N_{L_P,1}N_{P,1})]]$-modules à droite est la structure évidente de $A[[N_{P,0}/N_{P,1}]]\widehat{\otimes}_A A[[N_{L_P,0}/N_{L_P,1}]]$-modules via l'isomorphisme du Lemme 7.1.

Démonstration. — Comme $N_{P,0}$ (et donc $N_{P,1}$) agit trivialement sur π_P, on a $\big(\text{c-Ind}_{P^-(L)\cap N_0}^{N_0}\pi_P\big)^{N_{P,1}} \cong \mathcal{C}(N_{P,0}/N_{P,1},\pi_P)$ par (40). Par le Lemme 7.1, l'action par conjugaison (41) de $N_{L_P,0}$ (et donc de $N_{L_P,1}$) sur $N_{P,0}$ devient triviale dans le quotient abélien $N_{P,0}/N_{P,1}$. On en déduit facilement le lemme. $\square$

Supposons dans un premier temps $P\neq B$. Le groupe $N_{L_P,0}/N_{L_P,1}\cong\mathbb{Z}_p$ agit naturellement sur $\pi_P^{N_{L_P,1}}$ et via l'isomorphisme $N_{P,0}/N_{P,1}\cong\mathbb{Z}_p$ précédent, on a une injection :

$$\eta:\pi_P^{N_{L_P,1}}\hookrightarrow\mathcal{C}\big(N_{P,0}/N_{P,1},\pi_P^{N_{L_P,1}}\big)\ ,\quad v\longmapsto\big(x\mapsto x(v)\big)=\eta(v)$$

où $x\in N_{P,0}/N_{P,1}$ et $v\in\pi_P^{N_{L_P,1}}$. Rappelons que $\pi_P^{N_{L_P,1}}$ et :

$$\mathcal{C}\big(N_{P,0}/N_{P,1},\pi_P^{N_{L_P,1}}\big)^{N_1}\overset{\text{Lem.7.2}}{\cong}\big(\mathcal{C}(N_{P,0},\pi_P)^{N_{L_P,1}N_{P,1}}\big)^{N_1}\cong\mathcal{C}(N_{P,0},\pi_P)^{N_1}$$

sont munis d'une structure d'objets de Mod_A (pour les groupes réductifs respectifs L_P et G, cf. § 3 et (ii) du Lemme 6.6).

Lemme 7.3. — *L'injection η induit un isomorphisme dans* Mod_A *:*

$$\pi_P^{N_{L_P,1}}\xrightarrow{\ \sim\ }\mathcal{C}\big(N_{P,0}/N_{P,1},\pi_P^{N_{L_P,1}}\big)^{N_1}.$$

Démonstration. — Il faut montrer que η induit un isomorphisme de $A[[X]][F]$-modules qui commute aux actions de $\mathbb{Z}_p^\times$. Posons $N_1'\overset{\text{déf}}{=}N_{L_P,1}N_{P,1}$, un sous-groupe distingué de N_1 (cf. Lemme 7.1). Par le Lemme 7.1 et le Lemme 7.2, on voit que l'action de $N_0/N_1'\cong N_{L_P,0}/N_{L_P,1}\times N_{P,0}/N_{P,1}\cong\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_p$ sur $\mathcal{C}\big(N_{P,0}/N_{P,1},\pi_P^{N_{L_P,1}}\big)\cong\mathcal{C}\big(\mathbb{Z}_p,\pi_P^{N_{L_P,1}}\big)$ est donnée par :

$$((z,y)(f))(x)=z\big(f(x+y)\big).\tag{42}$$

Par la suite exacte (38) et par (42), un élément $f\in\mathcal{C}\big(N_{P,0}/N_{P,1},\pi_P^{N_{L_P,1}}\big)$ est invariant sous N_1, ou de manière équivalente sous $N_1/N_1'\cong\mathbb{Z}_p$, s'il vérifie $y\big(f(x-y)\big)=f(x)$ pour tout $x\in\mathbb{Z}_p$ et tout $y\in\mathbb{Z}_p$. En posant $v\overset{\text{déf}}{=}f(0)\in\pi_P^{N_{L_P,1}}$ et en faisant $y=x$, on obtient $f(x)=x(v)$, ce qui montre la surjectivité de η.
Si $x_0\in N_0/N_1\cong\mathbb{Z}_p$ et $f=\eta(v)\in\mathcal{C}\big(N_{P,0}/N_{P,1},\pi_P^{N_{L_P,1}}\big)^{N_1}$, on a (via (38)) :

$$(x_0(f))(x)=\big((0,x_0)(f)\big)(x)=f(x+x_0)=(x+x_0)(v)=x(x_0(v))=\eta\big(x_0(v)\big)(x)$$

ce qui montre la compatibilité à l'action de $A[[X]]$.
On montre la compatibilité à l'action de F, laissant celle à l'action de $\mathbb{Z}_p^\times$, analogue en plus facile, au lecteur. Comme $\xi(p)N_1'\xi(p)^{-1}\subseteq N_1'$, on peut définir pour tout $f\in\mathcal{C}(N_{P,0},\pi_P)^{N_1'}$:

$$\xi(p)\cdot_{N_1'}f\overset{\text{déf}}{=}\sum_{n_1'\in N_1'/\xi(p)N_1'\xi(p)^{-1}}n_1'\xi(p)f\ \in\ \mathcal{C}(N_{P,0},\pi_P)^{N_1'}.$$

Via $\mathcal{C}(N_{P,0},\pi_P)^{N_1'}\cong\mathcal{C}\big(\mathbb{Z}_p,\pi_P^{N_{L_P,1}}\big)$ (Lemme 7.2), un petit calcul montre que cette action est explicitement donnée par :

$$(\xi(p)\cdot_{N_1'} f)(x)=\sum_{n_{L_P,1}\in N_{L_P,1}/\xi(p)N_{L_P,1}\xi(p)^{-1}} n_{L_P,1}\xi(p)\big(f(x/p)\big) \tag{43}$$

où $f(x/p)=0$ si $x\in\mathbb{Z}_p\backslash p\mathbb{Z}_p$. Par ailleurs, on a l'égalité suivante dans $\mathcal{C}(N_{P,0},\pi_P)^{N_1}$ pour tout $f\in\mathcal{C}(N_{P,0},\pi_P)^{N_1}$:

$$\sum_{n_1\in N_1/\xi(p)N_1\xi(p)^{-1}} n_1\xi(p)f=\sum_{\overline{n}_1\in(N_1/N_1')/\xi(p)(N_1/N_1')\xi(p)^{-1}}\overline{n}_1(\xi(p)\cdot_{N_1'} f) \tag{44}$$

(on laisse cette vérification facile au lecteur, considérer la chaîne d'inclusions $\xi(p)N_1\xi(p)^{-1}\subseteq N_1'(\xi(p)N_1\xi(p)^{-1})\subseteq N_1$ comme dans la preuve du lemme 4.1 où $N_1'(\xi(p)N_1\xi(p)^{-1})$ est le sous-groupe de N_1 engendré par N_1' et $\xi(p)N_1\xi(p)^{-1}$, et remarquer que $N_1'\cap\xi(p)N_1\xi(p)^{-1}=\xi(p)N_1'\xi(p)^{-1}$). En combinant (43), (44) et (42) (appliqué avec $(z,y)=(i,-i)\in N_1/N_1'\subseteq N_0/N_1'$), on voit que l'action de F sur $f=\eta(v)\in\mathcal{C}(N_{P,0},\pi_P)^{N_1}\cong\mathcal{C}\big(\mathbb{Z}_p,\pi_P^{N_{L_P,1}}\big)^{N_1/N_1'}$ est explicitement donnée par :

$$F\big(\eta(v)\big)(x)=\sum_{i=0}^{p-1} i\left(\sum_{n_{L_P,1}\in N_{L_P,1}/\xi(p)N_{L_P,1}\xi(p)^{-1}} n_{L_P,1}\xi(p)\Big(\frac{x-i}{p}(v)\Big)\right) \tag{45}$$

où $((x-i)/p)(v)=0$ si x n'est pas congru à i modulo p. En notant $i_x\in\{0,\cdots,p-1\}$ l'unique entier congru à $x\in\mathbb{Z}_p$ modulo p et $n_x\in\xi(p)N_{L_P,0}\xi(p)^{-1}\subseteq N_{L_P,0}$ un relevé de $x-i_x\in p\mathbb{Z}_p$ via $\xi(p)N_{L_P,0}\xi(p)^{-1}/\xi(p)N_{L_P,1}\xi(p)^{-1}\overset{\sim}{\to}p\mathbb{Z}_p$, (45) se récrit :

$$F\big(\eta(v)\big)(x)=i_x\left(\sum_{N_{L_P,1}/\xi(p)N_{L_P,1}\xi(p)^{-1}} n_{L_P,1}n_x\xi(p)(v)\right)$$

ou encore :

$$F\big(\eta(v)\big)(x)=x\left(\sum_{N_{L_P,1}/\xi(p)N_{L_P,1}\xi(p)^{-1}} n_x^{-1}n_{L_P,1}n_x\xi(p)(v)\right). \tag{46}$$

Comme $N_{L_P,1}$ (resp. $\xi(p)N_{L_P,1}\xi(p)^{-1}$) est distingué dans $N_{L_P,0}$ (resp. dans $\xi(p)N_{L_P,0}\xi(p)^{-1}$), l'ensemble $\{n_x^{-1}n_{L_P,1}n_x\}$ dans la somme ci-dessus est encore un système de représentants de $N_{L_P,1}/\xi(p)N_{L_P,1}\xi(p)^{-1}$ dans $N_{L_P,1}$ pour chaque $x\in\mathbb{Z}_p$. On en déduit que (46) se récrit :

$$F\big(\eta(v)\big)(x)=x\left(\sum_{N_{L_P,1}/\xi(p)N_{L_P,1}\xi(p)^{-1}} n_{L_P,1}\xi(p)(v)\right)=x\big(F(v)\big)$$

pour l'action de F sur $\pi_P^{N_{L_P,1}}$ à droite. Cela montre $F\big(\eta(v)\big)=\eta\big(F(v)\big)$. □

Par le Lemme 7.3, on a donc $D^\vee\big(\mathcal{C}(N_{P,0},\pi_P)^{N_1}\big)\overset{\sim}{\to}D_\xi^\vee(\pi_P)$ ce qui, avec (40) et (39), montre la Proposition 6.3 lorsque $P\neq B$ (tous les isomorphismes étant par ailleurs clairement fonctoriels en π_P).

On suppose maintenant $P=B$. Par le Lemme 7.2 on a un isomorphisme de $A[[X]]$-modules $\mathcal{C}(N_0,\pi_B)^{N_1}\cong\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p,A)\otimes_A\pi_B$. En munissant le terme de droite d'une action de $\mathbb{Z}_p\backslash\{0\}$ donnée par l'action de $\xi(\mathbb{Z}_p\backslash\{0\})\subseteq T(L)$ sur π_B et par $f\mapsto\big(x\mapsto f(x/a)\big)$ sur $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p,A)$ où $a\in\mathbb{Z}_p\backslash\{0\}$ et $f(x/a)=0$ si $x/a\in\mathbb{Q}_p\backslash\mathbb{Z}_p$, on vérifie facilement qu'il s'agit d'un isomorphisme dans Mod_A (cf. (43) avec $N_1'=N_1$ et $N_{L_P,1}=\{1\}$).

Lemme 7.4. — *(i) Si $M_B\subseteq\pi_B$ est un sous-A-module de type fini stable par $\xi(\mathbb{Z}_p\backslash\{0\})$ alors $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p,A)\otimes_A M_B$ est un sous-$A[[X]][F]$-module de $\mathcal{C}(N_0,\pi_B)^{N_1}\cong\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p,A)\otimes_A\pi_B$ stable par $\mathbb{Z}_p^\times$ qui vérifie les conditions (1).*
(ii) Tout sous-$A[[X]][F]$-module de $\mathcal{C}(N_0,\pi_B)^{N_1}$ stable par $\mathbb{Z}_p^\times$ qui vérifie (1) est contenu dans $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p,A)\otimes_A M_B$ pour $M_B\subseteq\pi_B$ un sous-A-module de type fini stable par $\xi(\mathbb{Z}_p\backslash\{0\})$.

Démonstration. — (i) On a :

$$\mathrm{Hom}_A\big(\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p,A)\otimes_A M_B,A\big)\cong A[[X]]\otimes_A M_B^\vee$$

qui montre que $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p,A)\otimes_A M_B$ est un $A[[X]]$-module admissible puisque $M_B^\vee$ est de type fini sur A. Montrons qu'il est de type fini sur $A[[X]][F]$. Par dévissage ($\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p,A)$ est plat sur A), on se ramène au cas $A=k_E$. Comme $k_E'[[X]][F]\cong k_E'\otimes_{k_E}(k_E[[X]][F])$ est de type fini sur $k_E[[X]][F]$ pour toute extension finie k_E' de k_E, on peut quitte à étendre les scalaires supposer que $M_B|_{\xi(\mathbb{Q}_p^\times)}$ est une extension successive de caractères lisses de $\xi(\mathbb{Q}_p^\times)$ (à valeurs dans $k_E^\times$). Par dévissage encore, on est donc ramené au cas $\dim_{k_E}M_B=1$ et, quitte à twister l'action de $\xi(\mathbb{Z}_p\backslash\{0\})$ sur $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p,k_E)\otimes_{k_E}M_B$, on peut même supposer que $M_B|_{\xi(\mathbb{Q}_p^\times)}$ est le caractère trivial. On est finalement ramené à $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p,k_E)$ qui est bien de type fini sur $k_E[[X]][F]$, engendré par exemple par la fonction $\mathbf{1}_{\mathbb{Z}_p}$.
(ii) Soit $M\subseteq\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p,A)\otimes_A\pi_B$ stable par $\mathbb{Z}_p^\times$ et qui vérifie (1). En prenant $\mathrm{Hom}_A(\cdot,A)$, on a une surjection de $A[[X]][F]$-modules $A[[X]]\widehat{\otimes}_A\pi_B^\vee\twoheadrightarrow M^\vee$ compatible à $\mathbb{Z}_p^\times$ où $M^\vee$ est un $A[[X]]$-module de type fini, d'où une surjection de A-modules $\pi_B^\vee\twoheadrightarrow M^\vee/XM^\vee$ qui commute à F et $\mathbb{Z}_p^\times$. Comme $F=\xi(p)$ est ici bijectif sur π_B, donc sur $\pi_B^\vee$, il est surjectif (et A-linéaire) sur le A-module de type fini $M^\vee/XM^\vee$, donc aussi bijectif. Par un argument classique (parfois appelé “Dwork's trick”), on en déduit une section $A[F]$-linéaire canonique $s:M^\vee/XM^\vee\hookrightarrow M^\vee$ de la surjection $M^\vee\twoheadrightarrow M^\vee/XM^\vee$ qui commute avec la section évidente $\pi_B^\vee\hookrightarrow A[[X]]\widehat{\otimes}_A\pi_B^\vee$ et avec l'action de $\mathbb{Z}_p^\times$. Autrement dit la surjection $A[[X]]\widehat{\otimes}_A\pi_B^\vee\twoheadrightarrow M^\vee$ se factorise comme suit :

$$A[[X]]\widehat{\otimes}_A\pi_B^\vee\twoheadrightarrow A[[X]]\otimes_A M^\vee/XM^\vee\overset{\mathrm{Id}\otimes s}{\twoheadrightarrow}M^\vee.$$

Et on voit que $M_B\overset{\text{déf}}{=}\mathrm{Hom}_A(M^\vee/XM^\vee,A)$ convient. □

Le lemme suivant est un exercice simple sur les (φ,Γ)-modules que l'on laisse au lecteur.

Lemme 7.5. — *Soit M un A-module de type fini muni d'une action A-linéaire lisse de $\mathbb{Q}_p^\times$, $V(M)$ la représentation de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ *sur A associée par la réciprocité locale et $D(M)$ le (φ,Γ)-module associé à $V(M)$ par le foncteur covariant de* [**13**, Thm.A.3.4.3]. *On a $D(M)\cong A[[X]][1/X]\otimes_A M$ où l'action de $\Gamma\cong\mathbb{Z}_p^\times$ est l'unique action $A[[X]][1/X]$-semi-linéaire donnée par l'action de $\mathbb{Z}_p^\times$ sur M et où l'action de φ est l'unique action semi-linéaire donnée par l'action de p sur M.*

Par le Lemme 7.4, on obtient un isomorphisme dans $\widehat{\Phi\Gamma}_A^{\acute{e}t}$:

$$D^\vee\big(\mathcal{C}(N_0,\pi_B)^{N_1}\big)\cong\varprojlim_{M_B}\big(A[[X]][1/X]\otimes_A M_B^\vee\big)\tag{47}$$

où la limite projective est prise sur les éléments M_B de $\mathcal{M}(\pi_B)$ et où l'action de φ et de $\mathbb{Z}_p^\times$ (ou de manière équivalente de $\mathbb{Q}_p^\times$) sur $M_B^\vee$ est donnée par $\big(\varphi(f)\big)(m)=f\big(\xi(p)^{-1}(m)\big)$ et $\big(x(f)\big)(m)=f\big(\xi(x)^{-1}(m)\big)$, $x\in\mathbb{Z}_p^\times$. Par le Lemme 7.5 appliqué à $M_B^\vee$ et le fait que le foncteur (φ,Γ)-module commute à la dualité, on a $A[[X]][1/X]\otimes_A M_B^\vee\cong D^\vee(M_B)$ pour $M_B\in\mathcal{M}(\pi_B)$ (cf. § 3), d'où $D^\vee\big(\mathcal{C}(N_0,\pi_B)^{N_1}\big)\cong D_\xi^\vee(\pi_B)$ par (47). Par (40) et (39), on en déduit la Proposition 6.3 lorsque $P=B$ (la fonctorialité étant là aussi claire).

Exemple 7.6. — Soit $\chi:T(L)\to A^\times$ un caractère lisse, alors $D_\xi^\vee\big(\mathrm{Ind}_{B^-(L)}^{G(L)}\chi\big)$ est le (φ,Γ)-module du dual du caractère de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ sur A donné (via la réciprocité locale) par $\mathbb{Q}_p^\times\longrightarrow A^\times$, $x\longmapsto\chi(\xi(x))$.

Terminons avec la proposition suivante.

Proposition 7.7. — *Supposons π_B localement admissible (comme représentation de $T(L)$), alors le $A[[X]][F]$-module $\mathcal{C}_1(\pi_B)^{N_1}$ satisfait la propriété Ad (cf. Définition 2.2).*

Démonstration. — En procédant comme dans la preuve de la Proposition 6.7, par le (ii) du Lemme 2.5 il suffit de montrer le résultat pour le sous-$A[[X]][F]$-module $\mathcal{C}(N_0,\pi_B)^{N_1}\cong\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p,A)\otimes_A\pi_B$. Comme π_B est un $A[F]$-module de torsion (car π_B est localement admissible), tout sous-$A[[X]][F]$-module de type fini de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p,A)\otimes_A\pi_B$ est contenu dans $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p,A)\otimes_A M_B$ où $M_B\subseteq\pi_B$ est un sous-A-module de type fini stable par F. On en déduit le résultat par le (i) du Lemme 7.4 et le (i) du Lemme 2.1. □

8. Le cas des $H^i(N_1,\mathcal{C}_w(\pi_B))$ pour $i\geq 1$

On montre que les $A[F]$-modules $H^i(N_1,\mathcal{C}_w(\pi_B))$ (cf. fin du § 3) sont très souvent de torsion.

On garde les notations des sections précédentes.

Théorème 8.1. — *Soit π_B une représentation lisse de $T(L)$ sur A.*
(i) Le $A[F]$-module $H^i(N_1,\mathcal{C}_1(\pi_B))$ est de torsion pour tout $i\geq 1$.
(ii) Si π_B est de plus localement admissible (comme représentation de $T(L)$), le $A[F]$-module $H^i(N_1,\mathcal{C}_w(\pi_B))$ est de torsion pour tout $i\geq 0$ et tout $w\in W\backslash\{1\}$.

Le Théorème 8.1 va résulter de la combinaison de quatre propositions énoncées (et démontrées) ci-dessous.

Pour tout $w\in W$, posons $\mathcal{C}_{w,0}(\pi_B)\overset{\text{déf}}{=}\mathcal{C}\big((w^{-1}N^-(L)w\cap N_0)\backslash N_0,\pi_B^w\big)$ (notons que (35) est un isomorphisme lorsque $P=B$). C'est un sous-A-module de $\mathcal{C}_w(\pi_B)$ stable par l'action de N_0 et de $\xi(\mathbb{Z}_p\backslash\{0\})$ (pour cette dernière cela découle de (34), voir la preuve du (i) du Lemme 6.6). En particulier on peut définir pour tout $i\geq 0$ et tout $w\in W$ des objets de Mod_A, $H^i(N_1,\mathcal{C}_{w,0}(\pi_B))$ et $H^i(N_1,\mathcal{C}_w(\pi_B)/\mathcal{C}_{w,0}(\pi_B))$, comme à la fin du § 3.

Proposition 8.2. — *Si les assertions (i) et (ii) du Théorème 8.1 sont vraies avec $\mathcal{C}_{1,0}(\pi_B)$ et $\mathcal{C}_{w,0}(\pi_B)$ au lieu de $\mathcal{C}_1(\pi_B)$ et $\mathcal{C}_w(\pi_B)$, alors le Théorème 8.1 est vrai.*

Démonstration. — La suite exacte courte :

$$0\to\mathcal{C}_{w,0}(\pi_B)\to\mathcal{C}_w(\pi_B)\to\mathcal{C}_w(\chi)/\mathcal{C}_{w,0}(\pi_B)\to 0$$

donne des suites exactes dans Mod_A pour tout $i\geq 1$:

$$H^{i-1}(N_1,\mathcal{C}_w(\pi_B)/\mathcal{C}_{w,0}(\pi_B))\to H^i(N_1,\mathcal{C}_{w,0}(\pi_B))\to H^i(N_1,\mathcal{C}_w(\pi_B))\to H^i(N_1,\mathcal{C}_w(\pi_B)/\mathcal{C}_{w,0}(\pi_B)).\tag{48}$$

La même preuve que celle de [**15**, Lem.3.3.1] (voir aussi celle du (i) du Lemme 6.6) montre que $\xi(p)$ est localement nilpotent sur $\mathcal{C}_w(\pi_B)/\mathcal{C}_{w,0}(\pi_B)$ pour tout $w\in W$, et donc F est localement nilpotent sur $H^i(N_1,\mathcal{C}_w(\chi)/\mathcal{C}_{w,0}(\pi_B))$ pour tout $i\geq 0$ et tout $w\in W$ (cf. (14)). En particulier $H^i(N_1,\mathcal{C}_w(\pi_B)/\mathcal{C}_{w,0}(\pi_B))$ est toujours de $A[F]$-torsion. Par le (i) du Lemme 2.5 et (48), cela montre la proposition. □

Proposition 8.3. — *Le $A[F]$-module $H^i(N_1,\mathcal{C}_{1,0}(\pi_B))$ est nul pour tout $i\geq 1$.*

Démonstration. — Comme $N_0/N_1\cong\mathbb{Z}_p$ est de dimension 1, on a pour tout $i\geq 1$ une suite exacte courte déduite de la suite spectrale de Hochschild-Serre (cf. [**15**, § 3.2(12)]) :

$$0\to H^1\big(\mathbb{Z}_p,H^{i-1}(N_1,\mathcal{C}_{1,0}(\pi_B))\big)\to H^i\big(N_0,\mathcal{C}_{1,0}(\pi_B)\big)\to H^0\big(\mathbb{Z}_p,H^i(N_1,\mathcal{C}_{1,0}(\pi_B))\big)\to 0.\tag{49}$$

Comme $\mathcal{C}_{1,0}(\pi_B)=\mathcal{C}(N_0,\pi_B)$ est une représentation injective de N_0 (agissant par translation à droite sur les fonctions), on a $H^i\big(N_0,\mathcal{C}_{1,0}(\pi_B)\big)=0$ pour $i\geq 1$. Par (49) on en déduit $H^0\big(\mathbb{Z}_p,H^i(N_1,\mathcal{C}_{1,0}(\pi_B))\big)=0$. Comme $\mathbb{Z}_p$ est un pro-p-groupe, un A-module non nul avec une action lisse de $\mathbb{Z}_p$ a toujours des vecteurs non nuls invariants sous $\mathbb{Z}_p$, d'où $H^i(N_1, \mathcal{C}_{1,0}(\pi_B)) = 0$ pour $i \geq 1$. $\square$

Par la Proposition 8.2, cela montre le (i) du Théorème 8.1.

On fixe dans la suite $w \neq 1$. On va montrer le (ii) du Théorème 8.1 pour $\mathcal{C}_{w,0}(\pi_B)$. Par un dévissage sur A évident et le (i) du Lemme 2.5, on peut supposer $A = k_E$. Comme π_B est une représentation lisse localement admissible du groupe commutatif $T(L)$ sur k_E, on peut l'écrire comme limite inductive $\pi_B = \varinjlim_{\iota} \pi_{B,\iota}$ de représentations $\pi_{B,\iota}$ de $T(L)$ de dimension finie sur k_E. Comme N_0 est compact, toute fonction de $\mathcal{C}_{w,0}(\pi_B)$ est à valeurs dans une sous-représentation $\pi^w_{B,\iota}$ de π^w_B de dimension finie sur k_E, de sorte que l'on a $\mathcal{C}_{w,0}(\pi_B) = \varinjlim_{\iota} \mathcal{C}_{w,0}(\pi_{B,\iota})$ (avec des notations évidentes). Comme la cohomologie (continue) commute aux limites inductives, on voit qu'il suffit de traiter le cas où π_B est de dimension finie sur k_E, ce que l'on suppose dans la suite. On va en fait montrer que $H^i(N_1, \mathcal{C}_{w,0}(\pi_B))$ est alors aussi de dimension finie sur k_E pour tout $i \geq 0$, ce qui implique qu'il est *a fortiori* de torsion comme $k_E[F]$-module.

On note $N^S \overset{\text{déf}}{=} \prod_{\alpha \in R^+ \backslash S} N_\alpha$: c'est un sous-groupe algébrique fermé normal de N de quotient abélien isomorphe à $\prod_{\alpha \in S} N_\alpha$. De plus, on a $N^S(L) \cap N_0 \subseteq N_1 \subseteq N_0$. Soit $R^+_w \overset{\text{déf}}{=} R^+ \cap w^{-1}(R^+)$, comme N_0 est totalement décomposé, on a :

$$\prod_{\alpha \in R^+_w} (N_\alpha(L) \cap N_0) \cong w^{-1}N(L)w \cap N_0 \xrightarrow{\sim} (w^{-1}N^-(L)w \cap N_0)\backslash N_0. \tag{50}$$

Proposition 8.4. — *Il existe une suite* $0 = N^S_0 \subseteq N^S_1 \subseteq N^S_2 \subseteq \cdots \subseteq N^S_m = N^S$ *de sous-groupes algébriques fermés de* N^S *vérifiant les conditions suivantes :*

(i) N^S_j *est un sous-groupe normal de* N *pour tout* $j \in \{0, \cdots, m\}$*;*
(ii) *pour tout* $j \in \{1, \cdots, m\}$*, ou bien l'action de* $(N^S_j(L) \cap N_0)/(N^S_{j-1}(L) \cap N_0)$ *sur* $\mathcal{C}_{w,0}(\pi_B)^{N^S_{j-1}(L)\cap N_0}$ *est triviale, ou bien* $\mathcal{C}_{w,0}(\pi_B)^{N^S_{j-1}(L)\cap N_0}$ *est une représentation injective lisse de* $(N^S_j(L) \cap N_0)/(N^S_{j-1}(L) \cap N_0)$ *sur* k_E.

Démonstration. — Si N^S est trivial (i.e. si $R^+ = S$), il n'y a rien à montrer. On suppose donc N^S non trivial dans la suite.
Construisons d'abord N^S_1. Soit $\alpha_1 \in R^+ \backslash S$ une racine de hauteur maximale dans R^+ (cf. par exemple [**5**, Rem.2.5.3]), alors N_{α_1} est un sous-groupe algébrique de N^S normal dans N par [**9**, Thm.0.31(iv)] (en fait N_{α_1} commute même à tout élément de N par *loc.cit.*).
Supposons $w(\alpha_1) \in R^-$, i.e. $\alpha_1 \notin R^+_w$ ou de manière équivalente $N_{\alpha_1} \subseteq w^{-1}N^-w \cap N$, alors pour tout $n_0 \in N_0$ et $n_{\alpha_1} \in N_{\alpha_1}(L) \cap N_0$ on a dans $(w^{-1}N^-(L)w \cap N_0)\backslash N_0$:

$$(w^{-1}N^-(L)w \cap N_0)n_0 n_{\alpha_1} = (w^{-1}N^-(L)w \cap N_0)n_0 n_{\alpha_1} n_0^{-1} n_0 = (w^{-1}N^-(L)w \cap N_0)n_0$$

puisque $n_0n_{\alpha_1}n_0^{-1}\in N_{\alpha_1}(L)\cap N_0$ et $N_{\alpha_1}(L)\cap N_0\subseteq w^{-1}N^-(L)w\cap N_0$. Donc l'action de $N_{\alpha_1}(L)\cap N_0$ sur $\mathcal{C}_{w,0}(\pi_B)$ est triviale.
Supposons $w(\alpha_1)\in R^+$, i.e. $\alpha_1\in R_w^+$ ou de manière équivalente $N_{\alpha_1}\subseteq w^{-1}Nw\cap N$. En utilisant (50), on voit que l'on a un isomorphisme compatible à l'action de $N_{\alpha_1}(L)\cap N_0$:

$$\mathcal{C}_{w,0}(\pi_B)|_{N_{\alpha_1}(L)\cap N_0}\cong\bigotimes_{\alpha\in R_w^+}\mathcal{C}\big(N_\alpha(L)\cap N_0,\pi_B^w\big)$$

(le produit tensoriel étant sur k_E) où l'action de $N_{\alpha_1}(L)\cap N_0$ est triviale sur $\mathcal{C}\big(N_\alpha(L)\cap N_0,\pi_B^w\big)$ si $\alpha\neq\alpha_1$ et est la translation à droite sur $\mathcal{C}\big(N_{\alpha_1}(L)\cap N_0,\pi_B^w\big)$ (π_B^w ne jouant aucun rôle). Comme $\mathcal{C}\big(N_{\alpha_1}(L)\cap N_0,\pi_B^w\big)$ est une représentation injective de $N_{\alpha_1}(L)\cap N_0$ sur k_E, on voit que $\mathcal{C}_{w,0}(\pi_B)|_{N_{\alpha_1}(L)\cap N_0}$ est une somme directe de représentations injectives de $N_{\alpha_1}(L)\cap N_0$ sur k_E, donc est injective.
On peut poser $N_1^S\overset{\text{déf}}{=}N_{\alpha_1}$. Si $N_1^S=N^S$, c'est fini. Sinon, en remplaçant N par N/N_1^S, N^S par N^S/N_1^S, R^+ par $R^+\backslash\{\alpha_1\}$, R_w^+ par $R_w^+\backslash\{\alpha_1\}$ (qui peut être égal à R_w^+ selon les cas) et $\mathcal{C}_{w,0}(\pi_B)$ par :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{w,0}(\pi_B)^{N_1^S(L)\cap N_0}&\cong\mathcal{C}\big((w^{-1}N^-(L)w\cap N_0)\backslash N_0/(N_{\alpha_1}(L)\cap N_0),\pi_B^w\big)\\&\cong\mathcal{C}\Big(\big((w^{-1}N^-(L)wN_{\alpha_1}(L))\cap N_0\big)\backslash N_0,\pi_B^w\Big)\\&\cong\bigotimes_{\alpha\in R_w^+\backslash\{\alpha_1\}}\mathcal{C}\big(N_\alpha(L)\cap N_0,\pi_B^w\big),\end{aligned}$$

le même argument donne $\alpha_2\in(R^+\backslash\{\alpha_1\})\backslash S$ (de hauteur maximale dans $R^+\backslash\{\alpha_1\}$) tel que N_{α_2} est un sous-groupe algébrique de N^S/N_1^S normal dans N/N_1^S, et tel que l'action de $N_{\alpha_2}(L)\cap N_0$ sur $\mathcal{C}_{w,0}(\pi_B)^{N_1^S(L)\cap N_0}$ par translation à droite est soit triviale soit "injective" selon que $w(\alpha_2)\in R^-$ ou $w(\alpha_2)\in R^+$. On pose alors $N_2^S\overset{\text{déf}}{=}N_1^SN_{\alpha_2}=N_{\alpha_2}N_1^S\subseteq N^S$, qui est bien normal dans N. On poursuit par une récurrence évidente, qui s'arrête lorsque $N_i^S=N^S$. □

Par le (i) de la Proposition 8.4, $N_j^S(L)\cap N_0$ est en particulier un sous-groupe normal de N_1 pour tout $j\in\{0,\cdots,m\}$.

Proposition 8.5. — *Pour tout $i\geq 0$ et tout $j\in\{0,\cdots,m\}$, le k_E-espace vectoriel $H^i\big(N_1/(N_j^S(L)\cap N_0),\mathcal{C}_{w,0}(\pi_B)^{N_j^S(L)\cap N_0}\big)$ est de dimension finie (rappelons que $\dim_{k_E}\pi_B<+\infty$).*

Démonstration. — On fait une récurrence descendante sur j.
Supposons d'abord $j=m$. Alors $N_0/(N_m^S(L)\cap N_0)=N_0/(N^S(L)\cap N_0)$ est le groupe abélien $\prod_{\alpha\in S}(N_\alpha(L)\cap N_0)$ et $\mathcal{C}_{w,0}(\pi_B)^{N^S(L)\cap N_0}=\mathcal{C}\big(\prod_{\alpha\in S_w}(N_\alpha(L)\cap N_0),\pi_B^w\big)$ où $S_w\overset{\text{déf}}{=}S\cap R_w^+$. Comme $w\neq 1$, il existe $\beta\in S\backslash S_w$. On fixe un tel β et on définit une injection (d'ensembles) :

$$j_{w,\beta}:\prod_{\alpha\in S_w}(N_\alpha(L)\cap N_0)\hookrightarrow N_1,\ n\mapsto\iota_\beta^{-1}(-\ell(n))n$$

où $\iota_\beta^{-1}(-\ell(n))$ est l'unique élément de $N_\beta(L)\cap N_0$ dont l'image par ι_β est $-\ell(n)\in\mathcal{O}_L$ (cf. (24), on a bien alors $\iota_\beta^{-1}(-\ell(n))n\in N_1$). Composée avec $N_1\twoheadrightarrow N_1/(N^S(L)\cap N_0)$, $j_{w,\beta}$ induit une injection de groupes abéliens (en fait de $\mathbb{Z}_p$-modules libres de type fini) :

$$\overline{j_{w,\beta}}:\prod_{\alpha\in S_w}(N_\alpha(L)\cap N_0)\hookrightarrow N_1/(N^S(L)\cap N_0)$$

dont le conoyau est sans torsion (regarder le conoyau dans $N_0/(N^S(L)\cap N_0)\cong\prod_{\alpha\in S}(N_\alpha(L)\cap N_0)$). Notons $N_{1,w,\beta}$ un facteur direct de $\prod_{\alpha\in S_w}(N_\alpha(L)\cap N_0)$ dans $N_1/(N^S(L)\cap N_1)$ via l'injection $\overline{j_{w,\beta}}$ ($N_{1,w,\beta}$ est donc isomorphe à une somme de copies de $\mathbb{Z}_p$). Par la suite spectrale de Hochschild-Serre, il suffit de montrer que le k_E-espace vectoriel :

$$H^{i_1}\left(N_{1,w,\beta},\ H^{i_2}\Big(\prod_{\alpha\in S_w}(N_\alpha(L)\cap N_0),\mathcal{C}\Big(\prod_{\alpha\in S_w}(N_\alpha(L)\cap N_0),\pi_B^w\Big)\Big)\right)$$

est de dimension finie sur k_E pour tout couple d'entiers (i_1,i_2). Comme il est nul si $i_2>0$ (par injectivité de $\mathcal{C}\big(\prod_{\alpha\in S_w}(N_\alpha(L)\cap N_0),\pi_B^w\big)$), on peut supposer $i_2=0$ auquel cas il reste $H^{i_1}(N_{1,w,\beta},\pi_B^w)$ qui est de dimension finie car $N_{1,w,\beta}$ est un pro-p-groupe analytique compact et sans torsion et π_B^w est de dimension finie, cf. par exemple [**23**, § I.4.5].

Supposons maintenant $H^i\big(N_1/(N_{j+1}^S(L)\cap N_0),\mathcal{C}_{w,0}(\pi_B)^{N_{j+1}^S(L)\cap N_0}\big)$ de dimension finie pour un $j\in\{0,\cdots,m-1\}$ et tout entier $i\geq 0$, et montrons que $H^i\big(N_1/(N_j^S(L)\cap N_0),\mathcal{C}_{w,0}(\pi_B)^{N_j^S(L)\cap N_0}\big)$ est de dimension finie pour tout entier $i\geq 0$. Par la suite spectrale de Hochschild-Serre appliquée à :

$$1\to(N_{j+1}^S(L)\cap N_0)/(N_j^S(L)\cap N_0)\to N_1/(N_j^S(L)\cap N_0)\to N_1/(N_{j+1}^S(L)\cap N_0)\to 1,$$

il suffit de montrer que le k_E-espace vectoriel :

$$H^{i_1}\Big(N_1/(N_{j+1}^S(L)\cap N_0),H^{i_2}\big((N_{j+1}^S(L)\cap N_0)/(N_j^S(L)\cap N_0),\mathcal{C}_{w,0}(\pi_B)^{N_j^S(L)\cap N_0}\big)\Big)$$

est de dimension finie sur k_E pour tout couple d'entiers (i_1,i_2). Supposons d'abord que $\mathcal{C}_{w,0}(\pi_B)^{N_j^S(L)\cap N_0}$ est une représentation injective de $(N_{j+1}^S(L)\cap N_0)/(N_j^S(L)\cap N_0)$ (cf. le (ii) de la Proposition 8.4), alors comme dans le cas précédent seul reste à considérer $H^{i_1}\big(N_1/(N_{j+1}^S(L)\cap N_0),\mathcal{C}_{w,0}(\pi_B)^{N_{j+1}^S(L)\cap N_0}\big)$ (les autres cas étant nuls), qui est de dimension finie par hypothèse de récurrence. Supposons maintenant que $(N_{j+1}^S(L)\cap N_0)/(N_j^S(L)\cap N_0)$ agit trivialement sur $\mathcal{C}_{w,0}(\pi_B)^{N_j^S(L)\cap N_0}$. Alors on a un isomorphisme compatible à l'action de $N_1/(N_{j+1}^S(L)\cap N_0)$:

$$H^{i_2}\big((N_{j+1}^S(L)\cap N_0)/(N_j^S(L)\cap N_0),\mathcal{C}_{w,0}(\pi_B)^{N_j^S(L)\cap N_0}\big)\cong \mathcal{C}_{w,0}(\pi_B)^{N_j^S(L)\cap N_0}\otimes_{k_E}H^{i_2}\big((N_{j+1}^S(L)\cap N_0)/(N_j^S(L)\cap N_0),k_E\big)\tag{51}$$

pour l'action usuelle de $N_1/(N_{j+1}^S(L)\cap N_0)$ sur $\mathcal{C}_{w,0}(\pi_B)^{N_j^S(L)\cap N_0}\cong\mathcal{C}_{w,0}(\pi_B)^{N_{j+1}^S(L)\cap N_0}$ (provenant de l'action par translation à droite) et l'action naturelle de $N_1/(N_{j+1}^S(L)\cap N_0)$ sur $H^{i_2}\big((N_{j+1}^S(L)\cap N_0)/(N_j^S(L)\cap N_0),k_E\big)$ obtenue en voyant k_E comme représentation triviale de $N_1/(N_j^S(L)\cap N_0)$. Comme $(N_{j+1}^S(L)\cap N_0)/(N_j^S(L)\cap N_0)$ est un pro-p-groupe analytique compact et sans torsion, $H^{i_2}\big((N_{j+1}^S(L)\cap N_0)/(N_j^S(L)\cap N_0),k_E\big)$ est de dimension finie sur k_E ([**23**, § I.4.5]), et comme $N_1/(N_{j+1}^S(L)\cap N_0)$ est pro-p-groupe, on voit que $H^{i_2}\big((N_{j+1}^S(L)\cap N_0)/(N_j^S(L)\cap N_0),k_E\big)$ est une extension successive finie de représentations triviales de $N_1/(N_{j+1}^S(L)\cap N_0)$ sur k_E. Ainsi la représentation (51) de $N_1/(N_{j+1}^S(L)\cap N_0)$ est une extension successive finie de $\mathcal{C}_{w,0}(\pi_B)^{N_{j+1}^S(L)\cap N_0}$. Par les suites exactes longues de cohomologie des groupes usuelles et un dévissage évident, il suffit donc de savoir que $H^{i_1}\big(N_1/(N_{j+1}^S(L)\cap N_0),\mathcal{C}_{w,0}(\pi_B)^{N_{j+1}^S(L)\cap N_0}\big)$ est de dimension finie sur k_E pour tout $i_1\geq 0$, ce qui est de nouveau l'hypothèse de récurrence. $\square$

Par la Proposition 8.2, le (ii) du Théorème 8.1 découle du cas $j=0$ de la Proposition 8.5, ce qui achève la preuve du Théorème 8.1.

On a le corollaire suivant immédiat par le (iii) de la Proposition 2.7.

Corollaire 8.6. — *Soit π_B une représentation lisse de $T(L)$ sur A.*
(i) On a $D^\vee\big(H^i(N_1,\mathcal{C}_1(\pi_B))\big)=0$ pour tout $i\geq 1$.
(ii) Si π_B est de plus localement admissible (comme représentation de $T(L)$), on a $D^\vee\big(H^i(N_1,\mathcal{C}_w(\pi_B))\big)=0$ pour tout $i\geq 0$ et tout $w\in W\backslash\{1\}$.

Remarque 8.7. — Des calculs ainsi que la Remarque 6.9 suggèrent que le Théorème 8.1 et le Corollaire 8.6 devraient se généraliser comme suit à tout sous-groupe parabolique $P\subseteq G$ contenant B comme au § 3 : soit π_P une représentation lisse de $L_P(L)$ sur A, alors on devrait avoir un isomorphisme dans la catégorie $\widehat{\Phi\Gamma}_A^{ét}$ pour tout $i\geq 1$:

$$D^\vee\big(H^i(N_1,\mathcal{C}_1(\pi_P))\big)\overset{?}{\cong}D^\vee\big(H^i(N_{L_P,1},\pi_P)\big),$$

et si π_P est de plus localement admissible (comme représentation de $L_P(L)$), alors on devrait avoir que le $A[F]$-module $H^i(N_1,\mathcal{C}_w(\pi_P))$ est de torsion pour tout $i\geq 0$ et tout $w\in K_P\backslash\{1\}$, et donc dans ce cas $D^\vee\big(H^i(N_1,\mathcal{C}_w(\pi_P))\big)\overset{?}{=}0$.

9. Quelques conséquences

On explicite quelques conséquences des résultats précédents, en particulier on en déduit la réponse à une question posée dans [**5**].

On garde les notations des sections précédentes. On note SP_A la catégorie abélienne des représentations lisses de $G(L)$ sur A de longueur finie dont les constituants irréductibles sont des sous-quotients de séries principales.

Corollaire 9.1. — *Soit π un objet de SP_A.*
(i) Le $A[[X]][F]$-module π^{N_1} satisfait la propriété Ad de la Définition 2.2.
(ii) Le $A[F]$-module $H^i(N_1,\pi)$ est de torsion pour $i\geq 1$.
(iii) On a $D_\xi^\vee(\pi)\in\Phi\Gamma_A^{\acute{e}t}$ (et pas seulement $\widehat{\Phi\Gamma}_A^{\acute{e}t}$).

Démonstration. — (i) Noter que $\pi|_{B(L)}$ est encore de longueur finie comme représentation de $B(L)$ par [**24**, Thm.5]. Par le (ii) du Lemme 2.5 et un dévissage, on se ramène à $A=k_E$. Si π_B est un caractère lisse de $T(L)$ sur k_E, rappelons que la $B(L)$-représentation $\big(\mathrm{Ind}_{B^-(L)}^{G(L)}\pi_B\big)|_{B(L)}$ est de longueur finie et que ses constituants sont exactement les $B(L)$-représentations $\mathcal{C}_w(\pi_B)$ du § 6 pour $w\in W$, cf. [**24**, Thm.5]. Par le (ii) du Lemme 2.5 et un dévissage sur les constituants de $\pi|_{B(L)}$, on se ramène ainsi à une $B(L)$-représentation $\mathcal{C}_w(\pi_B)$. Cela découle alors de la Proposition 6.8 et de la Proposition 7.7.
(ii) Par le (i) du Lemme 2.5 et un dévissage comme au (i), il suffit de démontrer l'énoncé pour $A=k_E$ et $\mathcal{C}_w(\pi_B)$ comme au (i), ce qui suit du Théorème 8.1.
(iii) Là encore, par le (ii) de la Proposition 2.7 et un dévissage, on se ramène à $\mathcal{C}_w(\pi_B)$ comme au (i). Si $w\neq 1$, c'est clair par la Proposition 6.8. Si $w=1$, cela résulte de (39) et (47) (cf. Exemple 7.6). □

Corollaire 9.2. — *Soit $0\to\pi'\to\pi\to\pi''\to 0$ une suite exacte courte de représentations lisses de $G(L)$ sur A telle que π' est dans SP_A. Alors on a une suite exacte courte $0\to D_\xi^\vee(\pi'')\to D_\xi^\vee(\pi)\to D_\xi^\vee(\pi')\to 0$ dans $\widehat{\Phi\Gamma}_A^{\acute{e}t}$.*

Démonstration. — On a une suite exacte dans Mod_A :

$$0\longrightarrow {\pi'}^{N_1}\longrightarrow \pi^{N_1}\longrightarrow {\pi''}^{N_1}\longrightarrow H^1(N_1,\pi').$$

Le $A[[X]][F]$-module ${\pi'}^{N_1}$ satisfait la propriété Ad par le (i) du Corollaire 9.1 et $H^1(N_1,\pi')$ est un $A[F]$-module de torsion par le (ii) du Corollaire 9.1. Par le (iv) de la Proposition 2.7, on en déduit le résultat. □

Corollaire 9.3. — *En restriction à la catégorie SP_A, le foncteur $D_\xi^\vee$ est exact et à valeurs dans $\Phi\Gamma_A^{\acute{e}t}$.*

Démonstration. — La première partie résulte du Corollaire 9.2 et la deuxième est le (iii) du Corollaire 9.1. □

Remarque 9.4. — La preuve du Corollaire 9.3 reste la même en remplaçant SP_A par la catégorie abélienne C_A formée des représentations de $G(L)$ de longueur finie sur A dont les constituants irréductibles π vérifient les 3 conditions : (1) π^{N_1} satisfait Ad, (2) $H^1(N_1,\pi)$ est un $A[F]$-module de torsion, (3) $D_\xi^\vee(\pi)\in\Phi\Gamma_A^{\acute{e}t}$. Il est vraisemblable que C_A contienne *strictement* SP_A au moins pour $L=\mathbb{Q}_p$. Par exemple on peut s'attendre à ce que les induites paraboliques irréductibles (sur k_E donc) ne faisant intervenir que des représentations (irréductibles) de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ ou des caractères de $\mathbb{Q}_p^\times$ dans la représentation du Levi ([**1**], [**16**]) vérifient (1) et (2) (elles vérifient (3) par le Théorème 6.1, la Proposition 5.5 et les résultats pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ ([**7**], [**10**], [**3**], [**8**])).

Considérons maintenant la catégorie abélienne SP_E des représentations continues unitaires de $G(L)$ sur E topologiquement de longueur finie dont les constituants (topologiquement) irréductibles sont des sous-quotients de séries principales continues unitaires sur E. Alors le foncteur $D_\xi^\vee$ s'étend en un foncteur contravariant et exact de SP_E dans la catégorie $\Phi\Gamma_E^{\acute{e}t}$ des (φ,Γ)-module étales usuels sur E en posant si Π est dans SP_E :

$$D_\xi^\vee(\Pi) \overset{\text{déf}}{=} E\otimes_{\mathcal{O}_E} \varprojlim_m D_\xi^\vee\big(\Pi^0/(\varpi_E^m)\big)$$

où Π^0 est une boule unité (quelconque) de Π stable par $G(L)$ et où les flèches de transition (surjectives) $D_\xi^\vee\big(\Pi^0/(\varpi_E^m)\big) \twoheadrightarrow D_\xi^\vee\big(\Pi^0/(\varpi_E^{m-1})\big)$ proviennent de $\Pi^0/(\varpi_E^{m-1}) \overset{\varpi_E}{\hookrightarrow} \Pi^0/(\varpi_E^m)$. En utilisant les propriétés d'exactitude de $D_\xi^\vee$, on vérifie facilement que $D_\xi^\vee(\Pi)$ ne dépend pas du choix de Π^0. Ces mêmes propriétés d'exactitude montrent que $D_\xi^\vee\big(\Pi^0/(\varpi_E^m)\big)$ est libre de rang fini (indépendant de m) sur $\mathcal{O}_E/(\varpi_E)^m[[X]][1/X]$ pour tout m.

Soit G' un autre groupe algébrique réductif connexe déployé sur L de centre connexe et $D_{\xi'}^\vee$, $D_{\xi\oplus\xi'}^\vee$ comme au § 5. On définit les catégories SP'_E (resp. SP''_E) comme SP_E mais avec le groupe G' (resp. $G\times G'$) au lieu de G, auxquelles on étend $D_{\xi'}^\vee$ (resp. $D_{\xi\oplus\xi'}^\vee$) comme ci-dessus. Si $(\Pi,\Pi')\in \mathrm{SP}_E\times\mathrm{SP}'_E$, notons que $\Pi\widehat{\otimes}_E\Pi'$ est aussi un objet de SP''_E (cela se déduit aisément du fait que le produit tensoriel complété de deux séries principales continues unitaires de $G(L)$ et $G'(L)$ est une série principale continue unitaire de $G(L)\times G'(L)$), de sorte que $D_{\xi\oplus\xi'}^\vee(\Pi\widehat{\otimes}_E\Pi')$ est bien défini dans $\Phi\Gamma_E^{\acute{e}t}$. On note de manière analogue à [**13**, § A.2.2.1] :

$$\mathcal{E} \overset{\text{déf}}{=} E\otimes_{\mathcal{O}_E}\big(\varprojlim_m \mathcal{O}_E/(\varpi_E)^m[[X]][1/X]\big) \cong E\otimes_{\mathcal{O}_E}\mathcal{O}_E\widehat{[[X]][1}/X]$$

muni des actions de $\mathbb{Z}_p^\times$ et φ induites par celles sur $\mathcal{O}_E/(\varpi_E)^m[[X]][1/X]$ pour tout m.

Corollaire 9.5. — *Avec les notations précédentes, on a un isomorphisme dans $\Phi\Gamma_E^{\acute{e}t}$:*

$$D_{\xi\oplus\xi'}^\vee(\Pi\widehat{\otimes}_E\Pi') \cong D_\xi^\vee(\Pi)\otimes_{\mathcal{E}} D_{\xi'}^\vee(\Pi').$$

Démonstration. — Soit Π^0 (resp. Π'^0) une boule unité de Π (resp. Π') stable par $G(L)$ (resp. $G'(L)$), alors $\Pi^0\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_E}\Pi'^0$ est une boule unité de $\Pi\widehat{\otimes}_E\Pi'$ stable par

$G(L) \otimes G'(L)$ et par définition :

$$D^\vee_{\xi\oplus\xi'}(\Pi\widehat{\otimes}_E\Pi') = E \otimes_{\mathcal{O}_E} \varprojlim_m D^\vee_{\xi\oplus\xi'}\big(\Pi^0/(\varpi_E^m) \otimes_{\mathcal{O}_E} \Pi'^0/(\varpi_E^m)\big).$$

Comme on a :

$$D^\vee_\xi(\pi) \otimes_{\mathcal{E}} D^\vee_{\xi'}(\pi') \cong E \otimes_{\mathcal{O}_E} \varprojlim_m \Big(D^\vee_\xi\big(\Pi^0/(\varpi_E^m)\big) \otimes_{\mathcal{O}_E[[X]][1/X]} D^\vee_{\xi'}\big(\Pi'^0/(\varpi_E^m)\big)\Big),$$

il suffit de montrer que pour tout m :

$$D^\vee_{\xi\oplus\xi'}\big(\Pi^0/(\varpi_E^m) \otimes_{\mathcal{O}_E} \Pi'^0/(\varpi_E^m)\big) \cong D^\vee_\xi\big(\Pi^0/(\varpi_E^m)\big) \otimes_{\mathcal{O}_E[[X]][1/X]} D^\vee_{\xi'}\big(\Pi'^0/(\varpi_E^m)\big)$$

ce qui découle de la Proposition 5.5, que l'on peut appliquer grâce au (i) du Corollaire 9.1 (notons que les $\mathcal{O}_E/(\varpi_E)^m$-modules sous-jacents à $\Pi^0/(\varpi_E^m)$ et $\Pi'^0/(\varpi_E^m)$ sont bien libres, une base s'obtenant en relevant une base quelconque de $\Pi^0/(\varpi_E)$ et $\Pi'^0/(\varpi_E)$). $\square$

Remarque 9.6. — Par le (i) de la Remarque 5.6, la même preuve donne une version du Corollaire 9.5 avec un nombre fini quelconque de représentations.

On a aussi une version p-adique du Théorème 6.1 dont la preuve, sans difficulté, est laissée au lecteur.

Corollaire 9.7. — *Soit π_P une représentation continue unitaire de $L_P(L)$ sur E topologiquement de longueur finie dont les constituants irréductibles sont des sous-quotients de séries principales continues unitaires de $L_P(L)$, et soit $\big(\mathrm{Ind}_{P^-(L)}^{G(L)}\,\pi_P\big)^{\mathcal{C}^0}$ l'induite parabolique continue unitaire de π_P. On a un isomorphisme dans $\Phi\Gamma_E^{\acute{e}t}$ fonctoriel en π_P :*

$$D^\vee_\xi\Big(\big(\mathrm{Ind}_{P^-(L)}^{G(L)}\,\pi_P\big)^{\mathcal{C}^0}\Big) \cong D^\vee_\xi(\pi_P).$$

(Notons que, par induction “par étages”, la représentation $\big(\mathrm{Ind}_{P^-(L)}^{G(L)}\,\pi_P\big)^{\mathcal{C}^0}$ est bien dans la catégorie SP_E.)

Nous pouvons maintenant répondre de manière significative (et positive) à une question formulée dans [**5**, § 3.5]. Nous devons rappeler pour cela plusieurs notations, définitions et constructions de [**5**]. On suppose désormais $L = \mathbb{Q}_p$ (comme dans [**5**]).

On note (G, B, T), $\big(X(T), R, X^\vee(T), R^\vee\big)$, etc. comme au début du § 3. On suppose G de centre connexe, on fixe des cocaractères fondamentaux $\lambda_{\alpha^\vee} : \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \to T$ pour $\alpha \in S$ et on pose $\xi \overset{\text{déf}}{=} \sum_{\alpha\in S}\lambda_{\alpha^\vee} \in X^\vee(T)$ comme au § 3. La donnée radicielle duale $\big(X^\vee(T), R^\vee, X(T), R\big)$ est associée à $(\widehat{G}, \widehat{B}, \widehat{T})$ où $\widehat{G}$ est le groupe réductif déployé sur $\mathbb{Q}_p$ dual de G, $\widehat{B}$ le Borel associé à $(R^\vee)^+$ et $\widehat{T} \subseteq \widehat{B}$ le tore maximal (tel que $X(\widehat{T}) \cong X^\vee(T)$). On note $\widehat{N}$ le radical unipotent de $\widehat{B}$ et $\widehat{N}_\alpha \subseteq \widehat{N}$ le sous-groupe radiciel associé à $\alpha \in (R^\vee)^+$. On suppose que $\widehat{G}$ est *aussi* de centre connexe, en particulier il existe un caractère $\theta \in X(T)$ tel que $\theta \circ \alpha^\vee = \mathrm{Id}_{\mathbb{G}_m}$ pour tout $\alpha \in S$ ([**5**, Prop.2.1.1]). On rappelle qu'à tout sous-ensemble $C \subseteq (R^\vee)^+$ clos (i.e. tel que $\alpha,\ \beta \in C$ et $\alpha+\beta \in (R^\vee)^+ \Rightarrow \alpha+\beta \in C$) est associé un sous-groupe algébrique fermé $\widehat{B}_C$ de $\widehat{B}$ (resp. $\widehat{G}_C$ de $\widehat{G}$) sur $\mathbb{Q}_p$ engendré par $\widehat{T}$ et les $\widehat{N}_\alpha$ (resp. $\widehat{T}$ et les $\widehat{N}_\alpha$, $\widehat{N}_{-\alpha}$) pour $\alpha \in C$. De plus tout sous-groupe algébrique fermé de $\widehat{B}$ contenant $\widehat{T}$ est de la forme $\widehat{B}_C$.

Soit $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \to \widehat{B}(E) \subseteq \widehat{G}(E)$ un homomorphisme continu et :

$$\widehat{\chi}_\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\rho} \widehat{B}(E) \twoheadrightarrow \widehat{T}(E).$$

On suppose $\alpha^\vee \circ \widehat{\chi}_\rho \notin \{1, \varepsilon^{\pm 1}\}$ pour tout $\alpha \in R^+$, i.e. ρ est générique au sens de [**5**, Def.3.3.1]. On note $C_\rho \subseteq (R^\vee)^+$ le plus petit sous-ensemble clos tel que ρ est à valeurs dans $\widehat{B}_{C_\rho}(E) \subseteq \widehat{B}(E)$. Quitte à remplacer ρ par un conjugué dans $\widehat{B}(E)$, on suppose de plus C_ρ minimal parmi tous les conjugués de ρ dans $\widehat{B}(E)$ (cf. [**5**, § 3.2]). On pose :

$$W_{C_\rho} \overset{\text{déf}}{=} \{w \in W,\ w^{-1}(C_\rho) \subseteq (R^\vee)^+\}.$$

Si $w \in W_{C_\rho}$ et $I \subseteq w(S^\vee) \cap C_\rho$ est un sous-ensemble de racines deux à deux orthogonales, alors I et $C_\rho \backslash I$ sont des sous-ensembles clos de $(R^\vee)^+$ ([**5**, Lem.2.3.7]) et $\widehat{B}_{C_\rho}$ est un produit semi-direct $\widehat{N}_{C_\rho\backslash I} \rtimes \widehat{B}_I$ où $\widehat{N}_{C_\rho\backslash I} \cong \prod_{\alpha\in C_\rho\backslash I} \widehat{N}_\alpha$ est le radical unipotent de $\widehat{B}_{C_\rho\backslash I}$. De plus $\widehat{B}_I$ est isomorphe à $\widehat{T}_I \times (\prod_{\alpha\in I} \widehat{B}_\alpha)$ où $\widehat{T}_I \subseteq \widehat{T}$ est un sous-tore central dans $\widehat{B}_I$ tel que $\widehat{T} \cong \widehat{T}_I \times (\prod_{\alpha\in I} \widehat{T}_\alpha)$, $\widehat{T}_\alpha$ (resp. $\widehat{B}_\alpha$) étant un tore déployé (resp. un sous-groupe de Borel contenant $\widehat{T}_\alpha$) de la copie de GL_2 dans $\widehat{G}$ correspondant à la racine α, cf. [**5**, § 2.3]. Soit $w \in W_{C_\rho}$ et $\alpha \in w(S^\vee) \cap C_\rho$, en utilisant la minimalité de C_ρ, on voit que la représentation :

$$\rho_\alpha : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\ \rho\ } \widehat{B}_{C_\rho}(E) \twoheadrightarrow \widehat{B}_\alpha(E)$$

est non scindée (i.e. n'est pas à valeurs dans $\widehat{T}_\alpha(E)$ à conjugaison près dans $\widehat{B}_\alpha(E)$) et est générique.

On note $L^\otimes \overset{\text{déf}}{=} \otimes_{\alpha\in S} L(\lambda_{\alpha^\vee})$ (une représentation algébrique de $\widehat{G}$ sur E) où $L(\lambda_{\alpha^\vee})$ est la représentation algébrique de $\widehat{G}$ sur E de plus haut poids (dominant) $\lambda_{\alpha^\vee}$ relativement à $\widehat{B}$ (cf. [**5**, § 2.1], on utilise ici $X^\vee(T) \cong X(\widehat{T})$). On note $\left(L^\otimes|_{\widehat{B}_{C_\rho}}\right)^{\mathrm{ord}}$ la plus grande sous-représentation algébrique de $L^\otimes|_{\widehat{B}_{C_\rho}}$ dont les poids ($\in X(\widehat{T})$) sont dans $\{w(\xi), w \in W\}$ en voyant ξ dans $X(\widehat{T})$. Pour suivre les notations de [**5**, § 2], on écrit plutôt α au lieu de $\alpha^\vee$, par exemple $L^\otimes = \otimes_{\alpha\in S^\vee} L(\lambda_\alpha)$. Si $w \in W_{C_\rho}$ et $I \subseteq w(S^\vee) \cap C_\rho$ est un sous-ensemble de racines deux à deux orthogonales, on considère la représentation algébrique de $\widehat{B}_I \cong \widehat{T}_I \times (\prod_{\alpha\in I} \widehat{B}_\alpha)$ sur E :

$$L_I \overset{\text{déf}}{=} w(\xi)|_{\widehat{T}_I} \otimes_E \left(\bigotimes_{\alpha\in I} L_\alpha\right)$$

où L_α est la restriction à $\widehat{B}_\alpha$ de la représentation algébrique de GL_2 sur E de plus haut poids $w(\xi)|_{\widehat{T}_\alpha}$ relativement à $\widehat{B}_\alpha$. En fait L_α a dimension 2 et est l'unique extension non scindée du poids $s_\alpha\big(w(\xi)|_{\widehat{T}_\alpha}\big)$ par le poids $w(\xi)|_{\widehat{T}_\alpha}$ où $s_\alpha \in W$ est la permutation associée à α (voir [**5**, § 2.3]). On voit L_I comme représentation algébrique de $\widehat{B}_{C_\rho}$ via $\widehat{B}_{C_\rho} \twoheadrightarrow \widehat{B}_I$. Si $I \subseteq I'$, on a une unique injection $L_I \hookrightarrow L_{I'}$ ce qui permet de définir (à isomorphisme près) la représentation algébrique $L_{C_\rho,w} \stackrel{\text{déf}}{=} \varinjlim L_I$ de $\widehat{B}_{C_\rho}$ sur E où la limite inductive est prise sur les sous-ensembles I de $w(S^\vee) \cap C_\rho$ de racines deux à deux orthogonales. Alors on a un isomorphisme de représentations algébriques de $\widehat{B}_{C_\rho}$ sur E ([**5**, Thm.2.4.1]) :

$$\oplus_{w\in W_{C_\rho}} L_{C_\rho,w} \cong \big(L^\otimes|_{\widehat{B}_{C_\rho}}\big)^{\mathrm{ord}}.$$

Si l'on note $\widehat{\chi}_{\rho_I}$ l'image de $\widehat{\chi}_\rho$ via la surjection $\widehat{T}(E) \twoheadrightarrow \widehat{T}_I(E)$, on dispose aussi de la représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ sur E :

$$L_I \circ \rho \cong \big(w(\xi)|_{\widehat{T}_I} \circ \widehat{\chi}_{\rho_I}\big) \otimes_E \Big(\bigotimes_{\alpha\in I} L_\alpha \circ \rho_\alpha\Big). \tag{52}$$

À ρ comme ci-dessus est par ailleurs associée dans [**5**, § 3.3] une représentation dans SP_E notée $\Pi(\rho)^{\mathrm{ord}}$ dont on rappelle la définition. C'est une somme directe $\Pi(\rho)^{\mathrm{ord}} = \oplus_{w\in W_{C_\rho}} \Pi(\rho)_{C_\rho,w}$ où $\Pi(\rho)_{C_\rho,w}$ est défini comme suit. Soit $w \in W_{C_\rho}$ et $J \subseteq S$ un sous-ensemble de racines simples deux à deux orthogonales tel que $w(J) \subseteq C_\rho^\vee$ où $C_\rho^\vee \stackrel{\text{déf}}{=} \{\alpha^\vee,\ \alpha \in C_\rho\} \subseteq R^+$. Dans ce cas G_J est le sous-groupe de Levi du parabolique B^-G_J de G et est isomorphe à $T_J \times \mathrm{GL}_2^J$ où $T_J \subseteq T$ est un sous-tore central dans G_J tel que $T \cong T_J \times (\prod_{\alpha\in J} T_\alpha)$, T_α étant un tore déployé de la copie de GL_2 dans G correspondant à la racine α, cf. [**5**, Lem.3.1.4]. On choisit cette décomposition de telle sorte que $\widehat{T}_{w(J)^\vee}$ (cf. ci-dessus) (resp. $\widehat{T}_{w(\alpha)^\vee}$, $\alpha \in J$) soit le dual de $wT_Jw^{-1} \subseteq wTw^{-1} \cong T$ (resp. de $wT_\alpha w^{-1}$) où $w(J)^\vee \stackrel{\text{déf}}{=} \{w(\alpha)^\vee,\ \alpha \in J\} \subseteq w(S^\vee) \cap C_\rho$. Notons que $B \cap G_J = T_J \times (\prod_{\alpha\in J} B_\alpha)$ où $B_\alpha \subset \mathrm{GL}_2$ est un sous-groupe de Borel contenant T_α. Si $\alpha \in J$ et $\chi_\alpha : T_\alpha(\mathbb{Q}_p) \to \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$ est un caractère continu unitaire, on pose avec les notations de [**5**, § 3.1] (série principale continue unitaire) :

$$\Pi_\alpha(\chi_\alpha) \stackrel{\text{déf}}{=} \Big(\mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \big(\chi_\alpha \cdot (\varepsilon^{-1}\circ\theta)|_{T_\alpha(\mathbb{Q}_p)}\big)\Big)^{\mathcal{C}^0}.$$

Soit $\chi_\rho : T(\mathbb{Q}_p) \to \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$ le caractère continu (unitaire) correspondant à $\widehat{\chi}_\rho$ par la correspondance de Langlands pour les tores (cf. par exemple [**5**, (10)]). Pour $\alpha \in S$ on note $\mathcal{E}_\alpha$ l'unique extension non scindée de $\Pi_\alpha\big(s_\alpha(w^{-1}(\chi_\rho)|_{T_\alpha(\mathbb{Q}_p)})\big)$ par $\Pi_\alpha\big(w^{-1}(\chi_\rho)|_{T_\alpha(\mathbb{Q}_p)}\big)$ (cf. [**5**, App.B] pour des références) et on considère l'induite parabolique continue :

$$\Pi(\rho)_J \stackrel{\text{déf}}{=} \Big(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)G_J(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \big((w^{-1}(\chi_\rho)\cdot(\varepsilon^{-1}\circ\theta))|_{T_J(\mathbb{Q}_p)} \otimes_E \big(\otimes_{\alpha\in J}\mathcal{E}_\alpha\big)\big)\Big)^{\mathcal{C}^0}.$$

Pour $J \subseteq J'$ comme ci-dessus, on a une unique injection $G(\mathbb{Q}_p)$-équivariante $\Pi(\rho)_J \hookrightarrow \Pi(\rho)_{J'}$ à scalaire près ([**5**, § 3.3]) et on pose $\Pi(\rho)_{C_\rho,w} \stackrel{\text{déf}}{=} \varinjlim \Pi(\rho)_J$ où la limite inductive est prise sur les sous-ensembles J de $S \cap w^{-1}(C_\rho^\vee)$ de racines deux à deux orthogonales. Il est clair que $\Pi(\rho)_{C_\rho,w}$ est dans SP_E (en fait $\Pi(\rho)_{C_\rho,w}$ admet une suite de composition formée de séries principales “complètes”, cf. [**5**, § 3.3]).

Dans [**5**, § 3.5], on demande s'il existe un foncteur covariant noté F de la catégorie des représentations continues unitaires admissibles (topologiquement) de longueur finie de $G(\mathbb{Q}_p)$ sur E dans la catégorie Rep_E des représentations continues de dimension finie de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ sur E vérifiant les trois propriétés suivantes :

(i) pour tout caractère continu unitaire $\chi : T(\mathbb{Q}_p) \to \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$ on a :
$$F\Big(\big(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \theta)\big)^{\mathcal{C}^0}\Big) = \xi \circ \widehat{\chi},$$
où $\widehat{\chi} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \to \widehat{T}(E)$ correspond à χ par la correspondance de Langlands pour les tores et où on voit ξ dans $X(\widehat{T})$;

(ii) F est exact lorsque restreint à la catégorie SP_E;

(iii) $F(\Pi(\rho)^{\mathrm{ord}}) = \big(L^\otimes|_{\widehat{B}_{C_\rho}}\big)^{\mathrm{ord}} \circ \rho$.

Alternativement (i) est équivalent via la réciprocité locale à :
$$F\Big(\big(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \theta)\big)^{\mathcal{C}^0}\Big) = \big(x \longmapsto \chi(\xi(x))\big)$$
où $x \in \mathbb{Q}_p^\times$. Notons que la définition de $\Pi(\rho)^{\mathrm{ord}}$ ne dépend pas de ξ, mais comme celle de $L^\otimes$ en dépend (via les $\lambda_{\alpha^\vee}$), on s'attend par (i) et (iii) à ce que ξ intervienne aussi dans le définition d'un tel foncteur F.

Notons $V^\vee$ le foncteur contravariant de $\Phi\Gamma_E^{\text{ét}}$ dans la catégorie Rep_E défini comme le *dual* du foncteur covariant $\mathbf{V}_{\mathcal{E}}$ de [**13**, § A.3.4.4(c)]. Soit $\delta : \mathbb{Q}_p^\times \to \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$, $x \mapsto \varepsilon^{-1}\big(\theta(\xi(x))\big) = \delta(x)$ que l'on voit comme caractère de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ (une puissance de ε donc). Le corollaire suivant montre que, au moins lorsque l'on se restreint à la catégorie SP_E (qui suffit pour exprimer les propriétés (i) à (iii) ci-dessus), un tel foncteur F existe bien.

Corollaire 9.8. — *Le foncteur* $F \stackrel{\text{déf}}{=} (V^\vee \circ D_\xi^\vee) \otimes \delta^{-1}$ *de la catégorie* SP_E *dans la catégorie* Rep_E *satisfait les propriétés (i), (ii) et (iii) ci-dessus.*

Démonstration. — La propriété (i) découle du Corollaire 9.7 et des définitions (cf. Exemple 7.6). La propriété (ii) suit du Corollaire 9.3 (cf. la discussion qui suit la Remarque 9.4). Montrons la propriété (iii). Soit $w \in W_{C_\rho}$ et $J \subseteq S \cap w^{-1}(C_\rho^\vee)$ un sous-ensemble de racines deux à deux orthogonales. Par le Corollaire 9.7 appliqué avec $L = \mathbb{Q}_p$, $P = BG_J$ et :

$$\pi_P \overset{\text{déf}}{=} \big(w^{-1}(\chi_\rho)\cdot(\varepsilon^{-1}\circ\theta)\big)|_{T_J(\mathbb{Q}_p)} \otimes_E \big(\otimes_{\alpha\in J}\mathcal{E}_\alpha\big),$$

et par le Corollaire 9.5 (avec la Remarque 9.6), on a dans $\Phi\Gamma_E^{ét}$:

$$D_\xi^\vee\big(\Pi(\rho)_J\big) = D_{\xi_J}^\vee\Big(\big(w^{-1}(\chi_\rho)\cdot(\varepsilon^{-1}\circ\theta)\big)|_{T_J(\mathbb{Q}_p)}\Big)\otimes_{\mathcal{E}}\big(\otimes_{\alpha\in J} D_{\xi_\alpha}^\vee(\mathcal{E}_\alpha)\big) \tag{53}$$

où ξ_J (resp. ξ_α) est la composée $\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \overset{\xi}{\to} T \twoheadrightarrow T_J$ (resp. $\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \overset{\xi}{\to} T \twoheadrightarrow T_\alpha$). Par définition de $D_{\xi_J}^\vee$ (cf. § 3 et le Lemme 7.5), on a (en voyant $T_J(\mathbb{Q}_p)$ comme facteur direct de $T(\mathbb{Q}_p)$ et via la réciprocité locale) :

$$\begin{aligned} V^\vee\Big(D_{\xi_J}^\vee\Big(\big(w^{-1}(\chi_\rho)\cdot(\varepsilon^{-1}\circ\theta)\big)|_{T_J(\mathbb{Q}_p)}\Big)\Big) &= \Big(x\mapsto \big(w^{-1}(\chi_\rho)\cdot(\varepsilon^{-1}\circ\theta)\big)(\xi_J(x))\Big) \\ &= \big(x\mapsto w^{-1}(\chi_\rho)(\xi_J(x))\big)\otimes\delta_J \end{aligned}$$

où $x\in\mathbb{Q}_p^\times$ et δ_J est le caractère de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ induit par $x\mapsto\varepsilon^{-1}\big(\theta(\xi_J(x))\big)$. Mais le caractère de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ induit par $x\mapsto w^{-1}(\chi_\rho)(\xi_J(x))$ est exactement le caractère $w(\xi)|_{\widehat{T}_{w(J)^\vee}}\circ\widehat{\chi}_{\rho_{w(J)^\vee}}$ (en suivant les définitions et en voyant maintenant ξ dans $X(\widehat{T})$). De même, si $\alpha\in J$ et si δ_α est le caractère de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ induit par $x\mapsto\varepsilon^{-1}\big(\theta(\xi_\alpha(x))\big)$ (en voyant $T_\alpha(\mathbb{Q}_p)$ comme facteur direct de $T(\mathbb{Q}_p)$), on a :

$$V^\vee\big(D_{\xi_\alpha}^\vee(\mathcal{E}_\alpha)\big)\cong\big(L_{w(\alpha)^\vee}\circ\rho_{w(\alpha)^\vee}\big)\otimes\delta_\alpha$$

car, par généricité de $\rho_{w(\alpha)^\vee}$, par [**7**] (voir aussi [**8**]) avec le (iii) de la Proposition 3.2 (et un passage à la limite projective évident) et par la propriété (i), $V^\vee\big(D_{\xi_\alpha}^\vee(\mathcal{E}_\alpha)\big)\otimes\delta_\alpha^{-1}$ est l'*unique* extension non scindée de :

$$\begin{aligned} \big(x\mapsto s_\alpha w^{-1}(\chi_\rho)(\xi_\alpha(x))\big) &= (ws_\alpha(\xi))|_{\widehat{T}_{w(\alpha)^\vee}}\circ\widehat{\chi}_{\rho_{w(\alpha)^\vee}} \\ &= s_{w(\alpha)^\vee}\big(w(\xi)|_{\widehat{T}_{w(\alpha)^\vee}}\big)\circ\widehat{\chi}_{\rho_{w(\alpha)^\vee}} \end{aligned}$$

par $\big(x\mapsto w^{-1}(\chi_\rho)(\xi_\alpha(x))\big) = w(\xi)|_{\widehat{T}_{w(\alpha)^\vee}}\circ\widehat{\chi}_{\rho_{w(\alpha)^\vee}}$. Comme $V^\vee$ commute aux produits tensoriels, on en déduit avec (52), (53) et l'égalité $\delta_J\prod_{\alpha\in J}\delta_\alpha=\delta$ que $F\big(\Pi(\rho)_J\big) = L_{w(J)^\vee}\circ\rho$. Par passage à la limite inductive sur J et exactitude de F, on obtient facilement $F\big(\Pi(\rho)_{C_\rho,w}\big) = L_{C_\rho,w}\circ\rho$ d'où la propriété (iii) en sommant sur $w\in W_{C_\rho}$. □

Remarque 9.9. — Par une preuve totalement analogue (dont on laisse les détails au lecteur intéressé), lorsque p est un bon premier pour $\widehat{G}$ au sens de [**5**, Def.2.5.1], on montre une version sur k_E du Corollaire 9.8 (comme espéré à la fin de [**5**, § 3.5]).

Références

[1] Abe N., *On a classification of irreducible admissible modulo p representations of a p-adic split reductive group*, Compositio Math. 149, 2139-2168, 2013.

[2] Bergdall J., Chojecki P., *Ordinary representations and companion points for* $U(3)$ *in the indecomposable case*, prépublication 2014.

[3] Berger L., Vienney M., *Irreducible modular representations of the Borel subgroup of* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, Automorphic Forms and Galois Representations, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 414, 2014.

[4] Breuil C., *Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *I*, Compositio Math. 138, 165-188, 2003.

[5] Breuil C., Herzig F., *Ordinary representations of* $G(\mathbb{Q}_p)$ *and fundamental algebraic representations*, Duke Math. J. 164, 1271-1352, 2015.

[6] Breuil C., Paškūnas V., *Towards a modulo p Langlands correspondence for* GL_2, Memoirs of Amer. Math. Soc. 216, 2012.

[7] Colmez P., *Représentations de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *et* (φ, Γ)*-modules*, Astérisque 330, 281-509, 2010.

[8] Colmez P., Dospinescu G., Paškūnas V., *The p-adic local Langlands correspondence for* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, à paraître à Cambridge J. of Math.

[9] Digne F., Michel J., *Representations of finite groups of Lie type*, London Math. Soc. Student Text 21, 1991.

[10] Emerton M., *On a class of coherent rings, with applications to the smooth representation theory of* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *in characteristic p*, prépublication 2008.

[11] Emerton M., *Ordinary parts of admissible representations of p-adic reductive groups I. Definition and first properties*, Astérisque 331, 355-402, 2010.

[12] Erdélyi M., Zábrádi G., *Links between generalized Montréal functors*, prépublication 2014.

[13] Fontaine J.-M., *Représentations p-adiques des corps locaux I*, Progr. in Math. 87, 249-309, 1990.

[14] Gabriel P., *Des catégories abéliennes*, Bull. Soc. Math. Fr. 90, 323-448, 1962.

[15] Hauseux J., *Extensions entre séries principales p-adiques et modulo p de* $G(F)$, à paraître à J. Inst. Math. Jussieu.

[16] Herzig F., *The classification of irreducible admissible mod p representations of a p-adic* GL_n, Invent. Math. 186, 373-434, 2011.

[17] Jantzen C. J., *Representations of algebraic groups*, Second Edition, Math. Surveys and Monographs 107, Amer. Math. Soc., 2003.

[18] Morra S., Schraen B., *Structure partielle de certaines représentations supersingulières de* GL_2, en préparation.

[19] Ollivier R., *Resolutions for principal series representations of p-adic* GL_n, to appear in Münster J. of Maths.

[20] Schneider P., Vignéras M.-F., *A functor from smooth o-torsion representations to* (φ, Γ)*-modules*, Clay Math. Proceedings 13, 525-601, 2011.

[21] Schraen B., *Sur la présentation des représentations supersingulières de* $\mathrm{GL}_2(F)$, à paraître à J. Reine Angew. Math.

[22] Schraen B., communications personnelles, novembre 2012 et mars 2014.

[23] Serre J.-P., *Cohomologie galoisienne*, cinquième édition, Lecture Notes in Math. 5, Springer-Verlag, 1994.

[24] Vignéras M.-F., *Série principale modulo p de groupes réductifs p-adiques*, Geom. and Funct. Analysis 17, 2090-2112, 2008.

[25] Zábrádi G., *Exactness of the reduction on étale modules*, J. of Algebra 331, 400-415, 2011.

C. Breuil, Bâtiment 425, C.N.R.S. et Université Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex, France
E-mail : christophe.breuil@math.u-psud.fr