

# INTÉGRATION SUR LES VARIÉTÉS $p$ - ADIQUES (d'après Coleman, Colmez)

Christophe Breuil

## SOMMAIRE

Introduction	1
Conventions et notations	1
Introduction	2
Conventions et notations	3
1. Construction de l'intégration $p$ -adique	4
1.1. La construction de Colmez	4
1.1.1. Énoncé du théorème	4
1.1.2. Description de la preuve	5
1.1.3. Le point de vue de Zarhin	9
1.2. La construction de Coleman	9
1.2.1. Quelques mots d'introduction sur la géométrie rigide	10
1.2.2. Intégration sur les variétés propres avec bonne réduction	11
2. Applications	15
2.1. L'accouplement des périodes $p$ -adiques	15
2.1.1. Quelques rappels sur $B_{dR}^+$	16
2.1.2. Accouplement des périodes $p$ -adiques: énoncé du théorème	17
2.1.3. Esquisse de preuve et relations de Riemann $p$ -adiques	19
2.2. Les polylogarithmes $p$ -adiques	22
2.2.1. Itération de l'intégration sur les courbes	22
2.2.2. Construction des polylogarithmes $p$ -adiques	25
2.3. Autres applications	28
Bibliographie	29

## INTRODUCTION

Soit  $X$  une variété algébrique lisse sur le corps  $\mathbf{R}$  des nombres réels. Les points de  $X$  à valeurs dans  $\mathbf{R}$  ou dans  $\mathbf{C}$ , que l'on note  $X(\mathbf{R})$  et  $X(\mathbf{C})$ , forment une variété analytique réelle ou complexe, sur laquelle on dispose de tout l'arsenal de la théorie classique de l'intégration, développé principalement avant le début du XX<sup>e</sup> siècle. Depuis l'introduction par Hensel des nombres  $p$ -adiques et de la topologie  $p$ -adique dans les années 1900, les mathématiciens n'ont eu de cesse d'étendre à  $\mathbf{Q}_p$  ce qu'ils savaient faire sur  $\mathbf{R}$ . Ainsi peut-on se demander s'il existe une théorie de l'intégration sur  $X(\mathbf{Q}_p)$  lorsque  $X$  est une variété algébrique lisse sur  $\mathbf{Q}_p$ . Or, la topologie  $p$ -adique est très différente de la topologie classique car elle est totalement discontinue, c'est-à-dire que tout point possède une base de voisinages à la fois ouverts et fermés ou encore qu'il n'y a pas d'obstruction à passer du local au global! Comme tout le charme réside essentiellement dans cette obstruction, cette tâche a longtemps semblé vouée à des sorites sans grand intérêt. Pourtant, l'existence du logarithme  $p$ -adique, connue dès les tout débuts, fournissait un exemple tout à fait non trivial d'une fonction  $p$ -adique qui avait bien l'air d'une "primitive  $p$ -adique"...

La situation change au début des années soixante avec l'introduction par Tate des espaces analytiques rigides ([Ta2]). L'idée en soi est naturelle: puisque la topologie  $p$ -adique a trop d'ouverts, on va en sélectionner certains plus "jolis" que les autres. On connaît depuis l'essor de cette théorie, dont l'un des aboutissements fut les théorèmes d'uniformisation  $p$ -adique de Mumford et Raynaud ([Mu2], [Ra3]). Coleman le premier, dans les années 80, réussit à utiliser la "topologie rigide" pour définir dans [Cole3] une théorie de l'intégration des 1-formes différentielles algébriques de seconde espèce sur les variétés algébriques projectives (ou propres) et lisses sur  $\mathbf{Q}_p$  avec bonne réduction. Motivé par les applications aux fonctions  $L$   $p$ -adiques, il étend dans le cas des courbes son intégration à toutes les 1-formes rationnelles, et même à des formes non nécessairement algébriques ou rigides, ce qui lui permet par exemple de définir des polylogarithmes  $p$ -adiques. Enfin, au début des années 90, Colmez dans [Colm1], et indépendamment Zarhin dans [Za1], parviennent à rendre possible l'impossible en intégrant sur du totalement discontinu: non seulement ils étendent l'intégrale de Coleman au cas de variétés algébriques supposées seulement lisses sur  $\mathbf{Q}_p$  et à toutes les 1-formes rationnelles fermées, mais ils le font sans passer par la géométrie rigide. Cependant, leurs méthodes ne s'appliquent pour l'instant qu'aux 1-formes algébriques et ne permettent pas de retrouver les polylogarithmes  $p$ -adiques par exemple. Une fois débarrassé des hypothèses de propreté et de bonne réduction, Colmez généralise alors de façon systématique dans [Colm2] beaucoup des théorèmes de Coleman, et obtient en outre une preuve originale et particulièrement élégante, car plus proche de son analogue complexe, de l'accouplement des périodes  $p$ -adiques des variétés abéliennes. Dernièrement, Besser a donné dans [Bes] une généralisation de l'intégrale de Coleman (sur les variétés propres lisses avec bonne réduction)

au cas de  $n$ -formes fermées avec  $n > 1$ .

L'objectif de cet exposé est de présenter dans une première partie l'intégration de Colmez et l'intégration de Coleman, puis dans une seconde partie certaines de leurs applications. J'ai pris le parti d'exposer de façon assez complète les deux constructions de l'intégration, puis de développer avec quelques détails deux applications particulières (essentiellement une par auteur), enfin de mentionner très brièvement les autres. L'exposé n'est donc pas vraiment exhaustif et je prie le lecteur averti de me pardonner s'il ne trouve pas développée ici son application favorite.

Durant la préparation de cet exposé, j'ai bénéficié de conversations orales ou "électroniques" avec plusieurs personnes dont: Amnon Besser, Jean-Benoît Bost, Robert Coleman, Pierre Colmez, Jean-Louis Colliot-Thélène, Philippe Gille, Bernard Le Stum, William Messing et Michel Raynaud. Qu'ils soient tous chaleureusement remerciés pour leur aide. Je suis reconnaissant à Amnon Besser, Robert Coleman et Glenn Stevens de m'avoir envoyé respectivement les références [Bes], [CI] et [St] (parmi d'autres; la lecture de [St] en particulier m'a facilité la rédaction de la partie 2.2). Enfin, je remercie Jean-Benoît Bost, Jean-Marc Fontaine, Michel Raynaud et surtout Pierre Colmez pour leurs remarques sur des versions préliminaires de ce texte.

### CONVENTIONS ET NOTATIONS

Dans tout cet article, on fixe un nombre premier  $p$  et une clôture algébrique  $\overline{\mathbf{Q}}_p$  de  $\mathbf{Q}_p$ . On note  $\mathbf{C}_p$  la complétion  $p$ -adique de  $\overline{\mathbf{Q}}_p$ ,  $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$  l'anneau des entiers de  $\mathbf{C}_p$  et  $|\cdot|$  la valeur absolue  $p$ -adique sur  $\mathbf{C}_p$  donnée par  $|x| = \frac{1}{p^{\text{val}(x)}}$  où  $\text{val}$  est la valuation  $p$ -adique normalisée par  $\text{val}(p) = 1$ . Le logarithme d'Iwasawa est l'unique fonction  $\log : \mathbf{C}_p - \{0\} \rightarrow \mathbf{C}_p$  telle que:

$$\begin{aligned} \log(1-x) &= -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \quad \text{si } |x| < 1 \\ \log(xy) &= \log(x) + \log(y) \\ \log(p) &= 0. \end{aligned}$$

Le choix  $\log(p) = 0$  est arbitraire (on peut même décider que  $\log(p)$  est une indéterminée, c.f. [Colm2]) mais naturel du point de vue de la théorie des nombres. Une variété est un schéma  $X$  séparé de type fini et géométriquement intègre sur un corps  $K$ . Nous ne considérerons en fait que des variétés lisses, c'est-à-dire telles que  $X \rightarrow \text{Spec}(K)$  est un morphisme lisse. Une variété abélienne sur  $K$  est une variété  $X$  sur  $K$  munie d'une structure de  $K$ -schéma en groupes et telle que  $X \rightarrow \text{Spec}(K)$  est propre. Cela entraîne  $X \rightarrow \text{Spec}(K)$  lisse. Une fonction rationnelle (resp. une 1-forme rationnelle) sur une variété  $X$  est un élément du

corps des fonctions  $K(X)$  (resp. des différentielles de Kähler  $\Omega_{K(X)/K}^1$ ) qu'on peut voir comme une fonction (resp. une 1-forme) régulière sur un ouvert de Zariski  $U$  de  $X$ . Si  $X$  est une variété sur  $K$ , on supposera toujours  $X(K) \neq \emptyset$ .

## 1. CONSTRUCTION DE L'INTÉGRATION $p$ -ADIQUE

**1.1. La construction de Colmez.** Dans cette partie,  $K$  désigne soit  $\mathbf{C}_p$ , soit une extension finie de  $\mathbf{Q}_p$  dans  $\mathbf{C}_p$ .

**1.1.1. *Énoncé du théorème.*** Soit  $X$  une variété lisse sur  $K$  de dimension  $d$ . On a supposé  $X(K) \neq \emptyset$ . Pour tout ouvert de Zariski affine  $U$  de  $X$ , il existe une immersion fermée  $U \hookrightarrow \mathbf{A}^m$  pour  $m \gg 0$  et on définit la topologie  $p$ -adique sur  $U(K)$  comme la topologie induite par la topologie  $p$ -adique sur  $\mathbf{A}^m(K) = K^m$ . C'est indépendant de l'immersion choisie. Par recollement, on obtient la topologie  $p$ -adique sur  $X(K)$ . On appelle ouverts  $p$ -adiques les ouverts pour cette topologie. Tout point de  $X(K)$  admet pour la topologie  $p$ -adique une base de voisinages ouverts et fermés puisque tel est le cas sur  $K^m$ : cette topologie est donc totalement discontinue. Comme  $X$  est lisse, pour tout  $x \in X(K)$ , il existe un ouvert de Zariski  $U_x = \text{Spec}(K[x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_d]/(f_1, \dots, f_n))$  contenant  $x$  où  $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})_{1 \leq i, j \leq n}$  est de déterminant inversible et tel que  $x \in U_x(K)$  correspond à  $(x_i = 0, z_j = 0)$ . Pour définir la structure *analytique*  $p$ -adique sur  $X(K)$ , rappelons le:

**Lemme 1.1.1.1.** *La projection sur les  $d$  dernières composantes  $z_1, \dots, z_d$  induit un homéomorphisme entre un ouvert  $p$ -adique  $V$  de  $U_x(K) \subset X(K)$  contenant  $x$  et la boule ouverte  $B(0, \delta_-)^d = \{(z_1, \dots, z_d) \in K^d \mid |z_i| < \delta, 1 \leq i \leq d\}$  pour un  $\delta$  suffisamment petit dans  $\mathbf{R}^+ - \{0\}$ .*

Cela résulte d'un algorithme élémentaire (théorème des fonctions implicites!), voir par exemple ([Colm2], A.3.4). Remarquons que tout ouvert  $p$ -adique peut s'écrire comme une réunion *disjointe* de boules ouvertes comme en (1.1.1.1) (car si  $B_1^d$  et  $B_2^d$  sont deux telles boules, on a soit  $B_1^d \cap B_2^d = \emptyset$ , soit  $B_1^d \subset B_2^d$ , soit  $B_2^d \subset B_1^d$ ).

**Définition 1.1.1.2.** *Une fonction localement analytique sur un ouvert  $p$ -adique  $W$  de  $X(K)$  est une fonction  $f$  de  $W$  dans  $K$  telle que, pour tout  $x \in W$  et pour un choix (donc tout choix) de paramètres locaux  $z_i$  autour de  $x$  comme en (1.1.1.1), il existe  $S \in K[[z_1, \dots, z_d]]$  et  $r \in \mathbf{R}^+ - \{0\}$  ( $r \leq \delta$ ) tels que  $S(z_1, \dots, z_d)$  converge si  $|z_i| < r$  et coïncide avec  $f$  sur ce voisinage.*

**Exemple 1.1.1.3.** Toute fonction rationnelle  $f$  régulière sur un ouvert de Zariski  $U$  est une fonction localement analytique sur  $U(K)$ . Soit  $\log(f)$  la fonction définie comme la composée  $U(K) - \{x \mid f(x) = 0\} \xrightarrow{f} K^\times \xrightarrow{\log} K$ :  $\log(f)$  est une fonction localement analytique sur  $W = U(K) - \{x \mid f(x) = 0\}$ .

On définit l'espace analytique  $p$ -adique  $X^{an}$  associé à  $X$  comme l'espace annelé  $X(K)$  muni de la topologie  $p$ -adique et du faisceau  $\mathcal{O}_{X^{an}}$  des fonctions localement analytiques. Si  $\mathcal{O}_X$  est le faisceau structural sur  $X$ ,  $\mathcal{O}_{X^{an}}$  restreint à la topologie de Zariski est un faisceau de  $\mathcal{O}_X$ -modules et, en utilisant (1.1.1.1), on peut définir une différentielle  $d : \mathcal{O}_{X^{an}} \rightarrow \mathcal{O}_{X^{an}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/K}^1$  où  $\Omega_{X/K}^1$  est le faisceau des différentielles de Kähler. Si  $f$  est une fonction rationnelle, on a  $d \log(f) = \frac{df}{f}$ . On note  $K(X)_{log} = K(X)[\log(f), f \in K(X)^\times]$  où les éléments de  $K(X)$  sont vus comme des fonctions localement analytiques. Les fonctions  $f$  de  $K(X)_{log}$  sont toutes localement analytiques sur un ouvert de Zariski  $U_f(K)$  de  $X(K)$ . Le lemme suivant sera utilisé plusieurs fois:

**Lemme 1.1.1.4.** *Soient  $f \in K(X)_{log}$  et  $W \subset X(K)$  un ouvert  $p$ -adique. Si  $f|_W = 0$  alors  $f = 0$ .*

Voir ([Colm2], II.1.7) pour la preuve. Inutile de dire que cet énoncé est faux pour des fonctions localement analytiques quelconques.

Notre objectif est de définir une théorie de l'intégration pour les 1-formes rationnelles fermées sur  $X$ . A cause du lemme de Poincaré, toute 1-forme fermée s'intègre localement pour la topologie  $p$ -adique sur une boule suffisamment petite, donc s'intègre globalement. Le problème est qu'il y a une multitude de constantes locales d'intégration: une sur chaque boule! Et pourtant, parmi cette infinité de primitives, il en existe miraculeusement une plus jolie que les autres:

**Théorème 1.1.1.5.** ([Colm2], [Za2]) *Il existe une unique façon d'associer à une variété  $X$  lisse sur  $K$  et une 1-forme rationnelle fermée  $\omega$  sur  $X$  une fonction  $f_\omega$  bien définie à addition près d'une constante et localement analytique sur  $X(K) \setminus \{\text{pôles de } \omega\}$ , de sorte que:*

- (i)  $df_\omega = \omega$
- (ii)  $f_{\lambda\omega + \lambda'\omega'} = \lambda f_\omega + \lambda' f_{\omega'}$  ( $\lambda, \lambda' \in K$ )
- (iii)  $f_\omega = f$  si  $\omega = df$  où  $f \in K(X)_{log}$
- (iv) si  $g : X' \rightarrow X$  est un morphisme de variétés lisses sur  $\text{Spec}(K)$ ,  $f_{g^*\omega} = g^* f_\omega$  ( $= f_\omega \circ g$ ).

1.1.2. *Description de la preuve.* Nous donnons ici la preuve de Colmez (voir 1.1.3 pour Zarhin). Elle se coupe en deux: 1) en utilisant les morphismes d'Albanese on montre qu'il suffit de définir une intégration sur les variétés abéliennes, 2) on construit effectivement cette intégration sur les variétés abéliennes.

Commençons par 1). Rappelons qu'à toute variété  $X$  lisse sur  $K$ , on peut associer de manière fonctorielle sa variété d'Albanese  $Alb(X)$  (= une variété abélienne) encore définie sur  $K$  (lorsque  $X$  est propre et lisse sur  $\mathbf{C}$ ,  $Alb(X)$  est isomorphe en tant que tore complexe à  $H_{dR}^1(X)^*/H_1(X(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$ ). Tout point  $P \in X(K)$  donne lieu à un morphisme unique  $\iota_P : X \rightarrow Alb(X)$  défini sur  $K$  tel

que  $\iota_P(P) = 0$ . Un tel morphisme s'appelle un morphisme d'Albanese (pour tout cela, voir [Se1] ou [La] ou ([Colm2],I.5)). De plus, si  $X$  est propre,  $\iota_P$  induit un isomorphisme  $H_{dR}^1(\text{Alb}(X)) \xrightarrow{\sim} H_{dR}^1(X)$ .

**Lemme 1.1.2.1.** *Soient  $\iota_P : X \rightarrow \text{Alb}(X)$  un morphisme d'Albanese et  $\omega$  une 1-forme rationnelle fermée sur  $X$ , alors il existe une 1-forme rationnelle fermée  $\eta$  sur  $\text{Alb}(X)$ , des fonctions rationnelles  $f, f_1, \dots, f_n$  sur  $X$  et des constantes  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  dans  $K$  telles que:*

$$\omega = \iota_P^* \eta + df + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{df_i}{f_i}.$$

*Indication de preuve.* — Soit  $\tilde{H}^1(X)$  (resp.  $\tilde{H}^1(\text{Alb}(X))$ ) le quotient des 1-formes rationnelles fermées par  $dK(X)_{\log}$  (resp.  $dK(\text{Alb}(X))_{\log}$ ), il suffit de montrer que  $\iota_P$  induit un isomorphisme  $\tilde{H}^1(\text{Alb}(X)) \xrightarrow{\sim} \tilde{H}^1(X)$  et il suffit pour cela d'étendre les scalaires à une clôture algébrique  $\bar{K}$  de  $K$ . En remarquant qu'alors, si  $\bar{X}$  est une compactification lisse de  $X$  (qui existe par la résolution des singularités d'Hironaka), on a  $\tilde{H}^1(X) \simeq \tilde{H}^1(\bar{X})$  (car  $\tilde{H}^1(X)$  ne dépend que du corps des fractions de  $X$ ) et  $\text{Alb}(X) \simeq \text{Alb}(\bar{X})$ , on est ramené au cas d'une variété  $X$  propre et lisse sur  $\bar{K}$ . On a dans ce cas un diagramme commutatif de suites exactes avec des isomorphismes à gauche et à droite ([Colm2],I.1.16):

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & H_{dR}^1(X) & \rightarrow & \tilde{H}^1(X) & \rightarrow & \bar{K} \otimes_{\mathbf{Z}} \text{Pic}^0(X) \rightarrow 0 \\ & & \wr \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \wr \\ 0 & \rightarrow & H_{dR}^1(\text{Alb}(X)) & \rightarrow & \tilde{H}^1(\text{Alb}(X)) & \rightarrow & \bar{K} \otimes_{\mathbf{Z}} \text{Pic}^0(\text{Alb}(X)) \rightarrow 0 \end{array}$$

où les flèches horizontales de droite sont les applications qui à une forme différentielle associe son résidu, un diviseur algébriquement équivalent à 0 (voir [BLR] pour  $\text{Pic}^0$ ). On en déduit le résultat.  $\square$

**Proposition 1.1.2.2.** *Supposons que l'énoncé (1.1.1.5) soit vrai pour les variétés abéliennes sur  $K$  (i.e. en ne considérant en (iv) que des morphismes entre variétés abéliennes), alors il est vrai pour toutes les variétés algébriques lisses sur  $K$ .*

*Preuve.* — Pour toute 1-forme rationnelle fermée  $\eta$  sur une variété abélienne, on a donc une primitive  $f_\eta$  bien définie à une constante près. Soit  $\omega$  une 1-forme rationnelle fermée sur une variété  $X$  lisse sur  $K$ ,  $\iota_P : X \rightarrow \text{Alb}(X)$  un morphisme d'Albanese et  $\eta, f, f_i, \lambda_i$  comme en (1.1.2.1). Si  $f_\omega$  comme en (1.1.1.5) existe, alors  $f_\omega = \iota_P^* f_\eta + f + \sum \lambda_i \log(f_i)$ . Si  $\omega = \iota_P^* \eta' + df' + \sum \lambda'_i \frac{df'_i}{f'_i}$  est une autre écriture, on a  $\iota_P^*(\eta - \eta') \in dK(X)_{\log}$ , d'où  $\eta - \eta' \in dK(\text{Alb}(X))_{\log}$  puisque  $\tilde{H}^1(X) \simeq \tilde{H}^1(\text{Alb}(X))$  (c.f. preuve de 1.1.2.1), et  $f_\eta - f_{\eta'} \in K(\text{Alb}(X))_{\log}$  d'après la propriété (iii). Soit  $f'_\omega = \iota_P^* f_{\eta'} + f' + \sum \lambda'_i \log(f'_i)$ :  $f_\omega - f'_\omega \in K(X)_{\log}$  et  $d(f_\omega - f'_\omega) = 0$ , donc  $f_\omega - f'_\omega$  est constante sur un ouvert  $p$ -adique, donc partout (1.1.1.4). La primitive  $f_\omega$  modulo les constantes est donc indépendante des choix. Quitte à changer les écritures de  $\omega$ , on vérifie qu'elle s'étend bien en une fonction

localement analytique sur  $X(K) \setminus \{\text{p\^oles de } \omega\}$ . Il reste à montrer la propriété (iv), mais si  $g : X' \rightarrow X$  est un morphisme défini sur  $K$ ,  $P \in X(K)$ ,  $Q \in X'(K)$ , il existe un (unique) morphisme  $Alb(g) : Alb(X') \rightarrow Alb(X)$  tel que le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g} & X \\ \iota_P \downarrow & & \downarrow \iota_Q \\ Alb(X') & \xrightarrow{Alb(g)} & Alb(X) \end{array}$$

soit commutatif (cela résulte de la propriété universelle de la variété d'Albanese [Se1]). La propriété (iv) découle facilement de la construction de  $f_\omega$  ci-dessus et du fait que  $f_\eta \circ Alb(g) = f_{Alb(g)^*\eta}$  si  $\eta$  est une 1-forme rationnelle fermée sur  $Alb(X)$ .  $\square$

Il faut maintenant définir ces primitives sur les variétés abéliennes. Si  $X$  est une variété abélienne, on note, pour  $I \subset \{1, 2\}$ ,  $m_I : X^3 \rightarrow X$  l'application qui à  $(x, h_1, h_2) \in X^3$  associe  $x \oplus (\oplus_{i \in I} h_i)$  où  $\oplus$  est la loi d'addition sur  $X$  (plus exactement sur le faisceau en groupes représenté). Si  $\alpha$  est une fonction, ou une 1-forme, rationnelle sur  $X$ , on pose  $\Delta^{[2]}\alpha = m_{\{1,2\}}^*\alpha - m_{\{1\}}^*\alpha - m_{\{2\}}^*\alpha + m_\emptyset^*\alpha$ . Les deux résultats suivants vont jouer un rôle clef:

**Théorème 1.1.2.3.** *Soit  $\omega$  une 1-forme rationnelle fermée sur  $X$ , alors  $\Delta^{[2]}\omega \in dK(X^3)_{log}$ .*

**Théorème 1.1.2.4.** (i) *Les sous-groupes ouverts de  $X(K)$  forment un système fondamental de voisinages de l'origine pour la topologie  $p$ -adique.*  
(ii) *Si  $V$  est un sous-groupe ouvert de  $X(K)$ , alors  $X(K)/V$  est un groupe de torsion.*

Le théorème (1.1.2.3) est une des incarnations du théorème du carré ([Mu1],6 cor.4). C'est un énoncé algébrique qui n'a rien de spécifique à la topologie  $p$ -adique. Pour une preuve sur  $\overline{K}$  sous cette forme via le principe de Lefschetz voir ([Colm2],I.3.6), le résultat sur  $K$  s'en déduisant en prenant les invariants sous  $Gal(\overline{K}/K)$ . Le théorème (1.1.2.4) est lui par contre tout à fait particulier à la topologie  $p$ -adique. Un des arguments clef de sa preuve est que les boules ouvertes comme en (1.1.1.1) sont des groupes pour l'addition sur  $K^d$ , ce qui est rarement le cas des boules ouvertes de  $\mathbf{C}^d$ ! Voir ([Colm2],II.1.9) ou ([Cole4],4.1) pour des preuves de (1.1.2.4).

Si une primitive  $f_\omega$  de  $\omega$  satisfaisant les conditions du théorème existe, on doit avoir  $f_{\Delta^{[2]}\omega} \in K(X^3)_{log}$  et  $\Delta^{[2]}f_\omega = f_{\Delta^{[2]}\omega}$  d'après les conditions (iii) et (iv) en (1.1.1.5), ce qui entraîne  $\Delta^{[2]}f_\omega \in K(X^3)_{log}$ .

**Théorème 1.1.2.5.** *Soient  $\omega$  une 1-forme rationnelle fermée sur  $X$  et  $U_\omega$  l'ouvert de Zariski de  $X$  complémentaire des p\^oles de  $\omega$ , il existe à addition près d'une constante une unique fonction  $f_\omega$  localement analytique sur  $U_\omega(K)$  telle que:*

- 1)  $df_\omega = \omega$
- 2)  $\Delta^{[2]}f_\omega \in K(X^3)_{\log}$ .

*Preuve.* — En utilisant  $\Delta^{[2]}T_a^* = T_{(a,0,0)}^* \Delta^{[2]}$  (ou  $a \in X(K)$  et  $T_a$  est la translation par  $a$  sur  $X(K)$ ), on se ramène au cas où  $\omega$  est définie en 0.

*Unicité:* S'il y a deux primitives, leur différence  $D_\omega$  satisfait  $dD_\omega = 0$ , donc  $D_\omega$  est localement constant et on a aussi  $d(\Delta^{[2]}D_\omega) = 0$ . Mais  $\Delta^{[2]}D_\omega \in K(X^3)_{\log}$ , d'où  $\Delta^{[2]}D_\omega = 0$  par (1.1.1.4) car  $\Delta^{[2]}D_\omega|_{X \times \{0\} \times \{0\}} = 0$ . Pour  $h_1, h_2 \in U_\omega(K)$  tels que  $h_1 \oplus h_2 \in U_\omega(K)$ , on a donc, quitte à remplacer  $D_\omega$  par  $D_\omega - D_\omega(0)$ ,  $D_\omega(h_1 \oplus h_2) = D_\omega(h_1) + D_\omega(h_2)$ . Cela entraîne que  $D_\omega$  se prolonge par continuité en un morphisme de groupes sur tout  $X(K)$ : si  $V$  est un sous-groupe ouvert de  $U_\omega(K)$  sur lequel  $D_\omega$  est défini et  $x \in X(K)$ , d'après (1.1.2.4,ii) il existe  $n_x \in \mathbf{N}$  tel que  $[n_x]x = x \oplus \dots \oplus x$  ( $n_x$  fois) est dans  $V$  et on pose  $D_\omega(x) = \frac{1}{n_x}D_\omega([n_x]x)$ . Comme  $D_\omega$  est localement constant, on peut choisir un tel  $V$  sur lequel  $D_\omega$  est constant. Mais  $D_\omega|_V$  est alors nul puisque c'est un homomorphisme de groupes, donc  $D_\omega$  est nul partout par la formule ci-dessus.

*Existence:* D'après (1.1.2.3), il existe  $g \in K(X^3)_{\log}$  tel que  $\Delta^{[2]}\omega = dg$  et on peut supposer  $g$  nulle sur  $X(K) \times \{0\} \times \{0\}$  puisque  $\Delta^{[2]}\omega|_{X \times \{0\} \times \{0\}} = 0$ .

**Première étape:** Soit  $V$  un sous-groupe ouvert de  $X(K)$  contenu dans  $U_\omega(K)$  sur lequel  $\omega$  est analytique. On peut prendre  $V$  isomorphe à une boule ouverte  $B(0, \delta_-)^d$  comme en (1.1.1.1). Soit  $f_\omega$  l'unique primitive analytique de  $\omega$  sur  $V$  nulle en 0. On a  $d(\Delta^{[2]}f_\omega - g|_{V^3}) = \Delta^{[2]}\omega - \Delta^{[2]}\omega = 0$  donc  $\Delta^{[2]}f_\omega = g|_{V^3}$  car ces deux fonctions sont analytiques sur  $V^3$  et nulles sur  $V \times \{0\} \times \{0\}$ .

**Deuxième étape:** On prolonge  $f_\omega$  à  $U_\omega(K)$ . Notons  $V_n$  l'ouvert  $p$ -adique de  $X(K)$  formé des  $x$  tels que  $[n]x \in V$  et  $[k]x$  n'est pas un pôle de  $\omega$  pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ . On étend  $f_\omega$  à  $V_n$  en posant:

$$f_\omega(x) = \frac{1}{n} \left( f_\omega([n]x) - \sum_{k=1}^{n-1} g(0, [k]x, x) \right).$$

En utilisant  $f_\omega(x \oplus y) - f_\omega(x) - f_\omega(y) = g(0, x, y)$  sur  $V$ , on vérifie que cette équation est en particulier satisfaite sur  $V$ . De plus,  $f_\omega(x)$  est indépendant de  $n$  tel que  $x \in V_n$  et on a  $\Delta^{[2]}f_\omega = g$  là où les deux termes sont définis. En effet, ces assertions se ramènent facilement à des égalités fonctionnelles sur  $g$  seulement, qui sont automatiquement satisfaites sur  $V$  et on peut utiliser (1.1.1.4) puisque  $g \in K(X^3)_{\log}$  pour en déduire qu'elles sont vraies partout. On obtient une fonction  $f_\omega$  localement analytique sur  $\cup_n V_n$  qui est un ouvert  $p$ -adique dense de  $X(K)$  contenu dans  $U_\omega(K)$  et telle que  $\Delta^{[2]}f_\omega = g$  partout où ça a un sens. Quitte à translater 0 en un point  $a \in U_\omega(K)$  et à utiliser  $T_{(\ominus a, 0, 0)}^* \Delta^{[2]}T_a^* = \Delta^{[2]}$ , le même raisonnement appliqué à  $T_a^* \omega$  fournit une autre fonction  $f_{\omega, a}$  localement analytique sur un ouvert  $p$ -adique dense contenant 0 et telle que  $\Delta^{[2]}(f_\omega - T_{\ominus a}^* f_{\omega, a}) = 0$ . Soit  $b$  un point où les deux fonctions  $f_\omega$  et  $T_{\ominus a}^* f_{\omega, a}$  sont définies, la fonction

$h(x) = (f_\omega - T_{\ominus a}^* f_{\omega,a})(b \oplus x) - T_{\ominus a}^* f_{\omega,a}(b) + f_\omega(b)$  satisfait  $h(x \oplus y) = h(x) + h(y)$  partout où elle est définie, et cela entraîne qu'elle se prolonge par continuité à  $X(K)$  tout entier (c.f. la partie sur l'unicité). Donc  $f_\omega$  se prolonge par continuité en  $a$ , c'est-à-dire finalement à tout  $U_\omega(K)$ .

**Troisième étape:** Soit  $f_\omega$  comme dans la deuxième étape et  $\eta = df_\omega - \omega$ , on a  $\Delta^{[2]}\eta = 0$ , d'où  $(\Delta^{[2]}\eta)|_{\{0\} \times \{a\} \times X} = 0$  i.e.  $T_a^*\eta = \eta$ . Donc  $\eta$  est une 1-forme localement analytique invariante par translation et nulle sur  $V$ , donc nulle partout.  $\square$

Si  $P$  et  $Q$  sont deux points de  $X(K)$  où  $\omega$  est définie, posons  $\int_P^Q \omega = f_\omega(Q) - f_\omega(P)$ .

**Corollaire 1.1.2.6.** *Avec les notations précédentes:*

- (i)  $\int_P^Q (\lambda\omega + \lambda'\omega') = \lambda \int_P^Q \omega + \lambda' \int_P^Q \omega'$  ( $\lambda, \lambda' \in K$ )
- (ii)  $\int_P^Q \omega = f(Q) - f(P)$  si  $\omega = df$  où  $f \in K(X)_{\log}$
- (iii) si  $g : X' \rightarrow X$  est un morphisme de variétés abéliennes sur  $\text{Spec}(K)$ ,  $\int_P^Q g^*\omega = \int_{g(P)}^{g(Q)} \omega$ .

*Preuve.* — Les énoncés (i) à (iii) résultent de l'unicité modulo cte de  $f_\omega$  et de  $g^*\Delta^{[2]} = \Delta^{[2]}g^*$ .  $\square$

Avec (1.1.2.2), cela achève la preuve du théorème (1.1.1.5).

**Remarque 1.1.2.7.** On peut préciser le comportement des primitives  $f_\omega$  au voisinage des pôles de  $\omega$ : c'est la somme d'une fonction localement méromorphe et d'une combinaison linéaire de logarithmes de fonctions localement méromorphes.

**Remarque 1.1.2.8.** Si  $X$  est une variété abélienne et  $\omega \in H^0(X, \Omega_{X/K}^1)$ ,  $\omega$  est une 1-forme fermée invariante par translation sur  $X$  ([Mu1], II.4.iii) et  $f_\omega$  est alors un homomorphisme de groupes de  $X(K)$  dans  $K$ . Selon la terminologie de ([Bou], III.7), une telle primitive est appelée un *logarithme de  $X$* .

1.1.3. *Le point de vue de Zarhin.* Dans [Za1] et [Za2], Zarhin a construit indépendamment des primitives à toutes les 1-formes rationnelles fermées sur les variétés lisses qui satisfont toutes les propriétés en (1.1.1.5), et donc coïncident avec les primitives de Colmez. Les méthodes de Zarhin et Colmez sont assez proches. Dans un premier temps, Zarhin montre qu'il y a une manière canonique d'associer une primitive  $f_\omega$  à une 1-forme  $\omega$  invariante sur un groupe algébrique commutatif sur  $K$ . Dans un deuxième temps, il utilise que toute 1-forme rationnelle fermée sur une variété lisse, vue sur son ouvert de définition, est l'image inverse d'une 1-forme invariante sur un groupe algébrique et il prend l'image inverse de la primitive définie sur ce groupe.

1.2. **La construction de Coleman.** Dans cette partie, on suppose pour simplifier  $K = \mathbf{C}_p$ .

1.2.1. *Quelques mots d'introduction sur la géométrie rigide.* On renvoie à [Ber], [Ga] ou [Ra1] pour des introductions efficaces et concises à la géométrie rigide. Mais d'abord, pourquoi la géométrie rigide pour définir une intégration  $p$ -adique ? Essentiellement pour deux raisons. La première est que les fonctions rigides localement constantes sur un espace analytique rigide connexe sont automatiquement constantes. Ceci joue un rôle clef dans les démonstrations ci-dessous. La deuxième est que les morphismes de Frobenius sur les schémas en caractéristique  $p$  se relèvent localement sur les *complétés  $p$ -adiques* des modèles lisses en caractéristique 0 (lorsque de tels modèles existent), mais pas sur les modèles eux-mêmes. On obtient ainsi des morphismes de Frobenius sur les fibres génériques au sens de Raynaud de ces complétés ([Ber],0.1.2), qui sont seulement des espaces rigides. Or, dans la théorie de Coleman, ces morphismes de Frobenius jouent un rôle analogue au théorème du carré dans l'intégrale de Colmez.

Rappelons qu'une algèbre de Tate (sur  $\mathbf{C}_p$ ) est un quotient de  $\mathbf{C}_p\{z_1, \dots, z_d\} = \{\sum_{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_d)} a_\alpha z_1^{\alpha_1} \dots z_d^{\alpha_d}, a_\alpha \rightarrow 0 \text{ si } |\alpha| \rightarrow +\infty\}$  pour un  $d$  convenable. Si  $A$  est une algèbre de Tate, on note  $\text{Spm}(A) = \text{Spec}(A)(\mathbf{C}_p)$  l'ensemble des idéaux maximaux de  $A$ : les  $\text{Spm}(A)$  jouent en géométrie rigide le rôle que jouent les schémas affines en géométrie algébrique. On veut les munir d'une "topologie" plus fine que la topologie de Zariski, mais pour laquelle les seules fonctions localement constantes sont les constantes (du moins si  $\text{Spec}(A)$  est connexe). Il n'est pas difficile de trouver des sous-ensembles de  $\text{Spm}(A)$  dont on a envie qu'ils soient des ouverts, par exemple  $\text{Spm}\left(A\{z\}/(zf - c)\right)$  où  $f \in A$  et  $c \in \mathbf{C}_p^*$ , mais la topologie engendrée par ces ouverts redonne en général la topologie  $p$ -adique totalement discontinue, dont on ne veut pas. L'idée est alors de "sélectionner" certains ouverts et certains recouvrements, que l'on appelle admissibles, et remplacer la notion de topologie par la notion plus générale de topologie de Grothendieck. En munissant l'ensemble  $\text{Spm}(A)$  de cette topologie de Grothendieck et du faisceau structural rigide (dont les sections globales sur  $\text{Spm}(A)$  ne sont autres que  $A$ ), on obtient l'espace analytique rigide affinoïde associé à  $\text{Spm}(A)$  (voir [Ber],0.1). Les espaces analytiques rigides généraux sont ensuite définis comme les ensembles munis d'une topologie de Grothendieck et d'un faisceau de  $\mathbf{C}_p$ -algèbres qui sont localement isomorphes à un espace rigide affinoïde. On définit des morphismes d'espaces rigides, des différentielles rigides (en particulier des 1-formes), etc...: voir ([Ber],0).

**Exemple 1.2.1.1.** Si  $A = \mathbf{C}_p\{z\}$ ,  $\text{Spm}(A) \simeq \{z \in \mathbf{C}_p \mid |z| \leq 1\}$ , si  $A = \mathbf{C}_p\{z_1, z_2\}/(z_1 z_2 - p)$ ,  $\text{Spm}(A) \simeq \{z \in \mathbf{C}_p \mid \frac{1}{p} \leq |z| \leq 1\}$ .

Si  $X$  est un schéma sur  $\text{Spec}(\mathbf{C}_p)$ , disons localement de type fini, on peut lui associer un espace analytique rigide  $X^{rig}$  dont l'ensemble sous-jacent est formé des points fermés  $X(\mathbf{C}_p)$  de  $X$ . Tout ouvert de Zariski  $U$  dans  $X$  fournit par exemple un ouvert admissible  $U(\mathbf{C}_p)$  pour la topologie de Grothendieck sur  $X(\mathbf{C}_p)$ . Mais d'autres ouverts jouent un rôle crucial: les tubes. Supposons pour simplifier  $X$

propre et soit  $\mathcal{X}$  un modèle propre et plat sur  $\text{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p})$  de fibre spéciale  $Y$  sur  $\text{Spec}(\overline{\mathbf{F}}_p)$ . Le critère valuatif de propreté nous dit  $X(\mathbf{C}_p) \simeq \mathcal{X}(\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p})$ , on a donc une flèche de spécialisation  $sp : X(\mathbf{C}_p) \rightarrow Y(\overline{\mathbf{F}}_p)$ . Soient  $Z$  un sous-schéma de  $Y$ , et  $]Z[ = sp^{-1}(Z(\overline{\mathbf{F}}_p))$ : on peut montrer que  $]Z[$  est un ouvert admissible de  $X^{rig} = X(\mathbf{C}_p)$ , qu'on appelle le tube de  $Z$  dans  $X^{rig}$  ([Ber],1.1.1).

**Exemple 1.2.1.2.** Si  $Z$  est un ouvert de Zariski affine de  $Y$ ,  $]Z[$  est un ouvert affinoïde de  $X^{rig}$  ([Ber],0.2.2.1). Si  $Z = \{y\}$  est un point fermé de  $Y$  et si de plus  $\mathcal{X}$  est lisse,  $]Z[$  est isomorphe à la boule ouverte  $B(0, 1_-)^d = \{(z_1, \dots, z_d) \in K^d \mid |z_i| < 1, 1 \leq i \leq d\}$  où  $d$  est la dimension de  $Y$  (même genre d'arguments que pour (1.1.1.1)).

Si  $X$  est un schéma sur  $\mathbf{C}_p$ , on note  $X^{rig}$  l'espace analytique rigide associé. Si  $X$  est un espace rigide sur  $\mathbf{C}_p$ , on note  $\mathcal{O}_X$  le faisceau des fonctions rigides sur  $X$ .

1.2.2. *Intégration sur les variétés propres avec bonne réduction.* Soit  $X$  une variété algébrique sur  $\text{Spec}(\mathbf{C}_p)$  admettant un modèle propre et lisse  $\mathcal{X}$  sur  $\text{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p})$  et notons  $Y$  sa fibre spéciale sur  $\overline{\mathbf{F}}_p$ . Comme  $Y$  est de type fini sur  $\overline{\mathbf{F}}_p$ ,  $Y$  provient d'un modèle défini sur une extension finie (non unique)  $\mathbf{F}_{p^r}$  de  $\mathbf{F}_p$ . On appelle morphisme de Frobenius sur  $Y$  tout morphisme de  $\overline{\mathbf{F}}_p$ -schémas  $Y \rightarrow Y$  provenant par extension des scalaires pour un certain  $r$  de la puissance  $r^{ième}$  du Frobenius absolu sur un tel modèle. Si  $\phi$  et  $\phi'$  sont deux morphismes de Frobenius sur  $Y$ , il est clair qu'on a  $\phi^s = \phi'^t$  pour des entiers  $s, t$  convenables. Par ailleurs, il résulte de [BO] qu'on a un isomorphisme:

$$H_{dR}^1(X) \simeq \mathbf{C}_p \otimes H_{cris}^1(Y/W(\overline{\mathbf{F}}_p))$$

où  $W(\overline{\mathbf{F}}_p)$  désigne les vecteurs de Witt à coefficients dans  $\overline{\mathbf{F}}_p$  et  $H_{cris}^1$  le  $H^1$  cristallin. Tout morphisme de Frobenius  $\phi$  sur  $Y$  induit donc par fonctorialité un morphisme  $\mathbf{C}_p$ -linéaire  $\phi^* : H_{dR}^1(X) \rightarrow H_{dR}^1(X)$  dont on note  $P_\phi$  le polynôme caractéristique. Par [KM], on sait qu'aucune des racines de  $P_\phi$  n'est une racine de l'unité.

Avant d'énoncer (et de démontrer) le théorème principal de Coleman, disons quelques mots sur la méthode. On se rappelle que dans le cas où  $X$  est une variété abélienne, la stratégie de Colmez était de remarquer que puisque  $m_{\{1,2\}}^* \omega - m_{\{1\}}^* \omega - m_{\{2\}}^* \omega + m_\emptyset^* \omega = dg_\omega$  où  $\omega$  est une 1-forme de seconde espèce quelconque sur  $X$  et  $g_\omega$  une fonction *rationnelle* sur  $X^3$  (c.f. 1.1.2.3), il est naturel de chercher une primitive localement analytique  $f_\omega$  telle que  $m_{\{1,2\}}^* f_\omega - m_{\{1\}}^* f_\omega - m_{\{2\}}^* f_\omega + m_\emptyset^* f_\omega$  soit une fonction *rationnelle* sur  $X^3$ . Revenons à la situation précédente et supposons pour simplifier qu'il existe un morphisme  $\phi : X^{rig} \rightarrow X^{rig}$  qui relève un morphisme de Frobenius sur  $Y$  (via la flèche de spécialisation) et induit  $\phi^*$  sur  $H_{dR}^1(X^{rig}) = H_{dR}^1(X)$ . Pour toute 1-forme de seconde espèce  $\omega$  sur  $X$ , vue sur  $X^{rig}$ , on a donc  $P_\phi(\phi^*)(\omega) = dg_\omega$  où  $g_\omega$  est une fonction *rigide* définie sur un

ouvert de Zariski de  $X^{rig}$ . La stratégie de Coleman (antérieure) consiste alors à chercher une primitive localement analytique  $f_\omega$  telle que  $P_\phi(\phi^*)(f_\omega)$  soit une fonction *rigide*. Bien sûr, en général,  $\phi$  n'est défini que localement sur  $X^{rig}$  et il faut recoller...

Si  $U$  est un ouvert de Zariski dans  $Y$ , on note comme précédemment  $]U[ \subset X(\mathbf{C}_p)$  l'ensemble des points fermés de  $X$  qui se spécialisent sur  $Y$  en des points fermés de  $U$ . Un résultat de Coleman ([Cole3], 1.1) nous dit que si  $U$  est affine, tout morphisme de Frobenius  $\phi_U : U \rightarrow U$  se relève (de façon non unique) en un morphisme d'espaces rigides  $\phi_{]U[} : ]U[ \rightarrow ]U[$ . Fixons  $\omega$  une 1-forme rationnelle de seconde espèce sur  $X$ . On peut montrer qu'il existe un recouvrement affine fini  $Y_i$  de  $Y$  tel que  $\omega|_{]Y_i[} = \omega_i + df_i|_{]Y_i[}$  où  $\omega_i \in \Omega_{]Y_i[/\mathbf{C}_p}^1$  est une 1-forme rigide fermée et  $f_i \in \mathbf{C}_p(X)$ . Faisons le choix:

1) d'un tel recouvrement, 2) d'une écriture  $\omega_i + df_i|_{]Y_i[}$  sur chaque  $]Y_i[$ , 3) d'un morphisme de Frobenius  $\phi$  sur  $Y$  qui préserve les  $Y_i$ , 4) de relevés  $\phi_i$  de  $\phi$  sur les affinoïdes  $]Y_i[$ . Rappelons que  $\mathcal{O}_{]Y_i[}$  désigne le faisceau structural rigide sur  $]Y_i[$ .

**Théorème 1.2.2.1.** *Avec les notations ci-dessus, soit  $U_\omega$  l'ouvert de Zariski de  $X$  complémentaire des pôles de  $\omega$ , il existe à addition près d'une constante une unique fonction  $f_\omega$  localement analytique sur  $U_\omega(\mathbf{C}_p)$  telle que:*

1)  $df_\omega = \omega$

2) pour tout  $i$ ,  $(f_\omega - f_i)|_{]Y_i[}$  se prolonge en une fonction localement analytique sur  $]Y_i[$  et  $P_\phi(\phi_i^*)((f_\omega - f_i)|_{]Y_i[}) \in \Gamma(]Y_i[, \mathcal{O}_{]Y_i[})$ .

De plus,  $f_\omega$  est indépendante des choix 1) à 4) ci-dessus.

*Preuve.* — Notons pour alléger  $\mathcal{O}(]Y_i[) = \Gamma(]Y_i[, \mathcal{O}_{]Y_i[})$ . Le schéma de preuve est le suivant: dans une première étape, on montre que les conditions  $dg_i = \omega_i$  et  $P_\phi(\phi_i^*)(g_i) \in \mathcal{O}(]Y_i[)$  déterminent une unique fonction  $g_i = "(f_\omega - f_i)|_{]Y_i["$  localement analytique sur  $]Y_i[$  modulo une constante, dans une seconde étape, on montre que  $g_i + f_i$  et  $g_j + f_j$  coïncident sur  $]Y_i[ \cap ]Y_j[$  modulo une constante et dans la dernière étape, on montre que l'on peut ajuster les constantes pour vraiment recoller les  $g_i + f_i$ .

**Première étape:** détermination de  $(f_\omega - f_i)|_{]Y_i[}$

La flèche de functorialité  $H_{dR}^1(X) \rightarrow H_{dR}^1(]Y_i[)$  envoie  $P_\phi(\phi^*)(\text{classe de } \omega)$  sur la classe de  $P_\phi(\phi_i^*)(\omega_i)$ . Cette classe est donc nulle par choix de  $P_\phi$  i.e.  $P_\phi(\phi_i^*)(\omega_i) \in d\mathcal{O}(]Y_i[)$ . Montrons qu'il existe une unique fonction  $g_i$  localement analytique sur  $]Y_i[$  (à addition près d'une constante) telle que:

$$\begin{aligned} dg_i &= \omega_i \\ P_\phi(\phi_i^*)(g_i) &\in \mathcal{O}(]Y_i[). \end{aligned}$$

Quitte à multiplier  $P_\phi$  par une constante, on a  $P_\phi(T) = a_0 + a_1T + \dots + a_{n-1}T^{n-1} + T^n \in \mathbf{C}_p[T]$  et  $P_\phi(\phi_i^*)(g_i) = \sum_k a_k(g_i \circ \phi_i^k)$ . Si  $\Omega_i = (\omega_i, \phi_i^*\omega_i, \dots, (\phi_i^{n-1})^*\omega_i)$ , on voit en posant  $G_i = (g_i, g_i \circ \phi_i, \dots, g_i \circ \phi_i^{n-1})$  qu'il suffit de montrer qu'il existe une

unique fonction (à constante près) localement analytique  $G_i : ]Y_i[ \rightarrow \mathbf{C}_p^n$  telle que  $dG_i = \Omega_i$  et  $G_i \circ \phi_i - MG_i \in \mathcal{O}(]Y_i])^n$  où :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

*Unicité:* S'il y en a deux, leur différence  $D_i$  vérifie  $dD_i = 0$ , donc est localement constante, et  $D_i \circ \phi_i - MD_i$  aussi. Mais  $D_i \circ \phi_i - MD_i \in \mathcal{O}(]Y_i])^n$  et comme  $]Y_i[$  est connexe (i.e. ne peut s'écrire  $]Y_i[ = U \cup U'$  où  $U$  et  $U'$  sont deux ouverts admissibles non vides d'intersection vide),  $D_i \circ \phi_i - MD_i$  est constant de valeur  $C_i$ . Par ailleurs, comme 1 n'est pas racine de  $P_\phi$ ,  $1 - M \in GL_n(\mathbf{C}_p)$  et un calcul donne, pour  $k \geq 1$ :

$$(1) \quad D_i \circ \phi_i^k - M^k D_i = (1 - M^k)(1 - M)^{-1} C_i.$$

Soient  $y_i \in Y_i(\overline{\mathbf{F}}_p)$  et  $]y_i[ = sp^{-1}(y_i) \subset ]Y_i[$  le tube correspondant, isomorphe (en tant qu'espace rigide) à une boule ouverte (c.f. 1.2.1.2). Comme  $y_i$  est défini sur une extension finie de  $\mathbf{F}_p$ , il existe  $m \in \mathbf{N}$  tel que  $\phi_i^m(]y_i[) \subset ]y_i[$ . De plus, pour tout  $x \in ]y_i[$ ,  $\phi_i^{ml}(x)$  converge dans  $]y_i[$  quand  $l$  tend vers  $+\infty$  vers un  $\epsilon_{y_i}$  indépendant de  $x$  ([Dw], lemme 3.0) et on a  $\phi_i^m(\epsilon_{y_i}) = \epsilon_{y_i}$ . En faisant  $m = k$  dans (1) appliqué au point  $\epsilon_{y_i}$ , on obtient:

$$(2) \quad D_i(\epsilon_{y_i}) = (1 - M)^{-1} C_i.$$

Par ailleurs, comme  $D_i$  est localement constante,  $D_i(\phi_i^{ml_x}(x)) = D_i(\epsilon_{y_i})$  pour  $l_x \gg 0$ . En faisant  $k = ml_x$  dans (1) appliqué au point  $x$ , on obtient en utilisant (2):

$$(3) \quad M^{ml_x}(D_i(x) - (1 - M)^{-1} C_i) = 0.$$

Comme  $\mathbf{C}_p$  est algébriquement clos,  $\phi_i^m : ]y_i[ \rightarrow ]y_i[$  est en fait surjectif et tout  $x \in ]y_i[$  est dans l'image de  $\phi_i^{ml}$  pour tout  $l$ . En faisant  $k = ml$  dans (1), un calcul donne  $D_i(x) - (1 - M)^{-1} C_i \in M^{ml}(\mathbf{C}_p^n)$  pour tout  $l$ . Donc  $D_i(x) - (1 - M)^{-1} C_i \in \text{Ker}(M^{ml_x}) \cap \bigcap_{l \in \mathbf{N}} \text{Im}(M^{ml}) = \{0\}$  (algèbre linéaire élémentaire), ce qui montre que

$D_i$  est bien une fonction constante.

*Existence:* Puisque  $P_\phi(\phi_i^*(\omega_i)) \in d\mathcal{O}(]Y_i])$ , on a  $H_i \in \mathcal{O}(]Y_i])^n$  tel que  $\phi_i^* \Omega_i - M \Omega_i = dH_i$ . Soient  $y_i \in Y_i(\overline{\mathbf{F}}_p)$  et  $\epsilon_{y_i} \in ]y_i[$  comme précédemment, comme  $\Omega_i$  est fermée et  $]y_i]^n$  est une boule ouverte, il existe une unique fonction  $G_{y_i}$  analytique

sur  $]y_i]^n$  telle que  $dG_{y_i} = \Omega_i|_{]y_i]}$  et  $G_{y_i}(\epsilon_{y_i}) = (1 - M^m)^{-1} \sum_{l=0}^{m-1} M^l H_i(\phi_i^{m-l-1}(\epsilon_{y_i}))$

(i.e. on fixe cette valeur en  $\epsilon_{y_i}$ ). Soit  $G_i$  l'unique fonction localement analytique sur  $]Y_i[$  telle que  $G_i|_{]y_i]} = G_{y_i}$  pour  $y_i \in Y_i(\overline{\mathbf{F}}_p)$  (les  $]y_i[$  sont disjoints deux à

deux). On a  $dG_i = \Omega_i$  et un calcul montre que:

$$\begin{aligned}(G_i \circ \phi_i - MG_i)(\epsilon_{y_i}) &= H_i(\epsilon_{y_i}) \\ d(G_i \circ \phi_i - MG_i) &= dH_i.\end{aligned}$$

La première égalité ayant lieu pour tout  $y_i \in Y_i(\overline{\mathbf{F}}_p)$ , on en déduit  $G_i \circ \phi_i - MG_i = H_i \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^1_{Y_i})^n$ .

**Deuxième étape:** Comparaison des fonctions sur  $]Y_i[\cap]Y_j[$ .

Montrons que pour tous  $i, j$ ,  $(f_i + g_i)|_{]Y_i[\cap]Y_j[} = (f_j + g_j)|_{]Y_j[\cap]Y_i[} + c_{ij}$  où  $c_{ij} \in \mathbf{C}_p$ . En remarquant que  $\phi_i$  et  $\phi_j$  laissent stable  $]Y_i[\cap]Y_j[ = ]Y_i \times_Y Y_j[$ , on voit qu'il suffit de montrer que 1)  $f_i + g_i$  est indépendant (modulo cte) de l'écriture  $\omega|_{]Y_i[} = \omega_i + df_i$  et 2)  $f_i + g_i$  est indépendant (modulo cte) du relevé  $\phi_i$  choisi. Pour 1), soit  $\omega|_{]Y_i[} = \omega'_i + df'_i$  une autre écriture et  $g'_i$  la primitive de  $\omega'_i$  construite comme dans la première étape. Alors  $\omega_i - \omega'_i = d(g_i - g'_i)$  et  $P_\phi(\phi_i^*)(g_i - g'_i) \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^1_{Y_i})$ . Mais on a aussi  $\omega_i - \omega'_i = d(f'_i - f_i)$ , donc  $f'_i - f_i$  est défini sur tout  $]Y_i[$  et  $P_\phi(\phi_i^*)(f'_i - f_i) \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^1_{Y_i})$ , d'où  $f'_i - f_i = g_i - g'_i$  modulo constante par l'unicité dans la première étape appliquée à la forme  $\omega_i - \omega'_i$ . Pour 2), Coleman montre ([Cole3], 1.2a) que si  $\phi_i$  et  $\phi'_i$  sont deux relevés du même  $\phi$ , alors  $P_\phi(\phi_i^*)(g_i) - P_\phi(\phi'^*_i)(g_i) \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^1_{Y_i})$  d'où  $P_\phi(\phi'^*_i)(g_i) \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^1_{Y_i})$  ce qui entraîne 2) par unicité.

**Troisième étape:** recollement.

Reste donc à recoller les  $f_i + g_i$ , i.e. à trouver des constantes  $c_i \in \mathbf{C}_p$  telles que  $c_i - c_j = c_{ij}$  pour tout  $i, j$ , et on définit alors  $f_\omega$  comme l'unique fonction telle que  $f_\omega|_{]Y_i[} = f_i + g_i + c_i$ . Mais puisque le schéma  $Y$  est connexe,  $\cap_i Y_i \neq \emptyset$ , donc  $\cap_i ]Y_i[ \neq \emptyset$  et il est alors élémentaire que l'on peut ajuster les constantes  $c_i$ .

Montrons enfin que  $f_\omega$  ne dépend pas du choix du morphisme  $\phi$  sur  $Y$ . Il suffit pour cela de montrer que remplacer  $\phi$  par  $\phi^s$  ne change pas  $f_\omega$ . Comme  $f_\omega$  ne dépend pas des autres choix, on garde le même recouvrement, la même écriture et on remplace juste  $\phi_i$  par  $\phi_i^s$  sur  $]Y_i[$ . On vérifie que  $P_{\phi^s}(T^s) = \Pi_{\zeta^s=1} P_\phi(\zeta T)$ . Donc  $P_\phi(\phi_i^*)(g_i) \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^1_{Y_i})$  entraîne  $P_{\phi^s}((\phi_i^s)^*)(g_i) \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^1_{Y_i})$  et le résultat découle encore de l'unicité de  $g_i$  dans la première étape.  $\square$

Comme dans la première partie, on pose, si  $P$  et  $Q$  sont deux points de  $X(\mathbf{C}_p)$  où  $\omega$  est définie:  $\int_P^Q \omega = f_\omega(Q) - f_\omega(P)$ .

**Corollaire 1.2.2.2.** *Avec les notations précédentes:*

- (i)  $\int_P^Q (\lambda\omega + \lambda'\omega') = \lambda \int_P^Q \omega + \lambda' \int_P^Q \omega'$  ( $\lambda, \lambda' \in \mathbf{C}_p$ )
- (ii)  $\int_P^Q \omega = f(Q) - f(P)$  si  $\omega = df$  où  $f \in \mathbf{C}_p(X)$
- (iii) si  $g : X' \rightarrow X$  est un morphisme de variétés propres sur  $\text{Spec}(\mathbf{C}_p)$  ayant bonne réduction,  $\int_P^Q g^*\omega = \int_{g(P)}^{g(Q)} \omega$ .

*Preuve.* — Les énoncés (i) et (ii) résultent de l’unicité modulo cte de  $f_\omega$ . L’énoncé (iii) est facile si  $g$  provient d’un morphisme  $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}'$  entre des modèles propres et lisses. Sinon, soient  $Alb(\mathcal{X})$  et  $Alb(\mathcal{X}')$  les modèles de Néron des variétés d’Albanese  $Alb(X)$  et  $Alb(X')$  associées à  $X$  et  $X'$  ([BLR]). Des propriétés du modèle de Néron on déduit un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{X}' & & \mathcal{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Alb(\mathcal{X}') & \longrightarrow & Alb(\mathcal{X}) \end{array}$$

d’où (iii) en remarquant que toute 1-forme de seconde espèce sur  $X$  provient, modulo une forme exacte, d’une 1-forme de seconde espèce sur  $Alb(X)$  (car  $H_{dR}^1(X) \simeq H_{dR}^1(Alb(X))$ ).  $\square$

**Corollaire 1.2.2.3.** *L’intégrale  $\int_P^Q \omega$  ne dépend pas du modèle choisi et coïncide avec l’intégrale définie par Colmez.*

*Preuve.* — Utiliser (ii) et (iii) dans (1.2.2.2), le fait que les variétés auxiliaires utilisées par Colmez pour définir son intégrale (i.e.  $Alb(X)$  et  $Alb(X)^3$ ) ont toutes bonne réduction lorsque  $X$  a bonne réduction et l’unicité en (1.1.2.5).  $\square$

**Remarque 1.2.2.4.** Si  $\sigma$  est un automorphisme continu de  $\mathbf{C}_p$ , de l’unicité de  $f_\omega$  résulte aussi le fait que  $\sigma(\int_P^Q \omega) = \int_{\sigma(P)}^{\sigma(Q)} \sigma^* \omega$  où  $\sigma : \mathbf{C}_p \otimes_\sigma X \rightarrow X$ . En particulier, si  $X$  provient d’une variété définie sur une extension finie  $K$  de  $\mathbf{Q}_p$ , si  $\sigma \in Gal(\overline{\mathbf{Q}_p}/K)$ ,  $P, Q \in X(K)$  et  $\omega$  est défini sur  $K$ , on a bien  $\int_P^Q \omega \in K$ .

## 2. APPLICATIONS

**2.1. L’accouplement des périodes  $p$ -adiques.** Dans cette partie,  $K$  est une extension finie de  $\mathbf{Q}_p$ .

Nous allons appliquer ce qui précède, en suivant Colmez, aux périodes  $p$ -adiques des variétés abéliennes. Voir [II] et la remarque (2.1.3.4) pour l’historique de ce sujet, cas particulier des conjectures de Fontaine. C’est Coleman qui le premier a eu l’idée dans [Cole2] d’utiliser l’intégration  $p$ -adique pour redéfinir les périodes  $p$ -adiques des variétés abéliennes avec bonne réduction, ou plutôt leur image dans  $\mathbf{C}_p$ .

Comme les intégrales  $p$ -adiques ne sont pas multivaluées, on s’attendrait normalement à ce qu’il n’existe pas de périodes en  $p$ -adique! Et effectivement, si on veut des périodes à valeurs dans  $\mathbf{C}_p$  associées aux 1-formes de  $H^0(X, \Omega_{X/K}^1)$  (comme sur les complexes), on les trouve *a posteriori* toutes nulles (c.f. 2.1.2.2). Le miracle est qu’il existe néanmoins des périodes mais à un niveau “supérieur”,

c'est-à-dire à valeurs dans une  $\overline{\mathbf{Q}_p}$ -algèbre  $B_{dR}^+$ , introduite par Fontaine, qui se surjecte seulement sur  $\mathbf{C}_p$ .

2.1.1. *Quelques rappels sur  $B_{dR}^+$ .* L'anneau  $B_{dR}^+$  a déjà été introduit dans ce séminaire ([II]), mais nous aurons besoin des détails de sa construction. Les références pour ce qui suit sont [Fo1], [Fo2].

Soit  $R$  l'ensemble des suites  $x = (x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(n)}, \dots)$  d'éléments de  $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$  telles que  $(x^{(n+1)})^p = x^{(n)}$ . On munit  $R$  des lois  $\cdot$  et  $+$  en posant  $x \cdot y = (x^{(n)}y^{(n)})_{n \in \mathbf{N}}$  et  $x + y = (s^{(n)})_{n \in \mathbf{N}}$  où:

$$s^{(n)} = \lim_{m \rightarrow +\infty} (x^{(n+m)} + y^{(n+m)})^{p^m}$$

les hypothèses faisant que cela converge bien dans  $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$ . On montre que ces lois font de  $R$  un anneau commutatif intègre d'élément unité  $1 = (1, 1, \dots)$ . De plus:

$$p \cdot 1 = \lim_{m \rightarrow +\infty} \underbrace{(1 + \dots + 1)}_{p \text{ fois}}^{p^m} = 0$$

donc  $R$  est un anneau de caractéristique  $p$  et le Frobenius  $x = (x^{(n)}) \mapsto x^p = ((x^{(n)})^p)$  sur  $R$  est clairement un isomorphisme i.e.  $R$  est parfait. Il est de plus muni d'une action naturelle de  $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$  via l'action sur  $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$  et d'une valuation  $\text{val}(x) = \text{val}(x^{(0)})$  pour laquelle il est séparé et complet de corps résiduel  $R/\{x | \text{val}(x) > 0\} \simeq \overline{\mathbf{F}_p}$ .

Comme  $R$  est parfait, il est tentant de considérer les vecteurs de Witt  $W(R)$  à coefficients dans  $R$  ([Se2]): tout élément de  $W(R)$  s'écrit de façon unique  $\sum_{n=0}^{+\infty} p^n [x_n]$  où  $x_n \in R$  et  $[x_n]$  est son représentant multiplicatif dans  $W(R)$ . On montre alors qu'on a une surjection d'anneaux:

$$\theta : \begin{array}{ccc} W(R) & \rightarrow & \mathcal{O}_{\mathbf{C}_p} \\ \sum_{n=0}^{+\infty} p^n [x_n] & \mapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} p^n x_n^{(0)} \end{array}$$

dont le noyau est un idéal principal engendré par  $p - [p]$  où  $\underline{p} = (p^{(n)}) \in R$  est un élément tel que  $p^{(0)} = p$ . On remarque que  $W(R)$  est complet pour la topologie  $(p, \text{Ker}(\theta))$ -adique =  $(p, [p])$ -adique.

**Définition 2.1.1.1.** *L'anneau  $B_{dR}^+$  est le complété de  $W(R)[\frac{1}{p}]$  par rapport à l'idéal  $\text{Ker}(\theta) = (p - [p])$ .*

La surjection  $\theta$  se prolonge en une surjection encore notée  $\theta : B_{dR}^+ \rightarrow \mathbf{C}_p$ . L'anneau  $B_{dR}^+$  est de valuation discrète complet d'idéal maximal  $\text{Ker}(\theta) = (p - [p])B_{dR}^+$  et de corps résiduel  $B_{dR}^+/\text{Ker}(\theta) \simeq \mathbf{C}_p$ , c'est-à-dire qu'il s'identifie *non canoniquement* à  $\mathbf{C}_p[[T]]$ . On peut considérer plusieurs topologies sur  $B_{dR}^+$ . Nous munissons ici  $B_{dR}^+$  de celle pour laquelle les  $p^m W(R) + (\text{Ker}(\theta))^k$  forment une base de voisinage de 0 quand  $m$  et  $k$  décrivent  $\mathbf{N}$ , c'est-à-dire que  $(x_n)_n$  tend vers

0 si et seulement si pour tout  $M \in \mathbf{N}$ ,  $x_n \in p^M W(R) + (\text{Ker}(\theta))^M$  pour  $n \gg 0$ . Pour cette topologie,  $B_{dR}^+$  est séparé et complet. Il existe une action naturelle et continue de  $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$  sur  $B_{dR}^+$  via l'action sur  $R$ , qui commute à  $\theta$ . Il n'existe pas de section  $\mathbf{C}_p \hookrightarrow B_{dR}^+$  de  $\theta$  qui soit compatible à l'action de Galois, mais on peut montrer que  $\overline{\mathbf{Q}}_p$  s'identifie canoniquement à la clôture algébrique de  $\mathbf{Q}_p$  dans  $B_{dR}^+$  et que le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathbf{Q}}_p & \hookrightarrow & B_{dR}^+ \\ \parallel & & \downarrow \theta \\ \mathbf{Q}_p & \hookrightarrow & \mathbf{C}_p \end{array}$$

est commutatif et compatible à  $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ . En fait, si on munit  $\overline{\mathbf{Q}}_p$  de la topologie induite par celle de  $B_{dR}^+$  (qui n'est pas la topologie  $p$ -adique), Colmez a montré que  $B_{dR}^+$  n'est autre que le complété de  $\overline{\mathbf{Q}}_p$  pour cette topologie. Autrement dit,  $\overline{\mathbf{Q}}_p$  est dense dans  $B_{dR}^+$  (c.f. appendice de [Fo2]).

**2.1.2. Accouplement des périodes  $p$ -adiques: énoncé du théorème.** Soit  $X$  une variété lisse sur  $K$  de dimension  $d$ . On note encore  $\theta : X(B_{dR}^+) \rightarrow X(\mathbf{C}_p)$  l'application induite par  $\theta : B_{dR}^+ \rightarrow \mathbf{C}_p$  et on remarque qu'elle est surjective (choisir une section  $\mathbf{C}_p \hookrightarrow B_{dR}^+$  de  $\theta$ ). Par ailleurs, comme  $\overline{\mathbf{Q}}_p \hookrightarrow B_{dR}^+$ ,  $X(\overline{\mathbf{Q}}_p) \hookrightarrow X(B_{dR}^+)$ .

**Lemme 2.1.2.1.** *Soit  $f$  une fonction localement analytique sur  $X(\overline{\mathbf{Q}}_p)$  qui se prolonge en une fonction localement analytique sur  $X(\mathbf{C}_p)$ , alors  $f$  se prolonge aussi canoniquement à  $X(B_{dR}^+)$ .*

*Preuve.* — Soit  $x \in X(B_{dR}^+)$ , on peut trouver un ouvert de Zariski  $U_x = \text{Spec}(\overline{\mathbf{Q}}_p[x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_d]/(f_1, \dots, f_n))$  de  $X \otimes_K \overline{\mathbf{Q}}_p$  tel que la projection sur  $z_1, \dots, z_d$  induit un isomorphisme entre un sous-ensemble  $V$  de  $U_x(B_{dR}^+)$  contenant  $x$  et  $\{(z_1, \dots, z_d) \in (B_{dR}^+)^d \mid |\theta(z_i)| < \delta, 1 \leq i \leq d\}$  pour un  $\delta$  suffisamment petit dans  $\mathbf{R}^+ - \{0\}$ . Comme  $X(\overline{\mathbf{Q}}_p) \cap V \simeq \{(z_1, \dots, z_d) \in \overline{\mathbf{Q}}_p^d \mid |z_i| < \delta, 1 \leq i \leq d\}$ , et comme  $f$  se prolonge en une fonction analytique au voisinage de  $\theta(x) \in X(\mathbf{C}_p)$ , on peut supposer  $f$  analytique sur  $X(\overline{\mathbf{Q}}_p) \cap V$  quitte à se restreindre à un ouvert de  $V$  contenant  $x$ . En remarquant que si  $x \in B_{dR}^+$ ,  $(x^n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge dans  $B_{dR}^+$  si et seulement si  $(\theta(x)^n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge dans  $\mathbf{C}_p$ , on voit que la série formelle en  $z_1, \dots, z_d$  définissant  $f$  converge dans  $B_{dR}^+$  sur tout  $V$ .  $\square$

Si  $\omega$  est une 1-forme rationnelle fermée sur  $X$  et  $f_\omega$  une des primitives construites en (1.1.1.5), il est clair que  $f_\omega$  vérifie les hypothèses en (2.1.2.1) quitte à étendre les scalaires de  $K$  à  $\mathbf{C}_p$  dans (1.1.1.5). On note encore  $f_\omega$  la prolongée à  $X(B_{dR}^+)$  (à valeurs maintenant dans  $B_{dR}^+$ ) et  $\int_P^Q \omega = f_\omega(Q) - f_\omega(P)$  si  $P, Q \in X(B_{dR}^+)$ . Avant d'énoncer le théorème sur l'accouplement des périodes  $p$ -adiques des variétés abéliennes, donnons un exemple simple (mais sortant *stricto sensu* du cadre des variétés abéliennes).

**Exemple 2.1.2.2.** Supposons  $X = \text{Spec}(\mathbf{C}[z, \frac{1}{z}]) = \mathbf{G}_m$ . Soient  $\gamma$  un générateur de  $H_1(X(\mathbf{C}), \mathbf{Z}) = H_1(\mathbf{C}^*, \mathbf{Z})$ ,  $\omega = \frac{dz}{z} \in H^0(X, \Omega_{X/\mathbf{C}}^1)$  et  $\varepsilon_n = e^{2i\pi/p^n} \in X(\mathbf{C})$ . On sait que:

$$\int_{\gamma} \omega = p^n \int_1^{\varepsilon_n} \omega = p^n \int_0^{\frac{2\pi}{p^n}} \frac{de^{i\theta}}{e^{i\theta}} = 2i\pi.$$

C'est la période classique. Supposons maintenant  $X = \text{Spec}(K[z, \frac{1}{z}])$  et soient  $\gamma = (\varepsilon_n)_n$  un générateur de  $T_p(X) = \varprojlim \mu_{p^n}(\overline{\mathbf{Q}}_p)$  et  $\omega = \frac{dz}{z} \in H^0(X, \Omega_{X/K}^1)$ . On a  $f_\omega = \log$  et, par définition:

$$p^n \int_1^{\varepsilon_n} \omega = p^n \log(\varepsilon_n) = \log(\varepsilon_n^{p^n}) = 0 !$$

Considérons maintenant  $\tilde{\varepsilon}_n = [(\varepsilon_{m+n})_{m \in \mathbf{N}}] \in X(B_{dR}^+)$  et soit  $t = \log(\tilde{\varepsilon}_0) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-\tilde{\varepsilon}_0)^n}{n} \in B_{dR}^+ - \{0\}$ . Bien sûr,  $\tilde{\varepsilon}_n \neq \varepsilon_n$  mais  $\theta(\tilde{\varepsilon}_n) = \varepsilon_n$ . De plus:

$$p^n \int_1^{\tilde{\varepsilon}_n} \omega = p^n \log(\tilde{\varepsilon}_n) = \log(\tilde{\varepsilon}_0) = t.$$

Plus généralement, si  $x \in B_{dR}^+$ , soit  $m_k(x)$  le plus grand entier de  $\mathbf{Z}$  tel que  $x \in p^{m_k(x)}W(R) + (\text{Ker}(\theta))^{k+1}$  et disons qu'une suite  $(x_n)_n$  de points de  $B_{dR}^+$  est bornée si la suite  $(m_k(x_n))_n$  est bornée pour tout  $k$ . On peut voir que la suite  $(\varepsilon_n)_n$  ci-dessus vue dans  $B_{dR}^+$  n'est pas une suite bornée, par contre la suite  $(\tilde{\varepsilon}_n)_n$  est évidemment bornée (tous les  $m_k(\tilde{\varepsilon}_n)$  sont nuls). Soit  $(\tilde{\varepsilon}'_n)_n$  une autre suite bornée quelconque de  $B_{dR}^+$  vérifiant seulement  $\theta(\tilde{\varepsilon}'_n) = \varepsilon_n$ , alors on peut montrer que la suite  $p^n \int_1^{\tilde{\varepsilon}'_n} \omega = p^n \log(\tilde{\varepsilon}'_n)$  converge toujours vers  $t$  dans  $B_{dR}^+$ . Cet élément  $t$ , introduit par Fontaine, peut être vu comme l'analogue  $p$ -adique de  $2i\pi$ .

Ce qui suit va consister à transposer l'exemple ci-dessus au cadre des variétés abéliennes. Rappelons qu'une 1-forme de seconde espèce sur  $X$  est par définition une 1-forme rationnelle fermée sur  $X$  dont le résidu est nul, i.e. qui ne contient pas de termes en  $\frac{df}{f}$  dans une de ses écritures, et que  $H_{dR}^1(X)$  s'identifie au quotient des 1-formes de seconde espèce sur  $X$  par les différentielles des fonctions rationnelles. On suppose maintenant que  $X$  est une variété abélienne. Soient  $\omega$  une 1-forme de seconde espèce sur  $X$  et  $\gamma = (\gamma_n)_n \in T_p(X) = \varprojlim X[p^n](\overline{\mathbf{Q}}_p)$  où  $X[p^n](\overline{\mathbf{Q}}_p) = \{x \in X(\overline{\mathbf{Q}}_p) \mid [p^n]x = 0\}$ . En vertu de l'exemple précédent, on a envie de considérer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p^n \int_0^{\tilde{\gamma}_n} \omega$  pour des "bons" relevés  $\tilde{\gamma}_n$  de  $\gamma_n$  dans  $X(B_{dR}^+)$  par  $\theta$ .

**Définition 2.1.2.3.** Si  $Y$  est une variété lisse sur  $K$ , une suite  $(\tilde{\gamma}_n)_n$  de points de  $Y(B_{dR}^+)$  est dite bornée dans  $Y(B_{dR}^+)$  si pour tout recouvrement fini  $(U_i)_{i \in I}$  de  $Y$  par des ouverts de Zariski, il existe une décomposition  $\mathbf{N} = \cup_{i \in I} I_i$  telle que  $\{\tilde{\gamma}_n, n \in I_i\} \subset U_i(B_{dR}^+)$  et telle que pour toute fonction  $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$ , la suite  $\{f_i(\tilde{\gamma}_n), n \in I_i\}$  est bornée dans  $B_{dR}^+$  (c.f. 2.1.2.2).

Si  $U$  est un ouvert de Zariski de  $X$ , une suite bornée dans  $U(B_{dR}^+)$  est bornée dans  $X(B_{dR}^+)$  mais la réciproque est fautive (prendre une suite qui s'accumule autour du fermé complémentaire de  $U$  dans  $X$ ). On peut maintenant énoncer le théorème. On choisit une suite bornée  $(\tilde{\gamma}_n)_n$  de relevés de  $(\gamma_n)_n$  et on espère que la suite  $p^n \int_0^{\tilde{\gamma}_n} \omega$  converge dans  $B_{dR}^+$  vers une limite qui n'est pas trop souvent nulle... Mais il faut modifier 0 et  $\tilde{\gamma}_n$  pour être sûr qu'ils ne s'approchent pas trop des pôles de  $\omega$  dans  $X(B_{dR}^+)$ .

**Théorème 2.1.2.4.** *Soient  $X$  une variété abélienne sur  $K$ ,  $\omega$  une 1-forme rationnelle de seconde espèce sur  $X$ ,  $U_\omega$  l'ouvert de Zariski de  $X$  complémentaire des pôles de  $\omega$  et  $\gamma = (\gamma_n)_n \in T_p(X)$ .*

(i) *Il existe une suite  $(\tilde{\gamma}_n)_n$  bornée dans  $X(B_{dR}^+)$  et une suite  $(\delta_n)_n$  bornée dans  $U_\omega(B_{dR}^+)$  telles que  $\theta(\tilde{\gamma}_n) = \gamma_n$  et la suite  $(\delta_n \oplus \tilde{\gamma}_n)_n$  est bornée dans  $U_\omega(B_{dR}^+)$ .*

(ii) *Si  $(\tilde{\gamma}_n)_n$  et  $(\delta_n)_n$  sont de telles suites, la suite  $p^n \int_{\delta_n}^{\delta_n \oplus \tilde{\gamma}_n} \omega$  converge dans  $B_{dR}^+$  vers un élément  $\int_\gamma \omega$  qui ne dépend que de  $\gamma$  et de la classe de  $\omega$  dans  $H_{dR}^1(X)$ .*

(iii) *L'application de  $H_{dR}^1(X) \times T_p(X)$  dans  $B_{dR}^+$  qui à  $(\omega, \gamma)$  associe  $\int_\gamma \omega$  est bilinéaire, commute à l'action de Galois et envoie  $H^0(X, \Omega_{X/K}^1) \times T_p(X)$  dans  $(p - [p])B_{dR}^+ = \text{Ker}(\theta)$ .*

(iv) *L'accouplement "période" ci-dessus est non dégénéré, i.e. si  $(\omega_1, \dots, \omega_{2d})$  fournit une base de  $H_{dR}^1(X)$  et  $(\gamma_1, \dots, \gamma_{2d})$  une base de  $T_p(X)$ , la matrice  $(\int_{\gamma_j} \omega_i)_{1 \leq i, j \leq 2d}$  appartient à  $GL_{2d}(B_{dR})$  où  $B_{dR} = \text{Frac}(B_{dR}^+)$ .*

2.1.3. *Esquisse de preuve et relations de Riemann  $p$ -adiques.* Nous ne disons rien sur la preuve de (i) qui est purement technique (voir [Colm2], II.3.1).

Passons à (ii). Remarquons d'abord que si  $(x_n)_n$  est une suite de  $B_{dR}^+$  telle que  $(px_n - x_{n-1})_n$  est bornée, alors  $p^{n-1}(px_n - x_{n-1})$  tend vers 0 dans  $B_{dR}^+$  quand  $n \rightarrow +\infty$  et donc  $p^n x_n$  converge dans  $B_{dR}^+$ . Oublions dans un premier temps les  $\delta_n$  et supposons  $[p]\tilde{\gamma}_n = \tilde{\gamma}_{n-1}$ . Pour la convergence, il suffit de voir que la suite  $y_n = p \int_0^{\tilde{\gamma}_n} \omega - \int_0^{\tilde{\gamma}_{n-1}} \omega$  est bornée dans  $B_{dR}^+$ . Mais  $y_n = (pf_\omega - [p]^* f_\omega)(\tilde{\gamma}_n) + \text{cte}$  et  $pf_\omega - [p]^* f_\omega \in K(X)$  (car  $[p]$  sur  $X$  induit la multiplication par  $p$  sur  $H_{dR}^1(X)$ ). Si la suite  $\tilde{\gamma}_n$  est bornée dans l'ouvert où  $pf_\omega - [p]^* f_\omega$  est défini, alors par définition,  $(y_n)_n$  est bornée dans  $B_{dR}^+$ . Si elle n'est pas bornée dans cet ouvert, il faut la modifier avec des  $\delta'_n$  pour qu'elle le devienne. Dans le cas général, on décompose

$y_n = p \int_{\delta_n}^{\delta_n \oplus \tilde{\gamma}_n} \omega - \int_{\delta_{n-1}}^{\delta_{n-1} \oplus \tilde{\gamma}_{n-1}} \omega$  sous la forme  $y_n = y_{1,n} + y_{2,n} + y_{3,n} + y_{4,n}$  où :

$$\begin{aligned} y_{1,n} &= p \int_{\delta_n}^{\delta_n \oplus \tilde{\gamma}_n} \omega - p \int_{\delta'_n}^{\delta'_n \oplus \tilde{\gamma}_n} \omega = p(\Delta^{[2]} f_\omega)(\delta'_n, \delta_n \ominus \delta'_n, \tilde{\gamma}_n) \\ y_{2,n} &= p \int_{\delta'_n}^{\delta'_n \oplus \tilde{\gamma}_n} \omega - \int_{[p]\delta'_n}^{[p]\delta'_n \oplus [p]\tilde{\gamma}_n} \omega = (pf_\omega - [p]^* f_\omega)(\delta'_n \oplus \tilde{\gamma}_n) - (pf_\omega - [p]^* f_\omega)(\tilde{\gamma}_n) \\ y_{3,n} &= \int_{[p]\delta'_n}^{[p]\delta'_n \oplus [p]\tilde{\gamma}_n} \omega - \int_{\delta_{n-1}}^{\delta_{n-1} \oplus [p]\tilde{\gamma}_{n-1}} \omega = (\Delta^{[2]} f_\omega)(\delta_{n-1}, [p]\delta'_n \ominus \delta_{n-1}, [p]\tilde{\gamma}_n) \\ y_{4,n} &= \int_{\delta_{n-1}}^{\delta_{n-1} \oplus [p]\tilde{\gamma}_n} \omega - \int_{\delta_{n-1}}^{\delta_{n-1} \oplus \tilde{\gamma}_{n-1}} \omega = f_\omega(\delta_{n-1} \oplus [p]\tilde{\gamma}_n) - f_\omega(\delta_{n-1} \oplus \tilde{\gamma}_{n-1}) \end{aligned}$$

et où  $\delta'_n$  est une suite bornée dans  $U_\omega(B_{dR}^+) \cap ([p]^* U_\omega)(B_{dR}^+)$  telle que  $\delta'_n \oplus \tilde{\gamma}_n$  est bornée dans ce même ouvert (il en existe). On peut déduire que les suites  $(y_{1,n})_n$ ,  $(y_{2,n})_n$  et  $(y_{3,n})_n$  sont bornées du fait que les fonctions  $\Delta^{[2]} f_\omega$  et  $pf_\omega - [p]^* f_\omega$  sont rationnelles. Quant à  $(y_{4,n})_n$ , on montre qu'elle est bornée en utilisant  $\theta(\delta_{n-1} \oplus [p]\tilde{\gamma}_n) = \theta(\delta_{n-1} \oplus \tilde{\gamma}_{n-1})$ . Donc  $p^n \int_{\delta_n}^{\delta_n \oplus \tilde{\gamma}_n} \omega$  converge dans  $B_{dR}^+$ . Si  $(\delta_n)_n$  est remplacé par  $(\delta''_n)_n$  satisfaisant les propriétés (i) en (1.1.1.5) (sans changer  $\tilde{\gamma}_n$ ), alors la suite  $(\delta'''_n)_n$  définie par  $\delta'''_n = \delta_n$  si  $n$  est pair et  $\delta'''_n = \delta''_n$  si  $n$  est impair vérifie encore ces propriétés, d'où on déduit que la limite est indépendante de  $(\delta_n)_n$ . Si on choisit un autre relevé borné  $(\tilde{\gamma}'_n)_n$ , la suite  $(\delta_n \oplus \tilde{\gamma}'_n)_n$  est encore bornée dans  $U_\omega(B_{dR}^+)$  ([Colm2], II.3.1) et le même raisonnement en "mélangeant" les suites  $(\tilde{\gamma}_n)_n$  et  $(\tilde{\gamma}'_n)_n$  montre que la limite est indépendante du relevé borné de  $(\gamma_n)_n$  choisi. Enfin, si  $\omega = df_\omega$  avec  $f_\omega \in K(X)$ , la suite  $\int_{\delta_n}^{\delta_n \oplus \tilde{\gamma}_n} \omega = f_\omega(\delta_n \oplus \tilde{\gamma}_n) - f_\omega(\delta_n)$  est par définition bornée ce qui entraîne que  $p^n \int_{\delta_n}^{\delta_n \oplus \tilde{\gamma}_n} \omega$  converge vers 0 dans  $B_{dR}^+$ . Ceci achève (ii).

Passons au (iii). La linéarité par rapport à  $\omega$  vient de la linéarité de l'intégrale. Si  $((\gamma_n)_n, (\gamma'_n)_n) \in T_p(X) \times T_p(X)$ , on prend  $\tilde{\gamma}_n \oplus \tilde{\gamma}'_n$  comme relevé de  $\gamma_n \oplus \gamma'_n$ , qui forme encore une suite bornée dans  $X(B_{dR}^+)$ . On peut trouver  $(\delta_n)_n$  bornée dans  $U_\omega(B_{dR}^+)$  telle que les trois suites  $(\delta_n \oplus \tilde{\gamma}_n)_n$ ,  $(\delta_n \oplus \tilde{\gamma}'_n)_n$  et  $(\delta_n \oplus \tilde{\gamma}_n \oplus \tilde{\gamma}'_n)_n$  y sont encore bornées. On écrit :

$$p^n \int_{\delta_n}^{\delta_n \oplus \tilde{\gamma}_n \oplus \tilde{\gamma}'_n} \omega = p^n \int_{\delta_n}^{\delta_n \oplus \tilde{\gamma}_n} \omega + p^n \int_{\delta_n \oplus \tilde{\gamma}_n}^{\delta_n \oplus \tilde{\gamma}_n \oplus \tilde{\gamma}'_n} \omega$$

et on remarque que la suite  $(\delta_n \oplus \tilde{\gamma}_n)_n$  vérifie les propriétés (i) par rapport à  $(\tilde{\gamma}'_n)_n$ . Par (ii), cela entraîne que  $p^n \int_{\delta_n \oplus \tilde{\gamma}_n}^{\delta_n \oplus \tilde{\gamma}_n \oplus \tilde{\gamma}'_n} \omega$  converge dans  $B_{dR}^+$  vers  $\int_{\gamma'} \omega$ , d'où la linéarité par rapport à  $\gamma$ . Enfin, si  $\omega \in H^0(X, \Omega_{X/K}^1)$ , la primitive  $f_\omega$  en (1.1.1.5) nulle en 0 est un homomorphisme de groupes (c.f. 1.1.2.8) donc  $p^n \int_{\delta_n}^{\delta_n \oplus \tilde{\gamma}_n} \omega = p^n f_\omega(\tilde{\gamma}_n) = f_\omega([p]^n \tilde{\gamma}_n)$ . Or  $\theta(f_\omega([p]^n \tilde{\gamma}_n)) = f_\omega([p]^n \gamma_n) = f_\omega(0) = 0$ , d'où  $p^n \int_{\delta_n}^{\delta_n \oplus \tilde{\gamma}_n} \omega \in \text{Ker}(\theta)$ .

Le plus délicat est (iv), qui découle de l'analogie  $p$ -adique des relations de Riemann entre les périodes. Rappelons que si  $U$  est un ouvert de Zariski de  $X$ , on a un isomorphisme  $\Gamma(U, \mathcal{O}_U) \otimes_K H^0(X, \Omega_{X/K}^1) \xrightarrow{\sim} H^0(U, \Omega_{U/K}^1)$  (car  $X$  est abélienne). Soit  $(\omega_1, \dots, \omega_d)$  une base sur  $K$  de  $H^0(X, \Omega_{X/K}^1)$ , en passant à  $U^{an} = U(K)$ , on voit que si  $G$  est une fonction localement analytique sur  $U(K)$ , on a  $dG = \sum_{i=1}^d G_i \omega_i$  où les  $G_i$  sont localement analytiques sur  $U(K)$ .

**Proposition 2.1.3.1.** (*[Colm2], II.1.19*) *Soit  $D$  un diviseur de  $X$ . Il existe une fonction  $G_D$  localement analytique sur  $X(K) - D(K)$  et ayant une singularité logarithmique le long de  $D$  telle que  $\Delta^* G_D = G_D(x \oplus y \oplus z) - G_D(x \oplus y) - G_D(x \oplus z) - G_D(y \oplus z) + G_D(x) + G_D(y) + G_D(z)$  soit le logarithme d'une fonction rationnelle sur  $X^3$ . De plus, si  $dG_D = \sum_{i=1}^d G_{D,i} \omega_i$ ,  $\omega_{D,i} = dG_{D,i}$  est une 1-forme de seconde espèce sur  $X$  pour tout  $i$ .*

A la base de cette proposition est le théorème du cube qui dit que l'image inverse  $\Delta^* D$  de  $D$  sur  $X^3$  par  $\Delta : X^3 \rightarrow X$  est le diviseur d'une fonction rationnelle. D'autre part, rappelons qu'à  $D$  est associé l'accouplement de Weil  $\varepsilon_D : T_p(X) \times T_p(X) \rightarrow T_p(\mathbf{G}_m)$  (c.f. ([Mu1], IV.20) par exemple). Si  $(\gamma, \gamma') \in T_p(X) \times T_p(X)$ ,  $\log[\varepsilon_D(\gamma, \gamma')] \in \mathbf{Z}_p t$  (voir 2.1.2.2 pour  $t$ ) et l'accouplement:

$$\log[\varepsilon_D] : T_p(X) \times T_p(X) \rightarrow \mathbf{Z}_p t$$

est bilinéaire et antisymétrique.

**Théorème 2.1.3.2.** (*Relations de Riemann  $p$ -adiques*) *Soit  $(\gamma, \gamma') \in T_p(X) \times T_p(X)$ , alors:*

$$\log[\varepsilon_D(\gamma, \gamma')] = \sum_{i=1}^d \left( \int_{\gamma} \omega_i \int_{\gamma'} \omega_{D,i} - \int_{\gamma'} \omega_i \int_{\gamma} \omega_{D,i} \right).$$

Voir ([Colm2], II.3.5) pour la preuve. En conséquence, on voit que si  $\gamma_1, \dots, \gamma_{2d}$  est une base de  $T_p(X)$  et si on note  $\omega_{d+i} = \omega_{D,i}$  ( $i \in \{1, \dots, d\}$ ), on a l'égalité matricielle:

$$\left( \log[\varepsilon_D(\gamma_i, \gamma_j)] \right)_{1 \leq i, j \leq 2d} = {}^t \left( \int_{\gamma_j} \omega_i \right)_{1 \leq i, j \leq 2d} \cdot \begin{pmatrix} 0 & I_d \\ -I_d & 0 \end{pmatrix} \cdot \left( \int_{\gamma_j} \omega_i \right)_{1 \leq i, j \leq 2d}$$

où  $i$  est le numéro de la ligne et  $j$  celui de la colonne. Comme on peut toujours choisir  $D$  tel que l'accouplement de Weil soit non dégénéré, i.e. tel que:

$$\det \left( \log[\varepsilon_D(\gamma_i, \gamma_j)] \right)_{1 \leq i, j \leq 2d} \in \mathbf{Q}_p^\times t \subset B_{dR}^\times$$

cela montre que, pour un tel  $D$ ,  $(\omega_1, \dots, \omega_{2d})$  fournit une base de  $H_{dR}^1(X)$  et  $\left( \int_{\gamma_j} \omega_i \right)_{1 \leq i, j \leq 2d} \in GL_{2d}(B_{dR})$ .

**Remarque 2.1.3.3.** Les fonctions  $G_D$  méritent le nom de fonctions de Green  $p$ -adiques. Les 1-formes  $\omega_{D,i}$  sont déjà définies dans [Cole2]. De (2.1.2.4), on peut déduire des isomorphismes  $B_{dR} \otimes_K H_{dR}^i(X) \xrightarrow{\sim} B_{dR} \otimes_{\mathbf{Q}_p} H_{\text{ét}}^i(X_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_p)$  pour tout

$i$  (où  $H^i(X) = \bigwedge^i H^1(X)$ ) et les relations de Riemann  $p$ -adiques sont une autre façon de dire que pour  $i = 2$  l'isomorphisme envoie la classe du diviseur  $D$  dans  $H_{dR}^2(X)$  sur sa classe dans  $H_{\acute{e}t}^2(X_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_p)$ .

**Remarque 2.1.3.4.** Les premiers théorèmes de comparaison entre  $H_{dR}^1(X)$  et  $H_{\acute{e}t}^1(X_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_p)$  pour une variété abélienne  $X$  sur  $K$  sont dus à Tate dans le cas de bonne réduction ([Ta1]) et Raynaud dans le cas général ([Bog]), qui démontrent la célèbre décomposition de Hodge-Tate:

$$\mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} H_{\acute{e}t}^1(X_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_p) \simeq \left( \mathbf{C}_p(-1) \otimes_K H^0(X, \Omega_{X/K}^1) \right) \oplus \left( \mathbf{C}_p \otimes_K H^1(X, \mathcal{O}_X) \right).$$

Cette décomposition a ensuite été redémontrée par Fontaine dans le cas général ([Fo3]), puis par Coleman dans le cas de bonne réduction ([Cole2]) via son intégration  $p$ -adique exposée au (1.2). L'énoncé avec  $B_{dR}^+$  comme en (2.1.2.4) est plus fort (la décomposition ci-dessus s'en déduit facilement) et a d'abord été obtenu par Fontaine et Messing (c.f. [Wi]). C'est un cas particulier de conjectures en tout degré de cohomologie dues à Fontaine (appendice de [Fo1]) qui sont maintenant démontrées en toute généralité (travaux de Fontaine-Messing, Faltings, Kato, Tsuji, etc...): voir l'exposé d'Illusie [Il] dans ce séminaire et [Ts] pour plus de détails. Mais les preuves, où il n'est pas du tout question d'intégrer des formes différentielles, sont souvent longues et techniques. La preuve de Colmez pour le  $H^1$ , fidèle à la stratégie classique sur les complexes, n'en est que plus élégante.

## 2.2. Les polylogarithmes $p$ -adiques. Dans cette partie, $K = \mathbf{C}_p$ .

Dans le cas des courbes avec bonne réduction, Coleman a développé une variante de sa construction en (1.2) (les “basic wide open spaces” en anglais) qui lui permet d'intégrer toutes les formes différentielles rationnelles, mais aussi les formes rigides et même, par itération, des formes localement analytiques pas forcément algébriques ou rigides, ce que ne permet pas l'intégrale de Colmez. Nous présentons ci-dessous un cas particulier de cette construction que nous utilisons ensuite pour définir les polylogarithmes  $p$ -adiques.

2.2.1. *Itération de l'intégration sur les courbes.* Soient donc  $X$  une courbe propre et lisse sur  $\text{Spec}(\mathbf{C}_p)$  qui admet un modèle  $\mathcal{X}$  propre et lisse sur  $\text{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p})$  et  $Y$  la fibre spéciale sur  $\text{Spec}(\overline{\mathbf{F}}_p)$ .

Soient  $S \subset X(\mathbf{C}_p)$  un ensemble fini de points fermés,  $U = X - S$  et  $\overline{S}$  l'image de  $S$  dans  $Y(\overline{\mathbf{F}}_p)$ . Soient  $U^{rig} = U(\mathbf{C}_p)$  (= espace analytique rigide associé à  $U$ ) et  $W = sp^{-1}(Y(\overline{\mathbf{F}}_p) - \overline{S}) \subset U^{rig}$  où  $sp$  est la flèche de spécialisation. *On suppose que l'application  $S \rightarrow \overline{S}$  est injective.* L'ouvert  $U^{rig}$  est alors un cas particulier de ce que Coleman appelle un “basic wide open space” ([CS],2.1) et  $W$  est un

“affinoïde sous-jacent” (c.f. 1.2.1.2). On a dans ce cas:

$$U^{rig} - W = \cup_{s \in S} C_s$$

où  $C_s$  est une couronne ouverte autour de  $s \in S$  isomorphe à  $\{z \in \mathbf{C}_p \mid 0 < |z| < 1\}$ . Via cet isomorphisme, on pose pour  $r \in ]0, 1[$ :

$$U_r = W \cup (\cup_{s \in S} C_{s,r}) \subset U$$

où  $C_{s,r} \subset C_s$  correspond à  $\{z \in \mathbf{C}_p \mid r < |z| < 1\} \subset \{z \in \mathbf{C}_p \mid 0 < |z| < 1\}$ . Quand  $r$  tend vers 1, les  $U_r$  forment une famille décroissante de voisinages de  $W$ . Ils dépendent des isomorphismes choisis, mais si  $(U'_{r'})_{r'}$  est une famille obtenue à partir d'autres choix de coordonnées locales sur les  $C_s$ , et si  $r' \in ]0, 1[$ , il existe  $r$  suffisamment proche de 1 tel que  $U_r \subset U_{r'}$ , et réciproquement. Cela suffit pour que les résultats ci-dessous soient indépendants de la famille  $(U_r)_r$ .

Fixons un morphisme de Frobenius sur  $Y$  (c.f. 1.2.2) qui envoie  $\bar{S}$  dans  $\bar{S}$ .

**Proposition 2.2.1.1.** (i) *Pour  $r$  suffisamment proche de 1, il existe un morphisme rigide  $\phi : U_r \rightarrow U^{rig}$  tel que  $\phi(W) \subset W$ ,  $\phi(C_s \cap U_r) \subset C_s$  ( $s \in S$ ) et qui commute via la flèche de spécialisation avec le morphisme de Frobenius fixé sur  $Y(\bar{\mathbf{F}}_p)$ .*

(ii) *Si  $N$  est un entier fixé et  $n \in \{0, \dots, N\}$ , il existe  $r$  suffisamment proche de 1 tel que  $\phi^n = \phi \circ \dots \circ \phi$  ( $n$  fois) est encore bien défini de  $U_r$  dans  $U^{rig}$ .*

Voir ([CS],2.2) pour la preuve. Si  $n$  est un entier fixé et si  $1-r$  est suffisamment petit, on peut donc définir par functorialité:  $(\phi^*)^n = (\phi^n)^* : \Omega_{U^{rig}/\mathbf{C}_p}^1 \rightarrow \Omega_{U_r/\mathbf{C}_p}^1$  où  $\Omega_{U^{rig}/\mathbf{C}_p}^1$  désigne les 1-formes (rigides) sur  $U^{rig}$  (resp. avec  $U_r$ ).

**Proposition 2.2.1.2.** *Il existe un polynôme  $P_1(T) \in \mathbf{C}_p[T]$  dont aucune des racines n'est une racine de l'unité tel que, pour tout  $\omega \in \Omega_{U^{rig}/\mathbf{C}_p}^1$ , tout  $\phi$  comme en (2.2.1.1) et tout  $r$  suffisamment proche de 1,  $P_1(\phi^*)(\omega) \in d\Gamma(U_r, \mathcal{O}_{U_r})$ .*

*Indication de preuve.* — L'inclusion d'espaces rigides  $U_r \hookrightarrow U^{rig}$  induit un isomorphisme  $H_{dR}^1(U^{rig}) \xrightarrow{\sim} H_{dR}^1(U_r)$  où  $H_{dR}^1(U^{rig}) = \Omega_{U^{rig}/\mathbf{C}_p}^1/d\Gamma(U^{rig}, \mathcal{O}_{U^{rig}})$  (resp. avec  $U_r$ ). Le morphisme  $\phi : U_r \rightarrow U^{rig}$  donne donc un morphisme  $\phi^* : H_{dR}^1(U^{rig}) \rightarrow H_{dR}^1(U_r)$ . Le résultat vient du fait que le polynôme caractéristique de  $\phi^*$  s'identifie au numérateur de la fonction  $\zeta$  de la courbe affine  $Y - \bar{S}$ , dont les racines sont des nombres de Weil, i.e. de valeur absolue complexe (pour tout plongement dans  $\mathbf{C}$ ) une puissance non nulle de  $p$ .  $\square$

Pour tout  $s \in S$ , soit  $\Gamma(C_s, \mathcal{O}_{C_s})_{log} = \Gamma(C_s, \mathcal{O}_{C_s})[\log(f), f \in \Gamma(C_s, \mathcal{O}_{C_s})^\times]$ .

**Théorème 2.2.1.3.** *Soient  $\phi$ ,  $P_1$  et  $r$  comme ci-dessus et  $\omega$  dans  $\Omega_{U^{rig}/\mathbf{C}_p}^1$ , il existe à addition près d'une constante une unique fonction  $f_\omega$  localement analytique sur  $U^{rig} = U(\mathbf{C}_p)$  telle que:*

1)  $df_\omega = \omega$

2)  $P_1(\phi^*)(f_\omega) \in \Gamma(U_r, \mathcal{O}_{U_r})$

3) pour tout  $s \in S$ ,  $f_\omega|_{C_s} \in \Gamma(C_s, \mathcal{O}_{C_s})_{log}$ .

De plus  $f_\omega$  est indépendant de  $r$ ,  $\phi$ ,  $P_1$  et du morphisme de Frobenius sur  $Y$ .

*Preuve.* — Soit  $g \in \Gamma(U_r, \mathcal{O}_{U_r})$  tel que  $P_1(\phi^*)(\omega) = dg$ . En procédant comme dans la première étape de (1.2.2.1), mais avec l'affinoïde  $W$  au lieu de l'affinoïde  $]Y_i[$ , on a une unique (à cte près) fonction  $f_W$  localement analytique sur  $W$  telle que  $df_W = \omega|_W$  et  $P_1(\phi^*)(f_W) = g|_W \in \Gamma(W, \mathcal{O}_W)$ . Sur  $C_s$ , il est facile de voir que tout 1-forme de  $\Omega_{C_s/\mathbf{C}_p}^1$  s'intègre de façon unique (mod. cte) dans  $\Gamma(C_s, \mathcal{O}_{C_s})_{log}$ : soit  $f_s$  une telle primitive de  $\omega|_{C_s}$ . Soit  $f$  l'unique fonction localement analytique sur  $U^{rig}$  telle que  $f|_W = f_W$  et  $f|_{C_s} = f_s$  pour tout  $s \in S$ : il faut ajuster les constantes d'intégration pour avoir  $P_1(\phi^*)(f) \in \Gamma(U_r, \mathcal{O}_{U_r})$ . Soit  $c_s = (P_1(\phi^*)(f_s) - g)|_{C_s \cap U_r} \in \Gamma(C_s \cap U_r, \mathcal{O}_{C_s \cap U_r})_{log}$  (on utilise ici  $\phi(C_s \cap U_r) \subset C_s$ ), on a  $dc_s = 0$  sur  $C_s \cap U_r = C_{s,r}$  qui est connexe, donc  $c_s$  est constant. Soit  $f_\omega$  tel que  $f_\omega|_W = f_W$  et  $f_\omega|_{C_s} = f_s - \frac{c_s}{P_1(1)}$ : on vérifie que  $P_1(\phi^*)(f_\omega) = g \in \Gamma(U_r, \mathcal{O}_{U_r})$ , et que  $g$  détermine  $f_\omega$  de façon unique. On renvoie à ([CS], 2.3, 2.4) pour l'indépendance par rapport à  $P_1$  et au relevé  $\phi$  (même méthode pour ce dernier qu'en (1.2.2.1)). L'indépendance par rapport au morphisme de Frobenius sur  $Y$  se prouve comme dans (1.2.2.1).  $\square$

Remarquons que si  $\omega$  est une forme rationnelle quelconque sur  $X$  (i.e. pas forcément de seconde espèce),  $S \subset X(\mathbf{C}_p)$  l'ensemble des points où  $\omega$  a un pôle, et si *de plus* l'application de spécialisation est injective sur  $S$ , (2.2.1.3) fournit une primitive de  $\omega$  bien définie modulo constante. On peut montrer que cette primitive coïncide avec celle en (1.1.1.5), en particulier  $f_\omega = \log(f)$  si  $\omega = \frac{df}{f}$  avec  $f$  non nul sur  $U$  ([CS], 2.5.1).

Nous allons itérer ce processus. Notons  $\mathcal{O}_0(U^{rig}) = \Gamma(U^{rig}, \mathcal{O}_{U^{rig}})$  et  $\mathcal{O}_0(U_r) = \Gamma(U_r, \mathcal{O}_{U_r})$  pour  $0 < r < 1$ . On définit les sous-espaces suivants des fonctions localement analytiques sur  $U^{rig}$  ou  $U_r$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_1(U^{rig}) &= \mathcal{O}_0(U^{rig}) + \sum_{\omega \in \Omega_{U^{rig}/\mathbf{C}_p}^1} \mathcal{O}_0(U^{rig})f_\omega \\ \mathcal{O}_1(U_r) &= \mathcal{O}_0(U_r) + \sum_{\omega \in \Omega_{U^{rig}/\mathbf{C}_p}^1} \mathcal{O}_0(U_r)f_\omega|_{U_r} \end{aligned}$$

où  $f_\omega$  est "la" primitive en (2.2.1.3) et  $r$  est suffisamment proche de 1.

**Proposition 2.2.1.4.** (i) Soit  $f \in \mathcal{O}_1(U_r)$  (resp.  $\mathcal{O}_1(U^{rig})$ ) tel que  $df = 0$ , alors  $f$  est constante sur  $U_r$  (resp.  $U^{rig}$ ).

(ii) Il existe un polynôme  $P_2(T) \in \mathbf{C}_p[T]$  dont aucune des racines n'est une racine de l'unité tel que, pour tout  $\omega \in \mathcal{O}_1(U^{rig}) \otimes_{\mathcal{O}_0(U^{rig})} \Omega_{U^{rig}/\mathbf{C}_p}^1$ , tout  $\phi$  comme en (2.2.1.1) et tout  $r$  suffisamment proche de 1,  $P_2(\phi^*)(\omega) \in d\mathcal{O}_1(U_r)$ .

*Indication de preuve.* — On renvoie à ([CS],2.4.4) pour (i). Pour (ii), soit  $H_{dR}^1(\mathcal{O}_1(U^{rig})) = (\mathcal{O}_1(U^{rig}) \otimes \Omega_{U^{rig}/\mathbf{C}_p}^1)/d\mathcal{O}_1(U^{rig})$ , l'application:

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{U^{rig}/\mathbf{C}_p}^1 \times \Omega_{U^{rig}/\mathbf{C}_p}^1 & \rightarrow & H_{dR}^1(\mathcal{O}_1(U^{rig})) \\ (\omega, \omega') & \mapsto & f_\omega \omega' \text{ mod. } d\mathcal{O}_1(U^{rig}) \end{array}$$

est bien définie et Coleman et de Shalit montrent ([CS],2.4.6) qu'elle induit un isomorphisme compatible à  $\phi^*$ :

$$H_{dR}^1(U^{rig}) \otimes_{\mathbf{C}_p} H_{dR}^1(U^{rig}) \xrightarrow{\sim} H_{dR}^1(\mathcal{O}_1(U^{rig})).$$

Les valeurs propres de  $\phi^*$  sur  $H_{dR}^1(\mathcal{O}_1(U^{rig}))$  sont donc des produits de nombres de Weil (c.f. preuve de (2.2.1.2)): ce ne sont en particulier jamais des racines de l'unité et on peut prendre pour  $P_2$  le polynôme caractéristique de  $\phi^*$  sur  $H_{dR}^1(\mathcal{O}_1(U^{rig}))$ .  $\square$

Il est alors formel à partir de (2.2.1.4) de généraliser la preuve de (2.2.1.3) (et ce qu'elle utilise de (1.2.2.1)) au cas où  $\omega \in \mathcal{O}_1(U^{rig}) \otimes \Omega_{U^{rig}/\mathbf{C}_p}^1$  en remplaçant  $P_1(\phi^*)$  par  $P_2(\phi^*)$  et  $\Gamma(U_r, \mathcal{O}_{U_r}) = \mathcal{O}_0(U_r)$  par  $\mathcal{O}_1(U_r)$ . On définit de manière analogue  $\mathcal{O}_2(U^{rig})$  comme le  $\mathcal{O}_1(U^{rig})$ -module engendré par les constantes et les primitives qu'on vient d'obtenir des 1-formes de  $\mathcal{O}_1(U^{rig}) \otimes \Omega_{U^{rig}/\mathbf{C}_p}^1$ , et  $\mathcal{O}_2(U_r)$  comme le  $\mathcal{O}_1(U_r)$ -module engendré par les constantes et les restrictions à  $U_r$  de ces primitives. La proposition (2.2.1.4) est encore valable avec  $\mathcal{O}_2(U_r)$  ou  $\mathcal{O}_2(U^{rig})$  et ainsi de suite... Par récurrence, on obtient finalement des suites croissantes canoniques d'espaces de fonctions localement analytiques:  $\mathcal{O}_k(U^{rig}) \subset \mathcal{O}_{k+1}(U^{rig})$  et  $\mathcal{O}_k(U_r) \subset \mathcal{O}_{k+1}(U_r)$  et des polynômes  $P_k(T)$  (non uniques mais dont les racines ne sont pas des racines de l'unité) tels qu'on ait, si  $r$  est suffisamment proche de 1:

**Théorème 2.2.1.5.** *Soient  $k \in \mathbf{N}$  et  $\omega \in \mathcal{O}_k(U^{rig}) \otimes_{\mathcal{O}_0(U^{rig})} \Omega_{U^{rig}/\mathbf{C}_p}^1$ , il existe à addition près d'une constante une unique fonction  $f_\omega \in \mathcal{O}_{k+1}(U^{rig})$  telle que:*

- 1)  $df_\omega = \omega$
- 2)  $P_{k+1}(\phi^*)(f_\omega) \in \mathcal{O}_k(U_r)$
- 3) pour tout  $s \in S$ ,  $f_\omega|_{C_s} \in \Gamma(C_s, \mathcal{O}_{C_s})_{log}$ .

Bien sûr, la récurrence ci-dessus peut se formaliser et se généraliser en dégageant les propriétés des  $\mathcal{O}_k(U^{rig})$ : c'est ce qui est fait dans [Cole1] et [CS] où sont introduits des “ $F$ -cristaux logarithmiques” que nous avons préféré éviter...

**2.2.2. Construction des polylogarithmes  $p$ -adiques.** Pour une introduction aux polylogarithmes complexes, on renvoie à l'exposé d'Oesterlé dans ce séminaire ([Oe]). Soit  $k$  un entier, rappelons que les polylogarithmes classiques  $\ell_k(z)$  (plus exactement leur détermination principale) sont les fonctions holomorphes sur  $\mathbf{C} - [1, +\infty[$  données sur la boule unité ouverte par la formule:

$$\ell_k(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^k}.$$

On a  $\ell_0(z) = \frac{z}{z-1}$ ,  $\ell_1(z) = -\log(1-z)$  et  $d\ell_k(z) = \ell_{k-1}(z)\frac{dz}{z}$ . Nous allons définir leurs analogues  $p$ -adiques, que nous noterons encore  $\ell_k$ , vu qu'il ne sera (presque) plus question des polylogarithmes complexes dans la suite.

Avec les notations de la partie précédente, considérons:

$$\begin{aligned} X &= \mathbf{P}^1 \\ S &= \{1, \infty\} \subset \mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p). \end{aligned}$$

On a:

$$\begin{aligned} U^{rig} &= X(\mathbf{C}_p) - S = \mathbf{C}_p - \{1\} \\ W &= \{z \in \mathbf{C}_p \mid |z| \leq 1, |z-1| \geq 1\} \\ C_1 &= \{z \in \mathbf{C}_p \mid 0 < |z-1| < 1\} \\ C_\infty &= \{z \in \mathbf{C}_p \mid |z| > 1\} \\ U_r &= \{z \in \mathbf{C}_p \mid |z| < \frac{1}{r}, |z-1| > r\} \quad (0 < r < 1). \end{aligned}$$

Remarquons que  $\mathcal{O}_0(U^{rig}) = \mathcal{O}_0(\mathbf{C}_p - \{1\})$  est l'ensemble des séries de Laurent  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-1)^n$  qui convergent sur  $\mathbf{C}_p - \{1\}$  et  $\Omega_{U^{rig}/\mathbf{C}_p}^1 = \mathcal{O}_0(U^{rig})dz$ . On choisit comme morphisme de Frobenius  $\phi(z) = z^p$  qui préserve bien  $S$  et envoie  $U_r$  dans  $U^{rig}$  et  $U_r \cap C_s$  dans  $C_s$  ( $s \in S$ ) lorsque  $\frac{1}{p^{p-1}} < r < 1$  (car  $\{\zeta \mid \zeta^p = 1\} \cap U_r = \emptyset$  pour de tels  $r$ ). D'après le paragraphe précédent, on dispose des espaces de fonctions localement analytiques  $\mathcal{O}_k(\mathbf{C}_p - \{1\})$  pour  $k \in \mathbf{N}$ .

**Corollaire 2.2.2.1.** *Il existe une unique suite de fonctions  $\ell_k(z) \in \mathcal{O}_k(\mathbf{C}_p - \{1\})$  telle que:*

$$\begin{aligned} \ell_0(z) &= \frac{z}{z-1} \\ \ell_k(0) &= 0 \\ d\ell_k(z) &= \frac{\ell_{k-1}(z)}{z} dz. \end{aligned}$$

De plus,  $\ell_1(z) = -\log(1-z)$  et, si  $|z| < 1$ ,  $\ell_k(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^k}$ .

*Preuve.* — L'existence et l'unicité sont conséquences de (2.2.1.5). Un examen des preuves de (1.2.2.1) et (2.2.1.3) montre que les fonctions de  $\mathcal{O}_k(\mathbf{C}_p - \{1\})$  sont toutes analytiques sur la boule unité ouverte  $\{z \in \mathbf{C}_p \mid |z| < 1\} \subset W$ . Or, la fonction  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^k}$  est aussi analytique sur cette boule et satisfait les propriétés de l'énoncé. On a donc  $\ell_k(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^k}$  pour  $|z| < 1$  par unicité (mod. cte) de la primitive analytique des 1-formes analytiques sur la boule ouverte. Vérifions que  $P_1(T) = p - T$  satisfait  $P_1(\phi^*)(\omega) \in d\mathcal{O}_0(U_r)$  pour tout  $\omega \in \mathcal{O}_0(U^{rig})dz$  et tout  $r \in ]\frac{1}{p^{p-1}}, 1[$ . On voit qu'il suffit de vérifier  $P_1(\phi^*)(\frac{dz}{z-1}) \in d\mathcal{O}_0(U_r)$ . Mais on a:

$$P_1(\phi^*)\left(\frac{dz}{z-1}\right) = p\left(\frac{1}{z-1} - \frac{z^{p-1}}{z^p-1}\right)dz$$

et un calcul montre que cette 1-forme se prolonge au point  $\infty$  (faire  $z \leftrightarrow 1/z$ ), donc à  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p) - \{z \in \mathbf{C}_p \mid |z - 1| \leq r\}$  qui contient  $U_r$  et est isomorphe à une boule ouverte. Or, sur une boule ouverte, toute 1-forme analytique fermée s'intègre, et donc en particulier  $P_1(\phi^*)(\frac{dz}{z-1})$ , i.e.  $P_1(\phi^*)(\frac{dz}{z-1}) \in d\mathcal{O}_0(U_r)$ . Pour montrer que  $\ell_1(z) = -\log(1-z)$ , il suffit d'avoir  $P_1(\phi^*)(-\log(1-z)) \in \mathcal{O}_0(U_r)$ . Mais:

$$P_1(\phi^*)(-\log(1-z)) = \log \left( 1 - \left( 1 - \frac{1-z^p}{(1-z)^p} \right) \right)$$

et pour  $\frac{1}{p^{p-1}} < r < |z-1|$ , on vérifie que  $\left| 1 - \frac{1-z^p}{(1-z)^p} \right| < 1$ , donc:

$$P_1(\phi^*)(-\log(1-z)) = - \sum_{n \geq 1} \frac{\left( 1 - \frac{1-z^p}{(1-z)^p} \right)^n}{n} \in \mathcal{O}_0(U_r). \quad \square$$

**Remarque 2.2.2.2.** On peut prendre pour  $P_k(T)$  les polynômes  $p^k - T$  pour tout  $k$  ([Cole1],5.2).

Voici une application des polylogarithmes  $p$ -adiques. Soient  $\chi$  un caractère de Dirichlet non trivial et  $L_p(s, \chi)$  la fonction  $L$   $p$ -adique de Kubota-Leopoldt, obtenue par interpolation des valeurs aux entiers *negatifs* de la fonction  $L(s, \chi)$  complexe de Dirichlet ([Iw],3). Il est naturel de se demander quelles sont alors les valeurs de  $L_p(s, \chi)$  aux entiers *positifs*. La réponse est fournie par le théorème suivant, dû à Coleman ([Cole1]):

**Théorème 2.2.2.3.** *Supposons  $p \neq 2$ . Soient  $\chi : (\mathbf{Z}/d\mathbf{Z})^\times \rightarrow \mathbf{C}_p^\times$  un caractère de Dirichlet de conducteur  $d > 1$  et  $\omega$  le caractère de Dirichlet "représentant de Teichmüller":  $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^\times \rightarrow \mathbf{C}_p^\times$ . Pour tout  $k \geq 1$ , on a:*

$$L_p(k, \chi\omega^{1-k}) = \left( 1 - \frac{\chi(p)}{p} \right) \frac{g(\chi, \zeta)}{d} \sum_{a=1}^{d-1} \bar{\chi}(a) \ell_k(\zeta^{-a})$$

où  $\chi\omega^{1-k}$  est le caractère de Dirichlet produit des caractères  $\chi$  et  $\omega^{1-k}$ ,  $\zeta$  une racine primitive  $d^{\text{ième}}$  quelconque de 1 et  $g(\chi, \zeta)$  la somme de Gauss définie par  $g(\chi, \zeta) = \sum_{a=1}^{d-1} \chi(a)\zeta^a$ .

On a supposé  $p \neq 2$  seulement pour simplifier l'exposition. Le cas  $k = 1$ , qui n'utilise que le logarithme  $p$ -adique, est dû à Leopoldt ([Iw],5). On remarquera l'analogie avec la formule classique:

$$L(k, \chi) = \frac{g(\chi, \zeta)}{d} \sum_{a=1}^{d-1} \bar{\chi}(a) \ell_k(\zeta^{-a})$$

(qui découle simplement de l'identité pour tout  $n$ :  $d\chi(n) = \sum_{1 \leq a, b \leq d-1} \chi(a)\bar{\chi}(b)\zeta^{a-bn}$ )

où  $\ell_k$  désigne ici bien sûr le polylogarithme complexe.

**2.3. Autres applications.** Nous passons en revue très rapidement certaines des autres applications de l'intégration  $p$ -adique.

*Points de torsion sur les courbes*

Dans [Cole3] et [Cole5], Coleman démontre, en utilisant l'intégration  $p$ -adique, la conjecture de Manin-Mumford, précédemment montrée par Raynaud ([Ra2]), qui dit que toute courbe de genre  $\geq 2$  contenue dans une variété abélienne sur un corps de caractéristique 0 n'a qu'un nombre fini de points de torsion. On se ramène au cas d'un corps de nombres et le point de départ de la preuve de Coleman est que si  $X$  est une courbe sur une extension finie  $K$  de  $\mathbf{Q}_p$  avec bonne réduction et  $\iota : X \rightarrow J$  un morphisme d'Albanese,  $\iota(Q) - \iota(P)$  est de torsion dans  $J$  si et seulement si  $\int_P^Q \iota^* \omega = 0$  sur  $X$  pour tout  $\omega \in H^0(J, \Omega_{J/\mathbf{C}_p}^1)$ .

*Régulateurs  $p$ -adiques*

Dans [CS], Coleman et de Shalit généralisent l'intégration en (2.2.1) à des ouverts rigides un peu plus généraux que  $U^{rig}$  appelés "basic wide open spaces". Par une méthode tout à fait analogue à celle décrite en (2.2.1), cela leur permet d'intégrer sans restriction les logarithmes de toutes les fonctions rationnelles sur les courbes avec bonne réduction (et même sur certaines courbes à réduction semi-stable) et de définir ainsi des régulateurs  $p$ -adiques, généralisations des dilogarithmes  $p$ -adiques. Comme en (2.2.2.3), ils les utilisent pour calculer des valeurs spéciales de la fonction  $L$   $p$ -adique associée à une courbe elliptique sur  $\mathbf{Q}$  avec multiplication complexe et bonne réduction en  $p$ .

*Loi de réciprocité et hauteurs  $p$ -adiques*

Soit  $X$  une courbe algébrique propre et lisse sur  $\mathbf{C}_p$ . Rappelons qu'une forme de troisième espèce sur  $X$  est une forme rationnelle ayant au plus des pôles simples et tels que les résidus en ces pôles soient des entiers. Si  $\omega$  est une telle forme, le diviseur des résidus  $Res(\omega) = \sum_P n_P P$  où  $P$  parcourt  $X(\mathbf{C}_p)$  et  $n_P$  est le résidu en  $P$  est de degré 0 (i.e.  $\sum n_P = 0$ ). Pour toute forme rationnelle  $\omega'$  dont les pôles évitent  $Res(\omega)$ ,  $\int_{Res(\omega)} \omega' = \sum_P n_P f_{\omega'}(P)$  ne dépend donc pas de la primitive  $f_{\omega'}$  choisie en (1.1.1.5). Si  $\eta$  et  $\eta'$  sont deux formes de seconde espèce sur  $X$ , notons  $\eta \cup \eta'$  la somme des résidus de  $f_\eta \eta'$  où  $f_\eta$  est une primitive en (1.1.1.5) et où on calcule le résidu en un point à partir des développements analytiques de  $f_\eta$  et  $\eta'$  dans un voisinage  $p$ -adique de ce point (c'est indépendant des choix car  $\eta'$  a tous ses résidus nuls).

Soit  $J$  la jacobienne de  $X$  et  $\tilde{J}$  l'extension universelle de  $J$  par un groupe additif ([Me]). Les points de  $\tilde{J}(\mathbf{C}_p)$  représentent les formes de troisième espèce sur  $X$  modulo les différentielles logarithmiques des fonctions rationnelles et l'algèbre de Lie de  $\tilde{J}$  est isomorphe à  $H_{dR}^1(X)$ . On a en particulier une application logarithme  $Log_{\tilde{J}} : \tilde{J}(\mathbf{C}_p) \rightarrow H_{dR}^1(X)$ .

**Théorème 2.3.1.** (*Loi de réciprocité*) Si  $\omega$  et  $\omega'$  sont deux formes différentielles de troisième espèce dont les diviseurs des résidus sont étrangers, alors:

$$\int_{\text{Res}(\omega)} \omega' - \int_{\text{Res}(\omega')} \omega = \text{Log}_{\bar{J}}(\omega) \cup \text{Log}_{\bar{J}}(\omega').$$

Ce théorème a d'abord été démontré par Coleman dans le cas où  $X$  a bonne réduction ([Cole4]), puis par Colmez dans le cas général ([Colm2]).

Soit maintenant  $X$  une courbe propre et lisse sur un corps de nombres et  $J$  sa jacobienne. A partir des fonctions de Green  $p$ -adiques (c.f. 2.1.3.1) Colmez définit un accouplement de hauteur bilinéaire et symétrique:  $J(\bar{\mathbf{Q}}) \times J(\bar{\mathbf{Q}}) \rightarrow \prod_{p \leq \infty} \mathbf{Q}_p$ . La symétrie découle de (2.3.1). Projeté sur  $\mathbf{R}$ , cet accouplement coïncide avec l'accouplement de Néron-Tate. Projeté sur  $\mathbf{Q}_p$  aux places  $p$  où  $X$  a bonne réduction, il avait déjà été défini par Coleman et Gross ([CG]). A noter que le fait de pouvoir considérer  $\log(p)$  comme une *variable* est important dans la définition de l'accouplement ci-dessus.

#### *Cohomologie de de Rham et réduction semi-stable*

Si  $X$  est une courbe propre et lisse sur une extension finie  $K$  de  $\mathbf{Q}_p$  ayant réduction semi-stable (au sens où elle admet un modèle  $\mathcal{X}$  propre, plat et régulier sur les entiers de  $K$  dont la fibre spéciale est un diviseur à croisements normaux dans  $\mathcal{X}$ ), et si de plus les composantes irréductibles de la fibre spéciale sont lisses, leurs tubes dans  $X^{rig}$  (c.f. 1.2.1) sont des “basic wide open spaces” sur lesquels on peut intégrer les formes différentielles. En utilisant l'intégration sur ces tubes, Coleman et Iovita donnent dans [CI] une construction purement géométrique de la  $K_0$ -structure de Fontaine-Jannsen  $D$  définie par Hyodo-Kato ([HK]) sur  $H_{dR}^1(X)$  (i.e.  $H_{dR}^1(X) = K \otimes_{K_0} D$ ) où  $K_0$  est l'extension maximale de  $\mathbf{Q}_p$  non ramifiée dans  $K$ , ainsi que des opérateurs  $\phi$  et  $N$  définis sur  $D$  (Frobenius et monodromie). Voir aussi les résultats de Le Stum à ce sujet ([Le]).

#### BIBLIOGRAPHIE

- [Ber] Berthelot P., *Cohomologie rigide et cohomologie rigide à supports propres, première partie*, prépublication de l'Institut de Recherche Mathématique de Rennes, 1996.
- [Bes] Besser A., *A generalization of Coleman's  $p$ -adic integration theory*, prépublication du Mathematische Institut der Universität Münster, 1999.
- [BO] Berthelot P., Ogus A., *F-isocrystals and de Rham cohomology I*, Inv. Math. 72, 1983, 159-199.
- [Bog] Bogomolov F., *Sur l'algébricité des représentations  $l$ -adiques*, C.R.A.S. 290, 1980, 701-703.
- [BLR] Bosch S., Lütkebohmert W., Raynaud M., *Néron models*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 21, Springer-Verlag, 1990.
- [Bou] Bourbaki N., *Groupes et algèbres de Lie Chapitres 2 et 3*, Hermann, 1972.
- [Colm1] Colmez P., *Périodes  $p$ -adiques des variétés abéliennes*, Math. Ann. 292, 1992, 629-644.
- [Colm2] Colmez P., *Intégration sur les variétés  $p$ -adiques*, Astérisque 248, Soc. Math. de France, 1998.

- [Cole1] Coleman R., *Dilogarithms, regulators and  $p$ -adic  $L$ -functions*, Inv. Math. 69, 1982, 171-208.
- [Cole2] Coleman R., *Hodge-Tate periods and  $p$ -adic abelian integrals*, Inv. Math. 78, 1984, 351-379.
- [Cole3] Coleman R., *Torsion points on curves and  $p$ -adic abelian integrals*, Annals of Math. 121, 1985, 111-168.
- [Cole4] Coleman R., *Reciprocity laws on curves*, Comp. Math. 72, 1989, 205-235.
- [Cole5] Coleman R., *Ramified torsion points*, Duke Math. J. 54, 1987, 615-640.
- [CG] Coleman R., Gross B.,  *$p$ -adic heights on curves*, Adv. Math. 17, 1989, 73-81.
- [CI] Coleman R., Iovita A., *The Frobenius and Monodromy operators for Curves and Abelian Varieties*, Duke Math. J. 97, 1999, 171-215.
- [CS] Coleman R., de Shalit E.,  *$p$ -adic regulators on curves and special values of  $p$ -adic  $L$ -functions*, Inv. Math. 93, 1988, 239-266.
- [Dw] Dwork B., *Normalized period matrices I*, Annals of Math. 94, 1971, 337-388.
- [Fo1] Fontaine J.-M., *Sur certains types de représentations  $p$ -adiques du groupe de Galois d'un corps local; construction d'un anneau de Barsotti-Tate*, Annals of maths 115, 1982, 529-577.
- [Fo2] Fontaine J.-M., *Le corps des périodes  $p$ -adiques*, Astérisque 223, Soc. Math. de France, 1994, 59-111.
- [Fo3] Fontaine J.-M., *Formes différentielles et modules de Tate des variétés abéliennes sur les corps locaux*, Inv. Math. 65, 1982, 379-409.
- [Ga] Garuti M., *Géométrie rigide et géométrie formelle*, à paraître aux Proceedings de la conférence de Luminy sur le groupe fondamental des courbes en caractéristique  $p > 0$ , décembre 1998.
- [Il] Illusie L., *Cohomologie de de Rham et cohomologie étale  $p$ -adique [d'après G. Faltings, J.-M. Fontaine et al.]*, Séminaire Bourbaki 726, 1990.
- [Iw] Iwasawa K., *Lectures on  $p$ -adic  $L$ -functions*, Annals of Math. Studies 74, Princeton University Press, 1972.
- [KM] Katz N., Messing W., *Some consequences of the Riemann hypothesis for varieties over finite fields*, Inv. Math. 23, 1974, 73-77.
- [La] Lang S., *Abelian varieties*, Interscience, New-York, 1959.
- [Le] Le Stum B., *La structure de Hyodo-Kato pour les courbes*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 94, 1995, 279-301.
- [Me] Messing W., *The universal extension of an abelian variety by a vector group*, Symp. Math. XI (Rome 1972), Academic Press, 1973, 359-372.
- [Mu1] Mumford D., *Abelian varieties*, Oxford University Press, 1970.
- [Mu2] Mumford D., *Analytic construction of degenerating curves over complete local fields*, Compos. Math. 24, 1972, 129-174.
- [Oe] Oesterlé J., *Polylogarithmes*, Séminaire Bourbaki 762, 1992.
- [Ra1] Raynaud M., *Géométrie analytique rigide, d'après Tate, Kiehl,...*, Mémoire de la S.M.F. 39-40, 1974, 319-327.
- [Ra2] Raynaud M., *Courbes sur une variété abélienne et points de torsion*, Inv. Math. 71, 1983, 207-233.
- [Ra3] Raynaud M., *Variétés abéliennes et géométrie rigide*, Proceedings du Congrès International de Nice, 1970, 473-477.
- [Se1] Serre J.-P., *Morphismes universels et variétés d'Albanese*, Séminaire Chevalley 1958/1959, exposé 10.
- [Se2] Serre J.-P., *Corps locaux*, 3<sup>ème</sup> édition, Hermann, 1968.
- [St] Stevens G.,  *$p$ -adic polylogarithms*, notes d'une conférence à Schloss Ringberg am Tegernsee, 4 septembre 1998.
- [Ta1] Tate J.,  *$p$ -divisible groups*, Proc. of a conf. on local fields, Driebergen, 1967, 158-183.
- [Ta2] Tate J., *Rigid analytic spaces*, Inv. Math. 12, 1971, 257-289.

- [Ts] Tsuji T., *p-adic-étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case*, à paraître à Inv. Math.
- [Wi] Wintenberger J.-P., *Théorème de comparaison p-adique pour les schémas abéliens I: construction de l'accouplement de périodes*, Astérisque 223, Soc. Math. de France, 1994, 349-397.
- [Za1] Zarhin Y., *Local heights and abelian varieties*, Groupe d'étude sur les problèmes diophantiens 1988/1989, Publ. math. n° 90 de l'université Pierre et Marie Curie.
- [Za2] Zarhin Y., *p-adic abelian integrals and commutative Lie groups*, Algebraic geometry 4, J. Math. Sci. 81, 1996, 2744-2750.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UMR 8628 DU CNRS, UNIVERSITÉ PARIS-SUD,  
91405 ORSAY CEDEX, FRANCE. E-MAIL: BREUIL@MATH.U-PSUD.FR