REPRÉSENTATIONS SEMI-STABLES ET MODULES FORTEMENT DIVISIBLES

Christophe Breuil
Mathématiques, Bât. 425
U.R.A. 752 du C.N.R.S.
Université Paris-Sud
F-91405 ORSAY cedex
(France)
E-mail : breuil@math.u-psud.fr

Table des matières

1. Introduction

On note k un corps parfait de caractéristique $p > 0$, $W = W(k)$ les vecteurs de Witt, $K_0 = Frac(W)$, K une extension finie totalement ramifiée de K_0 de degré e, $\mathcal{O}_K$ les entiers de K et π une uniformisante fixée de K. On désigne par $\bar{K}$ une clôture algébrique de K, d'entiers $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ et de groupe de Galois $G_K = Gal(\bar{K}/K)$.

Dans cet article, nous démontrons les deux théorèmes :

Théorème 1.1. *Soit D un (ϕ, N)-module filtré faiblement admissible de Fontaine, r sa longueur de filtration et supposons $er < p - 1$, alors D est admissible.*

Théorème 1.2. *Supposons $e = 1$ et soit V une représentation p-adique semi-stable de G_K à poids de Hodge-Tate entre 0 et r ($r \in \mathbf{N}$), alors les poids de l'inertie sur la semi-simplifiée modulo p de V sont aussi entre 0 et r.*

Ces théorèmes résultent d'une généralisation au cas $e > 1$ (et "semi-stable") des résultats de [FL] et [La1] ($e = 1$ et situation "cristalline"), généralisation initiée dans [Br1] et [Br2]. Plus précisément, soient u une indéterminée, S le complété p-adique de $W[u, u^{ei}/i!]_{i \in \mathbf{N}^*}$ et $S_{K_0} = K_0 \otimes_W S$. Dans [Br1], nous construisons une équivalence de catégories entre les (ϕ, N)-modules filtrés D de Fontaine ([Fo2],4.3) et une certaine catégorie de (ϕ, N)-module filtrés $\mathcal{D}$ sur S_{K_0}. Pour $e = 1$, nous définissons dans [Br2] une notion de S-module fortement divisible qui généralise celle introduite dans [FL], conjecturons que, lorsque D est faiblement admissible avec les crans de sa filtration entre 0 et $p - 2$, on doit toujours pouvoir trouver un S-module fortement divisible dans le S_{K_0}-module $\mathcal{D}$ associé à D dans [Br1] et montrons cette conjecture en dimension 2. Dans le présent article, nous commençons par étendre la définition des modules fortement divisibles et certains résultats de [Br2] au cas $e > 1$. A chaque fois qu'on dispose d'un tel module fortement divisible, on peut alors :

1) montrer que le module correspondant D est admissible (2.3.2.5)

2) borner, comme conjecturé par Serre ([Se],1.13), les poids de l'inertie modérée sur la semi-simplifiée modulo p de la représentation semi-stable associée à D (du moins si $e = 1$, c.f. ([Br2],4.3), pour $e > 1$, c'est encore une conjecture (A.3), mais qui devrait être accessible)

3) construire, dans le cas particulier où la longueur de la filtration sur $K \otimes_{K_0} D$ est ≤ 1 et où $N = 0$, un groupe p-divisible sur $\mathcal{O}_K$ ([Br3],4.2.2.9).

Puis nous montrons le théorème :

Théorème 1.3. *(3.3.7) Soit D un (ϕ, N)-module filtré faiblement admissible tel que $Fil^0(K \otimes_{K_0} D) = K \otimes_{K_0} D$ et $Fil^{r+1}(K \otimes_{K_0} D) = 0$ avec $er < p-1$, alors $S_{K_0} \otimes_{K_0} D$ contient un S-module fortement divisible (2.1.1).*

d'où résultent donc (1.1) et (1.2). Signalons que, déjà dans le cas $e = 1$ et en dimension 2, ces S-modules peuvent être assez compliqués : par exemple, ils n'admettent pas toujours de base adaptée à la filtration ([Br2],6), alors que c'est vrai sur les modules filtrés $\mathcal{D}$ et D. Le théorème (1.2) était connu pour les représentations cristallines ([La1]+[FL]) et pour les représentations semi-stables "provenant" des variétés à réduction semi-stable ([Br4]). Il reste à prouver (A.3) pour avoir sa version ramifiée. Le théorème (1.3) était connu, directement ou indirectement, dans les cas suivants (comme d'habitude, N est l'opérateur de monodromie sur D, d la dimension de D et r la longueur de la filtration sur $K \otimes_{K_0} D$, supposée inférieure (strictement) à $p-1$) :

- $e = 1$, $N = 0$ ([La1],3.2)
- $e = 1$, N vérifie la "transversalité de Griffiths" (([Br2],5), résultat dû à Fontaine)
- $1 \leq e \leq p-1$, $N = 0$, $r \leq 1$ (([La1],2.1) avec ([Br3],4.2.2.9) et la remarque (2.2.1.5))
- $1 \leq e$, $N = 0$, $d = 2$ et $r \leq 1$ (calculs explicites en dimension 2 ou [La2]+ce qui précède)
- $e = 1$, N quelconque, $d = 2$ ([Br2],6).

Signalons que J.-M. Fontaine a annoncé une preuve de (1.1) en dimension 2 sans restriction sur e ou r (qui utilise d'autres techniques).

Le lecteur pourra s'étonner de la condition $er < p-1$ dans (1.3). En fait, il est possible que les S-modules fortement divisibles existent sans restriction sur e (i.e. avec $r < p-1$ seulement, c.f. (A.1)). Un S-module fortement divisible est libre et l'inégalité $er < p-1$ est une condition technique qui assure que, quelle que soit la donnée de départ dans l'algorithme (3.2.4), le module que fournit l'algorithme est bien libre (et se révèle être le S-module fortement divisible cherché). Lorsque la condition n'est pas satisfaîte, l'algorithme ne fournit pas un module libre en général (3.3.5), ce qui veut dire qu'il faudra travailler davantage ou modifier l'algorithme pour trouver un S-module fortement divisible, ou alors se satisfaire des modules "fortement divisibles" non nécessairement libres obtenus sans restriction sur la ramification en (3.2.4.9).

Je remercie J.-M. Fontaine pour m'avoir transmis la preuve de la proposition (2.3.2.2).

2. Construction de représentations semi-stables ($e \in \mathbf{N}^*$, $r < p-1$)

On construit des représentations semi-stables, sans restriction sur e, en utilisant des modules fortement divisibles.

2.1. **Modules fortement divisibles et faible admissibilité.** On montre que l'existence de modules fortement divisibles entraîne la faible admissibilité. C'est une généralisation simple du cas $e = 1$ ([Br2],A).

On note $\underline{MF}_K(\phi, N)$ la catégorie suivante : les objets sont des K_0-espaces vectoriels D de dimension finie munis :

- d'une filtration décroissante sur $D_K = K \otimes_{K_0} D$ par des sous-K-espaces vectoriels $Fil^i D_K$ telle que $Fil^i D_K = D_K$ pour i suffisamment petit et $Fil^i D_K = 0$ pour i suffisamment grand
- d'une application K_0-semi-linéaire injective $\phi : D \to D$
- d'une application K_0-linéaire $N : D \to D$ telle que $N\phi = p\phi N$.

Les flèches sont les applications K_0-linéaires qui commutent à ϕ et N et préservent la filtration après extension des scalaires à K. On dit qu'un objet de $\underline{MF}_K(\phi, N)$ est positif si $Fil^0 D_K = D_K$. Pour D dans $\underline{MF}_K(\phi, N)$, on pose :

$$\begin{aligned} t_H(D) &= \sum_{i \in \mathbf{Z}} (\dim_K gr^i D_K) i \\ t_N(D) &= \sum_{\alpha \in \mathbf{Q}} (\dim_{K_0} D_\alpha) \alpha \end{aligned}$$

où D_α est la partie de D de pente α pour l'action de ϕ. Si D est de dimension d, on remarque que $\bigwedge_{K_0}^d D$ est muni de la façon évidente d'une structure d'objet de $\underline{MF}_K(\phi, N)$ et que $t_H(\bigwedge_{K_0}^d D) = t_H(D)$ et $t_N(\bigwedge_{K_0}^d D) = t_N(D)$. On dit qu'un objet D de $\underline{MF}_K(\phi, N)$ est faiblement admissible si $t_H(D) = t_N(D)$ et si pour tout sous-K_0-espace vectoriel D' de D stable par ϕ et N avec $Fil^i D'_K = D'_K \cap Fil^i D_K$, on a $t_H(D') \leq t_N(D')$. On note $\underline{MF}_K^{fa}(\phi, N)$ la sous-catégorie pleine de $\underline{MF}_K(\phi, N)$ formée des objets faiblement admissibles : elle est abélienne, stable par dualité, extension ([Fo2],4.4.4) et produit tensoriel ([Fa2],[To]).

Soit $W[u]$ l'anneau des polynômes en l'indéterminée u et $s : W[u] \to \mathcal{O}_K$ l'unique surjection de W-algèbres telle que $s(u) = \pi$. On a $Ker(s) = (E(u))$ où $E(u)$ est le polynôme d'Eisenstein de l'uniformisante π. Notons S le complété p-adique de l'enveloppe aux puissances divisées de $W[u]$ par rapport à $Ker(s)$. Si $i \in \mathbf{N}$, notons $q(i)$ le quotient dans la division euclidienne de i par e, S s'identifie à la sous-W-algèbre de $K_0[[u]]$ définie par $\{\sum_{i=0}^{\infty} w_i \frac{u^i}{q(i)!},\ w_i \in W, \lim_{i \to \infty} w_i = 0\}$. On munit S de l'unique opérateur ϕ semi-linéaire par rapport au Frobenius sur

W et continu pour la topologie p-adique tel que $\phi(u^i/q(i)!) = u^{pi}/q(i)!$ et de l'unique dérivation N W-linéaire continue pour la topologie p-adique telle que $N(u^i/q(i)!) = -iu^i/q(i)!$. On a $N\phi = p\phi N$. Pour $r \in \mathbf{N}$, soit $Fil^r S$ la complétion p-adique de l'idéal engendré par les $\gamma_i(E(u)) = E(u)^i/i!$ pour $i \geq r$. On vérifie que $N(Fil^r S) \subset Fil^{r-1} S$ et $\phi(Fil^r S) \subset p^r S$ pour $0 \leq r \leq p-1$. On pose dans ce cas $\phi_r = \dfrac{\phi}{p^r}|_{Fil^r S}$ et on remarque que $\phi_1(E(u)) \in S^*$. On étend par K_0-linéarité (ou semi-linéarité) toutes ces structures à $S_{K_0} = K_0 \otimes_W S$ et on note f_0 (resp. f_π) la surjection K_0-linéaire $S_{K_0} \to K_0$ (resp. $S_{K_0} \to K$) qui envoie $\frac{u^i}{q(i)!}$ sur 0 si $i \geq 1$ (resp. $\frac{u^i}{q(i)!}$ sur $\frac{\pi^i}{q(i)!}$).

Si D est un objet de $\underline{MF}_K(\phi, N)$, on lui associe dans [Br1] un S_{K_0}-module filtré $\mathcal{D}$ avec Frobenius ϕ et monodromie N de la façon suivante : $\mathcal{D} = S_{K_0} \otimes_{K_0} D$, $\phi = \phi_{S_{K_0}} \otimes \phi_D$, $N = N_{S_{K_0}} \otimes Id + Id \otimes N_D$, $Fil^i \mathcal{D} = \mathcal{D}$ si $Fil^i D_K = D_K$ et $Fil^{i+1} \mathcal{D} = \{x \in \mathcal{D} \ / \ N(x) \in Fil^i \mathcal{D}$ et $f_\pi(x) \in Fil^{i+1} D_K\}$. On dit que $\mathcal{D}$ est le S_{K_0}-module associé à D. Un des résultats de [Br1] est que tout S_{K_0}-module libre de type fini $\mathcal{D}$ avec filtration, ϕ et N satisfaisant des propriétés "raisonnables" est le S_{K_0}-module associé à un D de $\underline{MF}_K(\phi, N)$ ([Br1],6.1.1). On renverra à [Br1] lorsque des propriétés de $\mathcal{D}$ et du foncteur $D \mapsto \mathcal{D}$ seront utilisées dans la suite (D et $\mathcal{D}$ étaient respectivement notés M et $\hat{M}$).

Définition 2.1.1. *Soient D un objet positif de $\underline{MF}_K(\phi, N)$ tel que $Fil^{r+1} D_K = 0$ avec $0 \leq r \leq p-2$ et $\mathcal{D}$ son S_{K_0}-module associé. On dit qu'un sous-S-module $\mathcal{M}$ de $\mathcal{D}$ stable par ϕ et N est un module fortement divisible de $\mathcal{D}$ (resp. un pseudo-module fortement divisible) s'il vérifie les quatre conditions :*

- *$\mathcal{M}$ est libre de type fini sur S (resp. est de type fini sur S)*
- *$K_0 \otimes_W \mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}$*
- *$\phi(Fil^r \mathcal{M}) \subset p^r \mathcal{M}$*
- *$(\phi/p^r)(Fil^r \mathcal{M})$ engendre $\mathcal{M}$ sur S.*

Proposition 2.1.2. *Soient D et $\mathcal{D}$ comme en (2.1.1) et supposons qu'il existe un sous-S-module $\mathcal{M}$ de $\mathcal{D}$ vérifiant les conditions suivantes :*
(1) pour une (ou, de façon équivalente, toute) base $(e_1, ..., e_d)$ de $\mathcal{D}$ sur S_{K_0}, il existe des entiers $d \leq c$ tels que $p^c \cdot \oplus_{i=1}^d Se_i \subset \mathcal{M} \subset p^d \cdot \oplus_{i=1}^d Se_i$
(2) $\phi(\mathcal{M} \cap Fil^r \mathcal{D}) \subset p^r \mathcal{M}$
alors $t_H(D) \leq t_N(D)$.

Preuve. — Pour $i \in \{0, ..., r\}$, posons $Fil^i \mathcal{M} = \mathcal{M} \cap Fil^i \mathcal{D}$. Puisque $S/Fil^1 S \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_K$ (par $u \mapsto \pi$), pour tout i entre 0 et $r-1$, $gr^i_{Fil} \mathcal{M} = Fil^i \mathcal{M} / Fil^{i+1} \mathcal{M}$ est un $\mathcal{O}_K$-module de type fini sans p-torsion, donc libre sur $\mathcal{O}_K$. De la condition (1), on déduit $K_0 \otimes_W \mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}$, d'où, pour tout i, $K_0 \otimes_W Fil^i \mathcal{M} \xrightarrow{\sim} Fil^i \mathcal{D}$ et $K_0 \otimes_W gr^i_{Fil} \mathcal{M} \xrightarrow{\sim} gr^i_{Fil} \mathcal{D}$. Donc $gr^i_{Fil} \mathcal{M}$ est un $\mathcal{O}_K$-réseau du K-espace vectoriel de dimension finie $gr^i_{Fil}\mathcal{D}$ et on a :

$$\sum_{i=0}^{r-1} rg_W gr^i_{Fil}\mathcal{M} = \sum_{i=0}^{r-1} dim_{K_0} gr^i_{Fil}\mathcal{D} = e(rd - t_H(D))$$

comme on le voit immédiatement en choisissant sur $\mathcal{D}$ une base adaptée à la filtration ([Br1],A.4). Soit M l'image de $\mathcal{M}$ dans $K_0 \otimes_{S_{K_0},f_0} \mathcal{D} \xrightarrow{\sim} D$ et Fil^iM l'image de $Fil^i\mathcal{M}$, on a des surjections $gr^i_{Fil}\mathcal{M} \to gr^i_{Fil}\mathcal{M}/ugr^i_{Fil}\mathcal{M} \to gr^i_{Fil}M$ d'où $lg_W gr^i_{Fil}M \leq lg_W(gr^i_{Fil}\mathcal{M}/ugr^i_{Fil}\mathcal{M}) = \dfrac{1}{e} rg_W gr^i_{Fil}\mathcal{M}$, donc :

$$lg_W \frac{M}{Fil^rM} = \sum_{i=0}^{r-1} lg_W gr^i_{Fil}M \leq \frac{e}{e}(rd - t_H(D)) = rd - t_H(D).$$

Par ailleurs $\mathcal{M}$ est stable par ϕ, car si $x \in \mathcal{M}$, $E(u)^r x \in Fil^r\mathcal{M}$ et $\phi(x) = \frac{1}{p^r c^r}\phi(E(u)^r x) \in \mathcal{M}$ puisque $\phi(E(u)^r x) \in p^r\mathcal{M}$ et $c^r \in S^*$. Donc M est un W-réseau de D stable par ϕ (rappelons que $K_0 \otimes_{S_{K_0},f_0} \mathcal{D} \simeq D$ en tant que $K_0[\phi]$-module) et la condition (2) entraîne $\phi(Fil^rM) \subset p^rM$. Mais on a :

$$lg_W \frac{M}{Fil^rM} = lg_W \frac{\phi(M)}{\phi(Fil^rM)} = lg_W \frac{M}{\phi(Fil^rM)} - lg_W \frac{M}{\phi(M)}$$

qui donne $lg_W(M/Fil^rM) \geq lg_W(M/p^rM) - t_N(D) = rd - t_N(D)$ par ([La1],1.5), d'où $rd - t_N(D) \leq rd - t_H(D)$ i.e. $t_H(D) \leq t_N(D)$. $\square$

Proposition 2.1.3. *Avec les hypothèses de (2.1.2), supposons de plus $\mathcal{M}$ libre sur S, alors $t_H(D) = t_N(D)$ si et seulement si $\mathcal{M}$ est engendré par $(\phi/p^r)(Fil^r\mathcal{M})$.*

Preuve. — Gardons les notations de la preuve précédente. Posons $\bar{\mathcal{M}} = \mathcal{M}/(Fil^rS\mathcal{M})$ et $\bar{\mathcal{D}} = \mathcal{D}/(Fil^rS_{K_0}\mathcal{D}) = \bar{\mathcal{M}} \otimes_W K_0$. Pour $i \in \mathbf{N}$, soit $Fil^i\bar{\mathcal{D}}$ l'image de $Fil^i\mathcal{D}$ dans $\bar{\mathcal{D}}$ et $Fil^i\bar{\mathcal{M}} = \bar{\mathcal{M}} \cap Fil^i\bar{\mathcal{D}}$. On pose également $\bar{M} = \mathcal{M}/(Fil^rS\mathcal{M} + I\mathcal{M})$ où I est le noyau de $f_0|_S$ et $Fil^i\bar{M}$ l'image de $Fil^i\bar{\mathcal{M}}$ dans $\bar{M}$. Comme $gr^i_{Fil}\bar{\mathcal{M}}$ est un $\mathcal{O}_K$-réseau de $gr^i_{Fil}\bar{\mathcal{D}}$ et que la flèche $gr^i_{Fil}\bar{\mathcal{M}} \to gr^i_{Fil}\bar{M}$ se factorise par $gr^i_{Fil}\bar{\mathcal{M}}/ugr^i_{Fil}\bar{\mathcal{M}}$, on a pour $i \in \mathbf{N}$:

$$edim_k gr^i_{Fil}\bar{M} \leq rg_W gr^i_{Fil}\bar{\mathcal{M}} = dim_{K_0} gr^i_{Fil}\bar{\mathcal{D}} \qquad (*)$$

Pour $i >> 0$, $Fil^rS_{K_0}\mathcal{D} \subset Fil^i\mathcal{D}$, donc $Fil^i\bar{\mathcal{D}} = 0 = Fil^i\bar{M}$ et $\sum_{i\geq 0} dim_k gr^i_{Fil}\bar{M} = lg_W\bar{M}$, $\sum_{i\geq 0} dim_{K_0} gr^i_{Fil}\bar{\mathcal{D}} = dim_{K_0}\bar{\mathcal{D}} = erd$. Puisque $\mathcal{M}$ est libre sur S, $\bar{M}$ est libre de rang d sur $W/p^rW \simeq S/(Fil^rS + IS)$, donc $lg_W\bar{M} = rd$. On en déduit $\sum_{i\geq 0} edim_k gr^i_{Fil}\bar{M} = \sum_{i\geq 0} dim_{K_0} gr^i_{Fil}\bar{\mathcal{D}}$, d'où par $(*)$ $edim_k gr^i_{Fil}\bar{M} = dim_{K_0} gr^i_{Fil}\bar{\mathcal{D}}$ pour $i \in \mathbf{N}$. Mais, pour $0 \leq i \leq r-1$, $gr^i_{Fil}\mathcal{M} = gr^i_{Fil}\bar{\mathcal{M}}$ et $Fil^i\bar{\mathcal{M}}$ s'identifie à l'image de $Fil^i\mathcal{M}$ dans $\bar{\mathcal{M}}$ i.e. la flèche $gr^i_{Fil}M \to gr^i_{Fil}\bar{M}$ est surjective. On déduit de tout cela (toujours pour $0 \leq i \leq r-1$) :

$$\frac{1}{e} dim_{K_0} gr^i_{Fil}\mathcal{D} = dim_k gr^i_{Fil}\bar{M} \leq lg_W gr^i_{Fil}M \leq \frac{1}{e} rg_W gr^i_{Fil}\mathcal{M} = \frac{1}{e} dim_{K_0} gr^i_{Fil}\mathcal{D}$$

(pour la deuxième inégalité, voir la preuve précédente), d'où :

$$lg_W \frac{M}{Fil^r M} = \sum_{i=0}^{r-1} lg_W gr^i_{Fil} M = \frac{1}{e} \sum_{i=0}^{r-1} dim_{K_0} gr^i_{Fil} \mathcal{D} = rd - t_H(D).$$

Par ailleurs (c.f. preuve précédente) :

$$lg_W \frac{M}{Fil^r M} \geq lg_W \frac{M}{p^r M} - t_N(D) = rd - t_N(D).$$

On en déduit $t_H(D) = t_N(D)$ si et seulement si $lg_W(M/\phi(Fil^r M)) = lg_W(M/p^r M)$ i.e. si et seulement si $\phi(Fil^r M) = p^r M$, d'où le résultat puisque $\mathcal{M}$ est libre. $\square$

Corollaire 2.1.4. *Soit D un objet positif de $\underline{MF}_K(\phi, N)$ tel que $Fil^{r+1} D_K = 0$ avec $0 \leq r \leq p-2$ et supposons qu'il existe un module fortement divisible dans son S_{K_0}-module associé, alors D est faiblement admissible.*

Preuve. — Par (2.1.3), on a $t_H(D) = t_N(D)$. Soit $D' \subset D$ un sous-K_0-espace vectoriel de D stable par ϕ et N. On pose $Fil^i D'_K = D'_K \cap Fil^i D_K$ $(i \in \mathbf{N})$: il s'agit de montrer $t_H(D') \leq t_N(D')$. Soit $\mathcal{D}'$ le S_{K_0}-module associé à D' : c'est un facteur direct de $\mathcal{D}$ stable par ϕ et N tel que $Fil^i \mathcal{D}' = \mathcal{D}' \cap Fil^i \mathcal{D}$ (3.1.1). Soit $\mathcal{M}' = \mathcal{M} \cap \mathcal{D}'$ et $Fil^r \mathcal{M}' = \mathcal{M}' \cap Fil^r \mathcal{D}'$, on a donc $\phi(Fil^r \mathcal{M}') \subset p^r \mathcal{M}'$: par (2.1.2) appliqué à D' et $\mathcal{M}'$, on a $t_H(D') \leq t_N(D')$. $\square$

2.2. **Rappels et compléments sur la théorie de [Br2].** On généralise les catégories introduites dans [Br2] et [Br3]. Bien que ces catégories dépendent à priori de π, on ne le figure pas dans la notation, pour alléger le texte.

2.2.1. *Rappels sur les catégories $\underline{\mathcal{M}}^r$.* On pose $S_n = S/p^n S$, $c = \phi_1(E(u)) \in S^*$ et on fixe $r \in \{0, ..., p-2\}$. Soit $'\underline{\mathcal{M}}^r$ la catégorie suivante : les objets sont la donnée :

– d'un S-module $\mathcal{M}$
– d'un sous-S-module $Fil^r \mathcal{M}$ de $\mathcal{M}$ contenant $Fil^r S \cdot \mathcal{M}$
– d'une flèche ϕ-semi-linéaire $\phi_r : Fil^r \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ telle que pour tout $s \in Fil^r S$ et $x \in \mathcal{M}$, $\phi_r(sx) = \phi_r(s)\phi(x)$ où $\phi(x) = \frac{1}{c^r}\phi_r(E(u)^r x)$
– d'une application W-linéaire $N : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ telle que :
 (1) si $s \in S$ et $x \in \mathcal{M}$, $N(sx) = N(s)x + sN(x)$
 (2) $E(u)N(Fil^r \mathcal{M}) \subset Fil^r \mathcal{M}$
 (3) le diagramme suivant est commutatif : $\begin{array}{ccc} Fil^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \\ {\scriptstyle E(u)N} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle cN} \\ Fil^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \end{array}$

On note $'\underline{\mathcal{M}}^r_0$ la catégorie obtenue en oubliant l'opérateur N dans la définition de $'\underline{\mathcal{M}}^r$. Les flèches sont les morphismes S-linéaires qui préservent Fil^r et commutent à ϕ_r et N. Les catégories $'\underline{\mathcal{M}}^r$ et $'\underline{\mathcal{M}}^r_0$ sont munies d'une notion de suite exacte courte : $0 \to \mathcal{M}' \to \mathcal{M} \to \mathcal{M}'' \to 0$ est une suite exacte si les deux suites de

S-modules $0 \to \mathcal{M}' \to \mathcal{M} \to \mathcal{M}'' \to 0$ et $0 \to Fil^r\mathcal{M}' \to Fil^r\mathcal{M} \to Fil^r\mathcal{M}'' \to 0$ sont exactes. On note $\underline{\mathcal{M}}^r$ (resp. $\underline{\mathcal{M}}_0^r$) la sous-catégorie pleine de $'\underline{\mathcal{M}}^r$ (resp. $'\underline{\mathcal{M}}_0^r$) formée des objets $\mathcal{M}$ qui vérifient les deux conditions supplémentaires :

– le S-module $\mathcal{M}$ est de la forme $\mathcal{M} \simeq \bigoplus_{i\in I} S_{n_i}$ pour I fini et $n_i \in \mathbf{N}^*$

– $\phi_r(Fil^r\mathcal{M})$ engendre $\mathcal{M}$ sur S.

Remarque 2.2.1.1. On peut montrer que lorsque $er \leq p-2$ les catégories $\underline{\mathcal{M}}^r$ et $\underline{\mathcal{M}}_0^r$ sont abélienne et stables par extension dans $'\underline{\mathcal{M}}^r$ (ou $'\underline{\mathcal{M}}_0^r$). Voir ([Br2],2) pour le cas $e = 1$ et ([Br3],2.2) pour le cas $r = 1$.

Remarque 2.2.1.2. Si $\mathcal{M}$ est un S-module fortement divisible (2.1.1), pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ $\mathcal{M}/p^n\mathcal{M}$ est muni d'une structure d'objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ en posant :
$Fil^r(\mathcal{M}/p^n\mathcal{M}) = Fil^r\mathcal{M}/p^nFil^r\mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{M}/p^n\mathcal{M}$ avec les ϕ_r et N induits.

Les objets annulés par p dans $\underline{\mathcal{M}}^r$ et $\underline{\mathcal{M}}_0^r$ sont en particulier des S_1-modules libres de type fini. On peut préciser leur structure :

Proposition 2.2.1.3. *Soit $\mathcal{M}$ un objet de $\underline{\mathcal{M}}_0^r$ libre de rang d sur S_1. Il existe une base $(e_1, ..., e_d)$ de $\mathcal{M}$ et des entiers $(r_1, ..., r_d)$ dans $\{0, ..., er\}$ tels que $Fil^r\mathcal{M} = (\oplus_{i=1}^d u^{r_i}e_i) + Fil^pS_1\mathcal{M}$.*

Preuve. — Elle est similaire à la preuve de ([Br3],2.2.2.5), une fois étendus au cas $0 \leq r \leq p-2$ les résultats de ([Br3],2.2.2.1), ([Br3],2.2.2.2) et ([Br3],2.2.2.3) concernant $\underline{\mathcal{M}}_0^1$, ce qui est évident. □

Définition 2.2.1.4. *On appelle base adaptée d'un objet $\mathcal{M}$ de $\underline{\mathcal{M}}_0^r$ (resp. $\underline{\mathcal{M}}^r$) toute base de $\mathcal{M}$ satisfaisant la condition de (2.2.1.3).*

Remarque 2.2.1.5. Pour $r = 1$, on peut montrer qu'on a un foncteur pleinement fidèle $\underline{\mathcal{M}}_0^1 \hookrightarrow \underline{\mathcal{M}}^1$. Cela signifie que tout objet de $\underline{\mathcal{M}}_0^1$ peut être muni de façon canonique d'un opérateur N satisfaisant les propriétés (1), (2) et (3) précédentes (c'est la propriété (2) la plus contraignante en général, elle est vide pour $r = 1$!). En fait, la catégorie $\underline{\mathcal{M}}_0^1$ correspond à une sous-catégorie pleine de la catégorie des schémas en groupes finis plats et annulés par une puissance de p sur $\mathcal{O}_K$ ([Br3],4.2.2.5) et la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^1$ devrait correspondre à des "log-schémas en groupes". Evidemment, ce foncteur n'existe plus lorsque $r \geq 2$.

2.2.2. *Rappels sur $\widehat{A_{st}}$ et sur V_{st}^*.* On rappelle brièvement la construction des anneaux A_{cris}, $\widehat{A_{st}}$ et le foncteur V_{st}^* pour le choix de l'uniformisante π. Pour des preuves et plus de détails, le lecteur pourra se reporter à [Fo1], ([Br1],2) et ([Br2],3.1).

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, soit $W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}})$ l'anneau des vecteurs de Witt de longueur n associé à $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$ et $W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}})[X]$ l'anneau des polynômes en l'indéterminée

X. On le munit d'une structure de $W_n(k)$-algèbre en tordant la structure naturelle par $Frob^{-n}$ sur k, de sorte que le morphisme canonique :

$$\begin{array}{cccc} \widehat{\theta_n}: & W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}})[X] & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\bar{K}}/p^n\mathcal{O}_{\bar{K}} \\ & (a_0, ..., a_{n-1}) & \mapsto & \widehat{a_0}^{p^n} + p\widehat{a_1}^{p^{n-1}} + ... + p^{n-1}\widehat{a_{n-1}}^{p} \\ & X & \mapsto & 0 \end{array}$$

où les $\widehat{a_i}$ sont des relevés quelconques des a_i dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p^n\mathcal{O}_{\bar{K}}$ est un morphisme de W_n-algèbres. Si $W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}})^{DP}$ est l'enveloppe aux puissances divisées de $W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}})$ par rapport au noyau de la restriction de $\widehat{\theta_n}$ compatible avec les puissances divisées canoniques sur $pW_n(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}})$, l'enveloppe aux puissances divisées (compatible) de $W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}})[X]$ par rapport au noyau de $\widehat{\theta_n}$ s'identifie à $W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}})^{DP}\!<\!X\!>$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a une surjection canonique :

$$\begin{array}{cccc} \widehat{f_n}: & W_{n+1}(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}})^{DP}\!<\!X\!> & \longrightarrow & W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}})^{DP}\!<\!X\!> \\ & \gamma_i((a_0, ..., a_n))\gamma_j(X) & \mapsto & \gamma_i((a_0^p, ..., a_{n-1}^p))\gamma_j(X) \end{array}$$

qui donne lieu à un système projectif de W-algèbres. On note :

$$A_{cris} = \varprojlim_n W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}})^{DP} \text{ et } \widehat{A_{st}} = \varprojlim_n (W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}})^{DP}\!<\!X\!>).$$

$\widehat{A_{st}}$ est donc le complété p-adique de la P.D. algèbre polynomiale $A_{cris} < X >$. On munit $\widehat{A_{st}}$ d'une action de G_K, d'un Frobenius ϕ, d'un opérateur de monodromie N et d'une filtration positive $Fil^{\cdot}$ de la façon suivante. Soit $(\pi_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ un système compatible de racines $p^{n^{i\grave{e}mes}}$ de π dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ et $\underline{\pi}$ l'élément associé dans A_{cris} à partir des représentants de Teichmüller $[\bar{\pi}_n]$ dans $W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}})$. Pour tout $g \in G_K$, on a $g(\pi_n) = \epsilon_n(g)\pi_n$ où $(\epsilon_n(g))_{n\in\mathbf{N}^*}$ est un système compatible de racines $p^{n^{i\grave{e}mes}}$ de l'unité dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$. On note de même $\underline{\epsilon}(g)$ l'élément associé dans A_{cris}. Sur $W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}})$, on a une action de Galois donnée par $g((a_0, ..., a_{n-1})) = (g(a_0), ..., g(a_{n-1}))$, qui s'étend de manière évidente à $W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}})^{DP}$ puis à A_{cris}, puis à $\widehat{A_{st}}$ en posant $g(X) = \underline{\epsilon}(g)X + \underline{\epsilon}(g) - 1$ (l'action est alors continue pour la topologie p-adique). Le Frobenius ϕ défini sur $W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}})$ s'étend à $W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}})^{DP}$ car $\phi(ker\widehat{\theta_n} \cap W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}})) \subset ker\widehat{\theta_n} \cap W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}) + pW_n(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}})$. On l'étend à A_{cris} puis à $\widehat{A_{st}}$ en posant $\phi(X) = (1 + X)^p - 1$. Sur $\widehat{A_{st}}$, on définit un opérateur de monodromie comme l'unique dérivation A_{cris}-linéaire N telle que $N(X) = 1+X$. Soit $\widehat{I_n}$ le noyau de $\widehat{\theta_n}$ et $\widehat{I_n}^{[i]}$ la $i^{i\grave{e}me}$ puissance divisée de $\widehat{I_n}$, on définit $Fil^i\widehat{A_{st}} = \varprojlim_n \widehat{I_n}^{[i]}$ et $Fil^iA_{cris} = A_{cris} \cap Fil^i\widehat{A_{st}}$. Puisque $\widehat{\theta_n}(X) = 0$ on a :

$$Fil^i\widehat{A_{st}} = \Big\{ \sum_{j=0}^{\infty} a_j\gamma_j(X),\ a_j \in A_{cris},\ \lim_{j\to\infty} a_j = 0,\ a_j \in Fil^{i-j}A_{cris}, 0 \le j \le i \Big\}.$$

On a $N\phi = p\phi N$, $N(Fil^i\widehat{A_{st}}) \subset Fil^{i-1}\widehat{A_{st}}$ ($i \in \mathbf{N}$) et $\phi(Fil^i\widehat{A_{st}}) \subset p^i\widehat{A_{st}}$ ($0 \le i \le p-1$). On peut montrer que cette construction est indépendante du système de racines $(\pi_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de π choisi. On pose $B^+_{cris} = A_{cris}[1/p]$ et $\widehat{B^+_{st}} = \widehat{A_{st}}[1/p]$ auxquels on étend les structures précédentes par K_0-linéarité (ou semi-linéarité). On a un morphisme d'algèbres B^+_{cris}-linéaire compatible à l'action de G_K et aux filtrations $f_\pi : \widehat{B^+_{st}} \to B^+_{dR}$ tel que $f_\pi(X) = (\underline{\pi}/\pi)-1$. Soit $T = Log(1+X) \in \widehat{A_{st}}$, on définit $B^+_{st} = B^+_{cris}[T] \hookrightarrow \widehat{B^+_{st}}$ et $B^+_{st,K} = K \otimes_{K_0} B^+_{st}$. On munit B^+_{st} des opérateurs ϕ et N induits (qui le laissent stable). L'application f_π induit une application $Id \otimes f_\pi : B^+_{st,K} \to B^+_{dR}$ et on pose $Fil^i B^+_{st,K} = (Id \otimes f_\pi)^{-1}(Fil^i B^+_{dR})$. En particulier, *on n'a plus* $(Id \otimes N)(Fil^i B^+_{st,K}) \subset Fil^{i-1} B^+_{st,K}$. Alternativement, B^+_{st} s'identifie aux éléments de $\widehat{B^+_{st}}$ annulés par une puissance de N ([Br1],7.1). Enfin, on a un isomorphisme compatible à toutes les structures $S \xrightarrow{\sim} \widehat{A_{st}}^{G_K}$ donné par $u \mapsto \underline{\pi}(1+X)^{-1}$ ([Br1],4.2).

Soit $\widehat{A_{st,\infty}} = \widehat{A_{st}} \otimes_W K_0/W$, c'est un objet de $'\underline{\mathcal{M}}^r$ pour $r \in \{0, ..., p-2\}$ (en posant $Fil^r \widehat{A_{st,\infty}} = (Fil^r \widehat{A_{st}}) \otimes_W K_0/W$ et $\phi_r = (\phi/p^r)|_{Fil^r}$). On associe à tout $\mathcal{M}$ de $\underline{\mathcal{M}}^r$ une représentation linéaire de G_K définie par $V^*_{st}(\mathcal{M}) = Hom_{'\underline{\mathcal{M}}^r}(\mathcal{M}, \widehat{A_{st,\infty}})$ avec $g(f)(x) = g(f(x))$ si $f \in Hom_{'\underline{\mathcal{M}}^r}(\mathcal{M}, \widehat{A_{st,\infty}})$. Les représentations obtenues sont par construction tuées par la puissance de p qui annule $\mathcal{M}$. Dans la suite, on note aussi $A_{cris,\infty} = A_{cris} \otimes_W K_0/W$ muni des structures induites par $\widehat{A_{st,\infty}}$. On en fait une S-algèbre par $u(x \otimes \frac{1}{p^m}) = \underline{\pi} x \otimes \frac{1}{p^m}$: c'est alors un objet de $'\underline{\mathcal{M}}^r_0$ ($r \in \{0, ..., p-2\}$).

2.3. **Modules fortement divisibles et admissibilité.** On montre que l'existence de modules fortement divisibles entraîne en fait l'admissibilité. Le cas $e = 1$ est dans ([Br2],4.2.1) mais la preuve donnée ici est différente. Les techniques utilisées (à part pour la proposition (2.3.2.2) due à Fontaine) sont maintenant standard ([Br2],[Br3],[Wa]) et nous n'insistons pas sur les détails.

2.3.1. *Quelques lemmes.*

Lemme 2.3.1.1. *Soit $\mathcal{M}$ dans $\underline{\mathcal{M}}^r$, alors la flèche A_{cris}-linéaire :*

$$\widehat{A_{st,\infty}} \to A_{cris,\infty},\ \gamma_i(X) \mapsto 0 \quad (i \geq 1)$$

induit un isomorphisme de $\mathbf{Z}_p$-modules :

$$Hom_{'\underline{\mathcal{M}}^r}(\mathcal{M}, \widehat{A_{st,\infty}}) \xrightarrow{\sim} Hom_{'\underline{\mathcal{M}}^r_0}(\mathcal{M}, A_{cris,\infty}).$$

Preuve. — Soit $f \in Hom_{'\underline{\mathcal{M}}^r}(\mathcal{M}, \widehat{A_{st,\infty}})$ et f_0 son image. Soit $x \in \mathcal{M}$ tel que $N^i(x) = 0$ pour $i >> 0$ (par exemple $x \in \phi_r(Fil^r \mathcal{M})$), on vérifie que $f(x) = \sum_{i\geq 0} f_0(N^i(x))\gamma_i(Log(1+X))$. Si $f_0 = 0$, on en déduit $f(x) = 0$ pour

$x \in \phi_r(Fil^r\mathcal{M})$, donc $f = 0$ puisque $\mathcal{M}$ est engendré par de tels x. Soit $f_0 \in Hom_{'\underline{\mathcal{M}}_0^r}(\mathcal{M}, A_{cris,\infty})$. Pour tout $x \in \mathcal{M}$ et tout $n \in \mathbf{N}$, posons :

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_0(N^i(x))\gamma_i(Log(1+X)).$$

On vérifie que f_n est W-linéaire, respecte Fil^r, commute avec ϕ_r et satisfaît $N(f_n(x)) = f_{n-1}(N(x))$. Je dis qu'il existe un unique élément $f(x) \in \widehat{A_{st,\infty}}$ tel que $f_n(x) - f(x) \in Fil^n\widehat{A_{st,\infty}}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. L'unicité vient de $\cap_{n\in\mathbf{N}} Fil^n\widehat{A_{st,\infty}} = 0$. L'existence vient du fait que, si $s \in S$ et $x \in \mathcal{M}$, on a $f_n(sx) - sf_n(x) \in Fil^n\widehat{A_{st,\infty}}$, donc, si $x = \sum s_j e_j$ où $e_j \in \phi_r(Fil^r\mathcal{M})$, l'élément $\sum s_j f_n(e_j)$ est constant pour $n >> 0$ (car $N^i(e_j) = 0$ pour $i >> 0$) et vérifie $f_n(x) - \sum s_j f_n(e_j) \in Fil^n\widehat{A_{st,\infty}}$, $\forall\ n \in \mathbf{N}$. Soit $f : x \mapsto f(x)$, f respecte clairement Fil^r et, de l'unicité de $f(x)$, on déduit que f est S-linéaire et commute à N. Enfin, soit m tel que $p^m\mathcal{M} = 0$, comme $\phi_r(Fil^n\widehat{A_{st}}/p^m Fil^n\widehat{A_{st}}) = 0$ pour $n >> 0$ (du moins si $p \geq 3$, mais pour $p = 2$, la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^0$ est équivalente à la catégorie de Fontaine-Laffaille $\underline{MF}_{tor}^{f,0}$ où $N = 0$), on a $\phi_r(f(x)) = \phi_r(f_n(x)) = f_n(\phi_r(x))$ si $x \in Fil^r\mathcal{M}$, d'où $\phi_r(f(x)) - f(\phi_r(x)) \in \cap_{n\in\mathbf{N}} Fil^n\widehat{A_{st,\infty}} = 0$. $\square$

Lemme 2.3.1.2. *Soit $\mathcal{M}$ dans $\underline{\mathcal{M}}^r$ annulé par p, alors $dim_{\mathbf{F}_p} V_{st}^*(\mathcal{M}) = rg_{S_1}\mathcal{M}$.*

Preuve. — Par (2.3.1.1), il suffit de calculer $dim_{\mathbf{F}_p} Hom_{'\underline{\mathcal{M}}_0^r}(\mathcal{M}, A_{cris}/pA_{cris})$. Soient $(e_1, ..., e_d)$ une base adaptée de $\mathcal{M}$ (2.2.1.3), $(r_1, ..., r_d)$ les entiers entre 0 et er tels que $u^{r_i}e_i \in Fil^r\mathcal{M}$ et $\mathcal{G}(u)$ l'unique matrice de $GL_d(S_1)$ telle que :

$$\begin{pmatrix} \phi_r(u^{r_1}e_1) \\ \vdots \\ \phi_r(u^{r_d}e_d) \end{pmatrix} = \mathcal{G}(u) \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_d \end{pmatrix}.$$

On est amené à résoudre dans $(A_{cris}/pA_{cris})^d$ le système :

$$\begin{pmatrix} \phi_r(\underline{\pi}^{r_1}x_1) \\ \vdots \\ \phi_r(\underline{\pi}^{r_d}x_d) \end{pmatrix} = \mathcal{G}(\underline{\pi}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$$

où $x_i \in \underline{\pi}^{er-r_i}(A_{cris}/pA_{cris}) + Fil^p(A_{cris}/pA_{cris})$. On sait bien qu'un tel système a p^d solutions (voir la fin de la preuve de ([Br2],3.2.2.1) ou ([Wa],2.3.2.2)). $\square$

Lemme 2.3.1.3. *Soit $\mathcal{M}$ dans $\underline{\mathcal{M}}_0^r$, alors $Ext^1_{'\underline{\mathcal{M}}_0^r}(\mathcal{M}, A_{cris,\infty}) = 0$.*

Preuve. — Par dévissage comme en ([Br3],4.1.1), on se ramène au cas où $p\mathcal{M} = 0$. Par le même argument qu'en ([Br2],3.2.2.1), il suffit de montrer que toute extension $0 \to A_{cris}/pA_{cris} \to \mathcal{E} \to \mathcal{M} \to 0$ dans $'\underline{\mathcal{M}}_0^r$ avec $p\mathcal{E} = 0$ est scindée. Avec les notations de la preuve précédente, soient $\hat{e}_i$ des relevés des e_i dans $\mathcal{E}$ et $\delta_i \in A_{cris}/pA_{cris}$ tels que $u^{r_i}\hat{e}_i + \delta_i \in Fil^r\mathcal{E}$. Comme $u^{er}\mathcal{E} \subset Fil^r\mathcal{E}$, on a $u^{er-r_i}\delta_i \in Fil^r(A_{cris}/pA_{cris})$. On en déduit (c.f. ([Br2],3.1.2.2) par exemple) des ϵ_i dans A_{cris}/pA_{cris} tels que $\delta_i - \underline{\pi}^{r_i}\epsilon_i \in Fil^p(A_{cris}/pA_{cris})$. Quitte à remplacer $\hat{e}_i$

par $\hat{e}_i + \epsilon_i$, on peut supposer $u^{r_i}\hat{e}_i \in Fil^r\mathcal{E}$. Pour construire une section $e_i \mapsto \hat{e}_i$ dans $'\underline{\mathcal{M}}_0^r$, il faut alors modifier les $\hat{e}_i$ par des ζ_i solution du système :

$$\begin{pmatrix} \phi_r(\underline{\pi}^{r_1}\zeta_1) \\ \vdots \\ \phi_r(\underline{\pi}^{r_d}\zeta_d) \end{pmatrix} = \mathcal{G}(\underline{\pi}) \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

avec $\zeta_i \in \underline{\pi}^{er-r_i}(A_{cris}/pA_{cris}) + Fil^p(A_{cris}/pA_{cris})$ et où :

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_r(u^{r_1}\hat{e_1}) \\ \vdots \\ \phi_r(u^{r_d}\hat{e_d}) \end{pmatrix} - \mathcal{G}(u) \begin{pmatrix} \hat{e_1} \\ \vdots \\ \hat{e_d} \end{pmatrix} \in (A_{cris}/pA_{cris})^d.$$

Les solutions d'un tel système forment un espace affine de dimension d sur $\mathbf{F}_p$ (([Br1],3.2.2.1), ([Wa],2.3.2.2)). En particulier, il en existe. $\square$

2.3.2. *Construction de représentations semi-stables.* Si D est un objet positif de $\underline{MF}_K(\phi, N)$ et $\mathcal{D}$ son S_{K_0}-module associé (2.1), on note encore $V_{st}^*(D)$ (resp. $V_{st}^*(\mathcal{D})$) le $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel des applications K_0-linéaires (resp. S_{K_0}-linéaires) de D (resp. $\mathcal{D}$) dans B_{st}^+ (resp. $\widehat{B_{st}^+}$) qui commutent à ϕ et N et préservent la filtration après extension des scalaires à K (resp. qui commutent à ϕ et N et préservent la filtration). Comme d'habitude, $V_{st}^*(D)$ et $V_{st}^*(\mathcal{D})$ sont munis d'une action linéaire continue de G_K.

Proposition 2.3.2.1. *Soit D un objet positif de $\underline{MF}_K(\phi, N)$ et $\mathcal{D}$ son S_{K_0}-module associé, alors on a un isomorphisme canonique de représentations galoisiennes : $V_{st}^*(\mathcal{D}) \xrightarrow{\sim} V_{st}^*(D)$.*

Preuve. — C'est la même qu'en ([Br2],4.1.1.2) où le fait d'avoir un module fortement divisible ne jouait aucun rôle. $\square$

On rappelle qu'un objet positif D de $\underline{MF}_K^{fa}(\phi, N)$ est dit admissible s'il existe une représentation p-adique semi-stable V ([Fo2],5.1.4) à poids de Hodge-Tate négatifs ou nuls telle que $(B_{st}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K} \simeq D$ dans $\underline{MF}_K(\phi, N)$ ([Fo2],5.3.3).

Proposition 2.3.2.2. *(Fontaine) Soit D un objet positif de $\underline{MF}_K(\phi, N)$ qui est un quotient (dans $\underline{MF}_K(\phi, N)$) d'un objet de $\underline{MF}_K^{fa}(\phi, N)$, alors :*

$$dim_{\mathbf{Q}_p} V_{st}^*(D) \leq dim_{K_0} D.$$

Preuve. — Soient $d = dim_{K_0} D$, $V = V_{st}^*(D)$, $C_{st} = Frac(B_{st}^+)$ et r la dimension du sous-C_{st}-espace vectoriel engendré par V dans $Hom_{K_0}(D, C_{st})$ (homomorphismes K_0-linéaires). On a $r \leq d$. Soit W le $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel image de l'homomorphisme "déterminant" $\Lambda_{\mathbf{Q}_p}^r V \to V_{st}^*(\Lambda_{K_0}^r D)$: W engendre un sous-C_{st}-espace vectoriel de dimension 1 de $Hom_{K_0}(\Lambda_{K_0}^r D, C_{st})$ stable par G_K. Soit $\eta \in W \setminus \{0\}$, $\eta : \Lambda_{K_0}^r D \to B_{st}^+$ et $D'' = \Lambda_{K_0}^r D / Ker(\eta)$: la flèche induite $\bar{\eta} : D'' \to B_{st}^+$ est injective et $W \subset V_{st}^*(D'')$. Pour $g \in G_K$, notons $g(\bar{\eta}) = c(g)\bar{\eta}$, $c(g) \in C_{st}$. Si $d_1, ..., d_m$

est une base de D'' sur K_0 et $x_i = \overline{\eta}(d_i) \in B_{st}^+$, on a $g(x_i/x_1) = x_i/x_1$ dans C_{st} pour tout $g \in G_K$, d'où $x_i/x_1 \in C_{st}^{G_K} = K_0$ (utiliser $K \otimes_{K_0} B_{st}^+ \hookrightarrow B_{dR}^+$ ([Fo1],4.2.4) et $(B_{dR}^+)^{G_K} = K$ ([Fo1],1.5.7)). L'injectivité de $\overline{\eta}$ entraîne donc que les d_i sont proportionnels sur K_0, i.e. $dim_{K_0}D'' = 1$. Or D'' est un quotient de $\otimes_{K_0}^r D$ qui est un quotient d'un objet de $\underline{MF}_K^{fa}(\phi, N)$ par ([Fa2],[To]) et l'hypothèse, donc $t_N(D'') \leq t_H(D'')$. Ceci entraîne $dim_{\mathbf{Q}_p}V_{st}^*(D'') \leq 1$ (considérer $D''' = D''$ mais avec $Fil^{t_N(D'')}D''' = D'''$, $Fil^{t_N(D'')+1}D''' = 0$ et utiliser $dim_{\mathbf{Q}_p}V_{st}^*(D''') = 1$). Comme $W \neq 0$, $W = V_{st}^*(D'')$ et $dim_{\mathbf{Q}_p}W = 1$. Soient $v_1, ..., v_r$ dans V tels que l'image de $v_1 \wedge ... \wedge v_r$ dans W est non nulle. Les (v_i) sont alors une base du C_{st}-espace vectoriel engendré par V et tout $v \in V$ s'écrit $v = \sum_i \lambda_i v_i$ avec $\lambda_i \in C_{st}$. Si l'un des λ_i est non nul, disons λ_r, $v_1 \wedge ... \wedge v_{r-1} \wedge v = \lambda_r v_1 \wedge ... \wedge v_r$ dans W, donc $\lambda_r \in \mathbf{Q}_p$, donc $dim_{\mathbf{Q}_p}V = r \leq d$. $\square$

Corollaire 2.3.2.3. *Soit D un objet positif de $\underline{MF}_K^{fa}(\phi, N)$ tel que $dim_{\mathbf{Q}_p}V_{st}^*(D) = dim_{K_0}D$, alors D est admissible.*

Preuve. — On voit facilement ([Fo2],1.8.2) qu'il suffit de montrer l'injectivité de la flèche canonique $D \to Hom_{G_K}(V_{st}^*(D), B_{st}^+)$. Soit D' son noyau et $D'' = D/D'$: on a $dim_{\mathbf{Q}_p}V_{st}^*(D'') = dim_{K_0}D \geq dim_{K_0}D''$. Mais $dim_{\mathbf{Q}_p}V_{st}^*(D'') \leq dim_{K_0}D''$ par (2.3.2.2) appliqué à D'', d'où le résultat. $\square$

On remarquera que les deux propositions et le corollaire précédents sont valables sans restriction sur la longueur de la filtration.

Proposition 2.3.2.4. *Soit D un objet positif de $\underline{MF}_K(\phi, N)$ tel que $Fil^{r+1}D_K = 0$ avec $0 \leq r \leq p-2$ et supposons qu'il existe un module fortement divisible dans son S_{K_0}-module associé, alors $dim_{\mathbf{Q}_p}V_{st}^*(D) = dim_{K_0}D$.*

Preuve. — Soit $\mathcal{M}$ un module fortement divisible et $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}/p^n\mathcal{M}$ muni de sa structure d'objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ (2.2.1.2). De (2.3.1.3) et (2.3.1.1), on déduit des suites exactes : $0 \to V_{st}^*(\mathcal{M}_1) \to V_{st}^*(\mathcal{M}_n) \to V_{st}^*(\mathcal{M}_{n-1}) \to 0$ (voir les discussions en ([Br2],3.2.2) et ([Br3],4.1.1)), donc, par (2.3.1.2) et (2.3.1.1), $V_{st}^*(\mathcal{M}_n)$ est un $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$-module libre de rang $dim_{K_0}D$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. Comme :

$$V_{st}^*(\mathcal{D}) = \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} Hom_{'\underline{\mathcal{M}}^r}(\mathcal{M} \otimes \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p, \widehat{A_{st,\infty}}) = \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} (\varprojlim_n V_{st}^*(\mathcal{M}_n))$$

on en déduit le résultat par (2.3.2.1). $\square$

En combinant (2.1.4), (2.3.2.4) et (2.3.2.3), on obtient :

Théorème 2.3.2.5. *Soit D un objet positif de $\underline{MF}_K(\phi, N)$ tel que $Fil^{r+1}D_K = 0$ avec $0 \leq r \leq p-2$ et supposons qu'il existe un module fortement divisible dans son S_{K_0}-module associé, alors D est admissible.*

3. Construction de modules fortement divisibles

On construit sans restriction sur e des pseudo-modules fortement divisibles (2.1.1). Lorsque $er \leq p-2$, on montre que ces pseudo-modules fortement divisibles sont en fait des modules fortement divisibles, i.e. que la liberté est alors automatique.

3.1. **Restriction au cas simple ($e \in \mathbf{N}^*$, $r < p-1$).** Rappelons qu'un diagramme $0 \to D' \to D \to D'' \to 0$ dans $\underline{MF}_K(\phi, N)$ est une suite exacte si, pour tout $r \in \mathbf{Z}$, on a une suite exacte de K-espaces vectoriels $0 \to Fil^r D'_K \to Fil^r D_K \to Fil^r D''_K \to 0$.

Lemme 3.1.1. *Soit $0 \to D' \to D \to D'' \to 0$ une suite exacte dans $\underline{MF}_K(\phi, N)$ et soient $\mathcal{D}'$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}''$ les S_{K_0}-modules associés respectivement à D', D et D'' (2.1), alors, pour tout $r \in \mathbf{Z}$, on a des suites exactes de S_{K_0}-modules : $0 \to Fil^r\mathcal{D}' \to Fil^r\mathcal{D} \to Fil^r\mathcal{D}'' \to 0$.*

Preuve. — Montrons par récurrence que $Fil^r\mathcal{D}' = \mathcal{D}' \cap Fil^r\mathcal{D}$. C'est vrai pour $r << 0$. Supposons le en $r-1$ et soit $x \in \mathcal{D}' \cap Fil^r\mathcal{D}$, on a $N(x) \in \mathcal{D}' \cap Fil^{r-1}\mathcal{D} = Fil^{r-1}\mathcal{D}'$ et $f_\pi(x) \in D'_K \cap Fil^r D_K = Fil^r D'_K$, d'où $x \in Fil^r\mathcal{D}'$ d'après la définition de la filtration sur $\mathcal{D}'$. Comme $Fil^r\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}' \cap Fil^r\mathcal{D}$, on a égalité. La filtration quotient sur $\mathcal{D}''$ est bien la bonne par ([Br1],6.2.2.1). $\square$

Proposition 3.1.2. *Soient $0 \to D' \to D \to D'' \to 0$ une suite exacte d'objets positifs de $\underline{MF}_K(\phi, N)$ de longueur de filtration $\leq r \leq p-2$ et $\mathcal{D}'$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}''$ les S_{K_0}-modules associés. Si $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$ contiennent des modules fortement divisibles (resp. des pseudo-modules fortement divisibles), alors il en est de même de $\mathcal{D}$.*

Preuve. — Soient $\mathcal{M}'$ et $\mathcal{M}''$ des pseudo-modules fortement divisibles dans $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$, $(e_1, ..., e_{d''})$ une famille génératrice de $\mathcal{M}''$ sur S, $(f_1, ..., f_s)$ des éléments de $Fil^r\mathcal{M}'' = \mathcal{M}'' \cap Fil^r\mathcal{D}''$ tels que $Fil^r\mathcal{M}'' = \sum_{i=1}^{s} Sf_i + Fil^p S\mathcal{M}''$ et $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq d'' \\ 1\leq j\leq s}}$ des éléments de S tels que $e_i = \sum_{j=1}^{s} a_{ij}\frac{\phi}{p^r}(f_j)$ pour $i \in \{1, ..., d''\}$. Soient $(b_{kl})_{\substack{1\leq k\leq s \\ 1\leq l\leq d''}}$ dans S tels que, pour $k \in \{1, ..., s\}$, $f_k = \sum_{l=1}^{d''} b_{kl}e_l$, $(\hat{e}_1, ..., \hat{e}_{d''})$ des relevés dans $\mathcal{D}$ de $(e_1, ..., e_{d''})$ et $\hat{f}_k = \sum_{l=1}^{d''} b_{kl}\hat{e}_l$, par (3.1.1), il existe $(g_1, ..., g_s)$ dans $Fil^r\mathcal{D}$ tels que $\hat{f}_i - g_i \in \mathcal{D}'$ et $(h_1, ..., h_{d''})$, $(h'_1, ..., h'_{d''})$ et $(g'_1, ..., g'_s)$ dans $\mathcal{D}'$ tels que :

$$\begin{aligned} \phi(\hat{e}_i) + h_i &\in \sum_{j=1}^{d''} S\hat{e}_j,\ i \in \{1, ..., d''\} \\ N(\hat{e}_i) + h'_i &\in \sum_{j=1}^{d''} S\hat{e}_j,\ i \in \{1, ..., d''\} \\ \frac{\phi}{p^r}(g_i) + g'_i &\in \sum_{j=1}^{d''} S\hat{e}_j,\ i \in \{1, ..., s\}. \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{N} = \sum_{j=1}^{d''} S\hat{e}_j$, on voit facilement qu'il existe $b \in \mathbf{N}$ tel que $\mathcal{N} \cap \mathcal{D}' \subset \frac{1}{p^b}\mathcal{M}'$. Soit $c \geq b$ assez grand pour que les h_i, h'_i pour $i \in \{1, ..., d''\}$ et $\hat{f}_i - g_i$, g'_i pour $i \in \{1, ..., s\}$ soient tous dans $\frac{1}{p^c}\mathcal{M}'$. On pose $\mathcal{M} = \frac{1}{p^c}\mathcal{M}' + \mathcal{N} \subset \mathcal{D}$. Par construction, $\mathcal{M}$ est stable par ϕ, N et on a une suite exacte de S-modules : $0 \to \frac{1}{p^c}\mathcal{M}' \to \mathcal{M} \to \mathcal{M}'' \to 0$ qui montre que $\mathcal{M}$ est libre sur S lorsque les deux autres le sont et $K_0 \otimes_W \mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}$. Soit $x \in Fil^r\mathcal{M} = \mathcal{M} \cap Fil^r\mathcal{D}$, son image dans $\mathcal{M}''$ tombe dans $Fil^r\mathcal{M}''$, donc il existe $y \in \sum_{i=1}^{s} Sg_i + Fil^pS\mathcal{M}$ tel que $x - y \in \frac{1}{p^c}\mathcal{M}' \cap Fil^r\mathcal{D} = \frac{1}{p^c}Fil^r\mathcal{M}'$. On en déduit $Fil^r\mathcal{M} = \frac{1}{p^c}Fil^r\mathcal{M}' + \sum_{i=1}^{s} Sg_i + Fil^pS\mathcal{M}$, d'où $\phi(Fil^r\mathcal{M}) \subset p^r\mathcal{M}$. Enfin, le fait que $\frac{\phi}{p^r}(Fil^r\mathcal{M})$ engendre $\mathcal{M}$ sur S se déduit du même fait pour $\frac{1}{p^c}\mathcal{M}'$ et $\mathcal{M}''$ et de la suite exacte $0 \to \frac{1}{p^c}\mathcal{M}' \to \mathcal{M} \to \mathcal{M}'' \to 0$. $\square$

3.2. **Construction de pseudo-modules fortement divisibles ($e \in \mathbf{N}^*$, $r < p-1$).**

3.2.1. *Changement d'anneau.* L'anneau S n'étant pas noethérien, on lui substitue un anneau Σ, plus petit et noethérien.

Soit $\Sigma = W[[X]][u]/(u^{ep} - pX)$, on a une injection $\Sigma \hookrightarrow S$ en envoyant X sur $(p-1)!\gamma_p(u^e)$ (et u sur u) et il est clair que, via cette injection, Σ est stable par ϕ et N. On le munit de la filtration induite $Fil^i\Sigma = \Sigma \cap Fil^iS$. Posons $Y = E(u)^p/p \in \Sigma$ (on peut exprimer Y en fonction de X et u), on a $\Sigma \simeq W[[Y]][u]/(E(u)^p - pY)$ et, pour $0 \leq i \leq p-1$, $Fil^i\Sigma = (E(u)^i, Y)$ et $\phi(Fil^i\Sigma) \subset p^i\Sigma$. On rappelle que $c = (\phi/p)(E(u)) \in \Sigma^*$. L'anneau Σ est un anneau local noethérien d'idéal maximal $\mathfrak{m} = (p, u, X)$ et il est complet pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique. On pose $\Sigma_{K_0} = K_0 \otimes_W \Sigma$ muni des ϕ et N déduits par extension des scalaires et $Fil^i\Sigma_{K_0} = K_0 \otimes_W Fil^i\Sigma$.

Lemme 3.2.1.1. *Soit $i \in \{0, ..., p\}$, on a $S = \Sigma + Fil^i S$.*

Preuve. — L'anneau S s'identifie à la complétion p-adique de $\Sigma[Y_2,Y_3,...]/(pY_2 - Y^p, pY_3 - Y_2^p, ...)$ avec les Y_i dans $Fil^p S$ ($Y_i = \gamma_{p^i}(E(u))$ à une unité de W près), le résultat s'en déduit aisément puisque Σ est p-adiquement complet. □

Soit D un objet de $\underline{MF}_K(\phi, N)$, on le suppose positif pour simplifier et on pose $\mathcal{D}_\Sigma = \Sigma_{K_0} \otimes_{K_0} D \subset S_{K_0} \otimes_{K_0} D = \mathcal{D}$ (c.f. 2.1) muni des structures induites par $\mathcal{D}$ (ϕ, N et filtration). Le lemme suivant est laissé au lecteur.

Lemme 3.2.1.2. *La filtration $\mathcal{D}_\Sigma \cap Fil^i \mathcal{D}$ sur $\mathcal{D}_\Sigma$ s'identifie à la filtration définie par récurrence en posant $Fil^0 \mathcal{D}_\Sigma = \mathcal{D}_\Sigma$ et $Fil^i \mathcal{D}_\Sigma = \{x \in \mathcal{D}_\Sigma / N(x) \in Fil^{i-1} \mathcal{D}_\Sigma$ et $f_\pi(x) \in Fil^i D_K\}$ où f_π désigne la flèche $\Sigma_{K_0} \hookrightarrow S_{K_0} \to K$ qui envoie u sur π.*

On dira que $\mathcal{D}_\Sigma$ est le Σ_{K_0}-module associé à D.

Lemme 3.2.1.3. *Soient $\mathcal{M}_\Sigma$ un sous-Σ-module de $\mathcal{D}_\Sigma$ tel que $K_0 \otimes_W \mathcal{M}_\Sigma \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_\Sigma$, $Fil^i \mathcal{M}_\Sigma = \mathcal{M}_\Sigma \cap Fil^i \mathcal{D}_\Sigma$ ($i \in \mathbf{N}$) et $\mathcal{M}$ le sous-S-module de $\mathcal{D}$ engendré par $\mathcal{M}_\Sigma$, alors pour tout i l'image de $S \otimes_\Sigma Fil^i \mathcal{M}_\Sigma + Fil^i S \otimes_\Sigma \mathcal{M}_\Sigma$ dans $\mathcal{M}$ coïncide avec $\mathcal{M} \cap Fil^i \mathcal{D}$.*

Preuve. — Il est clair que cette image est contenue dans $\mathcal{M} \cap Fil^i \mathcal{D}$ ($i \in \mathbf{N}$). Soit $x \in \mathcal{M} \cap Fil^i \mathcal{D}$, par (3.2.1.1), x s'écrit $x = y + z$ avec $y \in \mathcal{M}_\Sigma$ et z dans l'image de $Fil^i S \otimes_\Sigma \mathcal{M}_\Sigma$. Donc $y \in \mathcal{M}_\Sigma \cap Fil^i \mathcal{D} = \mathcal{M}_\Sigma \cap (\mathcal{D}_\Sigma \cap Fil^i \mathcal{D}) = \mathcal{M}_\Sigma \cap Fil^i \mathcal{D}_\Sigma = Fil^i \mathcal{M}_\Sigma$. □

Définition 3.2.1.4. *Soit D un objet positif de $\underline{MF}_K(\phi, N)$ tel que $Fil^{r+1} D_K = 0$ avec $r \leq p-2$ et $\mathcal{D}_\Sigma$ son Σ_{K_0}-module associé. On dit qu'un sous-Σ-module $\mathcal{M}_\Sigma$ de $\mathcal{D}_\Sigma$ stable par ϕ et N est un module fortement divisible de $\mathcal{D}_\Sigma$ (resp. un pseudo-module fortement divisible) s'il vérifie les quatre conditions :*

- *$\mathcal{M}_\Sigma$ est libre de type fini sur Σ (resp. est de type fini sur Σ)*
- *$K_0 \otimes_W \mathcal{M}_\Sigma \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_\Sigma$*
- *$\phi(Fil^r \mathcal{M}_\Sigma) \subset p^r \mathcal{M}_\Sigma$*
- *$(\phi/p^r)(Fil^r \mathcal{M}_\Sigma)$ engendre $\mathcal{M}_\Sigma$ sur Σ.*

De (3.2.1.3), on déduit aisément :

Corollaire 3.2.1.5. *Avec les notations de (3.2.1.4), si $\mathcal{M}_\Sigma$ est un module fortement divisible de $\mathcal{D}_\Sigma$ (resp. un pseudo-module fortement divisible) et si $\mathcal{M}$ est le sous-S-module de $\mathcal{D}$ engendré par $\mathcal{M}_\Sigma$, alors $\mathcal{M}$ est un module fortement divisible de $\mathcal{D}$ (resp. un pseudo-module fortement divisible).*

On peut donc travailler avec Σ et $\mathcal{D}_\Sigma$ seulement. Dans la suite, on écrit $\mathcal{M}$ et $\mathcal{D}$ au lieu de $\mathcal{M}_\Sigma$ et $\mathcal{D}_\Sigma$ pour alléger les notations, le contexte indiquant clairement s'il s'agit de Σ-modules ou de S-modules.

3.2.2. *Algèbre commutative.* On donne ici les résultats (classiques) d'algèbre commutative qui seront utilisés dans la suite. On rappelle que Σ est un anneau local noethérien complet d'idéal maximal $\mathfrak{m}$.

Lemme 3.2.2.1. *Soit $\mathcal{M}$ un Σ-module de type fini et I un idéal de Σ ($I \subset \mathfrak{m}$). Soit $\mathcal{N}$ un sous-Σ-module de $\mathcal{M}$, alors* $\bigcap_{n\in\mathbf{N}}(\mathcal{N} + I^n\mathcal{M}) = \mathcal{N}$.

Preuve. — Quitte à remplacer $\mathcal{M}$ par $\mathcal{M}/\mathcal{N}$, on peut supposer $\mathcal{N} = 0$. Alors, il existe $s \in \Sigma$ de la forme $1 + t$ avec $t \in \mathfrak{m}$ tel que $s \cdot \bigcap_{n\in\mathbf{N}} I^n\mathcal{M} = 0$ (c.f. le livre de Matsumura th. 8.9, par exemple). Comme Σ est complet pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique, $s \in \Sigma^*$ d'où le résultat. □

Proposition 3.2.2.2. *Soit $(\mathcal{M}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite décroissante pour l'inclusion de Σ-modules tels que $\mathcal{M}_0$ est de type fini, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} \mathcal{M}_n = 0$
(ii) $\forall\ i \in \mathbf{N},\ \exists\ n_i \in \mathbf{N}\ /\ \mathcal{M}_{n_i} \subset \mathfrak{m}^i\mathcal{M}_0$.

Preuve. — Si (ii) est vrai, on a $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} \mathcal{M}_n \subset \bigcap_{i\in\mathbf{N}} \mathcal{M}_{n_i} \subset \bigcap_{i\in\mathbf{N}} \mathfrak{m}^i\mathcal{M}_0 = 0$ par (3.2.2.1), d'où (i). Les Σ-modules $(\mathcal{M}_n/(\mathcal{M}_n \cap \mathfrak{m}\mathcal{M}_0))_{n\in\mathbf{N}}$ forment une suite décroissante pour l'inclusion de sous-Σ-modules de $\mathcal{M}_0/\mathfrak{m}\mathcal{M}_0$ qui est de longueur finie. Il existe donc $n_1 \in \mathbf{N}^*$ tel que pour $n \geq n_1$, $\mathcal{M}_n/(\mathcal{M}_n \cap \mathfrak{m}\mathcal{M}_0) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{n_1}/(\mathcal{M}_{n_1} \cap \mathfrak{m}\mathcal{M}_0)$. On considère la suite décroissante pour l'inclusion de Σ-modules $(\mathcal{M}_n/(\mathcal{M}_n \cap \mathfrak{m}^2\mathcal{M}_{n_1}))_{n\geq n_1}$, comme précédemment, il existe $n_2 \in \mathbf{N}$, qu'on peut prendre supérieur à $n_1 + 1$, tel que pour $n \geq n_2$, $\mathcal{M}_n/(\mathcal{M}_n \cap \mathfrak{m}^2\mathcal{M}_{n_1}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{n_2}/(\mathcal{M}_{n_2} \cap \mathfrak{m}^2\mathcal{M}_{n_1})$. De proche en proche, on construit ainsi une suite strictement croissante d'entiers $(n_i)_{i\in\mathbf{N}}$ (avec $n_0 = 0$) telle que pour $i \in \mathbf{N}$ et $n \geq n_i$, $\mathcal{M}_n/(\mathcal{M}_n \cap \mathfrak{m}^i\mathcal{M}_{n_{i-1}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{n_i}/(\mathcal{M}_{n_i} \cap \mathfrak{m}^i\mathcal{M}_{n_{i-1}})$. En particulier, $\mathcal{M}_{n_{i+1}}/(\mathcal{M}_{n_{i+1}} \cap \mathfrak{m}^i\mathcal{M}_{n_{i-1}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{n_i}/(\mathcal{M}_{n_i} \cap \mathfrak{m}^i\mathcal{M}_{n_{i-1}})$. Supposons (i) et soit $x_1 \in \mathcal{M}_{n_1}$, par ce qui précède, il existe $x_i \in \mathcal{M}_{n_i}$ ($i \geq 2$) tels que, pour $i \in \mathbf{N}^*$, $x_i - x_{i+1} \in \mathfrak{m}^i\mathcal{M}_{n_{i-1}} \subset \mathfrak{m}^i\mathcal{M}_0$. Comme $\mathcal{M}_0$ est $\mathfrak{m}$-adiquement complet, pour tout $j \in \mathbf{N}^*$ l'élément $y_j = \sum_{i=j}^{\infty}(x_i - x_{i+1})$ est dans $\mathcal{M}_0$, et même dans $\mathfrak{m}^j\mathcal{M}_{n_{j-1}}$. Mais $x_1 - y_1 = x_j - y_j \in \mathcal{M}_{n_{j-1}}$ pour tout $j \geq 1$, d'où $x_1 - y_1 \in \bigcap_{n\in\mathbf{N}} \mathcal{M}_n = 0$ i.e. $x_1 \in \mathfrak{m}\mathcal{M}_0$ et $\mathcal{M}_{n_1} \subset \mathfrak{m}\mathcal{M}_0$. Par un raisonnement similaire, on montre $\mathcal{M}_{n_i} \subset \mathfrak{m}^i\mathcal{M}_{n_{i-1}} \subset \mathfrak{m}^i\mathcal{M}_0$ pour tout $i \in \mathbf{N}^*$ d'où (ii). □

Le lemme (3.2.2.1) se généralise comme suit :

Proposition 3.2.2.3. *Soient $\mathcal{M}$ un Σ module de type fini, $\mathcal{N}$ un sous-Σ-module de $\mathcal{M}$, $(\mathcal{M}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite décroissante pour l'inclusion de sous-Σ-modules de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}_\infty = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} \mathcal{M}_n$, alors $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} (\mathcal{N}+\mathcal{M}_n) = \mathcal{N}+\mathcal{M}_\infty$.*

Preuve. — On a des suites exactes de Σ-modules pour $n\in\mathbf{N}$: $0\to\mathcal{N}+\mathcal{M}_\infty\to\mathcal{N}+\mathcal{M}_n\to\mathcal{M}_n/(\mathcal{M}_n\cap(\mathcal{N}+\mathcal{M}_\infty))\to 0$, d'où des suites exactes :

$$0\to\mathcal{N}+\mathcal{M}_\infty\to\bigcap_{n\in\mathbf{N}}(\mathcal{N}+\mathcal{M}_n)\to\bigcap_{n\in\mathbf{N}}\big(\mathcal{M}_n/(\mathcal{M}_n\cap(\mathcal{N}+\mathcal{M}_\infty))\big)\to 0.$$

Mais les suites exactes de Σ-modules : $0\to\mathcal{M}_\infty\to\mathcal{M}_n\to\mathcal{M}_n/\mathcal{M}_\infty\to 0$ fournissent des suites exactes $0\to\mathcal{M}_\infty\to\bigcap_{n\in\mathbf{N}}\mathcal{M}_n\to\bigcap_{n\in\mathbf{N}}(\mathcal{M}_n/\mathcal{M}_\infty)\to 0$ d'où $\bigcap_{n\in\mathbf{N}}(\mathcal{M}_n/\mathcal{M}_\infty)=0$. Par (3.2.2.2), pour tout $i\in\mathbf{N}$, il existe $n_i\in\mathbf{N}$ tel que $\mathcal{M}_{n_i}/\mathcal{M}_\infty\subset\mathfrak{m}^i(\mathcal{M}_0/\mathcal{M}_\infty)$, d'où à fortiori $\mathcal{M}_{n_i}/(\mathcal{M}_{n_i}\cap(\mathcal{N}+\mathcal{M}_\infty))=\mathcal{M}_{n_i}/(\mathcal{M}_\infty+\mathcal{M}_{n_i}\cap\mathcal{N})\subset\mathfrak{m}^i\big(\mathcal{M}_0/(\mathcal{M}_\infty+\mathcal{M}_0\cap\mathcal{N})\big)$ qui entraîne :

$$\bigcap_{n\in\mathbf{N}}\big(\mathcal{M}_n/(\mathcal{M}_n\cap(\mathcal{N}+\mathcal{M}_\infty))\big)=0$$

par (3.2.2.1), d'où le résultat. $\square$

3.2.3. *Algèbre linéaire.* On démontre ici deux propositions qui seront cruciales dans la section suivante. Soit D un objet positif de $\underline{MF}_K(\phi,N)$ tel que $Fil^{r+1}D_K=0$ avec $r\le p-2$ et $\mathcal{D}=\Sigma_{K_0}\otimes_{K_0}D$ son Σ_{K_0}-module associé (donc muni des opérateurs ϕ, N et de la filtration définie en (3.2.1)). On note $d=dim_{K_0}D$.

Lemme 3.2.3.1. *Soit $\mathcal{M}$ un sous-Σ-module libre de $\mathcal{D}$ tel que $K_0\otimes_W\mathcal{M}\xrightarrow{\sim}\mathcal{D}$, alors pour tout $i\le p-1$, $Fil^i\mathcal{M}/(Fil^1\Sigma Fil^i\mathcal{M}+Fil^p\Sigma\mathcal{M})$ est un $\mathcal{O}_K$-module libre de rang d, où $Fil^i\mathcal{M}=\mathcal{M}\cap Fil^i\mathcal{D}$.*

Preuve. — Montrons d'abord qu'il est sans p-torsion. Soit $x\in Fil^i\mathcal{M}$ tel que $px\in Fil^1\Sigma Fil^i\mathcal{M}+Fil^p\Sigma\mathcal{M}$, on a $f_\pi(px)=pf_\pi(x)=0$, donc $f_\pi(x)=0$ d'où, comme $\mathcal{M}$ est libre, $x\in Fil^1\Sigma\mathcal{M}$, i.e. $x=E(u)y+z$ avec $y\in\mathcal{M}$ et $z\in Fil^p\Sigma\mathcal{M}$. Mais $px\in Fil^{i+1}\mathcal{M}$ entraîne $x\in Fil^{i+1}\mathcal{M}$, donc $E(u)y\in Fil^{i+1}\mathcal{M}$ d'où on déduit $y\in Fil^i\mathcal{M}$ (utiliser par exemple le fait que $S_{K_0}\otimes_{\Sigma_{K_0}}\mathcal{D}$ admet une base adaptée à la filtration ([Br1],A.4)). Finalement, $x=E(u)y+z\in Fil^1\Sigma Fil^i\mathcal{M}+Fil^p\Sigma\mathcal{M}$. Comme le module est sans torsion, c'est un $\mathcal{O}_K$-réseau de $Fil^i\mathcal{D}/(Fil^1\Sigma_{K_0}Fil^i\mathcal{D}+Fil^p\Sigma_{K_0}\mathcal{D})$ qui est un K-espace vectoriel de rang d (prendre une base adaptée à la filtration sur $S_{K_0}\otimes_{\Sigma_{K_0}}\mathcal{D}$ et utiliser (3.2.1.1)). $\square$

Lemme 3.2.3.2. *Soit $\mathcal{M}$ un sous-Σ-module libre de $\mathcal{D}$ tel que $K_0\otimes_W\mathcal{M}\xrightarrow{\sim}\mathcal{D}$ et $\mathcal{N}$ le sous-Σ-module de $\mathcal{D}$ engendré par $(\phi/p^r)(\mathcal{M}\cap Fil^r\mathcal{D})$. Alors, $\mathcal{N}$ est libre de rang d sur Σ et $K_0\otimes_W\mathcal{N}\xrightarrow{\sim}\mathcal{D}$.*

Preuve. — Montrons d'abord que pour tout $i \leq p-1$, il existe $(e_1^i, ..., e_d^i)$ d vecteurs de $\mathcal{M}$ libres sur Σ tels que $Fil^i\mathcal{M} = (\oplus_{j=1}^{d_i}\Sigma e_j^i) \oplus (\oplus_{j=d_i+1}^{d}\Sigma E(u)e_j^i) + Fil^p\Sigma\mathcal{M}$ pour un entier $d_i \in \{0, ..., d\}$ et $E(u)^i\mathcal{M} \subset (\oplus_{j=1}^{d_i}\Sigma e_j^i) \oplus (\oplus_{j=d_i+1}^{d}\Sigma E(u)e_j^i)$. On procède par récurrence sur i : c'est trivial pour $i = 0$ (et c'est vrai pour $i = 1$ par ([Br3],2.2.1.9), la preuve n'utilisant pas l'hypothèse de forte divisibilité). Supposons le au cran $i-1$ ($i-1 \leq p-2$), et considérons la suite exacte :

$$0 \to \frac{Fil^i\mathcal{M}}{Fil^1\Sigma Fil^{i-1}\mathcal{M} + Fil^p\Sigma\mathcal{M}} \to \frac{Fil^{i-1}\mathcal{M}}{Fil^1\Sigma Fil^{i-1}\mathcal{M} + Fil^p\Sigma\mathcal{M}} \to \frac{Fil^{i-1}\mathcal{M}}{Fil^i\mathcal{M}} \to 0.$$

Soit $d_i \in \{0, ..., d\}$ et $(\bar{e}_1^i, ..., \bar{e}_d^i)$ une base de $Fil^{i-1}\mathcal{M}/(Fil^1\Sigma Fil^{i-1}\mathcal{M} + Fil^p\Sigma\mathcal{M})$ sur $\mathcal{O}_K$ (3.2.3.1) telle que $(\bar{e}_1^i, ..., \bar{e}_{d_i}^i)$ est une base de $Fil^i\mathcal{M}/(Fil^1\Sigma Fil^{i-1}\mathcal{M} + Fil^p\Sigma\mathcal{M})$ (sur $\mathcal{O}_K$) et $(\bar{e}_{d_i+1}^i, ..., \bar{e}_d^i)$ une base de $Fil^{i-1}\mathcal{M}/Fil^i\mathcal{M}$. Soient $(e_1^i, ..., e_d^i)$ des relevés dans $(\oplus_{j=1}^{d_{i-1}}\Sigma e_j^{i-1}) \oplus (\oplus_{j=d_{i-1}+1}^{d}\Sigma E(u)e_j^{i-1})$ tels que $(e_1^i, ..., e_{d_i}^i) \in Fil^i\mathcal{M}$ (on peut se débarrasser du $Fil^p\Sigma\mathcal{M}$ car $i \leq p$), la matrice de $(e_1^i, ..., e_d^i)$ dans $(e_1^{i-1}, ..., e_{d_{i-1}}^{i-1}, E(u)e_{d_{i-1}+1}^{i-1}, ..., E(u)e_d^{i-1})$ est inversible dans Σ, puisque sa réduction modulo $Fil^1\Sigma$ l'est dans $\mathcal{O}_K$, donc $Fil^{i-1}\mathcal{M} = (\oplus_{j=1}^{d}\Sigma e_j^i) + Fil^p\Sigma\mathcal{M}$ et :

$$\begin{aligned} Fil^i\mathcal{M} &= (\oplus_{j=1}^{d_i}\Sigma e_j^i) + Fil^1\Sigma Fil^{i-1}\mathcal{M} + Fil^p\Sigma\mathcal{M} \\ &= (\oplus_{j=1}^{d_i}\Sigma e_j^i) \oplus (\oplus_{j=d_i+1}^{d}\Sigma E(u)e_j^i) + Fil^p\Sigma\mathcal{M}. \end{aligned}$$

De $E(u)^{i-1}\mathcal{M} \subset (\oplus_{j=1}^{d_{i-1}}\Sigma e_j^{i-1}) \oplus (\oplus_{j=d_{i-1}+1}^{d}\Sigma E(u)e_j^{i-1})$, on tire $E(u)^{i-1}\mathcal{M} \subset \oplus_{j=1}^{d}\Sigma e_j^i$, d'où $E(u)^i\mathcal{M} \subset (\oplus_{j=1}^{d_i}\Sigma e_j^i) \oplus (\oplus_{j=d_i+1}^{d}\Sigma E(u)e_j^i)$, ce qui achève la récurrence. En appliquant ceci à $Fil^r\mathcal{M}$, on trouve que $\mathcal{N}$ est engendré sur Σ par la famille $(\phi_r(e_1^r), ..., \phi_r(e_{d_r}^r), \phi_{r-1}(e_{d_r+1}^r), ..., \phi_{r-1}(e_d^r))$. Or, cette famille engendre $\mathcal{D}$ sur Σ_{K_0} car $\mathcal{N}$ contient $\phi(\mathcal{M})$, donc elle est libre sur Σ_{K_0}, et à fortiori sur Σ. $\square$

Proposition 3.2.3.3. *Soit $\mathcal{M}$ un sous-Σ-module libre de $\mathcal{D}$ stable par ϕ tel que $K_0 \otimes_W \mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}$ et définissons par récurrence $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}$, $\mathcal{M}_{i+1} =$ le sous-Σ-module de $\mathcal{D}$ engendré par $(\phi/p^r)(Fil^r\mathcal{M}_i)$ ($Fil^r\mathcal{M}_i = \mathcal{M}_i \cap Fil^r\mathcal{D}$). Soit $M_i = \mathcal{M}_i/(\mathcal{M}_i \cap I\mathcal{D})$ où $I = (u, X)$, alors on a $M_i \subset \frac{1}{p^{ir}}M_0$ et $lg(\frac{1}{p^{ir}}M_0/M_i) = i(rd - t_H(D) + t_N(D))$.*

Preuve. — Par (3.2.3.2), les $\mathcal{M}_i$ sont tous libres sur Σ et la même preuve qu'en (2.1.3) donne $lg_W(M_i/Fil^rM_i) = rd - t_H(D)$ où Fil^rM_i est l'image de $Fil^r\mathcal{M}_i$ dans M_i. Il est clair que pour tout i $M_i \subset \frac{1}{p^r}\phi(M_{i-1})$, d'où $M_i \subset \frac{1}{p^{ir}}\phi^i(M_0) \subset \frac{1}{p^{ir}}M_0$. On a, pour tout i :

$$lg_W\frac{M_i}{Fil^rM_i} = rd - t_H(D) = lg_W\frac{\phi(M_i)}{\phi(Fil^rM_i)} = lg_W\frac{\phi(M_i)}{p^rM_{i+1}} = lg_W\frac{\frac{1}{p^r}\phi(M_i)}{M_{i+1}}.$$

Les suites exactes :

$$0 \to \frac{\frac{1}{p^{(i-1)r}}\phi^{i-1}(M_1)}{M_i} \to \frac{\frac{1}{p^{ir}}\phi^i(M_0)}{M_i} \to \frac{\frac{1}{p^{ir}}\phi^i(M_0)}{\frac{1}{p^{(i-1)r}}\phi^{i-1}(M_1)} \to 0$$

entraînent :

$$lg_W \frac{\frac{1}{p^{ir}}\phi^i(M_0)}{M_i} = lg_W \frac{\frac{1}{p^r}\phi(M_0)}{M_1} + lg_W \frac{\frac{1}{p^{(i-1)r}}\phi^{i-1}(M_1)}{M_i}.$$

De même, on a :

$$lg_W \frac{\frac{1}{p^{(i-1)r}}\phi^{i-1}(M_1)}{M_i} = lg_W \frac{\frac{1}{p^r}\phi(M_1)}{M_2} + lg_W \frac{\frac{1}{p^{(i-2)r}}\phi^{i-2}(M_2)}{M_i}$$

etc..., jusqu'à :

$$lg_W \frac{\frac{1}{p^{2r}}\phi^2(M_{i-2})}{M_i} = lg_W \frac{\frac{1}{p^r}\phi(M_{i-2})}{M_{i-1}} + lg_W \frac{\frac{1}{p^r}\phi(M_{i-1})}{M_i}.$$

En additionnant, on trouve par ce qui précède :

$$(1) \qquad lg_W \frac{\frac{1}{p^{ir}}\phi^i(M_0)}{M_i} = i(rd - t_H(D))$$

Par ailleurs, les suites exactes :

$$0 \to \frac{\frac{1}{p^{ir}}\phi^i(M_0)}{M_i} \to \frac{\frac{1}{p^{ir}}\phi^{i-1}(M_0)}{M_i} \to \frac{\frac{1}{p^{ir}}\phi^{i-1}(M_0)}{\frac{1}{p^{ir}}\phi^i(M_0)} \to 0$$

entraînent :

$$lg_W \frac{\frac{1}{p^{ir}}\phi^i(M_0)}{M_i} = lg_W \frac{\frac{1}{p^{ir}}\phi^{i-1}(M_0)}{M_i} - t_N(D).$$

De même, on a :

$$lg_W \frac{\frac{1}{p^{ir}}\phi^{i-1}(M_0)}{M_i} = lg_W \frac{\frac{1}{p^{ir}}\phi^{i-2}(M_0)}{M_i} - t_N(D)$$

etc..., jusqu'à :

$$lg_W \frac{\frac{1}{p^{ir}}\phi(M_0)}{M_i} = lg_W \frac{\frac{1}{p^{ir}}M_0}{M_i} - t_N(D).$$

En additionnant, on trouve :

$$(2) \qquad lg_W \frac{\frac{1}{p^{ir}}\phi^i(M_0)}{M_i} = lg_W \frac{\frac{1}{p^{ir}}M_0}{M_i} - it_N(D)$$

d'où le résultat en combinant (1) et (2). $\square$

Proposition 3.2.3.4. *Soit $\mathcal{D}'$ un sous-Σ_{K_0}-module de $\mathcal{D} \simeq \Sigma_{K_0} \otimes_{K_0} D$ stable par ϕ et N et engendré sur Σ_{K_0} par l'image de ϕ. Alors il existe D' un sous-objet de D dans $\underline{MF}_K(\phi, N)$ tel que $\mathcal{D}'$, muni de la filtration induite par $\mathcal{D}$, est le Σ_{K_0}-module associé à D'.*

Preuve. — Montrons que $\mathcal{D}'$ est libre sur Σ_{K_0} et est un facteur direct de $\mathcal{D}$. Soit $I = (u, X) \subset \Sigma$ et $D' = \mathcal{D}'/(\mathcal{D}' \cap I\mathcal{D}) \hookrightarrow \mathcal{D}/I\mathcal{D} = D$: c'est un K_0-espace vectoriel de dimension finie d' stable par ϕ et N. Soient $(\bar{e}_1, ..., \bar{e}_{d'})$ une base de D' sur K_0, $(e_1, ..., e_{d'})$ des relevés dans $\mathcal{D}'$, $(f_1, ..., f_d)$ une base de $\mathcal{D}$ sur Σ_{K_0} et $(\bar{f}_1, ..., \bar{f}_d)$ son image dans D. La matrice de $(\bar{e}_1, ..., \bar{e}_{d'})$ dans $(\bar{f}_1, ..., \bar{f}_d)$ est de rang d', donc, quitte à renuméroter les (f_i), on peut supposer que les coordonnées des $(e_1, ..., e_{d'})$ dans $(f_1, ..., f_{d'})$ forment une matrice de $M_{d'}(\Sigma_{K_0}) \cap GL_{d'}(K_0[[u]])$ (via l'injection naturelle $\Sigma_{K_0} \hookrightarrow K_0[[u]]$). Soit $s \in \Sigma_{K_0} \cap K_0[[u]]^*$, en utilisant le fait que $\phi^n(u) \in pI$ et $\phi^n(X) \in pI$ pour n assez grand, on montre que $\phi^n(s) \in \Sigma^*_{K_0}$ pour n assez grand. Donc, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que les coordonnées des $(\phi^{n_0}(e_1), ..., \phi^{n_0}(e_{d'}))$ dans $(\phi^{n_0}(f_1), ..., \phi^{n_0}(f_{d'}))$ forment une matrice de $GL_{d'}(\Sigma_{K_0})$. On en déduit facilement que, si $\mathcal{D}'_0$ désigne le sous-Σ_{K_0}-module de $\mathcal{D}'$ engendré par $(\phi^{n_0}(e_1), ..., \phi^{n_0}(e_{d'}))$, $\mathcal{D}'_0$ est libre sur Σ_{K_0} de rang d', $\mathcal{D}/\mathcal{D}'_0$ est libre sur Σ_{K_0} de rang $d - d'$ et $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}'_0 + \mathcal{D}' \cap I\mathcal{D}$. Soit $x \in \mathcal{D}' \cap I\mathcal{D}$, comme $\phi(\mathcal{D}')$ engendre $\mathcal{D}'$ sur Σ_{K_0}, on a $x = \sum_{i=1}^{d'} s_i \phi^{n_0+1}(e_i) + y$ avec $s_i \in \Sigma_{K_0}$ et $y \in \mathcal{D}' \cap I^p\mathcal{D}$ ($\phi(I) \subset I^p$), d'où $\sum_{i=1}^{d'} \bar{s}_i \phi^{n_0+1}(\bar{e}_i) = 0$ dans D' i.e. $s_i \in I\Sigma_{K_0}$ et $\mathcal{D}' \cap I\mathcal{D} \subset I\mathcal{D}' + \mathcal{D}' \cap I^p\mathcal{D}$. Donc $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}'_0 + I\mathcal{D}' + \mathcal{D}' \cap I^p\mathcal{D}$ et en recommençant plusieurs fois ce raisonnement, on obtient $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}'_0 + I\mathcal{D}' + \mathcal{D}' \cap I^{p^n}\mathcal{D}$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$. On a alors $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}'_0 + I^2\mathcal{D}' + \mathcal{D}' \cap I^{p^n}\mathcal{D}$, $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}'_0 + I^4\mathcal{D}' + \mathcal{D}' \cap I^{p^n}\mathcal{D}$, etc... jusqu'à $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}'_0 + I^{p^n}\mathcal{D}' + \mathcal{D}' \cap I^{p^n}\mathcal{D} \subset \mathcal{D}'_0 + \mathcal{D}' \cap I^{p^n}\mathcal{D}$, d'où $\mathcal{D}'/\mathcal{D}'_0 \subset I^{p^n}(\mathcal{D}/\mathcal{D}'_0)$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$. Comme $\mathcal{D}/\mathcal{D}'_0$ est libre sur Σ_{K_0} et $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} I^{p^n}\Sigma_{K_0} = 0$, on a $\mathcal{D}'/\mathcal{D}'_0 = 0$ i.e. $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'_0$. Par la même méthode qu'en ([Br1],6.2.1), on construit alors une section canonique K_0-linéaire commutant à ϕ et N $s' : D' \to K_0[[u]] \otimes_{\Sigma_{K_0}} \mathcal{D}'$ telle que le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
K_0[[u]] \otimes_{\Sigma_{K_0}} \mathcal{D}' & \hookrightarrow & K_0[[u]] \otimes_{\Sigma_{K_0}} \mathcal{D} & \simeq & K_0[[u]] \otimes_{K_0} D \\
{\scriptstyle s'} \uparrow & & \uparrow {\scriptstyle s} & & \\
D' & \hookrightarrow & D & &
\end{array}$$

commute, où s est la section évidente $D \mapsto 1 \otimes D$. Une preuve analogue à ([Br1],6.2.1.1), en remplaçant $q(i)!$ par $p^{[\frac{i}{ep}]}$ où $[\cdot]$ désigne la partie entière, montre que s' tombe en fait dans $\mathcal{D}'$ et que son image contient une base de $\mathcal{D}'$ sur Σ_{K_0}. On en déduit un isomorphisme compatible aux opérateurs ϕ et $N : \Sigma_{K_0} \otimes_{K_0} D' \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}'$. L'assertion sur les filtrations découle alors de (3.1.1) et (3.2.1.2). $\square$

3.2.4. *L'algorithme.* Soient D un objet positif simple de $\underline{MF}_K^{fa}(\phi, N)$ de dimension d sur K_0 tel que $Fil^{r+1}D_K = 0$ avec $r \leq p - 2$ et $\mathcal{D} = \Sigma_{K_0} \otimes_{K_0} D$ son Σ_{K_0}-module associé (3.2.1). Soit $\mathcal{M}$ un sous-Σ-module de $\mathcal{D}$ de type fini stable par ϕ et N tel que $K_0 \otimes_W \mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}$ (par exemple $\mathcal{M} = \Sigma \otimes_W M$ avec M un réseau de D stable par ϕ et N, rappelons que les pentes de ϕ sont positives) et soit $Fil^r\mathcal{M} = \mathcal{M} \cap Fil^r\mathcal{D}$, on définit par récurrence une suite de sous-Σ-modules de $\mathcal{D}$ de la façon suivante :

– $\mathcal{M}_0$ est le Σ-module engendré par $\sum_{i \geq 1} \frac{\phi^i}{p^r}(Fil^r\mathcal{M})$ et on pose $F^r\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_0 \cap Fil^r\mathcal{M} + Fil^r\Sigma\mathcal{M}_0$

– $\mathcal{M}_{n+1}$ est le sous-Σ-module de $\mathcal{M}_0$ engendré par $\dfrac{\phi}{p^r}(F^r\mathcal{M}_n)$ et on pose $F^r\mathcal{M}_{n+1} = \mathcal{M}_{n+1} \cap F^r\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_{n+1} \cap F^r\mathcal{M}_0$.

Proposition 3.2.4.1. *Pour $n \in \mathbf{N}$, $\mathcal{M}_n$ est un Σ-module de type fini stable par ϕ et N, $K_0 \otimes_W \mathcal{M}_n \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}$ et $\mathcal{M}_{n+1} \subset \mathcal{M}_n$.*

Preuve. — Le Σ-module $\mathcal{M}_0$ est clairement stable par ϕ et de type fini car contenu dans $\frac{1}{p^r}\mathcal{M}$ qui est de type fini. Il est stable par N à cause de la relation :

$$N(\frac{\phi^i}{p^r})(x) = \frac{p^{i-1}}{\phi^{i-1}(c)}\frac{\phi^i}{p^r}(E(u)N(x)) \in \mathcal{M}_0 \quad (x \in Fil^r\mathcal{M},\ c = \phi_1(E(u)))$$

et on a $K_0 \otimes_W \mathcal{M}_0 \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}$ car, si $<\phi(\mathcal{M})>$ est le Σ-module engendré par $\phi(\mathcal{M})$, on a $<\phi(\mathcal{M})> \subset \mathcal{M}_0 \subset (1/p^r)\mathcal{M}$ et $K_0 \otimes_W <\phi(\mathcal{M})> \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}$, $K_0 \otimes_W (1/p^r)\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}$. De même, on a $\phi(\mathcal{M}_0) \subset \mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_0$ ($\mathcal{M}_0 \cap Fil^r\mathcal{M} \subset Fil^r\mathcal{M}$) d'où $\mathcal{M}_1$ de type fini et $K_0 \otimes_W \mathcal{M}_1 \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}$. Si $x \in F^r\mathcal{M}_0$, $\phi(x) = p^r y$ avec $y \in \mathcal{M}_0$ et $E(u)N(x) \in F^r\mathcal{M}_0$, d'où :

$$\begin{aligned} \phi(\frac{\phi}{p^r})(x) &= \phi(y) = \frac{1}{c^r}\frac{\phi}{p^r}(E(u)^r y) \in \mathcal{M}_1 \\ N(\frac{\phi}{p^r})(x) &= \frac{1}{c}\frac{\phi}{p^r}(E(u)N(x)) \in \mathcal{M}_1. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{M}_1$ est stable par ϕ et N et on poursuit par récurrence. $\square$

On pose $\mathcal{M}_\infty = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} \mathcal{M}_n$ et $F^r\mathcal{M}_\infty = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} F^r\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_\infty \cap F^r\mathcal{M}_0$: $\mathcal{M}_\infty$ est un Σ-module de type fini stable par ϕ et N tel que $\phi(F^r\mathcal{M}_\infty) \subset p^r\mathcal{M}_\infty$.

Proposition 3.2.4.2. *Le Σ-module $\mathcal{M}_\infty$ est non nul.*

Preuve. — Pour $n \in \mathbf{N}$, le W-module $(F^r\mathcal{M}_n \cap p\mathcal{M}_n)/pF^r\mathcal{M}_n$ est un k-espace vectoriel de dimension finie. En effet, soit $(e_1, ..., e_{d_n})$ une famille génératrice de $\mathcal{M}_n$ sur Σ, un élément de $\mathcal{M}_n$ s'écrit $x+y$ où $x \in \sum_{\substack{0\leq i\leq er-1 \\ 1\leq j\leq d_n}} Wu^i e_j$ et $y \in Fil^r\Sigma\mathcal{M}_n \subset F^r\mathcal{M}_n$, donc :

$$(F^r\mathcal{M}_n \cap p\mathcal{M}_n)/pF^r\mathcal{M}_n = (F^r\mathcal{M}_n \cap p(\sum Wu^i e_j))/p(F^r\mathcal{M}_n \cap \sum Wu^i e_j)$$

qui est un W-module de type fini annulé par p. La suite décroissante pour l'inclusion $\Big((F^r\mathcal{M}_n \cap p\mathcal{M}_n)/pF^r\mathcal{M}_n\Big)_{n\in\mathbf{N}}$ devient donc constante à partir d'un certain rang. Soit $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geq n_0$, $F^r\mathcal{M}_{n_0} \cap p\mathcal{M}_{n_0} \subset F^r\mathcal{M}_n \cap p\mathcal{M}_n + pF^r\mathcal{M}_{n_0}$, deux cas se présentent :

Premier cas : La suite stagne vers un W-module non nul. Si $\mathcal{M}_\infty = 0$, par (3.2.2.2) on a pour tout $i \in \mathbf{N}$ un $n_i \geq n_0$ tel que si $n \geq n_i$, $\mathcal{M}_n \subset \mathfrak{m}^i\mathcal{M}_{n_0}$, d'où en particulier $F^r\mathcal{M}_{n_0} \cap p\mathcal{M}_{n_0} \subset p\mathfrak{m}^i\mathcal{M}_{n_0} + pF^r\mathcal{M}_{n_0}$ pour tout $i \in \mathbf{N}$. Par (3.2.2.1), on a $F^r\mathcal{M}_{n_0} \cap p\mathcal{M}_{n_0} \subset pF^r\mathcal{M}_{n_0}$, donc $(F^r\mathcal{M}_{n_0} \cap p\mathcal{M}_{n_0})/pF^r\mathcal{M}_{n_0} = 0$, ce qui contredit

l'hypothèse. Dans ce cas, on a donc $\mathcal{M}_\infty \neq 0$.
Deuxième cas : La suite stagne vers 0, alors pour $n \geq n_0$, $F^r\mathcal{M}_n \cap p\mathcal{M}_n = pF^r\mathcal{M}_n$. Soit $x \in \mathcal{M}_n \cap Fil^r\mathcal{D}$ $(n \geq n_0)$, il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que $p^m x \in Fil^r\mathcal{M}$, donc (si $m \geq 1$) $p(p^{m-1}x) \in F^r\mathcal{M}_n \cap p\mathcal{M}_n$ d'où $p^{m-1}x \in F^r\mathcal{M}_n$ et ainsi de suite si $m-1 \geq 1$: finalement $x \in F^r\mathcal{M}_n$ et $F^r\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_n \cap Fil^r\mathcal{D}$: on note dans ce cas $Fil^r\mathcal{M}_n = F^r\mathcal{M}_n$. Soient $I = (u, X) \subset \Sigma$, $M_n = \mathcal{M}_n/(\mathcal{M}_n \cap I\mathcal{D})$ et $Fil^r M_n$ l'image de $Fil^r\mathcal{M}_n$, la même preuve qu'en (2.1.2) (avec Σ au lieu de S et $\mathcal{M}_n$ au lieu de $\mathcal{M}$, toutes les hypothèses sont bien satisfaites) donne $\mathrm{lg}_W(M_n/Fil^r M_n) \leq rd - t_H(D)$ et $\mathrm{lg}_W(M_n/Fil^r M_n) \geq rd - t_N(D)$ pour $n \geq n_0$. Comme D est faiblement admissible, $t_H(D) = t_N(D)$, d'où $\mathrm{lg}_W(M_n/Fil^r M_n) = rd - t_N(D)$ $(n \geq n_0)$. On en déduit :

$$lg_W \frac{M_n}{\phi(Fil^r M_n)} - lg_W \frac{M_n}{\phi(M_n)} = rd - t_N(D) = lg_W \frac{M_n}{p^r M_n} - lg_W \frac{M_n}{\phi(M_n)}$$

d'où $M_n/\phi(Fil^r M_n) \xrightarrow{\sim} M_n/p^r M_n$ i.e. $\phi(Fil^r M_n) = p^r M_n$ pour $n \geq n_0$. Comme $\mathcal{M}_{n+1}$ est le Σ-module engendré par $(\phi/p^r)(Fil^r\mathcal{M}_n)$, $M_{n+1} = (\phi/p^r)(Fil^r M_n) = M_n$ et donc $\mathcal{M}_{n_0} = \mathcal{M}_n + \mathcal{M}_{n_0} \cap I\mathcal{D}$ pour $n \geq n_0$. Supposons $\mathcal{M}_\infty = 0$. Soit $i \in \mathbf{N}$, on a $\mathcal{M}_n \subset \mathfrak{m}^i\mathcal{M}_{n_0}$ pour n assez grand (3.2.2.2), d'où $\mathcal{M}_{n_0} \subset \mathfrak{m}^i\mathcal{M}_{n_0} + \mathcal{M}_{n_0} \cap I\mathcal{D}$ pour $i \in \mathbf{N}$, soit $\mathcal{M}_{n_0} \subset \mathcal{M}_{n_0} \cap I\mathcal{D} \subset I\mathcal{D}$ par (3.2.2.1), ce qui est impossible puisque $K_0 \otimes_W \mathcal{M}_{n_0} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}$ (3.2.4.1). On en déduit encore $\mathcal{M}_\infty \neq 0$. $\square$

Proposition 3.2.4.3. *Le Σ-module engendré par $(\phi/p^r)(F^r\mathcal{M}_\infty)$ est égal à $\mathcal{M}_\infty$.*

Preuve. — Pour $n \geq 0$ et $i \geq 0$, les W-modules $F^r\mathcal{M}_n/(F^r\mathcal{M}_n \cap \mathfrak{m}^i F^r\mathcal{M}_0)$ sont de longueur finie, la suite décroissante (pour l'inclusion) $\Big(F^r\mathcal{M}_n/(F^r\mathcal{M}_n \cap \mathfrak{m}^i F^r\mathcal{M}_0)\Big)_{n\in\mathbf{N}}$ devient donc constante pour n suffisamment grand, i.e. il existe $n_i \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geq n_i$, $F^r\mathcal{M}_{n_i} \subset F^r\mathcal{M}_n + \mathfrak{m}^i F^r\mathcal{M}_0$, donc $F^r\mathcal{M}_{n_i} \subset \bigcap_{n\in\mathbf{N}} (F^r\mathcal{M}_n + \mathfrak{m}^i F^r\mathcal{M}_0) = F^r\mathcal{M}_\infty + \mathfrak{m}^i F^r\mathcal{M}_0$ par (3.2.2.3) et $<(\phi/p^r)(F^r\mathcal{M}_{n_i})> \subset <(\phi/p^r)(F^r\mathcal{M}_\infty)> + \mathfrak{m}^i\mathcal{M}_0$ où la notation $<\cdot>$ signifie le Σ-module engendré et en remarquant que $\phi(\mathfrak{m}^i) \subset \mathfrak{m}^i$. On a donc $\mathcal{M}_{n_i+1} \subset <(\phi/p^r)(F^r\mathcal{M}_\infty)> + \mathfrak{m}^i\mathcal{M}_0$ d'où $\mathcal{M}_\infty \subset <(\phi/p^r)(F^r\mathcal{M}_\infty)> + \mathfrak{m}^i\mathcal{M}_0$, $i \in \mathbf{N}$. Par (3.2.2.1), $\mathcal{M}_\infty \subset <(\phi/p^r)(F^r\mathcal{M}_\infty)>$, c'est-à-dire $\mathcal{M}_\infty = <(\phi/p^r)(F^r\mathcal{M}_\infty)>$ puisque l'inclusion réciproque est triviale. $\square$

On pose $\mathcal{D}_\infty = K_0 \otimes_W \mathcal{M}_\infty$: c'est un Σ_{K_0}-module de type fini non nul, stable par ϕ et N et (3.2.4.3) montre qu'il est engendré par l'image de ϕ. Par (3.2.3.4), $\mathcal{D}_\infty$ est donc le Σ_{K_0}-module associé à $D_\infty = \mathcal{D}_\infty/I\mathcal{D}_\infty$ avec D_∞ non nul. Définissons par récurrence $\mathcal{M}_{\infty,0} = \mathcal{M}_\infty$ et $\mathcal{M}_{\infty,i+1} =$ le sous-Σ-module de $\mathcal{D}_\infty$ engendré par $(\phi/p^r)(Fil^r\mathcal{M}_{\infty,i})$ où $Fil^r\mathcal{M}_{\infty,i} = \mathcal{M}_{\infty,i} \cap Fil^r\mathcal{D}_\infty$. Comme $\mathcal{M}_{\infty,0} \subset \mathcal{M}_{\infty,1}$ par (3.2.4.3), la suite $(\mathcal{M}_{\infty,i})_{i\in\mathbf{N}}$ est une suite croissante de Σ-modules de type fini tels que $K_0 \otimes_W \mathcal{M}_{\infty,i} \simeq \mathcal{D}_\infty$.

Proposition 3.2.4.4. *On a* $\mathcal{D}_\infty = \mathcal{D}$.

Preuve. — Soit $\mathcal{N}$ un sous-Σ-module libre de $\mathcal{D}_\infty$ stable par ϕ tel que $K_0 \otimes_W \mathcal{N} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_\infty$. Comme $\mathcal{M}_\infty$ est de type fini sur Σ, on peut supposer $\mathcal{M}_\infty \subset \mathcal{N}$, quitte à diviser $\mathcal{N}$ par une puissance de p. Comme $K_0 \otimes_W \mathcal{M}_\infty \simeq \mathcal{D}_\infty$, il existe $c \in \mathbf{N}$ tel que $p^c\mathcal{N} \subset \mathcal{M}_\infty$. On définit par récurrence $\mathcal{N}_0 = \mathcal{N}$ et $\mathcal{N}_{i+1}$ = le Σ-module engendré dans $\mathcal{D}_\infty$ par $(\phi/p^r)(Fil^r\mathcal{N}_i)$ où $Fil^r\mathcal{N}_i = \mathcal{N}_i \cap Fil^r\mathcal{D}_\infty$. On a donc pour tout $i \in \mathbf{N}$: $p^c\mathcal{N}_0 \subset \mathcal{M}_{\infty,0} \subset \mathcal{M}_{\infty,i} \subset \mathcal{N}_i$. Par (3.2.3.3) :

$$lg_W \frac{\frac{1}{p^{ir}}N_0}{N_i} = i(rd_\infty - t_H(D_\infty) + t_N(D_\infty))$$

où $N_i = \mathcal{N}_i/(\mathcal{N}_i \cap I\mathcal{D})$ et $d_\infty = dim_{K_0}D_\infty$. Mais :

$$lg_W \frac{\frac{1}{p^{ir}}N_0}{N_i} \leq lg_W \frac{\frac{1}{p^{ir}}N_0}{p^cN_0} = ird_\infty + cd_\infty$$

($p^cN_0 \subset N_i$), d'où $ird_\infty + i(t_N(D_\infty) - t_H(D_\infty)) \leq ird_\infty + cd_\infty$, i.e. $i(t_N(D_\infty) - t_H(D_\infty)) \leq cd_\infty$ pour tout $i \in \mathbf{N}$, donc $t_N(D_\infty) \leq t_H(D_\infty)$. Comme D est faiblement admissible, on a $t_N(D_\infty) \geq t_H(D_\infty)$, d'où $t_N(D_\infty) = t_H(D_\infty)$. Comme D est simple et D_∞ non nul, on a $D_\infty = D$, d'où le résultat puisque $\mathcal{D}_\infty \simeq \Sigma_{K_0} \otimes_{K_0} D_\infty$. $\square$

Pour $i \in \mathbf{N}$, soit $M_{\infty,i} = \mathcal{M}_{\infty,i}/(\mathcal{M}_{\infty,i} \cap I\mathcal{D})$, la suite $(M_{\infty,i})_{i\in\mathbf{N}}$ est une suite croissante de W-réseaux de $D_\infty = D$.

Lemme 3.2.4.5. *Il existe* $b \in \mathbf{N}$ *tel que, pour tout* $i \in \mathbf{N}$, $p^bM_{\infty,i} \subset M_{\infty,0}$.

Preuve. — Soient N_0 un réseau de D stable par ϕ, $\mathcal{N}_0 = \Sigma \otimes_W N_0$ et $c \in \mathbf{N}$ tels que $p^c\mathcal{N}_0 \subset \mathcal{M}_{\infty,0} \subset \mathcal{N}_0$. Si $\mathcal{N}_{i+1}$ = le Σ-module engendré par $(\phi/p^r)(\mathcal{N}_i \cap Fil^r\mathcal{D})$ et $N_i = \mathcal{N}_i/(\mathcal{N}_i \cap I\mathcal{D}) = \mathcal{N}_i/I\mathcal{N}_i$ (3.2.3.2), on a donc $p^cN_0 \subset M_{\infty,0} \subset M_{\infty,i} \subset N_i$ pour tout i. Soit $x \in \frac{1}{p^\gamma}N_0$, $x \notin \frac{1}{p^{\gamma-1}}N_0$, tel que $x \in N_{i_0}$ pour un $i_0 \geq 1$ et un $\gamma \in \mathbf{N}$. Soit $N'' = Wx$, comme $x \notin \frac{1}{p^{\gamma-1}}N_0$, on peut écrire $N_0 = p^\gamma N'' \oplus N'$ et on a $N'' + p^cN' = N'' \oplus p^cN' \subset N_{i_0}$. Par (3.2.3.3) et (3.2.4.4) :

$$lg_W \frac{\frac{1}{p^{i_0r}}N_0}{N_{i_0}} = i_0rd \leq lg_W \frac{\frac{1}{p^{i_0r}}N_0}{N'' \oplus p^cN'} = (i_0r - \gamma) + (i_0r(d-1) + c(d-1))$$

d'où $\gamma \leq c(d-1)$. Comme pour tout i, $N_i \subset \frac{1}{p^{\gamma_i}}N_0$ pour $\gamma_i >> 0$, on en déduit $N_i \subset \frac{1}{p^{c(d-1)}}N_0$, $\forall\, i \in \mathbf{N}$, d'où $M_{\infty,i} \subset \frac{1}{p^{cd}}M_{\infty,0}$: $b = cd$ convient. $\square$

Lemme 3.2.4.6. *Pour tout* $c \in \mathbf{N}$, *il existe* $n_c \in \mathbf{N}^*$ *tel que pour tout* $n \geq n_c$: $\dfrac{\phi^n(I)}{p^{nr}} \subset p^cI$.

Preuve. — Soit $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $p^{n_0} \geq ep$. Pour $n \geq n_0$, $\phi^n(u) = u^{p^n} = (u^{p^{n_0}-ep}u^{ep})^{p^{n-n_0}} \in (pX)^{p^{n-n_0}}\Sigma \subset p^{p^{n-n_0}}I$. Par ailleurs, $\phi^n(X) = u^{ep^{n+1}}/p =$

$p^{p^n-1}X^{p^n} \subset p^{p^n-1}I$, d'où le résultat puisque $p^{n-n_0} - rn$ et $p^n - 1 - rn$ tendent vers $+\infty$ avec n. $\square$

Proposition 3.2.4.7. *Il existe $b' \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $i \in \mathbf{N}$, $p^{b'}\mathcal{M}_{\infty,i} \subset \mathcal{M}_{\infty,0}$.*

Preuve. — Soit N_0 un réseau de D stable par ϕ tel que $\mathcal{M}_\infty \subset \Sigma \otimes_W N_0 = \mathcal{N}_0$ et définissons $(\mathcal{N}_i)_{i\in\mathbf{N}}$ et $(N_i)_{i\in\mathbf{N}}$ comme dans la preuve de (3.2.4.5), on a facilement, si $(\phi^n(I))$ désigne l'idéal de Σ engendré par $\phi^n(I)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_1 &\subset \Sigma \otimes_W N_1 + \frac{(\phi(I))}{p^r} \otimes_W \phi(N_0) \subset \Sigma \otimes_W D \\
\mathcal{N}_2 &\subset \Sigma \otimes_W N_2 + \frac{(\phi(I))}{p^r} \otimes_W \phi(N_1) + \frac{(\phi^2(I))}{p^{2r}} \otimes_W \phi^2(N_0) \subset \Sigma \otimes_W D \\
&\vdots \\
\mathcal{N}_i &\subset \Sigma \otimes_W N_i + \frac{(\phi(I))}{p^r} \otimes_W \phi(N_{i-1}) + ... + \frac{(\phi^i(I))}{p^{ir}} \otimes_W \phi^i(N_0) \subset \Sigma \otimes_W D.
\end{aligned}$$

Par (3.2.4.5), il existe $b \in \mathbf{N}$ tel que $N_i \subset \frac{1}{p^b}N_0$, d'où $\phi^n(N_i) \subset \frac{1}{p^b}N_0$, $\forall i, n$. Par (3.2.4.6), $\frac{(\phi^n(I))}{p^{nr}} \subset I$ pour $n \geq n_0$. On déduit de tout ça $\mathcal{N}_i \subset \Sigma \otimes_W \frac{1}{p^{n_0 r+b}} N_0$ pour tout i, ce qui entraîne facilement le résultat. $\square$

Théorème 3.2.4.8. *Soit D un objet positif de $\underline{MF}_K^{fa}(\phi, N)$, $\mathcal{D}$ son Σ_{K_0}-module associé et supposons $Fil^{r+1}D_K = 0$ avec $r \leq p-2$, alors $\mathcal{D}$ contient un pseudo-Σ-module fortement divisible (3.2.1.4).*

Preuve. — Par (3.1.1), on se ramène au cas D simple, i.e. au cas précédent. Avec les notations de cette section, on pose alors $\mathcal{M}_{\infty,\infty} = \cup_{i\in\mathbf{N}}\mathcal{M}_{\infty,i}$: c'est un Σ-module de type fini par (3.2.4.7) et toutes les autres conditions sont triviales. $\square$

Corollaire 3.2.4.9. *Soit D un objet positif de $\underline{MF}_K(\phi, N)$, $\mathcal{D}$ son S_{K_0}-module associé et supposons $Fil^{r+1}D_K = 0$ avec $r \leq p-2$, alors D est faiblement admissible si et seulement si $\mathcal{D}$ contient un pseudo-S-module fortement divisible, c'est-à-dire un S-module $\mathcal{M}$ stable par ϕ et N tel que $\mathcal{M}$ est de type fini sur S, $K_0 \otimes_W \mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}$, $\phi(\mathcal{M} \cap Fil^r\mathcal{D}) \subset p^r\mathcal{M}$ et $(\phi/p^r)(\mathcal{M} \cap Fil^r\mathcal{D})$ engendre $\mathcal{M}$ sur S.*

Preuve. — Si D est faiblement admissible, ça découle de (3.2.4.8) et (3.2.1.5). Si $\mathcal{D}$ contient un pseudo-S-module fortement divisible, la même preuve qu'en (3.2.4.4) (on vérifie que tout ce qu'elle utilise est encore valable avec S au lieu de Σ) donne $t_N(D) \leq t_H(D)$. Mais la même preuve qu'en (2.1.4) donne $t_H(D') \leq t_N(D')$ pour tout sous-objet D' de D dans $\underline{MF}_K(\phi, N)$, d'où le résultat. $\square$

Nous terminons cette section par une proposition qui sera utilisée dans la section suivante lorsque $er \leq p-2$. Soient D, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{M}$ comme en (3.2.4.8) ($\mathcal{M}$ est le pseudo-Σ-module fortement divisible), $Fil^r\mathcal{M} = \mathcal{M} \cap Fil^r\mathcal{D}$, $M = \mathcal{M}/(\mathcal{M} \cap I\mathcal{D})$ et $Fil^r M$ l'image de $Fil^r\mathcal{M}$ dans M. Les W-modules M et $Fil^r M$ sont libres de rang d tels que $p^r M \subset Fil^r M \subset M$. On note $(f_1, ..., f_d)$ une base de $Fil^r M$ sur W, $(\hat{f}_1, ..., \hat{f}_d)$ des relevés dans $Fil^r\mathcal{M}$ et $e_i = \phi_r(\hat{f}_i) \in \mathcal{M}$.

Proposition 3.2.4.10. *Il existe $N \in \mathbf{N}^*$ tel que :*

$$\mathcal{M} \subset (\oplus_{i=1}^d \Sigma e_i) + \sum_{i=1}^N \frac{u^{p^i}}{p^{ir}}\mathcal{M} \subset \mathcal{D}.$$

Preuve. — La famille $(e_1, ..., e_d)$ est bien libre sur Σ_{K_0} (donc sur Σ). En effet, $(e_1 \otimes 1, ..., e_d \otimes 1)$ est libre sur $K_0[[u]]$ dans $\mathcal{D} \otimes_{\Sigma_{K_0}} K_0[[u]]$ car $(\phi_r(f_1), ..., \phi_r(f_d))$ est une base de $\mathcal{D}/I\mathcal{D} \simeq (\mathcal{D} \otimes_{\Sigma_{K_0}} K_0[[u]])/u(\mathcal{D} \otimes_{\Sigma_{K_0}} K_0[[u]])$. Soit $x \in Fil^r\mathcal{M}$, il existe $(s_1, ..., s_d)$ dans Σ tels que $x = \sum_{i=1}^d s_i \hat{f}_i + y$ où $y \in \mathcal{M} \cap I\mathcal{D}$, donc $\phi_r(x) - \sum_{i=1}^d \phi(s_i) e_i \in (\phi/p^r)(\mathcal{M} \cap I\mathcal{D})$. Mais $\mathcal{M} \cap I\mathcal{D}$ est un Σ-module de type fini et $\mathcal{D} = \mathcal{M} \otimes_W K_0$, donc il existe $c \in \mathbf{N}^*$ tel que $\mathcal{M} \cap I\mathcal{D} \subset \frac{I}{p^c}\mathcal{M}$ et puisque $\mathcal{M}$ est engendré par $(\phi/p^r)|_{Fil^r} : \mathcal{M} \subset (\oplus_{i=1}^d \Sigma e_i) + \frac{\phi(I)}{p^{r+c}}\mathcal{M}$. On a donc $\mathcal{M} \cap I\mathcal{D} \subset I(\oplus_{i=1}^d \Sigma e_i) + \frac{\phi(I)}{p^{r+c}}\mathcal{M}$ et, en recommençant le raisonnement précédent, on obtient pour tout $x \in Fil^r\mathcal{M}$: $\phi_r(x) \in (\oplus \Sigma e_i) + (\frac{\phi(I)}{p^r}\mathcal{M} + \frac{\phi^2(I)}{p^{2r+c}}\mathcal{M})$. Une récurrence donne donc, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\mathcal{M} \subset (\oplus_{i=1}^d \Sigma e_i) + \sum_{i=1}^n \frac{\phi^i(I)}{p^{ir}}\mathcal{M} + \frac{\phi^{n+1}(I)}{p^{(n+1)r+c}}\mathcal{M}.$$

Par (3.2.4.6), il existe $N \in \mathbf{N}^*$ tel que $\frac{\phi^{N+1}(I)}{p^{(N+1)r+c}}\mathcal{M} \subset p\mathcal{M}$. Par une récurrence facile, on en déduit, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\mathcal{M} \subset (\oplus_{i=1}^d \Sigma e_i) + \sum_{i=1}^N \frac{\phi^i(I)}{p^{ir}}\mathcal{M} + p^n\mathcal{M}$$

d'où $\mathcal{M} \subset (\oplus \Sigma e_i) + \sum_{i=1}^N \frac{\phi^i(I)}{p^{ir}}\mathcal{M}$ en utilisant (3.2.2.1) par exemple. Mais, pour $i \in \mathbf{N}^*$, $(\phi^i/p^{ir})(X) = p^{p^i - ir - 1} X^{p^i} \in p\Sigma$ (rappelons que $0 \leq r \leq p-2$), donc :

$$\mathcal{M} \subset (\oplus_{i=1}^d \Sigma e_i) + \sum_{i=1}^N \frac{u^{p^i}}{p^{ir}}\mathcal{M} + p\mathcal{M}$$

d'où le résultat, en faisant comme précédemment. □

3.3. **Construction de modules fortement divisibles ($er < p-1$).** Dans cette section, on prouve que pour $er \leq p-2$, tout pseudo-Σ-module fortement divisible est un Σ-module fortement divisible. On écrit $E(u) = u^e - pF(u)$ avec $F(u) \in \Sigma^*$ de degré $\leq e-1$ et $c = (\phi/p)(E(u)) \in \Sigma^*$. On note D un objet positif de $\underline{MF}_K^{fa}(\phi, N)$ tel que $Fil^{r+1}D_K = 0$ avec $er \leq p-2$, et $\mathcal{D}$ son Σ_{K_0}-module associé. On rappelle que $I = (u, X) \subset \Sigma$.

Lemme 3.3.1. *Soit* $\mathcal{M}$ *un sous-*Σ*-module de* $\mathcal{D}$ *et* $j \in \{1, ..., r\}$*, alors :*

$$\frac{u^p}{p^j}\mathcal{M} \subset u^2 \sum_{i=r-j+1}^{r} \Big(\frac{u^e}{p} - F(u)\Big)^i \mathcal{M} + I\mathcal{M}$$

et si $n \geq 2$ *:*

$$\frac{u^{np}}{p^j}\mathcal{M} \subset u^{2n}\Big(\frac{u^e}{p} - F(u)\Big)^r \mathcal{M} + I\mathcal{M}.$$

Preuve. — Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{u^{np}}{p^j}\mathcal{M} &\subset p^{r(n-1)+r-j}u^{n(p-er)}\Big[\Big(\frac{u^e}{p}\Big)^r\Big]^n\mathcal{M} \\
&\subset p^{r(n-1)+r-j}u^{n(p-er)}\Big[\Big(\frac{u^e}{p} - F(u) + F(u)\Big)^r\Big]^n\mathcal{M} \\
&\subset p^{r(n-1)+r-j}u^{n(p-er)}\sum_{0\leq r_i\leq r}\Big(\frac{u^e}{p} - F(u)\Big)^{r_1}\dots\Big(\frac{u^e}{p} - F(u)\Big)^{r_n}\mathcal{M} \\
&\subset p^{r(n-1)+r-j}u^{n(p-er)}\sum_{\substack{\sum r_i\geq(n-1)r+r-j+1\\ 0\leq r_i\leq r}}\Big(\frac{u^e}{p} - F(u)\Big)^{\sum r_i}\mathcal{M} + I\mathcal{M} \\
&\subset p^{r-j}u^{n(p-er)}(u^e - pF(u))^{(n-1)r}\sum_{i=r-j+1}^{r}\Big(\frac{u^e}{p} - F(u)\Big)^i\mathcal{M} + I\mathcal{M}.
\end{aligned}$$

d'où le cas $n = 1$. Le cas $n \geq 2$ s'obtient en écrivant $(u^e - pF(u))^{(n-1)r} = (u^e - pF(u))^{(n-1)r-j+1}(u^e - pF(u))^{j-1}$. $\square$

Lemme 3.3.2. *Soient* $\mathcal{M}$ *un sous-*Σ*-module de* $\mathcal{D}$*,* $m \in \mathbf{N}$*,* $i \in \mathbf{N}$ *et* $x \in \mathcal{M}$ *tels que* $u^m x \in Fil^i\mathcal{M} = \mathcal{M} \cap Fil^i\mathcal{D}$*, alors* $x \in Fil^i\mathcal{M}$*.*

Preuve. — C'est vrai avec $S_{K_0} \otimes_{\Sigma_{K_0}} \mathcal{D}$, car il admet une base adaptée à la filtration ([Br1],A.4), donc aussi avec $\mathcal{D}$ et $\mathcal{M}$. $\square$

Lemme 3.3.3. *Soit* $\mathcal{M}$ *un pseudo-module fortement divisible dans* $\mathcal{D}$*, alors :*

$$\mathcal{M} \subset (\oplus_{i=1}^d \Sigma e_i) + \frac{u^p}{p^r}\mathcal{M}.$$

Preuve. — Pour $i \geq 2$, $p^i \geq p^2(i-1) \geq p(i-1)er + p$, donc :

$$u^{p^i} = u^{p^i - ep(i-1)r}u^{ep(i-1)r} \in p^{(i-1)r}u^p X^{(i-1)r}\Sigma \subset p^{(i-1)r}u^p\Sigma$$

et $\frac{u^{p^i}}{p^{ir}}\mathcal{M} \subset \frac{u^p}{p^r}\mathcal{M}$, d'où le résultat par (3.2.4.10). $\square$

Proposition 3.3.4. *Soit* $\mathcal{M}$ *un pseudo-module fortement divisible dans* $\mathcal{D}$*, alors* $\mathcal{M}$ *est libre sur* Σ *et est donc un module fortement divisible.*

Preuve. — Reprenons les notations de (3.2.4.10) et posons $\mathcal{N} = \oplus_{i=1}^{d} \Sigma e_i$, on a par (3.3.3) et (3.3.1) :

$$\mathcal{M} \subset \mathcal{N} + u^2 \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{u^e}{p} - F(u) \right)^i \mathcal{M} + I\mathcal{M}.$$

En reportant l'inclusion dans le $\mathcal{M}$ de $I\mathcal{M}$, on obtient :

$$\mathcal{M} \subset \mathcal{N} + u^2 \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{u^e}{p} - F(u) \right)^i \mathcal{M} + I^2\mathcal{M}$$

etc., d'où $\mathcal{M} \subset \mathcal{N} + u^2 \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{u^e}{p} - F(u) \right)^i \mathcal{M} + I^n\mathcal{M}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit par (3.2.2.1) :

$$\mathcal{M} \subset \mathcal{N} + u^2 \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{u^e}{p} - F(u) \right)^i \mathcal{M}.$$

En écrivant $\Sigma \simeq W[[Z]][u]/(u^{e(p-r)}(u^e - pF(u))^r - pZ)$, on a $I = (u, Z)$ avec $Z \in I \cap Fil^r\Sigma$. Soit $x \in Fil^r\mathcal{M} \cap I\mathcal{D}$, on voit que x s'écrit :

$$x = ux_0 + Zy_0 + u^2 \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{u^e}{p} - F(u) \right)^i x_i$$

où $x_0, y_0 \in \mathcal{N}$ et $x_i \in \mathcal{M}$ si $i \geq 1$. Donc $ux_0 \in Fil^1\mathcal{M}$ i.e. $x_0 \in Fil^1\mathcal{M}$ par (3.3.2) et $\phi(x_0) \in p\mathcal{M}$ d'après les hypothèses sur $\mathcal{M}$. Donc :

$$(\phi/p^r)(x) = \frac{u^p}{p^{r-1}} \frac{\phi(x_0)}{p} + \frac{u^{ep(p-r)}}{p} c^r \phi(y_0) + \frac{u^{2p}}{p^r} \sum_{i=1}^{r} c^i \phi(x_i)$$

c'est-à-dire :

$$(\phi/p^r)(Fil^r\mathcal{M} \cap I\mathcal{D}) \subset \frac{u^p}{p^{r-1}}\mathcal{M} + \frac{u^{2p}}{p^r}\mathcal{M} + I\mathcal{M}.$$

Comme $Fil^r\mathcal{M} = \sum_{i=1}^{d} \Sigma\hat{f}_i + Fil^r\mathcal{M} \cap I\mathcal{D}$ (c.f. (3.2.4.10) pour les $\hat{f}_i$), on en déduit $\mathcal{M} \subset \mathcal{N} + \frac{u^p}{p^{r-1}}\mathcal{M} + \frac{u^{2p}}{p^r}\mathcal{M} + I\mathcal{M}$. En reportant plusieurs fois cette inclusion dans le $\mathcal{M}$ de $I\mathcal{M}$, on en déduit comme précédemment :

$$\mathcal{M} \subset \mathcal{N} + \frac{u^p}{p^{r-1}}\mathcal{M} + \frac{u^{2p}}{p^r}\mathcal{M}.$$

Par (3.3.1), on obtient $\mathcal{M} \subset \mathcal{N} + u^2 \sum_{i=2}^{r} \left(\frac{u^e}{p} - F(u) \right)^i \mathcal{M} + I\mathcal{M}$ d'où, par une nouvelle récurrence :

$$\mathcal{M} \subset \mathcal{N} + u^2 \sum_{i=2}^{r} \left(\frac{u^e}{p} - F(u) \right)^i \mathcal{M}.$$

Le même raisonnement que précédemment en remplaçant Fil^1 par Fil^2 aboutit à $\mathcal{M} \subset \mathcal{N} + \frac{u^p}{p^{r-2}}\mathcal{M} + \frac{u^{2p}}{p^r}\mathcal{M}$ qui entraîne par (3.3.1)+une récurrence :

$$\mathcal{M} \subset \mathcal{N} + u^2 \sum_{i=3}^{r} \Big(\frac{u^e}{p} - F(u)\Big)^i \mathcal{M}.$$

Au bout du compte, on a $\mathcal{M} \subset \mathcal{N} + u^2\Big(\frac{u^e}{p} - F(u)\Big)^r \mathcal{M}$, on en déduit encore $\mathcal{M} \subset \mathcal{N} + \frac{u^{2p}}{p^r}\mathcal{M} + I\mathcal{M}$ puis $\mathcal{M} \subset \mathcal{N} + u^4\Big(\frac{u^e}{p} - F(u)\Big)^r \mathcal{M}$ etc... Comme $u^{np} \in p^r I$ pour $n >> 0$, on a finalement $\mathcal{M} \subset \mathcal{N} + I\mathcal{M}$, d'où $\mathcal{M} = \mathcal{N}$. $\square$

Remarque 3.3.5. Malheureusement, ce résultat est faux en général. Voici un contre-exemple : $e = p = 3$, $\pi^3 = 3$, $D = K_0 e_1 \oplus K_0 e_2$, $\phi(e_1) = e_2$, $\phi(e_2) = 3e_1$, $N = 0$, $Fil^0 D_K = D_K$, $Fil^1 D_K = K(\pi^2 e_1 + e_2)$ et $Fil^2 D_K = 0$: D_K est faiblement admissible. On peut vérifier que $\mathcal{M} = (3e_1, e_2, u^3 e_1)$ est un pseudo-module fortement divisible, et il n'est clairement pas libre.

Par (3.2.4.8) et (3.2.1.5), on a donc démontré :

Théorème 3.3.6. *Soit D un objet positif de $\underline{MF}_K^{fa}(\phi, N)$, $\mathcal{D}$ son S_{K_0}-module associé et supposons $Fil^{r+1} D_K = 0$ avec $er \leq p-2$, alors $\mathcal{D}$ contient un S-module fortement divisible.*

et par (2.3.2.5) :

Corollaire 3.3.7. *Soit D un objet de $\underline{MF}_K^{fa}(\phi, N)$, r sa longueur de filtration et supposons $er \leq p - 2$, alors D est admissible.*

Annexe A. Quelques conjectures

Commençons d'abord par une question :

Question A.1. *Soient $r \in \{0, ..., p-2\}$ et D un module faiblement admissible positif tel que $Fil^{r+1} D_K = 0$, est-il vrai qu'il existe toujours (i.e. sans restriction sur la ramification e) un S-module fortement divisible dans $\mathcal{D} = S_{K_0} \otimes_{K_0} D$?*

Par les résultats de [Br3] (modulo quelques compatibilités à vérifier), cette question lorsque $r = 1$ et $N = 0$ est une conjecture de Fontaine sur les groupes p-divisibles ([Fo3],5.2.5). Par ailleurs, dans tous les exemples que j'ai calculés, j'ai effectivement pu trouver un module fortement divisible.

Nous avons remarqué que, pour $er \leq p - 2$, la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ est abélienne (2.2.1.1), on devrait également avoir :

Conjecture A.2. *Supposons $er \leq p-2$, alors le foncteur V_{st}^* (2.2.2) de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ dans la catégorie des représentations linéaires de G_K est pleinement fidèle, d'image essentielle stable par sous-objet et quotient et indépendante du choix de π.*

Cette conjecture est un théorème pour $e = 1$ ([Br2],3.3) et, dans le cas $r = 1$, pour la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathcal{M}}^1$ correspondant à des schémas en groupes ((2.2.1.5) et ([Ra],3.3.3)).

Supposons k algébriquement clos. Soient $h \in \mathbf{N}^*$, $\pi' \in \mathcal{O}_{\bar{K}}$ tel que $\pi'^{p^h-1} = \pi$ et $\theta_h : G_K \to \mu_{p^h-1}(\mathcal{O}_{\bar{K}}) \simeq \mathbf{F}_{p^h}^*$, $g \mapsto g(\pi')/\pi'$ (caractères fondamentaux de Serre ([Se],1.7)).

Conjecture A.3. *Supposons $er \leq p-2$, k algébriquement clos et soit $\mathcal{M}$ un objet simple de $\underline{\mathcal{M}}^r$ de rang h sur S_1, alors $V_{st}^*(\mathcal{M}) \simeq \theta_h^{i_0+pi_1+\ldots+p^{h-1}i_{h-1}}$ avec $i_j \in \{0, ..., er\}$.*

Cette conjecture est un théorème pour $e = 1$ ((([FL],5.3) et ([Br2],2.4)) et pour la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathcal{M}}^1$ correspondant à des schémas en groupes ((2.2.1.5) et ([Ra],3.4.4)).

On devrait enfin avoir :

Conjecture A.4. *Soit X un schéma propre et lisse sur $Spec(K)$ admettant un modèle propre et semi-stable sur $Spec(\mathcal{O}_K)$, alors pour $0 \leq r \leq (p-2)/e$ et $n \in \mathbf{N}$, $H^r((X_{\bar{K}})_{ét}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^*$ (dual dans $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$) s'identifie à $V_{st}^*(\mathcal{M})$ pour un certain $\mathcal{M}$ dans $\underline{\mathcal{M}}^r$.*

Le $\mathcal{M}$ en question (conjecturalement unique à isomorphisme près d'après (A.2)) devrait avoir une interprétation en terme de cohomologie log-cristalline. Cette conjecture est un théorème pour $e = 1$ ([Br4],3.2.4.5).

Références

[Br1] Breuil C., *Représentations p-adiques semi-stables et transversalité de Griffiths*, Math. Annalen 307, 1997, 191-224.

[Br2] Breuil C., *Construction de représentations p-adiques semi-stables*, Ann. Scient. E.N.S. 31, 1998, 281-327.

[Br3] Breuil C., *Schémas en groupes sur un anneau de valuation discrète complet très ramifié*, prépublication, Université Paris-Sud, 1998.

[Br4] Breuil C., *Cohomologie étale de p-torsion et cohomologie cristalline en réduction semi-stable*, à paraître à Duke Math. J.

[Fa1] Faltings G., *Integral crystalline cohomology over very ramified valuation rings*, prépublication, 1994.

[Fa2] Faltings G., *Mumford-Stabilität in der algebraischen Geometrie*, Proceedings ICM Zürich, 1994.

[Fo1] Fontaine J.-M., *Le corps des périodes p-adiques*, Astérisque 223, Soc. Math. de France, 1994, 59-111.

[Fo2] Fontaine J.-M., *Représentations p-adiques semi-stables*, Astérisque 223, Soc. Math. de France, 1994, 113-184.

[Fo3] Fontaine J.-M., *Modules galoisiens, modules filtrés et anneaux de Barsotti-Tate*, **in** Journées de Géométrie Algébrique de Rennes (III), Astérisque 65, Soc. Math. de France, 1979, 3-80.

[FL] Fontaine J.-M., Laffaille G., *Construction de représentations p-adiques*, Ann. Scient. E.N.S. 15, 1982, 547-608.

[La1] Laffaille G., *Groupes p-divisibles et modules filtrés : le cas peu ramifié*, Bull. Soc. math. France 108, 1980, 187-206.

[La2] Laffaille G., *Construction de groupes p-divisibles : le cas de dimension 1*, Astérisque 65, Soc. Math. de France, 1979, 103-123.

[Ra] Raynaud M., *Schémas en groupes de type* $(p, ..., p)$, Bull. Soc. Math. de France 102, 1974, 241-280.

[Se] Serre J.-P., *Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques*, Inv. Math. 15, 1972, 259-331.

[To] Totaro B., *Tensor products in p-adic Hodge Theory*, Duke Math. J. 83, 1996, 79-104.

[Wa] Wach N., *Représentations cristallines de torsion*, Comp. Math. 108, 1997, 185-240.