DIAGRAMMES DE DIAMOND ET (φ, Γ)-MODULES

par

Christophe Breuil

Résumé. — Soit ρ une représentation continue semi-simple générique de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ sur $\overline{\mathbb{F}_p}$. La correspondance de Langlands modulo p pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ définie dans [**5**] peut, comme réalisée dans [**9**], se traduire en une recette simple permettant de retrouver le (φ, Γ)-module associé au dual de ρ à partir du "diagramme de Diamond" associé à ρ. Soit F une extension finie non-ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ et ρ une représentation continue semi-simple générique de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)$ sur $\overline{\mathbb{F}_p}$. Lorsque l'on étend formellement cette recette aux diagrammes de Diamond associés à ρ dans [**6**], on montre que l'on obtient essentiellement le (φ, Γ)-module de l'induite tensorielle de F à $\mathbb{Q}_p$ du dual de ρ.

Table des matières

Cet article fait suite à un travail en collaboration avec V. Paškūnas ([**6**]) et l'auteur remercie ce dernier pour lui avoir appris l'importance des sommes (2) ci-après. Il remercie L. Berger pour son intérêt et ses remarques concernant la partie 3. Il remercie enfin J. de Jong et P. Cartier pour d'agréables discussions à Columbia et à l'I.H.É.S. sur le théorème 7.1 et la remarque qui suit.

1. Introduction

La correspondance de Langlands modulo p pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, définie initialement dans [**5**] dans sa version semi-simple, est maintenant bien comprise grâce à la théorie des (φ, Γ)-modules ([**9**]). En particulier, un résultat essentiel de [**9**] est la construction d'un foncteur permettant de passer de la représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ au (φ, Γ)-module de la représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ à laquelle elle correspond.

Si F est une extension finie non-ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ de degré f, l'étude et la classification des représentations lisses admissibles de $\mathrm{GL}_2(F)$ sur $\overline{\mathbb{F}_p}$, initiée dans [**3**], [**4**], [**5**], [**14**], [**13**], se révèle bien plus complexe que lorsque $F = \mathbb{Q}_p$. Un phénomène troublant a lieu : dès que $f > 1$, il existe une très grande quantité de représentations lisses admissibles irréductibles supercuspidales (voir [**6**]). Leur classification est à ce jour incomprise.

Néanmoins, dans [**6**], une famille (en général infinie) de représentations lisses admissibles de $\mathrm{GL}_2(F)$ sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ est associée (de manière ad hoc) à une représentation continue ρ de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)$ sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ lorsque cette dernière est suffisamment générique en partant de la généralisation des poids de Serre développée dans [**7**] (appelés ici poids de Diamond). La méthode est d'abord d'associer à ρ une famille de structures plus simples, introduites initialement dans [**14**] et appelées “diagrammes”, puis de considérer ensuite la famille de toutes les représentations lisses admissibles de $\mathrm{GL}_2(F)$ “engendrées” par l'un quelconque de ces diagrammes (essentiellement). Un diagramme D sera ici la donnée d'une représentation D_0 de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_{p^f})$ de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ et d'une action de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix}$ sur les invariants de D_0 par les matrices unipotentes supérieures $U(\mathbb{F}_{p^f})$. Une des propriétés cruciales des diagrammes associés à ρ (appelés diagrammes de Diamond) est que le socle de la $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_{p^f})$-représentation D_0 est la somme directe des poids de Diamond associés à ρ.

Lorsque l'on examine le foncteur de [**9**] quand $F = \mathbb{Q}_p$ et ρ est semi-simple à la lumière des structures plus simples que sont les diagrammes de Diamond, on se rend compte qu'il existe une recette directe permettant de retrouver le (φ, Γ)-module du dual de ρ à partir du diagramme de Diamond associé à ρ (qui est unique quand $F = \mathbb{Q}_p$). Considérons le sous-espace suivant de la $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$-représentation D_0 :

$$V \overset{\text{déf}}{=} (\text{socle de } D_0)^{U(\mathbb{F}_p)}.$$

Sous l'action des matrices triangulaires supérieures, V admet une base de vecteurs propres. Ces vecteurs propres sont reliés entre eux par l'action de sommes :

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{F}_p} \lambda^s \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

où $s\in\{0,\cdots,p-1\}$. La recette pour retrouver le (φ,Γ)-module du dual de ρ est alors, grossièrement, de remplacer chaque somme (1) reliant deux vecteurs propres de V par une équation $\varphi(*)=s!X^{p-1-s}*$ reliant deux vecteurs de base du (φ,Γ)-module (voir exemple 4.8).

Que devient cette recette quand $f>1$? On définit de manière analogue $V\overset{\text{déf}}{=}(\text{socle de }D_0)^{U(\mathbb{F}_{p^f})}$ à partir d'un quelconque diagramme de Diamond D associé à ρ semi-simple mais les sommes reliant les vecteurs propres de V ont la forme :

$$\sum_{\lambda\in\mathbb{F}_{p^f}}\lambda^{s_0}\lambda^{ps_1}\cdots\lambda^{p^{f-1}s_{f-1}}\begin{pmatrix}\lambda&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\p&0\end{pmatrix}\tag{2}$$

où $s_j\in\{0,\cdots,p-1\}$. Un théorème de Stickelberger (th.7.1) suggère alors de remplacer chaque somme (2) par l'équation (voir §5 pour la construction précise) :

$$\varphi(*)=s_0!s_1!\cdots s_{f-1}!X^{p-1-s_0+p-1-s_1+\cdots+p-1-s_{f-1}}*\,.\tag{3}$$

On obtient ainsi un certain (φ,Γ)-module étale $M(D)$ (dépendant de D) et l'on peut calculer la représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ qui lui correspond. Le théorème suivant est le résultat principal de l'article.

***Théorème 1.1* (cor.5.4).** — *Soit ρ une représentation générique semi-simple de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)$ sur $\overline{\mathbb{F}_p}$, D un diagramme de Diamond associé, $M(D)$ le (φ,Γ)-module étale associé à D par la recette ci-dessus et $V(M(D))$ la représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ correspondant à $M(D)$. On a :*

$$V(M(D))|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}})}\simeq\big(\mathrm{ind}_F^{\otimes\mathbb{Q}_p}(\rho\otimes(\det\rho)^{-1})\big)|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}})}$$

où $\mathrm{ind}_F^{\otimes\mathbb{Q}_p}(\rho\otimes(\det\rho)^{-1})$ est l'induite tensorielle de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)$ à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ de $\rho\otimes_{\overline{\mathbb{F}_p}}(\det\rho)^{-1}$ et $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}})$ le groupe d'inertie.

Notons que $\rho\otimes(\det\rho)^{-1}$ est isomorphe au dual de ρ. En général, $V(M(D))$ n'est pas isomorphe à $\mathrm{ind}_F^{\otimes\mathbb{Q}_p}(\rho\otimes(\det\rho)^{-1})$ (il faut vraiment prendre la restriction à l'inertie). Néanmoins, cela est vrai pour certains des diagrammes de Diamond D associés à ρ et permet de faire une première sélection parmi les D : voir §6, en particulier le théorème 6.4. Mais cela n'est pas encore suffisant pour permettre d'isoler un diagramme unique pour un ρ fixé.

Le plan de l'article est le suivant : après quelques rappels concernant les diagrammes de Diamond et les (φ,Γ)-modules en caractéristique p aux §§2 et 3, on introduit au §4 une catégorie de diagrammes appelés "fortement principaux" auxquels on peut attacher de manière formelle des (φ,Γ)-modules étales par la recette (3). Au §5, on considère le cas particulier des diagrammes de Diamond lorsque ρ est générique semi-simple (qui sont fortement principaux) et on montre le théorème 1.1. Au §6, on montre une condition suffisante sur un diagramme de Diamond D associé à ρ pour que $V(M(D))$ soit exactement $\mathrm{ind}_F^{\otimes\mathbb{Q}_p}(\rho\otimes(\det\rho)^{-1})$. Enfin, au §7, on rappelle et montre un théorème de Stickelberger sur la trace de

$\mathbb{F}_{p^f}$ à $\mathbb{F}_p$ qui, avec ce qui précède, suggère comment retrouver peut-être les (φ,Γ)-modules $M(D)$ par un vrai foncteur généralisant celui de [**9**].

Introduisons maintenant les principales autres notations de cet article.

Si $d \geq 1$ est un entier, on note $\mathbb{Q}_{p^d}$ l'extension non-ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ de degré d. On note $\mathcal{O}_F$ les entiers de $F = \mathbb{Q}_{p^f}$ et $q \overset{\text{déf}}{=} p^f$. On note $K \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)$, $I \subset K$ le sous-groupe d'Iwahori et $I_1 \subset I$ (resp. $K_1 \subset K$) le sous-groupe des matrices unipotentes supérieures (resp. égales à l'identité) modulo p. On désigne par Π la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix}$.

On note $E = \overline{\mathbb{F}_p}$ le corps des coefficients (à ne pas confondre avec le $\overline{\mathbb{F}_p}$ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}_p}/\mathbb{F}_p)$) et on fixe un plongement $\mathbb{F}_q \hookrightarrow E$ qui sera tacite dans tout l'article.

Si $\chi : I \to E^\times$ est un caractère, on note $\chi^s \overset{\text{déf}}{=} \chi(\Pi \cdot \Pi^{-1})$. On note $\alpha : I \to E^\times$ le caractère envoyant $\begin{pmatrix} a & b \\ pc & d \end{pmatrix} \in I$ sur $\overline{a}\overline{d}^{-1}$ via le plongement précédent (où $\overline{x}$ est la réduction modulo p de x). Si $x \in E^\times$, on note μ_x le caractère non-ramifié de $\mathbb{Q}_{p^d}^\times$ envoyant p sur x.

Si σ est une représentation irréductible de K sur E et χ le caractère donnant l'action de I sur σ^{I_1} supposé tel que $\chi \neq \chi^s$, on note $\sigma^{[s]}$ l'unique représentation irréductible de K sur E telle que I agit sur $(\sigma^{[s]})^{I_1}$ par χ^s. On note $\mathrm{ind}_I^K \chi$ la E-représentation des fonctions $f : K \to E$ telles que $f(ik) = \chi(i)f(k)$ ($i \in I$, $k \in K$) avec action à gauche de K par $(kf)(k') = f(k'k)$.

On normalise l'inverse de l'application de réciprocité locale de telle sorte que p s'envoie sur un Frobenius géométrique.

On note Frob le Frobenius arithmétique absolu de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}_p}/\mathbb{F}_p)$, c'est-à-dire l'automorphisme envoyant $x \in \overline{\mathbb{F}_p}$ sur x^p. Si $d \geq 1$ est un entier, μ_x peut se voir comme le caractère non-ramifié de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_{p^d})$ envoyant le Frobenius géométrique Frob^{-d} de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}_p}/\mathbb{F}_{p^d})$ sur $x \in E^\times$.

Pour $d \geq 1$, on note $\omega_d : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_{p^d}) \to E^\times$ le caractère envoyant g sur $\overline{\frac{g(\sqrt[p^d-1]{-p})}{\sqrt[p^d-1]{-p}}} \in \mathbb{F}_{p^d} \hookrightarrow E$. Lorsque $d = 1$, ω_1 s'identifie au caractère cyclotomique modulo p et on le note ω. Lorsque $d > 1$, ω_d dépend du choix d'un plongement $\mathbb{F}_{p^d} \hookrightarrow E$, mais ω_d interviendra soit dans des induites, auquel cas ce choix n'a pas d'importance, soit pour d divisant f, auquel cas on choisit le plongement induit par le plongement déjà fixé $\mathbb{F}_q \hookrightarrow E$. On a $\omega_d(p) = 1$ via la réciprocité locale.

Si ρ est une représentation continue de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_{p^d})$ sur un E-espace vectoriel de dimension finie, on note enfin $\mathrm{ind}_{\mathbb{Q}_{p^d}}^{\mathbb{Q}_p}\rho$ l'induite classique de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_{p^d})$ à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ de ρ et $\mathrm{ind}_{\mathbb{Q}_{p^d}}^{\otimes\mathbb{Q}_p}\rho$ son induite tensorielle ([**8**]).

2. Rappels sur les diagrammes et les diagrammes de Diamond

On rappelle la définition des diagrammes ([**14**]) et des diagrammes de Diamond ([**6**]).

On désigne par N le normalisateur de I dans $\mathrm{GL}_2(F)$, i.e. le sous-groupe engendré par I et la matrice Π.

Définition 2.1. — *On appelle diagramme un triplet (D_0, D_1, r) où D_0 est une représentation de $KF^\times$ de dimension finie sur E telle que K_1 agit trivialement, D_1 une représentation de N sur E et $r : D_1 \hookrightarrow D_0$ une injection $IF^\times$-équivariante qui induit un isomorphisme $D_1 \xrightarrow{\sim} D_0^{I_1} \hookrightarrow D_0$.*

Ce que l'on appelle diagramme ici est en fait un cas particulier des “diagrammes fondamentaux” (“basic diagrams”) de [**6**]. Comme nous n'utilisons pas d'autres diagrammes, nous avons préféré alléger la terminologie. Notons que D_0 est en fait une $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ représentation puisque K_1 agit trivialement.

Les diagrammes forment une catégorie additive (non-abélienne) en un sens évident. Des exemples aussi simples qu'importants de diagrammes sont donnés par les triplets $(\pi^{K_1}, \pi^{I_1}, \mathrm{can})$ où π est une représentation lisse admissible de $\mathrm{GL}_2(F)$ sur E et $\mathrm{can} : \pi^{I_1} \hookrightarrow \pi^{K_1}$ l'inclusion canonique. Il faut comprendre les diagrammes comme une version “enrichie” des modules de Hecke sur $E[I_1\backslash\mathrm{GL}_2(F)/I_1]$ (donnés par π^{I_1}) considérés par exemple dans [**16**].

Un aspect surprenant (et troublant) est que, lorsque $f > 1$, il y a beaucoup plus de diagrammes que lorsque $f = 1$, voir [**6**]. En particulier, si $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F) \to \mathrm{GL}_2(E)$ est une représentation générique (cf. ci-dessous) et si $f > 1$, on attache à ρ dans [**6**] une famille infinie de diagrammes, que nous rappelons maintenant.

Soit donc ρ une représentation continue générique de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)$ sur E. Quitte à tordre ρ par un caractère, on peut l'écrire sous l'une des formes suivantes (voir [**6**, §11]) :

(i) $\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}})} \cong \begin{pmatrix} \omega_f^{\sum_{j=0}^{f-1}(r_j+1)p^j} & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $0 \leq r_j \leq p-3$ et $(r_j) \notin \{(0, \cdots, 0), (p-3, \cdots, p-3)\}$

(ii) $\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}})} \cong \begin{pmatrix} \omega_{2f}^{\sum_{j=0}^{f-1}(r_j+1)p^j} & 0 \\ 0 & \omega_{2f}^{q\sum_{j=0}^{f-1}(r_j+1)p^i} \end{pmatrix}$ avec $1 \leq r_0 \leq p-2$ et $0 \leq r_j \leq p-3,\ j > 0$

avec de plus $\det(\rho) = \omega_f^{\sum_{j=0}^{f-1}(r_j+1)p^j}$ (notons que cela entraîne $p > 2$). À $\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}})}$ est associé dans [**7**] un ensemble de “poids”, c'est-à-dire de représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)$ - ou de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ - sur E, noté $\mathcal{D}(\rho)$. On associe alors une famille de diagrammes $D = (D_0, D_1, r)$ à ρ comme suit ([**6**]) :

(i) D_0 est la plus grande représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ sur E (pour l'inclusion) telle que $\mathrm{soc}\, D_0 = \oplus_{\sigma\in\mathcal{D}(\rho)}\sigma$ et telle que chaque $\sigma \in \mathcal{D}(\rho)$ n'apparaît qu'une fois dans D_0

(ii) D_1 est l'unique représentation de N sur $D_0^{I_1}$ qui étend l'action de I

(iii) $r : D_1 \hookrightarrow D_0$ est une injection I-équivariante arbitraire.

En faisant agir $p \in F^\times$ trivialement (notons que p agit trivialement sur $\det(\rho)$ via la réciprocité locale), on obtient ainsi une famille de diagrammes au sens de la définition 2.1. De plus, on peut montrer que tous les facteurs de Jordan-Hölder de D_0 (et pas seulement ceux de son socle) apparaissent avec multiplicité 1 dans D_0 ([**6**, §13]) et que la représentation D_0 se décompose en une somme directe :

$$D_0 = \oplus_{\sigma\in\mathcal{D}(\rho)} D_{0,\sigma} \tag{4}$$

où $\mathrm{soc}\, D_{0,\sigma} = \sigma$.

Nous aurons besoin de la description explicite de $\mathcal{D}(\rho)$ lorsque ρ est semi-simple.

Soit $(x_0, \cdots, x_{f-1})$ f variables (formelles). On définit d'abord deux ensembles $\mathcal{RD}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ et $\mathcal{ID}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ de f-uplets $\lambda = (\lambda_0(x_0), \cdots, \lambda_{f-1}(x_{f-1}))$ où $\lambda_i(x_i) \in \mathbb{Z} \pm x_i$. On convient que $x_f = x_0$ et $\lambda_f(x_f) = \lambda_0(x_0)$ dans ce qui suit.

Si $f = 1$, $\mathcal{RD}(x_0) \overset{\text{déf}}{=} \{x_0, p-3-x_0\}$ et $\mathcal{ID}(x_0) \overset{\text{déf}}{=} \{x_0, p-1-x_0\}$.

Si $f > 1$, $\mathcal{RD}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ est l'ensemble des λ tels que :

(i) $\lambda_i(x_i) \in \{x_i, x_i+1, p-2-x_i, p-3-x_i\}$

(ii) si $\lambda_i(x_i) \in \{x_i, x_i+1\}$ alors $\lambda_{i+1}(x_{i+1}) \in \{x_{i+1}, p-2-x_{i+1}\}$

(iii) si $\lambda_i(x_i) \in \{p-2-x_i, p-3-x_i\}$ alors $\lambda_{i+1}(x_{i+1}) \in \{p-3-x_{i+1}, x_{i+1}+1\}$.

Si $f > 1$, $\mathcal{ID}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ est l'ensemble des λ tels que :

(i) si $0 < i$, $\lambda_i(x_i) \in \{x_i, x_i+1, p-2-x_i, p-3-x_i\}$ (resp. $\lambda_0(x_0) \in \{x_0, x_0 - 1, p-2-x_0, p-1-x_0\}$)

(ii) si $0 < i$ et $\lambda_i(x_i) \in \{x_i, x_i+1\}$ (resp. $\lambda_0(x_0) \in \{x_0, x_0-1\}$), alors $\lambda_{i+1}(x_{i+1}) \in \{x_{i+1}, p-2-x_{i+1}\}$

(iii) si $0 < i < f-1$ et $\lambda_i(x_i) \in \{p-2-x_i, p-3-x_i\}$, alors $\lambda_{i+1}(x_{i+1}) \in \{p-3-x_{i+1}, x_{i+1}+1\}$

(iv) si $\lambda_0(x_0) \in \{p-1-x_0, p-2-x_0\}$, alors $\lambda_1(x_1) \in \{p-3-x_1, x_1+1\}$

(v) si $\lambda_{f-1}(x_{f-1}) \in \{p-2-x_{f-1}, p-3-x_{f-1}\}$, alors $\lambda_0(x_0) \in \{p-1-x_0, x_0-1\}$.

L'ensemble $\mathcal{RD}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ (resp. $\mathcal{ID}(x_0, \cdots, x_{f-1})$) peut s'identifier à l'ensemble des parties J de $\{0, \cdots, f-1\}$ comme suit : $j \in J$ si et seulement si $\lambda_j(x_j) \in \{p-2-x_j, p-3-x_j\}$ (resp. si $j > 0$, $j \in J$ si et seulement si $\lambda_j(x_j) \in \{p-2-x_j, p-3-x_j\}$ et $0 \in J$ si et seulement si $\lambda_0(x_0) \in \{p-2-x_0, p-1-x_0\}$). Notons que, pour des raisons pratiques, ces identifications ne sont pas exactement les mêmes que celles choisies dans [**6**, §11].

Pour $\lambda \in \mathcal{RD}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ ou $\lambda \in \mathcal{ID}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ on pose :

$$e(\lambda) \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=0}^{f-1} p^i(x_i - \lambda_i(x_i))\Big) \text{ si } f-1 \notin J$$
$$e(\lambda) \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{2}\Big(p^f - 1 + \sum_{i=0}^{f-1} p^i(x_i - \lambda_i(x_i))\Big) \text{ sinon.}$$

Si $s_0, \cdots, s_{f-1}$ sont f entiers dans $\{0, \cdots, p-1\}$, on note $(s_0, \cdots, s_{f-1})$ la représentation irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$:

$$(\mathrm{Sym}^{s_0} E^2) \otimes_E (\mathrm{Sym}^{s_1} E^2)^{\mathrm{Frob}} \otimes_E \cdots \otimes_E (\mathrm{Sym}^{s_{f-1}} E^2)^{\mathrm{Frob}^{f-1}}$$

où $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ agit sur $(\mathrm{Sym}^{s_j} E^2)^{\mathrm{Frob}^j}$ via $\begin{pmatrix} a^{p^j} & b^{p^j} \\ c^{p^j} & d^{p^j} \end{pmatrix}$ puis le plongement fixé $\mathbb{F}_q \hookrightarrow E$.

Soit maintenant ρ générique semi-simple de dimension 2. Si ρ est comme dans (i) (avec $* = 0$), on a :

$$\mathcal{D}(\rho) = \{(\lambda_0(r_0), \cdots, \lambda_{f-1}(r_{f-1})) \otimes \det{}^{e(\lambda)(r_0, \cdots, r_{f-1})}, \lambda \in \mathcal{RD}(x_0, \cdots, x_{f-1})\}$$

et si ρ est comme dans (ii) on a :

$$\mathcal{D}(\rho) = \{(\lambda_0(r_0), \cdots, \lambda_{f-1}(r_{f-1})) \otimes \det{}^{e(\lambda)(r_0, \cdots, r_{f-1})}, \lambda \in \mathcal{ID}(x_0, \cdots, x_{f-1})\}.$$

De plus, deux λ différents donnent deux poids différents de sorte que $\mathcal{D}(\rho)$ s'identifie aussi à l'ensemble des parties de $\{0, \cdots, f-1\}$ via le λ correspondant.

Il existe une autre définition plus conceptuelle de $\mathcal{D}(\rho)$ (d'où se déduit la description technique ci-dessus) que nous n'utiliserons pas (cf. [**7**]).

3. Rappels sur les (φ,Γ)-modules en caractéristique p

On rappelle la définition des (φ,Γ)-modules ([**11**]) en caractéristique p et quelques unes de leurs propriétés.

On fixe $d\geq 1$ et on choisit un plongement $\mathbb{F}_{p^d}\hookrightarrow E$ (dans les applications, soit d sera un diviseur de f de sorte qu'un tel plongement est induit par le plongement fixé $\mathbb{F}_q\hookrightarrow E$, soit le résultat sera indépendant du choix de ce plongement). Soit $\Gamma\overset{\text{déf}}{=}\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{p^d}(\sqrt[p^\infty]{1})/\mathbb{Q}_{p^d})\simeq\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\sqrt[p^\infty]{1})/\mathbb{Q}_p)$ qui s'identifie à $\mathbb{Z}_p^\times$ par le caractère cyclotomique p-adique ε.

Définition 3.1. — *Un (φ,Γ)-module pour $\mathbb{Q}_{p^d}$ est un $\mathbb{F}_{p^d}((X))\otimes_{\mathbb{F}_p}E$-module de type fini M muni d'un endomorphisme E-linéaire φ et d'une action $\mathbb{F}_{p^d}\otimes_{\mathbb{F}_p}E$-linéaire continue de Γ tels que :*

(i) $\varphi((aX^j\otimes b)v)=(a^pX^{pj}\otimes b)\varphi(v)$ *si* $v\in M$, $a\in\mathbb{F}_{p^d}$ *et* $b\in E$

(ii) $\gamma((aX^j\otimes b)v)=(a((1+X)^{\varepsilon(\gamma)}-1)^j\otimes b)\gamma(v)$ *si* $\gamma\in\Gamma$ *et* $v\in M$

(iii) $\varphi\circ\gamma=\gamma\circ\varphi$ *pour tout* $\gamma\in\Gamma$.

On dit que l'action de φ (resp. de Γ) est semi-linéaire. Les (φ,Γ)-modules pour $\mathbb{Q}_{p^d}$ forment une catégorie abélienne en un sens évident. Notons qu'un (φ,Γ)-module pour $\mathbb{Q}_p$ est simplement un $\mathbb{F}_p((X))\otimes_{\mathbb{F}_p}E$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un φ et d'une action de Γ comme ci-dessus. Un (φ,Γ)-module pour $\mathbb{Q}_{p^d}$ peut toujours se réaliser sur $\mathbb{F}_{p^d}((X))\otimes_{\mathbb{F}_p}\mathbb{F}$ où $\mathbb{F}$ est un corps fini contenu dans E.

Remarque 3.2. — Les (φ,Γ)-modules sont d'habitude notés D. Nous adoptons la notation M car D désigne ici un diagramme.

L'isomorphisme :

$$\mathbb{F}_{p^d}((X))\otimes_{\mathbb{F}_p}E\simeq\big(\mathbb{F}_p((X))\otimes_{\mathbb{F}_p}E\big)^d,\ aX^j\otimes b\mapsto(abX^j,a^{p^{-1}}bX^j,\cdots,a^{p^{1-d}}bX^j)$$

fait que l'on peut écrire un (φ,Γ)-module pour $\mathbb{Q}_{p^d}$ sous la forme $M=M^0\times M^1\times\cdots\times M^{d-1}$ où M^j est un $\mathbb{F}_p((X))\otimes_{\mathbb{F}_p}E$-espace vectoriel de dimension finie, φ envoie circulairement M^j dans M^{j+1} et Γ préserve les M^j.

Un (φ,Γ)-module pour $\mathbb{Q}_{p^d}$ M est dit étale si $\varphi(M)$ engendre M sur $\mathbb{F}_{p^d}((X))\otimes_{\mathbb{F}_p}E$. De manière équivalente, on a un isomorphisme $\mathbb{F}_{p^d}((X))\otimes_{\mathbb{F}_p}E$-linéaire (avec des notations évidentes) :

$$\mathrm{Id}\otimes\varphi:(\mathbb{F}_{p^d}((X))\otimes_{\mathbb{F}_p}E)\otimes_{\varphi,\mathbb{F}_{p^d}((X))\otimes_{\mathbb{F}_p}E}M\xrightarrow{\sim}M.$$

On vérifie facilement que cela entraîne que tous les M^j sont de même dimension sur $\mathbb{F}_p((X))\otimes_{\mathbb{F}_p}E$. En particulier M est alors libre de rang fini sur $\mathbb{F}_{p^d}((X))\otimes_{\mathbb{F}_p}E$.

Le résultat principal de la théorie est le théorème suivant (en se rappellant qu'une représentation galoisienne sur E peut toujours se réaliser sur un corps fini contenu dans E).

Théorème 3.3 **([11])**. — *La catégorie des (φ,Γ)-modules étales pour $\mathbb{Q}_{p^d}$ est équivalente à la catégorie des représentations de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_{p^d})$ sur des E-espaces vectoriels de dimension finie.*

On note $M \mapsto V(M)$ le foncteur covariant associant une représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_{p^d})$ à un (φ,Γ)-module étale. Il est exact et compatible aux sommes directes et aux produits tensoriels. On n'aura pas besoin ici de la description explicite de ce foncteur (voir e.g. [**11**] ou [**9**]).

Rappelons maintenant sans preuve quelques propriétés élémentaires (et bien connues) du foncteur V.

Lemme 3.4. — *Soit ρ une représentation non-ramifiée de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_{p^d})$ sur un E-espace vectoriel de dimension finie V. Le (φ,Γ)-module étale associé à ρ a la forme :*

$$M = \big((\mathbb{F}_p((X)) \otimes_{\mathbb{F}_p} E) \otimes_E V\big) \times \cdots \times \big((\mathbb{F}_p((X)) \otimes_{\mathbb{F}_p} E) \otimes_E V\big)$$

où ($s^j \in \mathbb{F}_p((X)) \otimes_{\mathbb{F}_p} E$, $v^j \in V$) :

$$\varphi(s^0 \otimes v^0, \cdots, s^{d-1} \otimes v^{d-1}) = \Big(\varphi(s_{d-1}) \otimes \rho(\mathrm{Frob}^{-d})(v^{d-1}), \varphi(s^0) \otimes v^0, \cdots, \varphi(s^{d-2}) \otimes v^{d-2}\Big)$$

en notant encore Frob^{-d} un relevé dans $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_{p^d})$ du Frobenius géométrique de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}_p}/\mathbb{F}_{p^d})$ et où l'action de γ est l'action usuelle sur $\mathbb{F}_p((X))\otimes_{\mathbb{F}_p} E$ et triviale sur V.

Proposition 3.5. — *Soit s un entier positif ou nul. Le (φ,Γ)-module étale associé à ω_d^{ps} a la forme :*

$$M = (\mathbb{F}_p((X)) \otimes_{\mathbb{F}_p} E)F^0 \times (\mathbb{F}_p((X)) \otimes_{\mathbb{F}_p} E)F^1 \times \cdots \times (\mathbb{F}_p((X)) \otimes_{\mathbb{F}_p} E)F^{d-1}$$

où :

$$\begin{aligned}\varphi(F^j) &= F^{j+1}, \quad 0 \leq j \leq d-2\\ \varphi(F^{d-1}) &= \frac{1}{X^{s(p-1)}}F^0\end{aligned}$$

et où pour $\gamma \in \Gamma$:

$$\gamma(F^j) = \Big(\frac{\omega(\gamma)X}{\gamma(X)}\Big)^{s\frac{p^j(p-1)}{p^d-1}} F^j, \quad 0 \leq j \leq d-1.$$

Démonstration. — Cela se déduit de [**2**, §1]. □

L'action de Γ dans le lemme 3.5 peut se décrire plus simplement comme l'unique action semi-linéaire de Γ commutant à φ et telle que $\gamma(F^j) - F^j \in X(\mathbb{F}_p[[X]] \otimes_{\mathbb{F}_p} E)F^j$ pour tout j.

Lemme 3.6. — *Soit ρ une représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_{p^d})$ sur un E-espace vectoriel de dimension finie et $M = M^0 \times M^1 \times \cdots M^{d-1}$ son (φ, Γ)-module étale associé. Soit $(F_k^0)_{1\leq k\leq t}$ une base de M^0 sur $\mathbb{F}_p((X)) \otimes_{\mathbb{F}_p} E$ et $F_k^j \overset{\text{déf}}{=} \varphi^j(F_k^0)$, $1 \leq j \leq d-1$. Le (φ, Γ)-module étale pour $\mathbb{Q}_p$ associé à $\mathrm{ind}_{\mathbb{Q}_{p^d}}^{\mathbb{Q}_p} \rho$ a la forme $\oplus_{j=0}^{d-1}\big(\oplus_{k=1}^t (\mathbb{F}_p((X)) \otimes_{\mathbb{F}_p} E)F_k^j\big)$ où, pour $1 \leq k \leq t$:*

$$\begin{aligned}\varphi(F_k^j) &= F_k^{j+1}, \quad 0 \leq j \leq d-2\\ \varphi(F_k^{d-1}) &= \varphi^d(F_k^0)\end{aligned}$$

et où l'action de Γ sur les F_k^j provient de celle sur M.

Nous utiliserons le corollaire suivant.

Corollaire 3.7. — *Soit ρ une représentation non-ramifiée de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_{p^d})$ sur un E-espace vectoriel de dimension finie $V = \oplus_{k=1}^t E F_k^0$ et soit s un entier positif ou nul. Le (φ, Γ)-module étale pour $\mathbb{Q}_p$ associé à $\mathrm{ind}_{\mathbb{Q}_{p^d}}^{\mathbb{Q}_p}(\omega_d^s \otimes_E \rho)$ a la forme $\oplus_{j=0}^{d-1}\big(\oplus_{k=1}^t (\mathbb{F}_p((X)) \otimes_{\mathbb{F}_p} E)F_k^j\big)$ où, pour $1 \leq k \leq t$:*

$$\begin{aligned}\varphi(F_k^j) &= F_k^{j+1}, \quad 0 \leq j \leq d-2\\ \varphi(F_k^{d-1}) &= \frac{1}{X^{s(p-1)}}\rho(\mathrm{Frob}^{-d})(F_k^0)\end{aligned}$$

en notant encore Frob^{-d} un relevé dans $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_{p^d})$ du Frobenius géométrique et où pour $\gamma \in \Gamma$:

$$\gamma(F_k^j) = \Big(\frac{\omega(\gamma)X}{\gamma(X)}\Big)^{s\frac{p^j(p-1)}{p^d-1}} F_k^j, \quad 1 \leq k \leq t, \quad 0 \leq j \leq d-1.$$

Démonstration. — Le (φ, Γ)-module étale pour $\mathbb{Q}_{p^d}$ associé à $\omega_d^{ps} \otimes_E \rho$ est le produit tensoriel (sur $\mathbb{F}_{p^d}((X)) \otimes_{\mathbb{F}_p} E$) des (φ, Γ)-modules associés à ω_d^{ps} et ρ. Le résultat découle donc des lemmes 3.4, 3.6 et de la proposition 3.5 en remarquant que l'induite $\mathrm{ind}_{\mathbb{Q}_{p^d}}^{\mathbb{Q}_p}(\omega_d^{ps} \otimes_E \rho)$ est isomorphe à l'induite $\mathrm{ind}_{\mathbb{Q}_{p^d}}^{\mathbb{Q}_p}(\omega_d^s \otimes_E \rho)$ puisque ρ est non-ramifiée. $\square$

L'action de Γ dans le corollaire 3.7 est aussi l'unique action semi-linéaire commutant à φ et telle que $\gamma(F_k^j) - F_k^j \in X(\mathbb{F}_p[[X]] \otimes_{\mathbb{F}_p} E)F_k^j$ pour tout k, j.

4. Diagrammes fortement principaux et (φ, Γ)-modules

On associe des (φ, Γ)-modules étales pour $\mathbb{Q}_p$ à certains diagrammes (§2).

Pour $0 \le s \le q-1$, on pose (en convenant que $0^0 = 1$) :

$$S_s \overset{\text{déf}}{=} \sum_{\lambda\in\mathbb{F}_q} \lambda^s \begin{pmatrix} p & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in E[\mathrm{GL}_2(F)].$$

Soit $D = (D_0, D_1, r)$ un diagramme. Rappelons que $\operatorname{soc} D_0$ désigne le socle de la $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$-représentation D_0.

Lemme 4.1. — *Soit $v \in (\operatorname{soc} D_0)^{I_1}$ un vecteur propre sous l'action de I. Il existe un entier s dans $\{0,\cdots,q-1\}$ tel que $S_s v \neq 0$ et $S_s v \in (\operatorname{soc} D_0)^{I_1}$.*

Démonstration. — Soit χ le caractère de I donnant son action sur Ev. Par réciprocité de Frobenius, la sous-K-représentation $\langle K\Pi v\rangle$ de D_0 engendrée par v est un quotient de l'induite $\operatorname{ind}_I^K \chi^s$. Soit τ une représentation irréductible de K apparaissant dans le K-socle de $\langle K\Pi v\rangle$, donc aussi dans le K-socle de $\operatorname{soc} D_0$. Par [**6**, Lem.2.6, Lem.2.7] il existe $s \in \{0,\cdots,q-1\}$ tel que :

$$\sum_{\lambda\in\mathbb{F}_q} \lambda^s \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Pi v$$

est un vecteur propre sous I dans τ. □

Notons qu'un entier s comme dans le lemme 4.1 n'est en général pas unique pour un v non-nul donné.

Définition 4.2. — *On dit qu'un diagramme $D = (D_0, D_1, r)$ est principal si :*

(i) *pour tout $v \in (\operatorname{soc} D_0)^{I_1}$ vecteur propre de I il existe un unique $s(v) \in \{0,\cdots,q-1\}$ tel que $S_{s(v)}v \neq 0$ et $S_{s(v)}v \in (\operatorname{soc} D_0)^{I_1}$*

(ii) *la fonction $v \mapsto s(v)$ est contante sur chaque sous-espace isotypique (pour I) de $(\operatorname{soc} D_0)^{I_1}$.*

Nous verrons que les diagrammes de Diamond sont principaux. Notons que si D et D' sont principaux, il n'en est pas obligatoirement de même pour $D \oplus D'$.

Soit $D = (D_0, D_1, r)$ un diagramme principal. Pour $\chi : I \to E^\times$ un caractère de I on note $V_\chi \subseteq (\operatorname{soc} D_0)^{I_1}$ le sous-espace isotypique associé. Si $v \in V_\chi$, $s(v)$ ne dépend que de χ par hypothèse et on le note $s(\chi)$. L'application $S_{s(\chi)}$ envoie V_χ dans $V_{\chi\alpha^{-s(\chi)}}$ et définit une application E-linéaire $S : (\operatorname{soc} D_0)^{I_1} \to (\operatorname{soc} D_0)^{I_1}$ (rappelons que $(\operatorname{soc} D_0)^{I_1} = \oplus_\chi V_\chi$).

Définition 4.3. — *On dit qu'un diagramme est fortement principal s'il est principal et si l'application S est un isomorphisme.*

Nous verrons que les diagrammes de Diamond associés aux représentations génériques semi-simples de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)$ (de dimension 2) sont fortement principaux (proposition 5.1).

On note dans la suite $S(\chi) \overset{\text{déf}}{=} \chi\alpha^{-s(\chi)}$ de sorte que $S : V_\chi \to V_{S(\chi)}$.

Lemme 4.4. — *Soit $D = (D_0, D_1, r)$ un diagramme fortement principal.*

(i) *Pour tout χ l'application S induit un isomorphisme $S|_{V_\chi} : V_\chi \xrightarrow{\sim} V_{S(\chi)}$.*

(ii) *Il existe un entier $n \geq 1$, des caractères distincts $\chi_1, \cdots, \chi_n$ de I et des entiers $d_1 \geq 1, \cdots, d_n \geq 1$ tels que, pour tout i, $S^j(\chi_i) \neq \chi_i$, $1 \leq j \leq d_i - 1$, $S^{d_i}(\chi_i) = \chi_i$ et tels que l'on ait un isomorphisme de I-représentations :*

$$(\operatorname{soc} D_0)^{I_1} \simeq \oplus_{i=1}^n \big(V_{\chi_i} \oplus V_{S(\chi_i)} \oplus \cdots \oplus V_{S^{d_i-1}(\chi_i)}\big).$$

Démonstration. — (i) Puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de caractères de I à valeurs dans E, il existe un plus petit entier $d \geq 1$ tel que $S^d(\chi) = S^{d'}(\chi)$ avec $0 \leq d' \leq d-1$. Comme S est injectif par hypothèse, les espaces $V_{S^j(\chi)}$ pour $d' \leq j \leq d-1$ ont même dimension. Si $d' > 0$, on a d'une part $S : V_{S^{d'-1}(\chi)} \hookrightarrow V_{S^{d'}(\chi)}$ et d'autre part $S : V_{S^{d-1}(\chi)} \xrightarrow{\sim} V_{S^{d'}(\chi)}$ ce qui est impossible puisque $S^{d-1}(\chi) \neq S^{d'-1}(\chi)$ et S est un isomorphisme. On a donc forcément $d' = 0$ i.e. $S^d(\chi) = \chi$. En particulier $V_\chi \xrightarrow{\sim} V_{S(\chi)}$.
(ii) Cela se déduit aisément de la preuve du (i). □

Soit $D = (D_0, D_1, r)$ un diagramme fortement principal. On munit le dual $((\operatorname{soc} D_0)^{I_1})^*$ de l'action à gauche de I donnée par $hf(v) \overset{\text{déf}}{=} f(h^{-1}v)$ si $f \in ((\operatorname{soc} D_0)^{I_1})^*$, $v \in (\operatorname{soc} D_0)^{I_1}$, $h \in I$. On pose :

$$M(D) \overset{\text{déf}}{=} (\mathbb{F}_p((X)) \otimes_{\mathbb{F}_p} E) \otimes_E ((\operatorname{soc} D_0)^{I_1})^*.$$

Si χ est un caractère de I tel que $V_\chi \neq 0$, on écrit $s(\chi) = \sum_{j=0}^{f-1} s_j p^j$ avec $s_j \in \{0, \cdots, p-1\}$. On pose :

$$c(\chi) \overset{\text{déf}}{=} \prod_{i=0}^{f-1} s_j! \in E^\times \tag{5}$$

et, pour tout $f \in V_\chi^* \subseteq ((\operatorname{soc} D_0)^{I_1})^*$:

$$\varphi(1 \otimes f) \overset{\text{déf}}{=} c(\chi) X^{\sum_{j=0}^{f-1} p-1-s_j} \otimes f \circ S^{-1}. \tag{6}$$

On voit que $\varphi(1 \otimes f) \in (\mathbb{F}_p((X)) \otimes_{\mathbb{F}_p} E) \otimes_E V_{S(\chi)}^* \subseteq M(D)$ si $f \in V_\chi^*$. On étend φ à tout $M(D)$ par semi-linéarité : $\varphi(y \otimes f) = \varphi(y)\varphi(f)$ et $\varphi(1 \otimes (f+g)) = \varphi(1 \otimes f) + \varphi(1 \otimes g)$. Cela est possible par le (i) du lemme 4.4.

On note dans la suite $|s(\chi)| \overset{\text{déf}}{=} \sum_{j=0}^{f-1} s_j$ et $\overline{\varphi}(f) \overset{\text{déf}}{=} c(\chi) f \circ S^{-1}$. Ainsi (6) se récrit :

$$\varphi(1 \otimes f) = X^{f(p-1)-|s(\chi)|} \otimes \overline{\varphi}(f), \quad f \in V_\chi^*.$$

Passons maintenant à l'action de Γ.

Lemme 4.5. — *Soit $D = (D_0, D_1, r)$ un diagramme fortement principal. Il existe une unique action de $\Gamma \simeq \mathbb{Z}_p^\times$ sur $M(D)$ semi-linéaire (cf. §3) et commutant avec φ telle que pour tout $f \in ((\mathrm{soc}\, D_0)^{I_1})^*$ vecteur propre pour I et tout $\gamma \in \Gamma$:*

$$\gamma(1\otimes f) - 1 \otimes \begin{pmatrix} \varepsilon(\gamma) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f \in X(\mathbb{F}_p[[X]] \otimes_{\mathbb{F}_p} E) \otimes f. \tag{7}$$

Cette action est de plus continue.

Démonstration. — Si $a \in \mathbb{Z}_p^\times$, notons γ_a l'élément de Γ associé. L'égalité (7) est équivalente à :

$$\gamma_a(1\otimes f) = U_{a,f} \otimes \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f$$

avec $U_{a,f} \in 1 + X(\mathbb{F}_p[[X]] \otimes_{\mathbb{F}_p} E)$. De plus, si $\lambda \in E$ et g est dans le même espace isotypique (pour I) que f, les égalités $\gamma_a(1\otimes \lambda f) = \lambda \gamma_a(1\otimes f)$ et $\gamma_a(1\otimes(f+g)) = \gamma_a(1\otimes f) + \gamma_a(1\otimes g)$ impliquent $U_{a,\lambda f} = U_{a,f} = U_{a,g} = U_{a,f+g}$. Un calcul facile donne si $v \in V_\chi$ et $a \in \mathbb{Z}_p^\times$:

$$S^{-1}\Big(\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v \Big) = \overline{a}^{s(\chi)} \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} S^{-1} v = \overline{a}^{|s(\chi)|} \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} S^{-1} v$$

(où $\overline{a}$ est l'image de a dans $E^\times$) de sorte que si $f \in V_\chi^*$:

$$\begin{aligned}
\gamma_a(\varphi(1\otimes f)) &= c(\chi) U_{a,f\circ S^{-1}} \gamma_a(X)^{\sum_{j=0}^{f-1} p-1-s_j} \otimes \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (f \circ S^{-1}) \\
&= c(\chi) U_{a,f\circ S^{-1}} \overline{a}^{|s(\chi)|} \gamma_a(X)^{\sum_{j=0}^{f-1} p-1-s_j} \otimes \Big(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f \Big) \circ S^{-1} \\
&= c(\chi) U_{a,f\circ S^{-1}} \Big(\frac{\gamma_a(X)}{\overline{a}X} \Big)^{\sum_{j=0}^{f-1} p-1-s_j} X^{\sum_{j=0}^{f-1} p-1-s_j} \otimes \Big(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f \Big) \circ S^{-1}.
\end{aligned}$$

Comme :

$$\varphi(\gamma_a(1\otimes f)) = c(\chi)\varphi(U_{a,f}) X^{\sum_{j=0}^{f-1} p-1-s_j} \otimes \Big(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f \Big) \circ S^{-1},$$

on voit que l'égalité $\gamma_a \circ \varphi = \varphi \circ \gamma_a$ est équivalente à :

$$U_{a,f\circ S^{-1}} = \Big(\frac{\overline{a}X}{\gamma_a(X)} \Big)^{f(p-1)-|s(\chi)|} \varphi(U_{a,f}) \tag{8}$$

pour tout $a \in \mathbb{Z}_p^\times$, tout $\chi : I \to E^\times$ et tout $f \in V_\chi^*$. Montrons que cela détermine uniquement les unités $U_{a,f}$. Si $f \in V_\chi^*$, $U_{a,f}$ ne dépend que de χ (cf. début de la preuve) et on le note $U_{a,\chi}$. Soit d tel que $S^d(\chi) = \chi$ (cf. lemme 4.4) de sorte que $\overline{\varphi}^d|_{V_\chi^*}$ est un automorphisme E-linéaire de V_χ^*. Soit $f \in V_\chi^*$ un vecteur propre de $\overline{\varphi}^d$. Itérant (8), on obtient $U_{a,\overline{\varphi}^d(f)} = U_{a,\chi} = V_{a,\chi}\varphi^d(U_{a,\chi})$ où $V_{a,\chi} \in 1 +$

$X(\mathbb{F}_p[[X]] \otimes_{\mathbb{F}_p} E)$ est une puissance entière de $\frac{\overline{a}X}{\gamma_a(X)}$. Cela entraîne :

$$U_{a,\chi} \;=\; \prod_{m=0}^{+\infty} \varphi^{md}(V_{a,\chi}) \in 1 + X(\mathbb{F}_p[[X]] \otimes_{\mathbb{F}_p} E) \tag{9}$$

et on voit que les unités $U_{a,\chi}$ sont complètement déterminées. Cela montre l'unicité d'une action de Γ satisfaisant (7). L'existence consiste à vérifier que $\gamma_a(1 \otimes f) \overset{\text{déf}}{=} U_{a,\chi} \otimes \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f$ avec $f \in V_\chi^*$ et $U_{a,\chi}$ comme en (9) commute à φ, ce qui revient finalement à "remonter" les calculs précédents. Les détails ainsi que la continuité de l'action sont laissés au lecteur intéressé. $\square$

On note encore $M(D)$ le (φ, Γ)-module étale pour $\mathbb{Q}_p$ donné par le lemme 4.5.

Remarque 4.6. — La construction du (φ, Γ)-module $M(D)$ n'utilise pas tout le diagramme D mais seulement la donnée de la I/I_1-représentation $V \overset{\text{déf}}{=} (\operatorname{soc} D_0)^{I_1}$, des entiers $s(\chi)$ et de l'isomorphisme $S : V \overset{\sim}{\to} V$ envoyant V_χ sur $V_{\chi\alpha^{-s(\chi)}}$. On pourrait donc associer par exactement la même recette un (φ, Γ)-module à un triplet $(V, (s(\chi))_\chi, S)$ où V est un E-espace vectoriel de dimension finie muni d'une action E-linéaire de I/I_1, $s(\chi)$ un entier dans $\{0, \cdots, q-1\}$ pour chaque caractère $\chi : I/I_1 \to E^\times$ apparaissant sur V et $S : V \overset{\sim}{\to} V$ une bijection E-linéaire envoyant le sous-espace isotypique V_χ sur le sous-espace isotypique $V_{\chi\alpha^{-s(\chi)}}$. Néanmoins, ces structures n'ayant pas dans cet article d'intérêt propre en dehors des diagrammes, nous avons préféré ne pas les introduire.

La proposition suivante décrit la représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ sur E correspondant au (φ, Γ)-module $M(D)$.

Proposition 4.7. — *Soit D un diagramme fortement principal, n, $\chi_1, \cdots, \chi_n$, $d_1, \cdots, d_n$ comme au lemme 4.4, $M(D)$ le (φ, Γ)-module étale associé et $V(M(D))$ la représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ sur E correspondante (cf. §3). On définit pour $1 \leq i \leq n$:*

$$c_i \;\in\; \{1, \cdots, q-1\} \text{ tel que } \chi_i\Big(\begin{pmatrix} [\lambda] & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Big) = \lambda^{c_i} \;\forall\; \lambda \in \mathbb{F}_q^\times$$

$$s_i \;\overset{\text{déf}}{=}\; \frac{1}{p-1} \sum_{j=0}^{d_i-1} p^{d_i-1-j} |s(S^j(\chi_i))| \tag{10}$$

et on note ρ_i la représentation non-ramifiée de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_{p^{d_i}})$ sur le E-espace vectoriel $V_{\chi_i}^*$ envoyant le Frobenius géométrique de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}_p}/\mathbb{F}_{p^{d_i}})$ sur $\overline{\varphi}^{d_i}|_{V_{\chi_i}^*}$. Alors, pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, s_i est un entier et on a :

$$V(M(D)) \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{ind}_{\mathbb{Q}_{p^{d_i}}}^{\mathbb{Q}_p}\big(\omega_{d_i}^{s_i} \otimes_E \rho_i\big) \otimes \omega^{-(c_i+f)}.$$

Démonstration. — Puisque $S^j(\chi_i)=\chi_i\alpha^{-\sum_{j'=0}^{j-1}s(S^{j'}(\chi_i))}$ pour $1\leq j\leq d_i$, on a $S^{d_i}(\chi_i)=\chi_i=\chi_i\alpha^{-\sum_{j=0}^{d_i-1}s(S^j(\chi_i))}$ et donc $\sum_{j=0}^{d_i-1}s(S^j(\chi_i))$ est divisible par $q-1$, donc par $p-1$. Puisque $s(S^j(\chi_i))-|s(S^j(\chi_i))|$ est divisible par $p-1$, on en déduit que $\sum_{j=0}^{d_i-1}p^{d_i-1-j}|s(S^j(\chi_i))|$ l'est aussi et donc que s_i est un entier. Puisque $\overline{\varphi}$ préserve $\oplus_{j=0}^{d_i-1}V^*_{S^j(\chi_i)}$, on déduit de la définition de φ (et du lemme 4.5) que :

$$M(D)=\oplus_{i=1}^n M_i$$

où $M_i\stackrel{\text{déf}}{=}\oplus_{j=0}^{d_i-1}(\mathbb{F}_p((X))\otimes_{\mathbb{F}_p}E)\otimes_E V^*_{S^j(\chi_i)}$ est un (φ,Γ)-module facteur direct de $M(D)$. Il suffit donc de vérifier que $V(M_i)=\mathrm{ind}_{\mathbb{Q}_{p^{d_i}}}^{\mathbb{Q}_p}\big(\omega_{d_i}^{s_i}\otimes_E\rho_i\big)\otimes\omega^{-(c_i+f)}$. Soit t_i la dimension de V_{χ_i} et $(f_k)_{1\leq k\leq t_i}$ une base de $V^*_{\chi_i}$. On peut voir ρ_i comme la représentation non-ramifiée de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_{p^{d_i}})$ sur $\oplus_{k=1}^{t_i}E\frac{1}{X^f}\otimes f_k$ envoyant le Frobenius géométrique Frob^{-d_i} sur $\big(\frac{1}{X^f}\otimes f_k\mapsto\frac{1}{X^f}\otimes\overline{\varphi}^{d_i}(f_k)\big)_{1\leq k\leq t_i}$. Pour $1\leq k\leq t_i$ posons $F_k^0\stackrel{\text{déf}}{=}\frac{1}{X^f}\otimes f_k$ et pour $1\leq j\leq d_i-1$:

$$F_k^j\stackrel{\text{déf}}{=}\frac{1}{X^{\sum_{j'=0}^{j-1}p^{j-1-j'}|s(S^{j'}(\chi_i))|}}\Big(\frac{1}{X^f}\otimes\overline{\varphi}^j(f_k)\Big).$$

On a $M_i=\oplus_{j=0}^{d_i-1}\big(\oplus_{k=1}^{t_i}(\mathbb{F}_p((X))\otimes_{\mathbb{F}_p}E)F_k^j\big)$ et un calcul donne pour $1\leq k\leq t_i$:

$$\begin{aligned}\varphi(F_k^j)&=F_k^{j+1},\quad 0\leq j\leq d_i-2\\ \varphi(F_k^{d_i-1})&=\frac{1}{X^{s_i(p-1)}}\rho_i(\mathrm{Frob}^{-d_i})(F_k^0).\end{aligned}$$

De plus, par le lemme 4.5 et un calcul facile, $\gamma\in\Gamma$ agit sur M_i de telle sorte que $\gamma(F_k^j)-\omega(\gamma)^{-(c_i+f)}F_k^j\in X(\mathbb{F}_p[[X]]\otimes_{\mathbb{F}_p}E)F_k^j$ pour tout k,j. Par le corollaire 3.7, on reconnaît exactement le (φ,Γ)-module de la représentation $\mathrm{ind}_{\mathbb{Q}_{p^{d_i}}}^{\mathbb{Q}_p}\big(\omega_{d_i}^{s_i}\otimes_E\rho_i\big)\otimes\omega^{-(c_i+f)}$. □

Exemple 4.8. — Considérons $F=\mathbb{Q}_p$ et $D=(D_0,D_1,r)$ tel que :

(i) $$D_0\stackrel{\text{déf}}{=}\begin{array}{ccc}\mathrm{Sym}^{r_0}E^2&—&\mathrm{Sym}^{p-3-r_0}E^2\otimes\det^{r_0+1}\\ &\oplus&\\ \mathrm{Sym}^{p-1-r_0}E^2\otimes\det^{r_0}&—&\mathrm{Sym}^{r_0-2}E^2\otimes\det.\end{array}$$

où $r_0\in\{1,\cdots,p-2\}$, où le symbole "—" désigne l'unique K-extension non-scindée entre les deux poids (qui est une $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$-extension) et où l'on ignore les poids qui n'ont aucun sens (e.g. Sym^{-1})

(ii) $D_1\stackrel{\text{déf}}{=}D_0^{I_1}=(\mathrm{soc}\,D_0)^{I_1}=Ex^{r_0}\oplus Ex^{p-1-r_0}$ avec $\Pi x^{r_0}\stackrel{\text{déf}}{=}x^{p-1-r_0}$ et $\Pi x^{p-1-r_0}\stackrel{\text{déf}}{=}x^{r_0}$ (si $r_0=(p-1)/2$, le lecteur notera qu'il y a un léger abus de notation)

(iii) $r : D_1 \hookrightarrow D_0$ est l'injection canonique.

Le diagramme D est l'unique diagramme associé à ρ générique irréductible telle que $\det(\rho) = \omega^{r_0+1}$ lorsque $f = 1$ (cf. §2). Il est fortement principal et l'application S est donnée par (cf. [**6**, Lem.2.7(i)] par exemple) :

$$\begin{aligned} Sx^{r_0} &= \sum_{\lambda\in\mathbb{F}_p} \lambda^{r_0} \begin{pmatrix} p & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x^{r_0} = (-1)^{r_0+1}\Pi x^{r_0} = (-1)^{r_0+1}x^{p-1-r_0} \\ Sx^{p-1-r_0} &= \sum_{\lambda\in\mathbb{F}_p} \lambda^{p-1-r_0} \begin{pmatrix} p & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x^{p-1-r_0} = -\Pi x^{p-1-r_0} = -x^{r_0} \end{aligned}$$

ce qui donne par (6) pour φ :

$$\begin{aligned} \varphi(1\otimes(x^{r_0})^*) &= r_0!X^{p-1-r_0} \otimes (-1)^{r_0+1}(x^{p-1-r_0})^* \\ \varphi(1\otimes(x^{p-1-r_0})^*) &= (p-1-r_0)!X^{r_0} \otimes -(x^{r_0})^* \end{aligned}$$

où $((x^{r_0})^*, (x^{p-1-r_0})^*)$ est la base duale de (x^{r_0}, x^{p-1-r_0}). En posant $F^0 \overset{\text{déf}}{=} X^{-1} \otimes (x^{r_0})^*$ et $F^1 \overset{\text{déf}}{=} X^{-r_0}(X^{-1} \otimes (-1)^{r_0+1}r_0!(x^{p-1-r_0})^*)$, on retrouve :

$$\begin{aligned} \varphi(F^0) &= F^1 \\ \varphi(F^1) &= \frac{-1}{X^{(p-1)(r_0+1)}}F^0. \end{aligned}$$

En tenant compte de l'action de Γ, on voit avec le corollaire 3.7 qu'il s'agit du (φ,Γ)-module de la représentation $\big(\mathrm{ind}_{\mathbb{Q}_{p^2}}^{\mathbb{Q}_p}(\omega_2^{r_0+1}\otimes\mu_{-1})\big)\otimes\omega^{-(r_0+1)} = \rho\otimes(\det\rho)^{-1}$.

5. Diagrammes de Diamond et (φ,Γ)-modules

On montre le résultat principal de l'article, c'est-à-dire le calcul de $V(M(D))$ lorsque D est un diagramme de Diamond associé à une représentation générique semi-simple de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)$ (§2). Quitte à tordre ρ, on suppose ρ sous l'une des deux formes du §2.

On définit une application bijective $\delta_{\text{réd}}$ (resp. δ_{irr}) de l'ensemble des parties J de $\{0,\cdots,f-1\}$ dans lui-même comme suit (avec la convention $(f-1)+1 = 0$) : $j\in\delta_{\text{réd}}(J)$ si et seulement si $j+1\in J$ (resp. si $j<f-1$, $j\in\delta_{\text{irr}}(J)$ si et seulement si $j+1\in J$ et $f-1\in\delta_{\text{irr}}(J)$ si et seulement si $0\notin J$). Autrement dit $\delta_{\text{réd}}(J)$ est le translaté d'un cran à gauche de J dans $\{0,\cdots,f-1\}$ (resp. $\delta_{\text{irr}}(J)$ est le translaté d'un cran à gauche de J où l'on prend ensuite le "négatif" sur $f-1$).

Si ρ est semi-simple générique réductible (resp. irréductible), on a identifié $\mathcal{D}(\rho)$ à l'ensemble des parties de $\{0,\cdots,f-1\}$ au §2 (notons au passage la petite différence avec [**6**, §15] sur la définition de $\delta_{\text{irr}}(J)$ venant du changement de convention sur cette identification, cf. §2). On peut donc également voir $\delta_{\text{réd}}$ (resp. δ_{irr}) comme une application bijective de $\mathcal{D}(\rho)$ dans lui-même : si $\sigma\in\mathcal{D}(\rho)$

correspond à $J \subseteq \{0, \cdots, f-1\}$, $\delta_{\text{réd}}(\sigma) \in \mathcal{D}(\rho)$ (resp. $\delta_{\text{irr}}(\sigma) \in \mathcal{D}(\rho)$) correspond à $\delta_{\text{réd}}(J)$ (resp. $\delta_{\text{irr}}(J)$).

Proposition 5.1. — *Soit ρ une représentation générique de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)$ sur E et D un diagramme de Diamond associé.*

(i) *Le diagramme D est principal.*

(ii) *Si ρ est semi-simple, le diagramme D est fortement principal.*

Démonstration. — (i) Soit $\sigma \in \mathcal{D}(\rho)$, il existe un unique $\tau \in \mathcal{D}(\rho)$ tel que $\sigma^{[s]}$ apparaît dans $D_{0,\tau}$ (cela découle de la décomposition (4) de D_0 et du fait que $\sigma^{[s]}$ n'apparaît qu'une seule fois dans D_0, cf. §2). Si χ désigne l'action de I sur σ^{I_1}, $v \in \sigma^{I_1} = V_\chi$ et $\langle K\Pi v\rangle$ est la sous-K-représentation de D_0 engendrée par Πv, on voit donc que $\langle K\Pi v\rangle \subseteq D_{0,\tau}$ est l'unique quotient de $\mathrm{ind}_I^K \chi^s$ de socle irréductible τ (cf. la preuve du lemme 4.1). Par [**6**, Lem.2.7], il existe un unique $s \in \{0, \cdots, q-1\}$ tel que $S_s v \neq 0$ et $S_s v \in (\mathrm{soc}\, D_0)^{I_1}$ car on a alors $S_s v \in \mathrm{soc}\langle K\Pi v\rangle = \tau$. Comme tous les V_χ ont dimension 1 dans le cas des diagrammes de Diamond, la propriété (ii) de la définition 4.2 est trivialement satisfaite.
(ii) Soit ρ semi-simple réductible (resp. irréductible) et $\sigma, \tau \in \mathcal{D}(\rho)$ comme au (i). On a dans ce cas $\tau = \delta_{\text{réd}}(\sigma)$ (resp. $\tau = \delta_{\text{irr}}(\sigma)$) par [**6**, Lem.15.2] (avec les notations de *loc. cit.*, on vérifie en effet que $\mathcal{S}^+ = \mathcal{S}^- = \emptyset$). Si $\sigma^{I_1} = V_\chi$, alors $V_{S(\chi)} = \delta_{\text{réd}}(\sigma)^{I_1}$ (resp. $V_{S(\chi)} = \delta_{\text{irr}}(\sigma)^{I_1}$) et puisque tous ces espaces sont de dimension 1, on a $S|_{V_\chi} : V_\chi \xrightarrow{\sim} V_{S(\chi)}$. En écrivant l'ensemble $\mathcal{D}(\rho)$, comme la réunion disjointe des orbites de l'application $\delta_{\text{réd}}$ (resp. δ_{irr}), on voit donc que $(\mathrm{soc}\, D_0)^{I_1}$ s'écrit comme dans le (ii) du lemme 4.4. En particulier D est fortement principal. □

Grâce à la proposition 5.1 et aux constructions du §4, si ρ est générique semi-simple et D un diagramme de Diamond associé alors on dispose d'un (φ,Γ)-module étale $M(D)$ (pour $\mathbb{Q}_p$). On va appliquer la proposition 4.7 pour expliciter $V(M(D))$, mais il faut encore quelques préliminaires. Jusqu'à la fin de cette section, on fixe ρ (générique semi-simple), D et $M(D)$ comme ci-dessus.

On peut identifier l'ensemble des parties J de $\{0, \cdots, f-1\}$ avec l'ensemble des parties J' de $\{0, \cdots, 2f-1\}$ vérifiant la condition : pour chaque $i \in \{0, \cdots, f-1\}$, J' contient un et un seul des deux éléments i, $i+f$. On passe de J à J' par $J' = J \amalg \{f+j, j \in \overline{J}\}$ où $\overline{J}$ est le complémentaire de J dans $\{0, \cdots, f-1\}$ et de J' à J par $J = J' \cap \{0, \cdots, f-1\}$. L'application δ_{irr} est alors simplement la composée : $J \mapsto J'$ suivi du décalage d'un cran à gauche de J' dans $\{0, \cdots, 2f-1\}$ suivi de l'intersection avec $\{0, \cdots, f-1\}$.

Si $J \subseteq \{0, \cdots, f-1\}$, on note $d_{\text{réd}}(J)$ (resp. $d_{\text{irr}}(J)$) le plus petit entier ≥ 1 tel que $\delta_{\text{réd}}^{d_{\text{réd}}(J)}(J) = J$ (resp. $\delta_{\text{irr}}^{d_{\text{irr}}(J)}(J) = J$). Par ce qui précède, si $J' \subset \{0, \cdots, 2f-1\}$ correspond à J, on voit que $d_{\text{irr}}(J)$ est aussi le plus petit entier $d \geq 1$ tel que J' est égal à son translaté de d crans à gauche. Si $J \subseteq \{0, \cdots, f-1\}$ (resp.

$J' \subseteq \{0, \cdots, 2f-1\}$), on note :

$$\iota(J) \overset{\text{déf}}{=} \{f-1-j,\ j \in J\} \quad (\text{resp. } \iota(J') \overset{\text{déf}}{=} \{2f-1-j,\ j \in J'\}).$$

Il est clair que $d_{\text{réd}}(\iota(J)) = d_{\text{réd}}(J)$ et que $d_{\text{irr}}(\iota(J') \cap \{0, \cdots, f-1\}) = d_{\text{irr}}(J)$.

Lemme 5.2. — *Soit $J \subseteq \{0, \cdots, f-1\}$ et $J' \subset \{0, \cdots, 2f-1\}$ le sous-ensemble correspondant, alors :*

(i) *$d_{\text{réd}}(J)$ divise f dans $\mathbb{Z}$ (resp. $d_{\text{irr}}(J)$ divise $2f$ dans $\mathbb{Z}$)*

(ii) *$\frac{p^f-1}{p^{d_{\text{réd}}(J)}-1}$ divise $\sum_{j\in\iota(J)} p^j$ dans $\mathbb{Z}$ et le quotient est $\sum_{\substack{j\in\iota(J)\\ j<d_{\text{réd}}(J)}} p^j$ (resp. $\frac{p^{2f}-1}{p^{d_{\text{irr}}(J)}-1}$ divise $\sum_{j\in\iota(J')} p^j$ dans $\mathbb{Z}$ est le quotient est $\sum_{\substack{j\in\iota(J')\\ j<d_{\text{irr}}(J)}} p^j$).*

Démonstration. — (i) Soit $\mathfrak{S}$ le groupe des permutations de l'ensemble $\{0, \cdots, f-1\}$, $\sigma_{\text{réd}} \in \mathfrak{S}$ l'élément qui envoie $i > 0$ sur $i-1$ et 0 sur $f-1$ et $\mathfrak{S}_J$ le stabilisateur de J. Alors $d_{\text{réd}}(J)$ est le plus petit entier ≥ 1 tel que $\sigma_{\text{réd}}^{d_{\text{réd}}(J)} \in \mathfrak{S}_J$. Mais si G est un groupe fini, $G' \subseteq G$ un sous-groupe et $g \in G$, le plus petit entier $d \geq 1$ tel que $g^d \in G'$ divise toujours l'ordre de g dans G. Comme l'ordre de $\sigma_{\text{réd}}$ dans $\mathfrak{S}$ est f, on en déduit le résultat pour $d_{\text{réd}}(J)$. Dans le cas irréductible, soit σ_{irr} la permutation de $\{0, \cdots, 2f-1\}$ envoyant $i > 0$ sur $i-1$ et 0 sur $2f-1$, alors $d_{\text{irr}}(J)$ est le plus petit entier ≥ 1 tel que $\sigma_{\text{irr}}^{d_{\text{irr}}(J)}$ est dans le stabilisateur de J'. La preuve est ensuite la même que la précédente en remarquant que l'ordre de la permutation σ_{irr} est $2f$.

(ii) Posons $d \overset{\text{déf}}{=} d_{\text{réd}}(J) = d_{\text{réd}}(\iota(J))$ pour alléger les notations. Par (i), notons que $X^d - 1$ divise $X^f - 1$ dans $\mathbb{Z}[X]$. Il suffit de montrer que $\sum_{j\in J} X^j = \frac{X^f-1}{X^d-1}\big(\sum_{\substack{j\in J\\ j<d}} X^j\big)$ dans $\mathbb{Z}[X]$ puis de spécialiser en $X = p$ et de l'appliquer à $\iota(J)$. Comme $\delta_{\text{réd}}^d(J) = J$, on a dans $\mathbb{Z}[X]/(X^f-1) = \mathbb{Z}[\mathbb{Z}/f\mathbb{Z}]$:

$$\sum_{j\in J} X^j = \sum_{\substack{j\in J\\ j\geq d}} X^{j-d} + \sum_{\substack{j\in J\\ j<d}} X^{j+f-d} \tag{11}$$

qui est une égalité dans $\mathbb{Z}[X]$ puisque les puissances de X qui apparaissent sont toutes de degré $< f$. L'égalité (11) se récrit en multipliant par X^d des deux côtés (dans $\mathbb{Z}[X]$) :

$$X^d\big(\sum_{j\in J} X^j\big) = \sum_{j\in J} X^j + (X^f-1)\big(\sum_{\substack{j\in J\\ j<d}} X^j\big).$$

On a donc dans $\mathbb{Z}[X]$ puisque $X^d - 1$ divise $X^f - 1$:

$$\sum_{j\in J} X^j = \frac{X^f-1}{X^d-1}\big(\sum_{\substack{j\in J\\ j<d}} X^j\big)$$

d'où le résultat. La preuve dans le cas irréductible est la même en travaillant avec J' et dans $\mathbb{Z}[X]/(X^{2f}-1) = \mathbb{Z}[\mathbb{Z}/2f\mathbb{Z}]$. $\square$

On note $n_{\text{réd}}$ (resp. n_{irr}) le nombre d'orbites de l'application $\delta_{\text{réd}}$ (resp. δ_{irr}) sur l'ensemble des parties de $\{0,\cdots,f-1\}$.

Rappelons que p agit sur $\det(\rho)$ par l'identité et que l'on est dans l'un des deux cas suivants :

(i) $\rho \cong \begin{pmatrix} \omega_f^{\sum_{j=0}^{f-1}(r_j+1)p^j}\mu_\alpha & 0 \\ 0 & \mu_{\alpha^{-1}} \end{pmatrix}$, $0 \le r_j \le p-3$, $(r_j) \notin \{(0,\cdots,0),(p-3,\cdots,p-3)\}$, $\alpha \in E^\times$

(ii) $\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}})} \cong \begin{pmatrix} \omega_{2f}^{\sum_{j=0}^{f-1}(r_j+1)p^j} & 0 \\ 0 & \omega_{2f}^{q\sum_{j=0}^{f-1}(r_j+1)p^i} \end{pmatrix}$, $1 \le r_0 \le p-2$, $0 \le r_j \le p-3$, $j>0$.

Dans le cas (ii), la condition sur $\det(\rho)$ implique que l'on a exactement :

$$\rho \cong \mathrm{ind}_{\mathbb{Q}_{p^{2f}}}^{\mathbb{Q}_{p^f}}\big(\omega_{2f}^{\sum_{j=0}^{f-1}(r_j+1)p^j} \otimes \mu_{-1}\big). \tag{12}$$

Théorème 5.3. — *(i) Supposons ρ réductible. Choisissons $n_{\text{réd}}$ sous-ensembles $J_1,\cdots,J_{n_{\text{réd}}}$ de $\{0,\cdots,f-1\}$, un dans chaque orbite de $\delta_{\text{réd}}$ et notons $d_i \overset{\text{déf}}{=} d_{\text{réd}}(J_i)$. Alors, pour tout i, $\omega_f^{\sum_{j\in\iota(J_i)}p^j}$ est une puissance entière de ω_{d_i}, et il existe $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n_{\text{réd}}}$ dans $E^\times$ tels que :*

$$V(M(D)) \simeq \bigoplus_{i=1}^{n_{\text{réd}}}\Big(\mathrm{ind}_{\mathbb{Q}_{p^{d_i}}}^{\mathbb{Q}_p}\omega_f^{(\sum_{j\in\iota(J_i)}p^j)(\sum_{j=0}^{f-1}(r_j+1)p^j)}\Big)\otimes\omega^{-\sum_{j=0}^{f-1}(r_j+1)}\mu_{\alpha_i}.$$

(ii) Supposons ρ irréductible. Choisissons n_{irr} sous-ensembles $J_1,\cdots,J_{n_{\text{irr}}}$ de $\{0,\cdots,f-1\}$, un dans chaque orbite de δ_{irr}, et notons $J'_1,\cdots,J'_{n_{\text{irr}}}$ les sous-ensembles correspondant dans $\{0,\cdots,2f-1\}$ et $d_i \overset{\text{déf}}{=} d_{\text{irr}}(J_i)$. Alors, pour tout i, $\omega_{2f}^{\sum_{j\in\iota(J'_i)}p^j}$ est une puissance entière de ω_{d_i}, et il existe $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n_{\text{irr}}}$ dans $E^\times$ tels que :

$$V(M(D)) \simeq \bigoplus_{i=1}^{n_{\text{irr}}}\Big(\mathrm{ind}_{\mathbb{Q}_{p^{d_i}}}^{\mathbb{Q}_p}\omega_{2f}^{(\sum_{j\in\iota(J'_i)}p^j)(\sum_{j=0}^{f-1}(r_j+1)p^j)}\Big)\otimes\omega^{-\sum_{j=0}^{f-1}(r_j+1)}\mu_{\alpha_i}.$$

Démonstration. — Le fait que $\omega_f^{\sum_{j\in\iota(J_i)}p^j}$ (resp. $\omega_{2f}^{\sum_{j\in\iota(J'_i)}p^j}$) est une puissance entière de ω_{d_i} découle immédiatement du (ii) du lemme 5.2. Dans les deux cas, on calcule s_i et c_i pour tout i (cf. (10)) puis on applique la proposition 4.7. On note $\sigma_i \in \mathcal{D}(\rho)$ le poids associé à J_i.

(i) On note δ au lieu de $\delta_{\text{réd}}$. Soit $\lambda_i \overset{\text{déf}}{=} (\lambda_{i,j}(x_j)) \in \mathcal{RD}(x_0,\cdots,x_{f-1})$ le f-uplet associé à σ_i (cf. §2) et $h_i \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{2}|(J_i\cup\delta(J_i))\setminus(J_i\cap\delta(J_i))|$. On peut voir que h_i est le nombre de séquences $p-2-\cdot, p-3-\cdot,\cdots,p-3-\cdot,\cdot+1$ dans λ_i.

Calculons d'abord s_i. Si J est un sous-ensemble quelconque de $\{0,\cdots,f-1\}$,

$\sigma \in \mathcal{D}(\rho)$ le poids correspondant, χ le caractère donnant l'action de I sur σ^{I_1}, $\lambda = (\lambda_j(x_j)) \in \mathcal{RD}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ le f-uplet associé à σ et $\delta(\lambda) = (\delta(\lambda)_j(x_j))$ celui associé à $\delta(\sigma)$, un examen de la position de $\delta(\sigma)$ dans l'induite $\mathrm{ind}_I^K \chi^s$ (de socle σ et co-socle $\sigma^{[s]}$) montre, en utilisant [**6**, Lem.2.7], que l'on a $s(\chi) = 0$ si $\delta(\sigma) = \sigma$ et, si $\delta(\sigma) \neq \sigma$:

$$|s(\chi)| = \Big(\sum_{\substack{0\leq k\leq f-1\\ \delta(\lambda)_k(x_k)=p-2-x_k}} r_k + 1\Big) + \Big(\sum_{\substack{0\leq k\leq f-1\\ \delta(\lambda)_k(x_k)=x_k+1}} p-2-r_k\Big). \tag{13}$$

Des formules (13) et (10), on déduit alors :

$$s_i = h_i(1+p+\cdots+p^{d_i-1}) + \frac{1}{p-1}\sum_{j=0}^{d_i-1} p^{d_i-1-j}\Delta_j$$

où :

$$\Delta_j \overset{\text{déf}}{=} \sum_{\substack{0\leq k\leq f-1\\ \delta^{j+1}(\lambda_i)_k(x_k)=p-2-x_k}} (r_k+1) \quad - \sum_{\substack{0\leq k\leq f-1\\ \delta^{j+1}(\lambda_i)_k(x_k)=x_k+1}} (r_k+1).$$

Un calcul montre que, dans l'expression $\frac{1}{p-1}\sum_{j=0}^{d_i-1} p^{d_i-1-j}\Delta_j$, le coefficient de (r_j+1), $0\leq j\leq f-1$ est congru modulo $p^{d_i}-1$ (dans $\mathbb{Z}$) à $p^j\sum_{\substack{k\in J_i\\ k<d_i}} p^{d_i-1-k}$ si $j\notin J_i$ et à $-(1+p+\cdots+p^{d_i-1}) + p^j\sum_{\substack{k\in J_i\\ k<d_i}} p^{d_i-1-k}$ si $j\in J_i$. On a donc :

$$\begin{aligned} s_i \equiv{}& \Big(h_i - \sum_{j\in J_i}(r_j+1)\Big)(1+p+\cdots+p^{d_i-1}) \\ &+ \Big(\sum_{\substack{k\in J_i\\ k<d_i}} p^{d_i-1-k}\Big)\Big(\sum_{j=0}^{f-1}(r_i+1)p^j\Big) \quad (p^{d_i}-1). \end{aligned} \tag{14}$$

Comme $\sum_{j\in\iota(J_i)} p^j = \frac{p^f-1}{p^{d_i}-1}\sum_{\substack{j\in\iota(J_i)\\ j<d_i}} p^j$ ((ii) du lemme 5.2) et :

$$\sum_{\substack{j\in\iota(J_i)\\ j<d_i}} p^j = \sum_{\substack{f-1-j\in J_i\\ j<d_i}} p^j = \sum_{\substack{d_i-1-j\in J_i\\ j<d_i}} p^j = \sum_{\substack{k\in J_i\\ k<d_i}} p^{d_i-1-k},$$

on voit avec (14) que :

$$\begin{aligned} \omega_{d_i}^{s_i} &= \omega_{d_i}^{(h_i-\sum_{j\in J_i}(r_j+1))\frac{p^{d_i}-1}{p-1}}\,\omega_{d_i}^{\left(\sum_{\substack{k\in J_i\\ k<d_i}} p^{d_i-1-k}\right)(\sum_{j=0}^{f-1}(r_i+1)p^j)} \\ &= \omega^{h_i-\sum_{j\in J_i}(r_j+1)}\,\omega_f^{\frac{p^f-1}{p^{d_i}-1}\left(\sum_{\substack{j\in\iota(J_i)\\ j<d_i}} p^j\right)(\sum_{j=0}^{f-1}(r_i+1)p^j)} \\ &= \omega^{h_i-|J_i|-\sum_{j\in J_i} r_j}\,\omega_f^{(\sum_{j\in\iota(J_i)} p^j)(\sum_{j=0}^{f-1}(r_i+1)p^j)}. \end{aligned}$$

Calculons maintenant c_i. Rappelons que l'on a $\sigma_i=(\lambda_{i,j}(r_j))\otimes\det^{e_i}$ avec $e_i\overset{\text{déf}}{=}e(\lambda_i)(r_0,\cdots,r_{f-1})$ (cf. §2). On vérifie facilement :

$$\sum_{j=0}^{f-1}\lambda_{i,j}(r_j)p^j\equiv-\sum_{j\in J_i}(r_j+1)p^j+\sum_{j\notin J_i}r_jp^j-|J_i|+2h_i\quad(p-1)$$

et de la formule pour $e(\lambda_i)$ (cf. §2), un calcul donne :

$$e_i=\sum_{j\in J_i}(r_j+1)p^j-\sum_{\lambda_{i,j}(x_j)=x_j+1}p^j\equiv\sum_{j\in J_i}(r_j+1)p^j-h_i\quad(p-1).$$

Comme $c_i=\sum_{j=0}^{f-1}\lambda_{i,j}(r_j)p^j+e_i$, on obtient finalement :

$$c_i\equiv\sum_{j\notin J_i}r_j-|J_i|+h_i\quad(p-1).\tag{15}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\Big(\mathrm{ind}_{\mathbb{Q}_{p^{d_i}}}^{\mathbb{Q}_p}\omega_{d_i}^{s_i}\Big)\otimes\omega^{-(c_i+f)}&\simeq\Big(\mathrm{ind}_{\mathbb{Q}_{p^{d_i}}}^{\mathbb{Q}_p}\omega_f^{(\sum_{j\in\iota(J_i)}p^j)(\sum_{j=0}^{f-1}(r_i+1)p^j)}\Big)\otimes\omega^{-(\sum_{j\in J_i}r_j)-(\sum_{j\notin J_i}r_j)-f}\\&\simeq\Big(\mathrm{ind}_{\mathbb{Q}_{p^{d_i}}}^{\mathbb{Q}_p}\omega_f^{(\sum_{j\in\iota(J_i)}p^j)(\sum_{j=0}^{f-1}(r_i+1)p^j)}\Big)\otimes\omega^{-\sum_{j\in J_i}(r_j+1)p^j}.\end{aligned}$$

Le résultat pour (i) découle alors de la proposition 4.7 puisque les représentations non-ramifiées $\rho_i=\mu_{\lambda_i}$ sont ici toutes de dimension 1.

(ii) On note δ pour δ_{irr} et $\lambda_i\overset{\text{déf}}{=}(\lambda_{i,j}(x_j))\in\mathcal{ID}(x_0,\cdots,x_{f-1})$ le f-uplet associé à σ_i. Remarquons d'abord que :

$$\sum_{j\in\iota(\delta(J_i'))}p^j=\sum_{j\in\delta^{-1}(\iota(J_i'))}p^j\equiv p\Big(\sum_{j\in\iota(J_i')}p^j\Big)\quad(q-1),$$

et on voit qu'il est équivalent de démontrer le théorème pour $\delta(J_i)$ ou pour J_i. Quitte à remplacer ainsi J_i par $\delta^s(J_i)$ pour s convenable, on peut toujours supposer $\lambda_{i,0}(x_0)\in\{x_0,p-2-x_0\}$. Notons encore h_i le nombre de séquences $p-2-\cdot,p-3-\cdot,\cdots,p-3-\cdot,\cdot+1$ dans λ_i. Le calcul de c_i est alors le même qu'en (i) et en particulier c_i vérifie la congruence (15). Passons à s_i. Si J est un sous-ensemble quelconque de $\{0,\cdots,f-1\}$, $\sigma\in\mathcal{D}(\rho)$ le poids correspondant, χ le caractère donnant l'action de I sur σ^{I_1}, J' le sous-ensemble de $\{0,\cdots,2f-1\}$ associé à J, $\lambda'=(\lambda'_j(x_j))\in\mathcal{RD}(x_0,\cdots,x_{2f-1})$ le $2f$-uplet formellement associé à J' par la même règle que dans le cas réductible du §2 mais avec $2f$ au lieu de f et $\delta(\lambda')=(\delta(\lambda')_j(x_j))=(\lambda'_{j+1}(x_{j+1}))$, un examen de la position de $\delta(\sigma)$ dans l'induite $\mathrm{ind}_I^K\chi^s$ montre, en utilisant comme précédemment [**6**, Lem.2.7], que l'on a :

$$\begin{aligned}|s(\chi)|=\Big(\sum_{\substack{1\le k\le f-1\\ \delta(\lambda')_k(x_k)=p-2-x_k}}r_k+1\Big)+\Big(\sum_{\substack{1\le k\le f-1\\ \delta(\lambda')_k(x_k)=x_k+1}}p-2-r_k\Big)\\+\varepsilon^+r_0+\varepsilon^-(p-1-r_0)\end{aligned}\tag{16}$$

où $\varepsilon^+ = 1$ (resp. $\varepsilon^- = 1$) si $\delta(\lambda')_0(x_0) = p-2-x_0$ (resp. $\delta(\lambda')_0(x_0) = x_0+1$) et $\varepsilon^+ = 0$ (resp. $\varepsilon^- = 0$) sinon. Des formules (16) et (10), on déduit alors par un calcul similaire à celui en (i) :

$$s_i = \big(h_i(1+p+\cdots+p^{d_i-1}) + C_0\big) + \Big(C_0 r_0 + \sum_{j=1}^{f-1} C_j(r_j+1)\Big)$$

où :

$$\begin{aligned} C_j &\equiv p^j\Big(\sum_{\substack{k\in\iota(J_i')\\ k<d_i}} p^k\Big) \quad (p-1) \text{ si } j\notin J_i \\ C_j &\equiv -(1+p+\cdots+p^{d_i-1}) + p^j\Big(\sum_{\substack{k\in\iota(J_i')\\ k<d_i}} p^k\Big) \quad (p-1) \text{ si } j\in J_i. \end{aligned}$$

On montre alors comme au (i) en utilisant le (ii) du lemme 5.2 que l'on a :

$$\big(\mathrm{ind}_{\mathbb{Q}_{p^{d_i}}}^{\mathbb{Q}_p}\omega_{d_i}^{s_i}\big)\otimes\omega^{-(c_i+f)} = \Big(\mathrm{ind}_{\mathbb{Q}_{p^{d_i}}}^{\mathbb{Q}_p}\omega_{2f}^{(\sum_{j\in\iota(J_i')}p^j)(\sum_{j=0}^{f-1}(r_i+1)p^j)}\Big)\otimes\omega^{-\sum_{j\in J_i}(r_j+1)p^j}$$

et le résultat découle de la proposition 4.7. $\square$

On en déduit le résultat cherché :

Corollaire 5.4. — *On a un isomorphisme :*

$$V(M(D))|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}})} \simeq \big(\mathrm{ind}_F^{\otimes\mathbb{Q}_p}(\rho\otimes_{\overline{\mathbb{F}_p}}(\det\rho)^{-1})\big)|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}})}.$$

Démonstration. — Un calcul évident à partir des expressions pour $\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}})}$ données juste avant le théorème 5.3 donne :

(i) $\big(\mathrm{ind}_F^{\otimes\mathbb{Q}_p}(\rho\otimes(\det\rho)^{-1})\big)|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}})} \simeq \bigoplus_{i=1}^{n_{\mathrm{réd}}}\Big(\mathrm{ind}_{\mathbb{Q}_{p^{d_i}}}^{\mathbb{Q}_p}\omega_f^{(\sum_{j\in J_i}p^j)(\sum_{j=0}^{f-1}(r_j+1)p^j)}\Big)\otimes \omega^{-\sum_{j=0}^{f-1}(r_j+1)}$

(ii) $\big(\mathrm{ind}_F^{\otimes\mathbb{Q}_p}(\rho\otimes(\det\rho)^{-1})\big)|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}})} \simeq \bigoplus_{i=1}^{n_{\mathrm{irr}}}\Big(\mathrm{ind}_{\mathbb{Q}_{p^{d_i}}}^{\mathbb{Q}_p}\omega_{2f}^{(\sum_{j\in J_i'}p^j)(\sum_{j=0}^{f-1}(r_j+1)p^j)}\Big)\otimes \omega^{-\sum_{j=0}^{f-1}(r_j+1)}$

suivant les cas (i) ρ scindée et (ii) ρ irréductible. Comme $(\iota\circ\delta_{\mathrm{réd}}^s)(J_i) = (\delta_{\mathrm{réd}}^{-s}\circ\iota)(J_i)$ (resp. $(\iota\circ\delta_{\mathrm{irr}}^s)(J_i') = (\delta_{\mathrm{irr}}^{-s}\circ\iota)(J_i')$), l'application $J_i\mapsto\iota(J_i)$ (resp. $J_i\mapsto\iota(J_i')\cap\{0,\cdots,f-1\}$) envoie une orbite de $\delta_{\mathrm{réd}}$ (resp. de δ_{irr}) sur une autre orbite et induit une permutation sur les orbites de $\delta_{\mathrm{réd}}$ (resp. de δ_{irr}). Puisque l'on somme sur toutes les orbites, on a donc :

(i) $\bigoplus_{i=1}^{n_{\mathrm{réd}}}\mathrm{ind}_{\mathbb{Q}_{p^{d_i}}}^{\mathbb{Q}_p}\omega_f^{(\sum_{j\in J_i}p^j)(\sum_{j=0}^{f-1}(r_j+1)p^j)} \simeq \bigoplus_{i=1}^{n_{\mathrm{réd}}}\mathrm{ind}_{\mathbb{Q}_{p^{d_i}}}^{\mathbb{Q}_p}\omega_f^{(\sum_{j\in\iota(J_i)}p^j)(\sum_{j=0}^{f-1}(r_j+1)p^j)}$

(ii) $\bigoplus_{i=1}^{n_{\mathrm{irr}}}\mathrm{ind}_{\mathbb{Q}_{p^{d_i}}}^{\mathbb{Q}_p}\omega_{2f}^{(\sum_{j\in J_i'}p^j)(\sum_{j=0}^{f-1}(r_j+1)p^j)} \simeq \bigoplus_{i=1}^{n_{\mathrm{irr}}}\mathrm{ind}_{\mathbb{Q}_{p^{d_i}}}^{\mathbb{Q}_p}\omega_{2f}^{(\sum_{j\in\iota(J_i')}p^j)(\sum_{j=0}^{f-1}(r_j+1)p^j)}$

d'où le résultat par le théorème 5.3. $\square$

6. Valeurs privilégiées de paramètres

On montre qu'il existe des valeurs "privilégiées" de certains des paramètres apparaissant sur les diagrammes de Diamond associés à ρ, valeurs qui assurent que $V(M(D))$ est isomorphe à $\mathrm{ind}_F^{\otimes \mathbb{Q}_p}(\rho \otimes (\det \rho)^{-1})$ (et non plus seulement en restriction à l'inertie).

Soit ρ semi-simple générique et D un diagramme de Diamond associé comme au §5. Soit $n_{\text{réd}}$, (J_i), (d_i), $1 \le i \le n_{\text{réd}}$ (resp. n_{irr}, (J_i), (d_i), $1 \le i \le n_{\text{irr}}$) comme dans le théorème 5.3. Notons χ_i l'action de I sur $\sigma_i^{I_1}$ où $\sigma_i \in \mathcal{D}(\rho)$ est le poids associé à J_i. Pour tout i, rappelons que l'on a en particulier des isomorphismes $S^{d_i} : V_{\chi_i} \xrightarrow{\sim} V_{\chi_i}$. Comme $\dim_E V_{\chi_i} = 1$, on voit que S^{d_i} est la multiplication par un scalaire $\nu_i \in E^\times$. Si l'on remplace χ_i par $S^s(\chi_i)$, cela ne change pas la valeur de ν_i, qui ne dépend donc que de l'orbite de $\delta_{\text{réd}}$ (resp. δ_{irr}) contenant J_i. On dit que les ν_i sont des "paramètres" associés au diagramme de Diamond choisi.

Lemme 6.1. — *Si $d_i = 2$ alors $\nu_i = (-1)^{\sum_{j=0}^{f-1} r_j}$.*

Démonstration. — Notons indifféremment δ pour $\delta_{\text{réd}}$ ou δ_{irr} et soit λ_i le f-uplet associé à σ_i (comme dans la preuve du théorème 5.3). Puisque $d_i = 2$, on a $\delta(J_i) \neq J_i$ et $\delta^2(J_i) = J_i$ ce qui force les deux cas suivants, quitte à remplacer peut-être J_i par $\delta(J_i)$:

(i) ρ réductible, f pair, $\lambda_{i,j}(x_j) = p - 2 - x_j$ si j pair, $\lambda_{i,j}(x_j) = x_j + 1$ si j impair

(ii) ρ irréductible, f impair, $\lambda_{i,0}(x_0) = x_0$, $\lambda_{i,j}(x_j) = x_j + 1$ si $j > 0$ pair, $\lambda_{i,j}(x_j) = p - 2 - x_j$ si j impair.

En particulier, on a $\delta(\sigma_i) = \sigma_i^{[s]}$ et, écrivant $\sigma_i = (\lambda_{i,j}(r_j)) \otimes \det^{e_i}$:

$$\begin{aligned} \chi_i \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} &= \overline{a}^{\sum_{j=0}^{f-1} \lambda_{i,j}(r_j)p^j} (\overline{a}\overline{d})^{e_i} \\ S(\chi_i) \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} &= \overline{d}^{\sum_{j=0}^{f-1} \lambda_{i,j}(r_j)p^j} (\overline{a}\overline{d})^{e_i}. \end{aligned}$$

Soit v_i une base quelconque de V_{χ_i}, la surjection naturelle $\mathrm{ind}_I^K \chi_i^s \twoheadrightarrow \langle K\Pi v_i \rangle$ (voir preuve du lemme 4.1) n'est pas injective, sinon on aurait $\delta(\sigma_i) = \sigma_i$. Elle envoie donc le socle de $\mathrm{ind}_I^K \chi_i^s$ sur 0. Par [**6**, Lem.2.7(i)], cela implique l'égalité dans $\langle K\Pi v_i \rangle$:

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^{\sum_{j=0}^{f-1} \lambda_{i,j}(r_j)p^j} \begin{pmatrix} p & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v_i + (-1)^{e_i + \sum_{j=0}^{f-1} \lambda_{i,j}(r_j)p^j} \Pi v_i = 0.$$

On a une égalité analogue avec Πv_i au lieu de v_i. On en déduit :

$$\begin{aligned} S(v_i) &= \sum_{\lambda\in\mathbb{F}_q} \lambda^{\sum_{j=0}^{f-1}\lambda_{i,j}(r_j)p^j} \begin{pmatrix} p & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v_i = (-1)^{1+e_i+\sum_{j=0}^{f-1}\lambda_{i,j}(r_j)p^j}\Pi v_i \\ S(\Pi v_i) &= \sum_{\lambda\in\mathbb{F}_q} \lambda^{q-1-\sum_{j=0}^{f-1}\lambda_{i,j}(r_j)p^j} \begin{pmatrix} p & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Pi v_i = (-1)^{1+e_i}\Pi^2 v_i \end{aligned}$$

d'où :

$$S^2(v_i) = (-1)^{\sum_{j=0}^{f-1}\lambda_{i,j}(r_j)}\Pi^2 v_i = (-1)^{\sum_{j=0}^{f-1} r_j} v_i$$

puisque par hypothèse $\Pi^2 = p$ agit trivialement (voir aussi l'exemple 4.8). $\square$

Lorsque $F = \mathbb{Q}_p$ et ρ est générique irréductible comme dans l'exemple 4.8, le lemme 6.1 explique pourquoi il n'y a qu'un seul diagramme de Diamond associé à ρ dans ce cas. Lorsque $d_i \neq 2$, les ν_i peuvent par contre prendre des valeurs quelconques dans $E^\times$.

Reprenons maintenant les scalaires α_i apparaissant dans le théorème 5.3. Notons que seul $\alpha_i^{d_i}$ est bien défini puisque l'on peut toujours "faire rentrer" le caractère non-ramifié μ_{α_i} dans l'induite. On peut calculer explicitement les scalaires $\alpha_i^{d_i}$ en fonction des paramètres ν_i.

Lemme 6.2. — *(i) Supposons ρ réductible et soit $h_i \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2}|(J_i \cup \delta_{\text{réd}}(J_i)) \setminus (J_i \cap \delta_{\text{réd}}(J_i))|$, alors pour tout i on a :*

$$\alpha_i^{d_i} = (-1)^{\frac{d_i h_i}{f}\sum_{j=0}^{f-1} r_j}\nu_i^{-1}.$$

(ii) Supposons ρ irréductible et soit $h_i \stackrel{\text{déf}}{=} |(J_i \cup \delta_{\text{irr}}(J_i)) \setminus (J_i \cap \delta_{\text{irr}}(J_i))|$, alors pour tout i on a :

$$\alpha_i^{d_i} = (-1)^{\frac{d_i h_i}{2f}(1+\sum_{j=0}^{f-1} r_j)}\nu_i^{-1}.$$

Démonstration. — Par la proposition 4.7, α_i est tel que $\overline{\varphi}^{d_i}(f_i) = \alpha_i^{d_i} f_i$ où $V_{\chi_i}^* = E f_i$. De la définition de $\overline{\varphi}$ (cf. §4), on déduit :

$$\alpha_i^{d_i} = \Big(\prod_{j=0}^{d_i-1} c(S^j(\chi_i))\Big)\nu_i^{-1}. \tag{17}$$

(i) Un calcul utilisant (13) ainsi que (5) fournit :

$$\prod_{j=0}^{d_i-1} c(S^j(\chi_i)) = \Big(\prod_{j=0}^{f-1}(r_j+1)!(p-2-r_j)!\Big)^{\frac{d_i h_i}{f}} = (-1)^{\frac{d_i h_i}{f}\sum_{j=0}^{f-1} r_j}$$

(notons que h_i est bien divisible par f/d_i par "périodicité"). Avec (17) on a donc $\alpha_i^{d_i} = (-1)^{\frac{d_i h_i}{f}\sum_{j=0}^{f-1} r_j}\nu_i^{-1}$.

(ii) Un calcul analogue au précédent utilisant (16) et (5) fournit cette fois :

$$\prod_{j=0}^{d_i-1} c(S^j(\chi_i)) = \Big(r_0!(p-1-r_0)!\prod_{j=1}^{f-1}(r_j+1)!(p-2-r_j)!\Big)^{\frac{d_ih_i}{2f}} = (-1)^{\frac{d_ih_i}{2f}(1+\sum_{j=0}^{f-1}r_j)}$$

et on conclut de même avec (17). $\square$

La preuve du lemme suivant est un calcul explicite que l'on laisse au lecteur à partir des expressions de ρ données avant le théorème 5.3 (rappelons que $\overline{J_i}$ désigne le complémentaire de J_i dans $\{0,\cdots,f-1\}$).

Lemme 6.3. — *(i) Si ρ est réductible, on a :*

$$\mathrm{ind}_F^{\otimes\mathbb{Q}_p}\rho \simeq \bigoplus_{i=1}^{n_{\text{réd}}}\mathrm{ind}_{\mathbb{Q}_{p^{d_i}}}^{\mathbb{Q}_p}\Big(\omega_f^{(\sum_{j\in J_i}p^j)(\sum_{j=0}^{f-1}(r_j+1)p^j)}\otimes\mu_{\alpha^{(|J_i|-|\overline{J_i}|)\frac{d_i}{f}}}\Big).$$

(ii) Si ρ est irréductible, on a :

$$\mathrm{ind}_F^{\otimes\mathbb{Q}_p}\rho \simeq \bigoplus_{i=1}^{n_{\text{irr}}}\mathrm{ind}_{\mathbb{Q}_{p^{d_i}}}^{\mathbb{Q}_p}\Big(\omega_{2f}^{(\sum_{j\in J_i'}p^j)(\sum_{j=0}^{f-1}(r_j+1)p^j)}\otimes\mu_{(-1)^{\frac{d_i}{2}}}\Big).$$

Notons que, dans le cas réductible, $|J_i|$ et $|\overline{J_i}|$ sont toujours divisibles par f/d_i, de sorte que $(|J_i|-|\overline{J_i}|)\frac{d_i}{f}$ est un entier, qui de plus ne dépend que de l'orbite de J_i sous $\delta_{\text{réd}}$. De même, dans le cas irréductible, d_i est toujours divisible par 2 (exercice !).

Une des questions importantes du programme de Langlands modulo p pour $\mathrm{GL}_2(F)$ est de savoir si certaines valeurs des paramètres apparaissant sur les diagrammes de Diamond, en particulier les paramètres ν_i, jouent un rôle privilégié. On peut combiner le théorème 5.3 avec les résultats précédents pour "distinguer" certaines valeurs des ν_i :

Théorème 6.4. — *Pour que $V(M(D)) \simeq \mathrm{ind}_F^{\otimes\mathbb{Q}_p}(\rho\otimes_{\overline{\mathbb{F}_p}}(\det\rho)^{-1})$, il suffit que l'on ait les valeurs suivantes pour les ν_i :*

(i) *si ρ réductible, $\nu_i = (-1)^{\frac{d_ih_i}{f}\sum_{j=0}^{f-1}r_j}\alpha^{(|\overline{J_i}|-|J_i|)\frac{d_i}{f}}$ pour tout i*

(ii) *si ρ irréductible, $\nu_i = (-1)^{\frac{d_i}{2}+\frac{d_ih_i}{2f}(1+\sum_{j=0}^{f-1}r_j)}$ pour tout i.*

Démonstration. — Sous la condition (i), on a en effet par le lemme 6.2 pour tout $i\in\{0,\cdots,n_{\text{réd}}\}$:

$$\mathrm{ind}_{\mathbb{Q}_{p^{d_i}}}^{\mathbb{Q}_p}\Big(\omega_f^{(\sum_{j\in\iota(J_i)}p^j)(\sum_{j=0}^{f-1}(r_j+1)p^j)}\otimes\mu_{\alpha^{(|J_i|-|\overline{J_i}|)\frac{d_i}{f}}}\Big)\simeq$$
$$\mathrm{ind}_{\mathbb{Q}_{p^{d_i}}}^{\mathbb{Q}_p}\Big(\omega_f^{(\sum_{j\in\iota(J_i)}p^j)(\sum_{j=0}^{f-1}(r_j+1)p^j)}\otimes\mu_{\alpha_i^{d_i}}\Big)$$

en remarquant que, si $\iota(i)$ est l'indice de l'orbite de $\delta_{\text{réd}}$ contenant $\iota(J_i)$, on a $d_{\iota(i)} = d_i$, $|J_{\iota(i)}| = |J_i|$ et $|\overline{J_{\iota(i)}}| = |\overline{J_i}|$. Le résultat pour (i) découle donc du lemme 6.3 et du théorème 5.3. La preuve de (ii) est similaire. $\square$

Lorsque $d_i = 1$, ce qui n'arrive que si ρ est réductible, le théorème 6.4 donne la condition $\nu_i = \alpha$ si $J_i = \emptyset$ (c'est-à-dire si $\sigma_i = (r_0, \cdots, r_{f-1})$) et $\nu_i = \alpha^{-1}$ si $J_i = \{0, \cdots, f-1\}$ (c'est-à-dire si $\sigma_i = (p-3-r_0, \cdots, p-3-r_{f-1}) \otimes \det^{\sum_{j=0}^{f-1}(r_j+1)p^j}$). Ces conditions sont bien connues dans le cas $f = 1$ (cf. [**6**, §10,§20] par exemple).

Proposition 6.5. — *Lorsque $d_i = 2$, les conditions du théorème 6.4 sont automatiquement réalisées.*

Démonstration. — Lorsque $d_i = 2$, on peut calculer que l'on a $h_i = |J_i| = |\overline{J_i}| = f/2$ si ρ est réductible et $h_i = f$ si ρ est irréductible. Dans les deux cas, le théorème 6.4 donne $\nu_i = (-1)^{\sum_{j=0}^{f-1} r_j}$ qui est bien aussi la valeur donnée par le lemme 6.1. $\square$

Malheureusement, pour $f > 1$, il y a en général bien d'autres "paramètres" dans D que les ν_i précédent, de sorte que fixer les valeurs du théorème 6.4 ne suffit pas à privilégier un unique diagramme de Diamond D pour une représentation ρ donnée. Le seul cas pour $f > 1$ où D est complètement déterminé par les ν_i est $f = 2$ et ρ irréductible. Il n'y a alors qu'un paramètre $\nu_1 = \nu$ et le théorème 6.4 fournit la valeur "privilégiée" $\nu = (-1)^{r_0+r_1+1}$.

7. Bref retour aux représentations de $\mathrm{GL}_2(F)$

Cette partie, d'ordre essentiellement heuristique, esquisse un scénario pour tenter de retrouver les (φ, Γ)-modules du §5 à partir de représentations de $\mathrm{GL}_2(F)$ sur E.

Soit W un E-espace vectoriel sur lequel le monoïde $\begin{pmatrix} p^{\mathbb{N}} & \mathcal{O}_F \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ agit E-linéairement à gauche et W^* son dual. Si $f \in W^*$ et $h \in \mathrm{GL}_2(F)$ tel que $h^{-1} \in \begin{pmatrix} p^{\mathbb{N}} & \mathcal{O}_F \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on note $hf \in W^*$ la fonction $hf(w) \overset{\text{déf}}{=} f(h^{-1}w)$. Soit $s \in \{0, \cdots, q-1\}$ et $S : W \to W$ l'application $w \mapsto \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^s \begin{pmatrix} p & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w$. Supposons pour simplifier S bijectif, alors on a tautologiquement :

$$f = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^s \begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -[\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (f \circ S^{-1}). \tag{18}$$

Si l'on pose $\varphi(f) \overset{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f$ comme dans [**9**] ou [**1**], (18) se récrit formellement :

$$\varphi(f) = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^s \begin{pmatrix} 1 & -[\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (f \circ S^{-1}). \tag{19}$$

Soit $U(\mathbb{F}_p)$ l'unipotent supérieur de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$. On pose dans $\mathbb{F}_p[U(\mathbb{F}_p)] \otimes_{\mathbb{F}_p} E \simeq E[U(\mathbb{F}_p)]$:

$$X \overset{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a alors $E[U(\mathbb{F}_p)] \simeq E[X]/X^p$.

***Théorème 7.1* (Stickelberger).** — *Écrivons $s = \sum_{j=0}^{f-1} s_j p^j$ avec $0 \leq s_j \leq p-1$ et soit $c(s) \overset{\text{déf}}{=} \prod_{i=0}^{f-1} s_j! \in \mathbb{F}_p^\times$. Alors il existe $U(X) \in 1 + XE[U(\mathbb{F}_p)]$ (dépendant de s) tel que dans $E[U(\mathbb{F}_p)]$:*

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^s \begin{pmatrix} 1 & -\operatorname{tr}(\lambda) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^{f-1} c(s) X^{\sum_{j=0}^{f-1} p-1-s_j} U(X) \tag{20}$$

où tr *désigne la trace de $\mathbb{F}_q$ à $\mathbb{F}_p$.*

Démonstration. — Le résultat est vrai pour $f = 1$ car on a alors l'égalité (pour un certain $U(X)$ dépendant de s) :

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{F}_p} \lambda^s \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \sum_{j=0}^{p-1} (-j)^s (1+X)^j = s! X^{p-1-s} U(X).$$

Supposons $f > 1$. On retranscrit dans notre contexte la preuve du théorème 2.1 de [**12**, §1.2]. Notons $G_s \overset{\text{déf}}{=} \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^s \begin{pmatrix} 1 & -\operatorname{tr}(\lambda) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si $s = q-1$, on a $G_{q-1} = -1 + G_0 = -1 + 0 = -1$ et $(-1)^{f-1} c(s) X^{\sum_{j=0}^{f-1} p-1-s_j} = (-1)^{f-1}(-1)^f = -1$: l'égalité est vraie (avec $U(X) = 1$). Si $s = q-2$, on a :

$$G_{q-2} = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^{q-2} (1+X)^{-\operatorname{tr}(\lambda)} = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q^\times} \lambda^{q-2} (1 - \operatorname{tr}(\lambda) X + X^2 P(X))$$

(pour un certain $P(X) \in E[X]/X^p$). Si $\lambda \neq 0$ on a $\lambda^{q-2} \operatorname{tr}(\lambda) = \lambda^{-1} \sum_{j=0}^{f-1} \lambda^{p^j} = \sum_{j=0}^{f-1} \lambda^{p^j - 1}$ d'où on déduit :

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q^\times} -\lambda^{q-2} \operatorname{tr}(\lambda) = -\sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q^\times} \sum_{j=0}^{f-1} \lambda^{p^j - 1} = -\sum_{j=0}^{f-1} \Big(\sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q^\times} \lambda^{p^j - 1} \Big) = 1.$$

Ainsi $G_{q-2} = X + X^2 P(X) = XU(X)$ qui est bien ce que l'on retrouve à droite. On fait maintenant une récurrence descendante en supposant le résultat vrai pour $s \geq k+1 \geq 2$ et en le démontrant pour $s = k \geq 1$ (et en notant indifféremment $U(X)$ toutes les unités de $1 + XE[U(\mathbb{F}_p)]$ qui apparaissent, leurs valeurs précises

ne jouant aucun rôle ici). On distingue deux cas.
Premier cas : $q-1-k = p(q-1-k')$ avec $k < k' < q-1$.
Alors :

$$G_k = G_{pk'-(p-1)(q-1)} = \sum_{\lambda\in\mathbb{F}_q} \lambda^{pk'} \begin{pmatrix} 1 & -\operatorname{tr}(\lambda) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \sum_{\lambda\in\mathbb{F}_q} \lambda^{k'} \begin{pmatrix} 1 & -\operatorname{tr}(\lambda) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = G_{k'}$$

puisque $\operatorname{tr}(\lambda) = \operatorname{tr}(\lambda^p)$. Comme $c(k) = c(k')$ et comme la puissance de X est la même pour k ou k', on voit que l'égalité pour k découle de celle pour k', qui est vraie par récurrence.
Deuxième cas : $(q-1-k, p) = 1$.
Un calcul classique sur les sommes de Gauss donne $G_sG_{s'} = G_{s+s'}J_{s,s'}$ où $J_{s,s'} \overset{\text{déf}}{=} \sum_{\lambda\in\mathbb{F}_q} \lambda^s(1-\lambda)^{s'}$ lorsque $0 \leq s, s' \leq q-1$ et $s+s'$ n'est pas divisible par $q-1$. Comme $G_k = G_{q-2+k+1}$ (car $k \geq 1$) et $k+q-1$ n'est pas divisible par $q-1$ puisque $0 < k < q-1$, on a $J_{q-2,k+1}G_k = G_{q-2}G_{k+1}$. Par ailleurs :

$$J_{q-2,k+1} = \sum_{\lambda\in\mathbb{F}_q^\times} \lambda^{-1}(1-\lambda)^{k+1} = \sum_{j=0}^{k+1}(-1)^j \binom{k+1}{j} \sum_{\lambda\in\mathbb{F}_q^\times} \lambda^{j-1} = k_0 + 1$$

si l'on écrit $k = \sum_{j=0}^{f-1} k_jp^j$. Comme $(k+1, p) = 1$, on a en particulier $k_0 < p-1$ d'où $k_0 + 1 \neq 0$ dans $\mathbb{F}_p$. Du cas $s = q-2$ et de l'hypothèse de récurrence pour $k+1$, on déduit :

$$\begin{aligned} G_k &= \frac{1}{k_0+1}(XU(X))(-1)^{f-1}c(k+1)X^{p-2-k_0}X^{\sum_{j=1}^{f-1} p-1-k_j} \\ &= (-1)^{f-1}c(k)X^{\sum_{j=0}^{f-1} p-1-k_j}U(X) \end{aligned}$$

qui est l'égalité cherchée pour $k \geq 1$. Enfin l'égalité est trivialement vraie pour $k = 0$ puisque l'on a 0 des deux côtés. □

À torsion près par $(-1)^{f-1}$, l'égalité (20) avec l'égalité (19) "où l'on a pris la trace" sont à rapprocher de la définition de φ en (6) et motivent cette dernière. L'unité $U(X)$ est inutile dans (6) (et n'y apparaît donc pas) car, à changement de base près, on peut vérifier qu'elle ne modifierait pas le (φ, Γ)-module $M(D)$ du §4.

Remarque 7.2. — L'égalité (20) se récrit dans $E[U(\mathbb{F}_p)]$:

$$\sum_{\lambda\in\mathbb{F}_q} \lambda^s \begin{pmatrix} 1 & -\operatorname{tr}(\lambda) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^{f-1}V(X)\prod_{j=0}^{f-1}\left(\sum_{\lambda\in\mathbb{F}_p} \lambda^{s_j} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

pour une unité $V(X) \in 1 + XE[U(\mathbb{F}_p)]$. Il est même possible que l'on puisse en fait prendre $V(X) = 1$ dans cette dernière égalité.

Soit maintenant ρ une représentation générique de dimension 2 de $\operatorname{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)$ sur E, D un diagramme de Diamond associé (cf. §2) et π une représentation lisse admissible de $\mathrm{GL}_2(F)$ sur E vérifiant les 3 conditions $\mathrm{soc}_K\,\pi = \oplus_{\sigma\in\mathcal{D}(\rho)}\sigma$, $(\pi^{K_1},\pi^{I_1},\mathrm{can})$ contient le diagramme D ("can" est l'injection canonique $\pi^{I_1}\hookrightarrow\pi^{K_1}$) et π est engendrée par D_0. On sait par [**6**] que de telles représentations existent mais leur étude semble très délicate lorsque $f>1$. On peut néanmoins formellement poser comme dans [**9**] (voir aussi [**10**]) :

$$M_F(\pi)\overset{\text{déf}}{=}\left(\sum_{n\geq 0}\begin{pmatrix}p^n & \mathcal{O}_F\\ 0 & 1\end{pmatrix}D_0\right)^*$$

(dual algébrique). C'est un E-espace vectoriel naturellement muni d'une structure de $E[[U(\mathcal{O}_F)]]$-module où $E[[U(\mathcal{O}_F)]]$ est l'algèbre d'Iwasawa sur E de $U(\mathcal{O}_F)$.

La trace de $\mathcal{O}_F$ à $\mathbb{Z}_p$ induit un morphisme E-linéaire d'algèbres d'Iwasawa :

$$E[[U(\mathcal{O}_F)]]\to E[[U(\mathbb{Z}_p)]]$$

que l'on peut composer avec l'inclusion $E[[U(\mathbb{Z}_p)]]\subset\mathrm{Frac}(E[[U(\mathbb{Z}_p)]])\simeq E((X))$. Les considérations précédentes suggèrent d'étudier le $E((X))$-espace vectoriel suivant (dont j'ignore s'il est de dimension finie quand $f>1$) :

$$M(\pi)\overset{\text{déf}}{=}M_F(\pi)\otimes_{E[[U(\mathcal{O}_F)]]}\mathrm{Frac}(E[[U(\mathbb{Z}_p)]]).$$

Il est muni d'une action semi-linéaire de $\Gamma\cong\mathbb{Z}_p^\times$ via l'action de $\begin{pmatrix}\mathbb{Z}_p^\times & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ (noter que $\mathrm{tr}(ax)=a\mathrm{tr}(x)$ si $a\in\mathbb{Z}_p^\times$ et $x\in\mathcal{O}_F$). On a par ailleurs un morphisme :

$$M_F(\pi)\to\left(\sum_{n\geq 0}\begin{pmatrix}p^{n+1} & p\mathcal{O}_F\\ 0 & 1\end{pmatrix}D_0\right)^*$$

où la flèche est $f\mapsto f\circ\begin{pmatrix}p^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ qui induit un morphisme :

$$M(\pi)\to\left(\sum_{n\geq 0}\begin{pmatrix}p^{n+1} & p\mathcal{O}_F\\ 0 & 1\end{pmatrix}D_0\right)^*\otimes_{E[[U(p\mathcal{O}_F)]]}\mathrm{Frac}(E[[U(p\mathbb{Z}_p)]]).$$

S'il y a moyen d'"étendre" ce morphisme à la manière de [**9**] (pour $F=\mathbb{Q}_p$) ou de [**15**] en une application $\varphi: M(\pi)\to M(\pi)$ et si de plus $M(\pi)$ est de dimension finie sur $E((X))$, on peut imaginer qu'il s'agit de l'extension des scalaires de $\mathbb{F}_p((X))\otimes_{\mathbb{F}_p}E$ à $E((X))$ d'un (φ,Γ)-module pour $\mathbb{Q}_p$ qui, lorsque ρ est semi-simple, a peut-être un lien avec le (φ,Γ)-module étale "combinatoire" $M(D)$ du §5.

Références

[1] Berger L., *Représentations modulaires de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *et représentations galoisiennes de dimension* 2, à paraître à Astérisque.

[2] Berger L., *Représentations supersingulières de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *et* (φ,Γ)*-modules*, prépublication 2008.

[3] Barthel L., Livné R., *Modular representations of* GL_2 *of a local field : the ordinary, unramified case*, J. of Number Theory 55, 1995, 1-27.

[4] Barthel L., Livné R., *Irreducible modular representations of* GL_2 *of a local field*, Duke Math. J. 75, 1994, 261-292.

[5] Breuil C., *Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de* $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ *I*, Comp. Math. 138, 2003, 165-188.

[6] Breuil C., Paškūnas V., *Towards a modulo p Langlands correspondence for* GL_2, prépublication 2007.

[7] Buzzard K., Diamond F., Jarvis F., *On Serre's conjecture for mod ℓ Galois representations over totally real fields*, prépublication 2005.

[8] Collins M., *Tensor induction and transfer*, Quart. J. Math. Oxford 40, 275-279, 1989.

[9] Colmez P., *Représentations de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *et* (φ,Γ)*-modules*, prépublication 2008.

[10] Emerton M., *On a class of coherent rings, with applications to the smooth representation theory of* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *in characteristic p*, prépublication 2008.

[11] Fontaine J.-M., *Représentations p-adiques des corps locaux I*, Progr. Math. 87, 249-309, 1990.

[12] Lang S., *Cyclotomic fields I and II*, Springer-Verlag, combined second edition, 1990.

[13] Ollivier R., *Critère d'irréductibilité pour les séries principales de* $GL_n(F)$ *en caractéristique p*, J. of Algebra 304, 2006, 39-72

[14] Paškūnas V., *Coefficient systems and supersingular representations of* $\mathrm{GL}_2(F)$, Mém. Soc. Math. de France 99, 2004.

[15] Schneider P., Vignéras M.-F., *A functor from smooth o-torsion representations to* (φ,Γ)*-modules*, prépublication 2008.

[16] Vignéras M.-F., *Representations of the p-adic group* $\mathrm{GL}(2,F)$ *modulo p*, Comp. Math. 140, 2004, 333-358.

C. Breuil, C.N.R.S. & I.H.É.S., Le Bois-Marie, 35 route de Chartres, 91440 Bures-sur-Yvette, France • *E-mail :* breuil@ihes.fr