MULTIPLICITÉS MODULAIRES RAFFINÉES

par

Christophe Breuil & Ariane Mézard

Résumé. — Soit $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}_p})$ continue suffisamment générique. En utilisant la conjecture sur les multiplicités modulaires de [**6**] démontrée dans [**16**], on montre qu'il existe une bijection naturelle entre l'ensemble des composantes irréductibles de la fibre spéciale d'un anneau de déformations potentiellement semi-stables de $\overline{\rho}$ (à poids de Hodge-Tate et type galoisien fixés) et l'ensemble des poids de Serre de $\overline{\rho}$ distincts qui apparaissent dans la réduction modulo p du type de Bushnell-Kutzko pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ correspondant. Cette bijection préserve de plus les multiplicités respectives (de la composante irréductible dans son schéma ambiant, et du poids de Serre associé dans les constituants de la réduction modulo p). On conjecture que cela reste vrai en remplaçant $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ par $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)$ et $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ par $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)$ pour F extension finie non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$, et on donne une famille d'exemples non triviaux d'anneaux de déformations où c'est bien le cas.

Table des matières

Le premier auteur remercie V. Paškūnas et M. Raynaud pour des discussions.

1. Introduction

Soit E une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ d'anneau d'entiers $\mathcal{O}_E$, ϖ_E une uniformisante de E, $k_E = \mathcal{O}_E/(\varpi_E)$ son corps résiduel et soit $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \to \mathrm{GL}_2(k_E)$ une représentation continue. À $\overline{\rho}$, on peut associer une ou plusieurs représentation(s) irréductible(s) de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ sur k_E que l'on appelle les poids de Serre de $\overline{\rho}$. Il y a plus de 10 ans, nous avons proposé dans [**6**] (lorsque $\mathrm{End}_{k_E[\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)]}(\overline{\rho}) = k_E$) une conjecture reliant la réduction sur k_E des diverses $\mathcal{O}_E$-algèbres de déformations potentiellement semi-stables de $\overline{\rho}$ au nombre des poids de Serre de $\overline{\rho}$ apparaissant dans la réduction sur k_E des divers types de Bushnell-Kutzko de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$. Cette conjecture a été essentiellement démontrée (sous une forme un peu généralisée) par Kisin dans [**16**] en utilisant d'une part tout le programme de Langlands p-adique local pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ qu'elle avait elle-même inspiré (voir [**6**, p.214-215], [**9**], [**10**], [**22**], [**2**], [**5**]), d'autre part un argument global de modularité. Signalons que Paškūnas en a maintenant une preuve purement locale ([**23**]).

Rappelons la conjecture de [**6**] (telle qu'étendue dans [**16**]) dans le cas où $\overline{\rho}$ est suffisamment générique. Soit $k \geq 2$ un entier, t un type pour $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$, i.e. une représentation de l'inertie de noyau ouvert $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}) \to \mathrm{GL}_2(E)$ qui s'étend à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$, et $\psi : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \to \mathcal{O}_E^\times$ un caractère continu satisfaisant une relation de compatibilité convenable avec k et t. Soit $R^{\square,\psi}(k,\mathrm{t},\overline{\rho})$ la $\mathcal{O}_E$-algèbre fidèlement plate noethérienne complète réduite de corps résiduel k_E qui paramètre les déformations de $\overline{\rho}$ de dimension 2 sur des extensions finies de E, potentiellement semi-stables à poids de Hodge-Tate $(0, k-1)$ et de type t (et éventuellement "framed" au sens de Kisin lorsque $\mathrm{End}_{k_E[\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)]}(\overline{\rho}) \neq k_E$, voir [**18**, § 1]). Soit maintenant $\sigma(\mathrm{t})$ le type de Bushnell-Kutzko pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ associé à t (voir [**15**]) et $\overline{\sigma}(k,t)$ le semi-simplifiée modulo ϖ_E de la $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$-représentation $\sigma(k,t) \overset{\text{déf}}{=} \sigma(\mathrm{t}) \otimes_E \mathrm{Sym}^{k-2} E^2$. Lorsque $\overline{\rho}$ est suffisamment générique, la conjecture de [**6**] démontrée dans [**16**] est :

Théorème 1.1 ([**16**]). — *La multiplicité de Hilbert-Samuel de l'anneau local $R^{\square,\psi}(k,\mathrm{t},\overline{\rho})/(\varpi_E)$ est égale au nombre des poids de Serre de $\overline{\rho}$ (comptés avec leur multiplicité) qui apparaissent dans $\overline{\sigma}(k,t)$.*

L'anneau $R^{\square,\psi}(k,\mathrm{t},\overline{\rho})/(\varpi_E)$ étant équidimensionnel, sa multiplicité de Hilbert-Samuel est la somme des multiplicités de ses composantes irréductibles. De même, le nombre des poids de Serre de $\overline{\rho}$ comptés avec leur multiplicité dans $\overline{\sigma}(k,\mathrm{t})$ est la somme des multiplicités des poids de Serre distincts qui y apparaissent. Les deux entiers du théorème 1.1 sont donc tous deux naturellement somme d'autres entiers. Nous démontrons au § 4 de cet article :

***Théorème 1.2* (voir § 4)**. — *Si E est suffisamment grand, il existe une bijection qui respecte les multiplicités entre l'ensemble des composantes irréductibles de $R^{\square,\psi}(k,\mathrm{t},\overline{\rho})/(\varpi_E)$ et l'ensemble des poids de Serre de $\overline{\rho}$ distincts dans $\overline{\sigma}(k,\mathrm{t})$.*

Autrement dit (au moins lorsque E est suffisamment grand) les entiers dans chaque somme sont en fait les mêmes des deux côtés. Comme $\overline{\rho}$ est suffisamment générique, il y a 0, 1 ou 2 poids de Serre de $\overline{\rho}$ distincts dans $\overline{\sigma}(k,t)$. La preuve consiste à montrer d'une part qu'il y a aussi respectivement 0, 1 ou 2 composante(s) irréductible(s) dans $R^{\square,\psi}(k,\mathrm{t},\overline{\rho})/(\varpi_E)$, d'autre part que les multiplicités côté déformations sont toujours majorées par les multiplicités côtés poids de Serre. Comme les sommes sont les mêmes par le théorème 1.1, les multiplicités des deux côtés doivent être égales. On *utilise* ainsi de manière essentielle le théorème 1.1 dans la preuve du théorème 1.2 (qui n'en fournit donc pas une nouvelle preuve). On utilise aussi de manière toute aussi essentielle des idées et techniques introduites par Kisin dans [**16**] que l'on rappelle au § 3.1 (le lecteur verra immédiatement à la lecture des §§ 3.1 et 4 tout ce que ces parties doivent à [**16**]). Notons que le théorème 1.2 n'est plus vrai tel quel lorsque $\overline{\rho}$ est quelconque : il peut y avoir soit plus de composantes irréductibles, soit plus de poids de Serre (voir théorème 4.1.7, corollaire 4.2.4 et corollaire 4.3.6 pour différents cas, voir aussi la fin de cette introduction).

Il peut arriver qu'il y ait plusieurs bijections comme dans le théorème 1.2. La correspondance de Langlands p-adique (par ailleurs essentielle dans les preuves des théorèmes 1.1 et 1.2) permet d'en définir une qui est canonique, au moins lorsque $\mathrm{End}_{k_E[\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)]}(\overline{\rho}) = k_E$. Soit $T^{\psi}(k,\mathrm{t},\overline{\rho})$ la déformation universelle de $\overline{\rho}$ sur $R^{\psi}(k,\mathrm{t},\overline{\rho})$, il lui correspond une certaine représentation linéaire continue de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $R^{\psi}(k,\mathrm{t},\overline{\rho})$ que l'on note $A^{\psi}(k,\mathrm{t},\overline{\rho})$ (voir § 3.2). Rappelons que si R est un anneau commutatif noethérien, les composantes irréductibles de $\mathrm{Spec}(R)$ sont en bijection avec les idéaux premiers minimaux $\mathfrak{p}$ de R via $\mathfrak{p}\mapsto \mathrm{Spec}(R/\mathfrak{p})$.

***Théorème 1.3* (voir § 4)**. — *Supposons $\mathrm{End}_{k_E[\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)]}(\overline{\rho}) = k_E$. Si E est suffisamment grand, l'application :*

$$\mathfrak{p}\mapsto \mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)}\Big(A^{\psi}(k,\mathrm{t},\overline{\rho})\otimes_{R^{\psi}(k,\mathrm{t},\overline{\rho})}\mathrm{Frac}\left(R^{\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})/(\varpi_E,\mathfrak{p})\right)\Big)$$

qui envoie un idéal premier minimal $\mathfrak{p}$ de $R^{\psi}(k,\mathrm{t},\overline{\rho})/(\varpi_E)$ sur le $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$-socle de la représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ à droite induit une bijection comme dans le théorème 1.2.

Notons qu'un poids de Serre sur le corps $\mathrm{Frac}\left(R^{\psi}(k,\mathrm{t},\overline{\rho})/(\varpi_E,\mathfrak{p})\right)$ est toujours l'extension des scalaires d'un poids de Serre sur k_E (ou même sur $\mathbb{F}_p$).

Soit maintenant F une extension finie non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ d'anneau d'entiers $\mathcal{O}_F$ (on suppose que F peut s'injecter dans E quitte à agrandir E) et soit $\overline{\rho}:\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)\to \mathrm{GL}_2(k_E)$ une représentation continue. Dans [**8**], Buzzard, Diamond et Jarvis ont associé à $\overline{\rho}$ un ensemble explicite de poids de Serre (i.e.

de représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)$ sur k_E) et dans [**18**, Conj.2.2.3], Kisin a étendu la conjecture de [**6**] en remplaçant $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ par $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)$ (quoique sous une forme moins précise qui ne nécessite pas de supposer F non ramifié). Notons que Gee et Kisin viennent de donner une preuve de cette conjecture étendue en poids 2, cf. [**14**]. Nous conjecturons au § 2 que le théorème 1.2 reste vrai au moins lorsque $\overline{\rho}$ est générique (au sens du § 2) :

***Conjecture 1.4* (voir conjecture 2.2)**. — *Soit* $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F) \to \mathrm{GL}_2(k_E)$ *une représentation continue générique,* $(k_\tau)_\tau$ *des entiers* ≥ 2 *pour chaque* $\tau : F \hookrightarrow E$*,* t *un type pour* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)$*,* $\overline{\sigma}((k_\tau)_\tau, \mathrm{t})$ *la représentation de* $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)$ *semi-simplifiée sur* k_E *de* $\sigma(\mathrm{t}) \otimes_E \big(\otimes_\tau (\mathrm{Sym}^{k_\tau - 2} E^2)^\tau\big)$ *et* $\psi : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \to \mathcal{O}_E^\times$ *un caractère continu satisfaisant une relation de compatibilité convenable avec* $(k_\tau)_\tau$ *et* t*. Si* E *est suffisamment grand, il existe une bijection qui respecte les multiplicités entre l'ensemble des composantes irréductibles de* $R^{\square,\psi}((k_\tau)_\tau, \mathrm{t}, \overline{\rho})/(\varpi_E)$ *et l'ensemble des poids de Serre de* $\overline{\rho}$ *distincts dans* $\overline{\sigma}((k_\tau)_\tau, \mathrm{t})$*.*

Cette conjecture implique en particulier [**18**, Conj.2.2.3] quand F est non ramifié et $\overline{\rho}$ générique. Par des calculs explicites (basés sur les résultats de [**4**]), nous vérifions au § 5 la conjecture 1.4 dans la famille d'exemples suivants :

***Théorème 1.5* (voir corollaire 5.2.2)**. — *La conjecture 1.4 est vraie si* $\mathrm{End}_{k_E[\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)]}(\overline{\rho}) = k_E$*,* $k_\tau = 2$ *pour tout* τ *et* $\sigma(\mathrm{t})$ *est une série principale modérément ramifiée de* $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)$*.*

Bien que le théorème 1.5 ne soit qu'un cas particulier, il a joué un rôle important dans la genèse de cet article. En effet, le calcul explicite d'une part de $R^\psi((2)_\tau, \mathrm{t}, \overline{\rho})/(\varpi_E)$, d'autre part des poids de Serre de $\overline{\rho}$ dans $\overline{\sigma}((2)_\tau, \mathrm{t})$ pour les t considérés met à jour une bijection naturelle entre l'ensemble des composantes irréductibles et l'ensemble de ces poids de Serre (voir (42)), et les auteurs se sont demandés si une telle bijection n'existait pas en général pour $F = \mathbb{Q}_p$. Un examen approfondi de l'article [**16**] a alors révélé que oui (génériquement).

Après la diffusion de cet article, Emerton et Gee ont donné une démonstration différente des théorèmes 1.2 et 1.3 qui leur a permis d'une part de les étendre aux cas où $\overline{\rho}$ n'est pas générique, d'autre part de formuler une conjecture qui généralise la conjecture 1.4 aux déformations de dimension n de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)$ avec F extension finie quelconque de $\mathbb{Q}_p$ (voir [**11**]). Leur remarque nouvelle (et importante) est que, dans le cas $F = \mathbb{Q}_p$ et en dimension 2, la composante irréductible de $R^{\square,\psi}(k, \mathrm{t}, \overline{\rho})/(\varpi_E)$ (lorsque $\overline{\rho}$ est générique disons) qui s'envoie vers le poids de Serre $(\mathrm{Sym}^m k_E^2) \otimes_{k_E} \det^n$ (où $0 \leq m, n \leq p-1$) s'identifie à la fibre spéciale de l'anneau des déformations cristallines de $\overline{\rho}$ à poids de Hodge-Tate $(n, m+n+1)$. Lorsque $\overline{\rho}$ n'est plus générique ou lorsque F n'est plus $\mathbb{Q}_p$, les anneaux de déformations cristallines à petits poids de Hodge-Tate n'ont pas toujours une fibre spéciale irréductible. La généralisation de [**11**] consiste alors à considérer à la place le *cycle associé*, c'est-à-dire la somme formelle des composantes irréductibles pondérées par la multiplicité avec laquelle elles apparaissent. Paškūnas vient d'obtenir une preuve purement locale des résultats de [**11**] pour $F = \mathbb{Q}_p$, et donc en particulier une troisième preuve du théorème 1.2 (voir [**23**]).

Terminons cette introduction avec les principales notations de l'article.

Dans tout le texte F désigne une extension finie non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ de degré f, d'anneau d'entiers $\mathcal{O}_F$ et E désigne une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ (le corps des coefficients) d'anneau d'entiers $\mathcal{O}_E$, de corps résiduel k_E. On pose $q \overset{\text{déf}}{=} p^f$. On suppose que E contient une extension quadratique non ramifiée de F, ou de manière équivalente que k_E contient l'extension de degré 2 de $\mathbb{F}_q$. On note F^{nr} l'extension maximale non ramifiée de F et ϖ_E une uniformisante de $\mathcal{O}_E$.

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des plongements de F dans E (de cardinal f), qui s'identifie à l'ensemble des plongements de $\mathbb{F}_q$ dans k_E puisque F est non ramifié et on voit $\tau \in \mathcal{S}$ comme un plongement de F dans E ou de $\mathbb{F}_q$ dans k_E sans discernement (le contexte évitant toute confusion). On note $\mathcal{P}(\mathcal{S})$ l'ensemble des parties de $\mathcal{S}$.

Tout ce qui est réduit modulo ϖ_E dans k_E ou modulo p dans $\mathbb{F}_q$ est surligné. Par exemple, si $x \in \mathcal{O}_E$ (resp. $x \in \mathcal{O}_F$), $\overline{x}$ est sa réduction dans k_E (resp. dans $\mathbb{F}_q$), etc... Si M est un $\mathcal{O}_E$-module, on note $M[\varpi_E^n] \subseteq M$ le sous-$\mathcal{O}_E$-module des éléments annulés par ϖ_E^n.

On note $[\cdot]$ le représentant multiplicatif, $\mathrm{nr}(x)$ le caractère non ramifié envoyant p sur x et val la valuation p-adique normalisée par $\mathrm{val}(p) = 1$. On note φ le Frobenius $x \mapsto x^p$ sur $\mathbb{F}_q$ ainsi que le Frobenius induit sur $\mathcal{O}_F = W(\mathbb{F}_q)$.

Si $\widehat{F}^\times$ désigne le complété profini de $F^\times$, la théorie du corps de classes local fournit un isomorphisme $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\sim} \widehat{F}^\times$ qui envoie les éléments de Frobenius géométriques sur les uniformisantes et l'image du sous-groupe d'inertie sur $\mathcal{O}_F^\times$. Par cet isomorphisme, on voit implicitement tout caractère de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)$ (resp. de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F^{\mathrm{nr}})$) comme un caractère de $F^\times$ (resp. de $\mathcal{O}_F^\times$). De plus, la projection à gauche sur $\mathrm{Gal}(F[\sqrt[q-1]{-p}]/F)$ et à droite sur les représentants multiplicatifs $[\mathbb{F}_q^\times] \cong \mathbb{F}_q^\times$ (en envoyant $p^{\mathbb{Z}}(1+p\mathcal{O}_F)$ sur 1) induit l'isomorphisme :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Gal}(F[\sqrt[q-1]{-p}]/F) & \xrightarrow{\sim} & (\mathcal{O}_F/p)^\times = \mathbb{F}_q^\times \\ g & \longmapsto & \overline{\dfrac{g(\sqrt[q-1]{-p})}{\sqrt[q-1]{-p}}} \end{array} \tag{1}$$

par lequel on voit sans commentaire tout caractère de $\mathbb{F}_q^\times$ comme un caractère de $\mathrm{Gal}(F[\sqrt[q-1]{-p}]/F)$ et réciproquement.

Si $\tau \in \mathcal{S}$, on note ω_τ le caractère (fondamental) induit sur $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)$ par (1) et le plongement $\tau|_{\mathbb{F}_q^\times}$. Le caractère ω_τ se relève en le caractère continu de Lubin-Tate $\varepsilon_\tau : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F) \to \mathcal{O}_E^\times$ qui envoie $p \in \widehat{F}^\times$ sur 1 et $\mathcal{O}_F^\times$ dans $\mathcal{O}_E^\times$ via τ. On note $\varepsilon : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F) \to \mathbb{Z}_p^\times$ le caractère cyclotomique p-adique et ω sa réduction modulo p. On a $\varepsilon = \prod_{\tau\in\mathcal{S}} \varepsilon_\tau$.

Si $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F) \to \mathrm{GL}_2(k_E)$ est une représentation continue, on note $\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}$ la semi-simplifiée de $\overline{\rho}$.

On appelle poids de Serre une représentation irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)$, ou de manière équivalente de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$, sur k_E. Un poids de Serre est absolument irréductible et est de la forme :

$$\bigotimes_{\tau\in\mathcal{S}} \big((\mathrm{Sym}^{r_\tau} k_E^2)^\tau \otimes_{k_E} \tau\circ \det{}^{s_\tau}\big) \tag{2}$$

où $r_\tau, s_\tau \in \{0, \cdots, p-1\}$ et où $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ agit sur $(\mathrm{Sym}^{r_\tau} k_E^2)^\tau$ via $\tau : \mathbb{F}_q \hookrightarrow k_E$ et l'action sur la base canonique de k_E^2. Si σ est un poids de Serre comme en (2), on note $\sigma^s \stackrel{\text{déf}}{=} \bigotimes_{\tau\in\mathcal{S}} \big((\mathrm{Sym}^{p-1-r_\tau} k_E^2)^\tau \otimes_{k_E} \tau\circ\det{}^{r_\tau+s_\tau}\big)$. On note σ_0 le poids de Serre correspondant à tous les r_τ, s_τ nuls (i.e. la représentation triviale). On a donc $\sigma_0^s = \bigotimes_{\tau\in\mathcal{S}}(\mathrm{Sym}^{p-1} k_E^2)^\tau$.

On note $\mathrm{I}(\mathcal{O}_F) \subset \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)$ le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures modulo p (sous-groupe d'Iwahori). Si E' est une extension finie de E, on appelle $\mathrm{GL}_2(F)$-Banach sur E' tout E'-espace vectoriel de Banach B muni d'une action E'-linéaire de $\mathrm{GL}_2(F)$ telle que l'application $\mathrm{GL}_2(F)\times B \to B$ est continue.

Si A est un anneau local, $\mathfrak{m}_A$ est son idéal maximal et si M est un A-module de type fini, on note $e(\mathfrak{m}_A, M)$ la multiplicité de Hilbert-Samuel de M relativement à A (cf. [**19**, § 14]). Lorsque l'anneau A est sous-entendu, par exemple si $M = A$, on note simplement $e(M)$.

2. La conjecture raffinée

On énonce la conjecture principale de cet article, version raffinée (lorsque $\overline{\rho}$ est générique) des conjectures de [**6**], [**16**] et [**18**].

On fixe $\mathbf{v}$ la donnée de f couples d'entiers $(w_\tau, k_\tau)_{\tau\in\mathcal{S}}$ avec $w_\tau \in \mathbb{Z}$ et $k_\tau \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ (la notation $\mathbf{v}$ est celle de [**18**, § 2]) et t la donnée d'une représentation de noyau ouvert $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F^{\mathrm{nr}}) \to \mathrm{GL}_2(E)$ qui admet un prolongement à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)$. On fixe également un caractère continu $\psi : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F) \to \mathcal{O}_E^\times$ tel que :

$$\psi|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F^{\mathrm{nr}})} = (\det \mathrm{t}) \prod_{\tau\in\mathcal{S}} \varepsilon_\tau^{2w_\tau+k_\tau-2}.$$

On dit qu'une représentation linéaire continue de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)$ sur un E'-espace vectoriel de dimension 2 (où E' est une extension finie de E) est de type $(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \psi)$ si elle est potentiellement semi-stable, si son déterminant est $\psi\varepsilon$, ses poids de Hodge-Tate $(w_\tau, w_\tau + k_\tau - 1)_{\tau\in\mathcal{S}}$ et si la représentation de Weil-Deligne qui lui est attachée par [**12**] est isomorphe à t en restriction à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F^{\mathrm{nr}})$.

On fixe enfin une représentation continue $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F) \to \mathrm{GL}_2(k_E)$ telle que $\det\overline{\rho} = \overline{\psi}\omega$. On note $\mathcal{D}(\overline{\rho})$ l'ensemble des poids de Serre de $\overline{\rho}$ défini dans [**8**, § 3].

On note $R^{\square,\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})$ et $R^{\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})$ les quotients réduits des anneaux locaux paramétrant les déformations de $\overline{\rho}$ de type $(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \psi)$ introduits dans [**18**, § 1.4.1] (notons qu'ils ne sont pas forcément réduits dans *loc.cit.*). Plus précisément, si $R^{\square,\psi}(\overline{\rho})$ est la $\mathcal{O}_E$-algèbre locale complète noethérienne de corps résiduel k_E paramétrant les déformations de $\overline{\rho}$ sur de telles $\mathcal{O}_E$-algèbres de déterminant $\psi\varepsilon$ avec un choix de relevé d'une base fixée de $\overline{\rho}$, alors $R^{\square,\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})$ est l'image de $R^{\square,\psi}(\overline{\rho})$ dans $R^{\square,\psi}(\overline{\rho})[1/p]/\cap\mathfrak{p}$, l'intersection étant prise sur les idéaux maximaux $\mathfrak{p}$ de $R^{\square,\psi}(\overline{\rho})[1/p]$ tels que la représentation :

$$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F) \to \mathrm{GL}_2\left(R^{\square,\psi}[1/p]\right) \twoheadrightarrow \mathrm{GL}_2\left(R^{\square,\psi}[1/p]/\mathfrak{p}\right)$$

est de type $(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \psi)$. Lorsque $\mathrm{End}_{k_E[\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)]}(\overline{\rho}) = k_E$, on définit de manière analogue $R^{\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})$ à partir de la $\mathcal{O}_E$-algèbre $R^{\psi}(\overline{\rho})$ paramétrant les déformations de $\overline{\rho}$ de déterminant $\psi\varepsilon$. Les $\mathcal{O}_E$-algèbres $R^{\square,\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})$ et $R^{\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})$ sont fidèlement plates, complètes noethériennes réduites de dimensions de Krull respectives $4+f$ et $1+f$ ([**18**, Th.1.2.1]). De plus, lorsque $\mathrm{End}_{k_E[\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)]}(\overline{\rho}) = k_E$, $R^{\square,\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})$ est un anneau de séries formelles en 3 variables sur $R^{\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})$.

Lemme 2.1. — *Les schémas* $\mathrm{Spec}\left(R^{\square,\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})/\varpi_E\right)$ *et* $\mathrm{Spec}\left(R^{\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})/\varpi_E\right)$ *sont équidimensionnels.*

Démonstration. — On donne la preuve pour $R^{\square,\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})/\varpi_E$, l'autre cas étant identique. Par [**18**, Th.1.2.1], $R^{\square,\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})[1/p]$ est équidimensionnel. Par [**19**, Th.6.5(iii)] et [**19**, Th.23.2(i)] (ce dernier appliqué avec $A = \mathcal{O}_E$, $\mathfrak{p} = (0)$ et $G = B = R^{\square,\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})$), les composantes irréductibles de $R^{\square,\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})[1/p]$ sont aussi celles de $R^{\square,\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})$. Donc $R^{\square,\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})$ est équidimensionnel. Le résultat découle alors de [**19**, Th.31.5]. $\square$

Soit $A = R^{\square,\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})/\varpi_E$ ou $R^{\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})/\varpi_E$, C une composante irréductible de $\mathrm{Spec}(A)$ et $\mathfrak{p}$ l'idéal premier minimal de A correspondant à C. On définit la multiplicité $m(C)$ de C comme :

$$m(C) \overset{\text{déf}}{=} e(A/\mathfrak{p})\,\mathrm{long}_{A_\mathfrak{p}}(A_\mathfrak{p}) \tag{3}$$

où $\mathrm{long}_{A_\mathfrak{p}}(A_\mathfrak{p})$ est la longueur du localisé $A_\mathfrak{p}$ en tant que $A_\mathfrak{p}$-module. Notons que si C est formellement lisse sur k_E on a $e(A/\mathfrak{p}) = 1$ (mais $\mathrm{long}_{A_\mathfrak{p}}(A_\mathfrak{p})$ peut être quelconque). Comme A est équidimensionnel par le lemme 2.1, [**19**, Th.14.7] nous dit que :

$$\sum_C m(C) = e(A). \tag{4}$$

Dans la suite on pose $\mu_{\mathrm{gal}}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho}) \overset{\text{déf}}{=} e(A)$.

On associe à $\mathbf{v}$ la représentation continue de $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)$ sur E :

$$\sigma(\mathbf{v}) \overset{\text{déf}}{=} \bigotimes_{\tau\in\mathcal{S}} \big((\mathrm{Sym}^{k_\tau-2} E^2)^\tau \otimes_E \tau \circ \det{}^{w_\tau}\big)$$

où $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)$ agit sur $(\mathrm{Sym}^{r_\tau} E^2)^\tau$ via $\tau : \mathcal{O}_F \hookrightarrow E$. Par [**15**], on peut associer à t une représentation lisse absolument irréductible $\sigma(\mathrm{t})$ de $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)$ sur E (quitte à agrandir E) de caractère central $\det \mathrm{t}$. On note $\mathcal{D}(\mathbf{v}, \mathrm{t})$ l'ensemble des poids de Serre à multiplicité près qui sont des constituants du semi-simplifié sur k_E de $\sigma(\mathbf{v}) \otimes_E \sigma(\mathrm{t})$ et $m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma) \geq 0$ la multiplicité avec laquelle un poids de Serre σ (quelconque) apparaît dans ce semi-simplifié.

On dit que $\overline{\rho}$ générique (cf. [**7**, Def.11.7]) si on peut l'écrire sous la forme (i) (cas réductible) ou (ii) (cas irréductible) ci-dessous pour un caractère χ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F^{\mathrm{nr}})$ qui s'étend à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)$:

(i) $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F^{\mathrm{nr}})} \cong \begin{pmatrix} \prod_{\tau\in\mathcal{S}} \omega_\tau^{r_\tau+1} & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \chi$ avec $0 \leq r_\tau \leq p-3$ et $(r_\tau)_{\tau\in\mathcal{S}} \notin \{(0, \cdots, 0), (p-3, \cdots, p-3)\}$

(ii) $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F^{\mathrm{nr}})} \cong \begin{pmatrix} \prod_{\tau\in\mathcal{S}_0} \omega_\tau^{r_\tau+1} & 0 \\ 0 & \prod_{\tau\in\mathcal{S}_0} \omega_\tau^{q(r_\tau+1)} \end{pmatrix} \otimes \chi$ avec $1 \leq r_{\tau_0} \leq p-2$ et $0 \leq r_\tau \leq p-3$ pour $\tau \in \mathcal{S}_0\backslash\{\tau_0\}$, où $\mathcal{S}_0$ est un sous-ensemble de l'ensemble des plongements de $\mathbb{F}_{q^2}$ dans k_E de la forme $\{\tau_0, \tau_0 \circ \varphi, \cdots, \tau_0 \circ \varphi^{f-1})$ pour un plongement τ_0 quelconque.

Si $p = 2$, il n'y a pas de représentation générique (de sorte de l'hypothèse de généricité implique *de facto* $p > 2$) et si $p = 3$ il n'y a pas de représentation générique réductible. Notons que $\overline{\rho}$ générique irréductible est absolument irréductible. Lorsque $\overline{\rho}$ est générique, on pose :

$$\mu_{\mathrm{aut}}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho}) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{\sigma\in\mathcal{D}(\overline{\rho})} m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma) = \sum_{\sigma\in\mathcal{D}(\mathbf{v},\mathrm{t})\cap\mathcal{D}(\overline{\rho})} m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma).$$

Conjecture 2.2. — *Soit* $\mathbf{v}$, t, ψ *et* $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F) \to \mathrm{GL}_2(k_E)$ *comme ci-dessus. On suppose* $\overline{\rho}$ *générique. Alors les composantes irréductibles de* $\mathrm{Spec}\,\big(R^{\square,\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})/\varpi_E\big)$ *sont formellement lisses sur* k_E *et, pour* E *suffisamment grand, il existe une bijection entre l'ensemble de ces composantes irréductibles* *et l'ensemble $\mathcal{D}(\mathbf{v},\mathrm{t})\cap\mathcal{D}(\overline{\rho})$ telle que, si C est une composante irréductible et $\sigma\in\mathcal{D}(\mathbf{v},\mathrm{t})\cap\mathcal{D}(\overline{\rho})$ son image, on a :*

$$m(C)=m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma).$$

Remarque 2.3. — (i) En sommant les égalités de la conjecture 2.2 sur toutes les composantes irréductibles C de Spec $\left(R^{\square,\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})/\varpi_E\right)$, on en déduit par (4) et la définition de $\mu_{\mathrm{aut}}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})$ l'égalité :

$$\mu_{\mathrm{gal}}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})=\mu_{\mathrm{aut}}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})$$

déjà conjecturée dans [**18**] pour F quelconque et sans restriction sur $\overline{\rho}$. Rappelons que cette égalité a été démontrée par Kisin dans [**16**] pour $F=\mathbb{Q}_p$, $p>2$ et presque tout $\overline{\rho}$.
(ii) Lorsque $\overline{\rho}$ n'est pas générique, l'énoncé 2.2 est faux tel quel en général (bien que la condition de généricité ne soit probablement pas optimale). Comme signalé dans l'introduction, on trouve maintenant dans [**11**] une formulation plus générale de cette conjecture (moyennant quelques vérifications de compatibilité qui ne devraient pas poser de problèmes) valable en particulier sans hypothèse de généricité.
(iii) Une bijection "abstraite" comme dans la conjecture 2.2 n'est pas unique en général mais pour $F=\mathbb{Q}_p$ et $\mathrm{End}_{k_E[\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)]}(\overline{\rho})=k_E$, il en existe une qui est canonique et qui se réalise naturellement via la correspondance de Langlands p-adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ (cf. § 4). La formulation de [**11**] donne aussi une bijection canonique qui coïncide avec cette bijection lorsque $F=\mathbb{Q}_p$ et $\mathrm{End}_{k_E[\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)]}(\overline{\rho})=k_E$ (cf. [**11**, § 3.4]).

3. Le cas $F=\mathbb{Q}_p$: préliminaires

On donne divers préliminaires dont on se servira de manière essentielle au § 4 pour démontrer la conjecture 2.2 lorsque $F=\mathbb{Q}_p$. On suppose $p>2$.

3.1. Quelques rappels et définitions.

— On rappelle et précise des définitions et constructions dues à Kisin dans [**16**].

On fixe $\mathbf{v}$, t, ψ et $\overline{\rho}$ comme au § 2. Sauf indication contraire, $\overline{\rho}$ est quelconque.

Si $\mathfrak{p}$ est un idéal maximal de $R^{\square,\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})[1/p]$, alors $R^{\square,\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})[1/p]/\mathfrak{p}$ est une extension finie de E et on note :

$$\rho_{\mathfrak{p}}:\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)\to\mathrm{GL}_2\left(R^{\square,\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})[1/p]/\mathfrak{p}\right)$$

la déformation de $\overline{\rho}$ de type $(\mathbf{v},\mathrm{t},\psi)$ qui lui est associée (en oubliant la base distinguée sur l'espace sous-jacent à $\rho_{\mathfrak{p}}$). Par la correspondance de Langlands p-adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ ([**9**], [**17**], [**22**]), il correspond à $\rho_{\mathfrak{p}}$ un $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach sur $R^{\square,\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})[1/p]/\mathfrak{p}$ noté $B(\rho_{\mathfrak{p}})$. Rappelons que $B(\rho_{\mathfrak{p}})$ possède une boule unité invariante sous $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, et que la réduction modulo ϖ_E d'une telle boule unité invariante est une représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur k_E de longueur finie. Par [**9**, Th.VI.6.18], [**10**, Th.3.3.21] et [**15**], on a :

$$\mathrm{Hom}_{E[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)]}(\sigma(\mathbf{v}) \otimes_E \sigma(\mathrm{t}), B(\rho_{\mathfrak{p}})) = R^{\square,\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})[1/p]/\mathfrak{p}$$

de sorte que, par réciprocité de Frobenius, on a aussi :

$$\mathrm{Hom}_{E[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]}\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma(\mathbf{v}) \otimes_E \sigma(\mathrm{t}), B(\rho_{\mathfrak{p}})\right) = R^{\square,\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})[1/p]/\mathfrak{p} \tag{5}$$

où l'on étend l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ sur $\sigma(\mathbf{v}) \otimes_E \sigma(\mathrm{t})$ à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times$ en faisant agir $\mathbb{Q}_p^\times$ par ψ.

Dans la suite, on fixe un $\mathcal{O}_E$-réseau L de $\sigma(\mathbf{v}) \otimes_E \sigma(\mathrm{t})$ stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times$. Pour chaque idéal maximal $\mathfrak{p}$ de $R^{\square,\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})[1/p]$, on choisit un morphisme $\mathcal{O}_E$-linéaire $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariant non nul (qui existe par (5)) :

$$f_{\mathfrak{p}} : \mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} L \longrightarrow B(\rho_{\mathfrak{p}}). \tag{6}$$

Pour chaque ensemble fini non vide X d'idéaux maximaux de $R^{\square,\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})[1/p]$ on considère l'application diagonale :

$$\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} L \xrightarrow{\oplus f_{\mathfrak{p}}} \bigoplus_{\mathfrak{p} \in X} B(\rho_{\mathfrak{p}})$$

et on note $A^\psi(L, X)$ l'adhérence de son image. Si $X = \emptyset$, on pose $A^\psi(L, X) = 0$.

Exemple 3.1.1. — Si $X = \{\mathfrak{p}\}$ est un singleton, le sous-$R^{\square,\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})[1/p]/\mathfrak{p}$-espace vectoriel engendré dans $B(\rho_{\mathfrak{p}})$ par le $\mathcal{O}_E$-module $A^\psi(L, \{\mathfrak{p}\})$ est un sous-$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach fermé irréductible de $B(\rho_{\mathfrak{p}})$, qui lui est égal si $\rho_{\mathfrak{p}}$ est absolument irréductible (cela découle des propriétés de la correspondance de Langlands locale p-adique).

Remarque 3.1.2. — Le choix de $f_{\mathfrak{p}}$ pour chaque $\mathfrak{p}$ repose sur l'axiome du choix. On peut éviter cela au prix de fixer en plus du réseau L un ensemble dénombrable dense d'idéaux maximaux et de ne considérer que les idéaux maximaux de cet ensemble. C'est ce qui est fait dans [**16**, § 1.6] (cf. la note de bas de page dans [**16**, § 1.6.7]).

Lorsque $X \subseteq X'$, la projection évidente $\oplus_{\mathfrak{p} \in X'} B(\rho_{\mathfrak{p}}) \to \oplus_{\mathfrak{p} \in X} B(\rho_{\mathfrak{p}})$ induit une application continue $\mathcal{O}_E$-linéaire $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariante entre les adhérences $A^\psi(L, X') \to A^\psi(L, X)$. On obtient ainsi un système projectif de $\mathcal{O}_E[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]$-modules $(A^\psi(L, X))_X$ où X parcourt les ensembles finis d'idéaux maximaux de $R^{\square,\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})[1/p]$.

Lemme 3.1.3. — *(i) Pour tout X, $A^\psi(L, X)$ est une boule unité stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ dans un $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach sur E et $A^\psi(L, X) \otimes_{\mathcal{O}_E} k_E$ est une représentation lisse de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur k_E qui est de longueur finie.*
(ii) Pour $X \subseteq X'$, les applications $A^\psi(L, X') \to A^\psi(L, X)$ sont surjectives.

(iii) Le système projectif $(A^{\psi}(L,X))_X$ ne dépend pas à isomorphisme près du choix des $f_{\mathfrak{p}}$ comme en (6).

Démonstration. — Le (iii) est évident car pour deux choix $(f_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}\in X}$ et $(f'_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}\in X}$ il existe pour chaque $\mathfrak{p} \in X$ par (5) un unique scalaire non nul $\lambda_{\mathfrak{p}} \in R^{\square,\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})[1/p]$ tel que les diagrammes :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} L \arrow[r, "\oplus f_{\mathfrak{p}}"] \arrow[dr, "\oplus f'_{\mathfrak{p}}"'] & \oplus_{\mathfrak{p}\in X} B(\rho_{\mathfrak{p}}) \arrow[d, "\oplus\lambda_{\mathfrak{p}}\cdot"] \\ & \oplus_{\mathfrak{p}\in X} B(\rho_{\mathfrak{p}}) \end{tikzcd}$$

soient commutatifs pour tout X et compatibles avec les projections $\oplus_{\mathfrak{p}\in X'} B(\rho_{\mathfrak{p}}) \to \oplus_{\mathfrak{p}\in X} B(\rho_{\mathfrak{p}})$ pour tous $X \subseteq X'$. Montrons (i). Pour des boules unités invariantes $A(\rho_{\mathfrak{p}})$ convenables de $B(\rho_{\mathfrak{p}})$, on a $A^{\psi}(L,X) \hookrightarrow \oplus_{\mathfrak{p}\in X} A(\rho_{\mathfrak{p}})$ et la première assertion de (i) est claire puisqu'on voit que $A^{\psi}(L,X)$ est un $\mathcal{O}_E$-module séparé complet sans torsion (et stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$). De plus, comme il s'agit par construction d'une immersion fermée, le quotient $Q \stackrel{\text{déf}}{=} (\oplus_{\mathfrak{p}\in X} A(\rho_{\mathfrak{p}}))/A^{\psi}(L,X)$ est séparé (n'a pas d'éléments divisibles non nuls). Montrons d'abord qu'il existe un entier n_0 tel que $\varpi_E^{n_0}$ annule toute la torsion de Q. Comme $\oplus_{\mathfrak{p}\in X} A(\rho_{\mathfrak{p}})/\varpi_E$, et donc Q/ϖ_E, sont des $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-représentations lisses de longueur finie, il existe un entier n_0 tel que pour $n \geq n_0$, l'image de $Q[\varpi_E^n]$ dans Q/ϖ_E par l'application composée $Q[\varpi_E^n] \hookrightarrow Q \twoheadrightarrow Q/\varpi_E$ est constante. Soit $v \in Q$ un élément de torsion, alors il existe $y \in Q[\varpi_E^{n_0}]$ et $w \in Q$ tels que $v = y + pw$, donc $\varpi_E^{n_0} v = \varpi_E^{n_0+1} w$. En particulier w est aussi de torsion et donc $\varpi_E^{n_0} w \in \varpi_E^{n_0+1} Q$ par le même raisonnement d'où $\varpi_E^{n_0} v \in \varpi_E^{n_0+2} Q$. En itérant, on obtient $\varpi_E^{n_0} v \in \cap_{n\geq n_0} \varpi_E^n Q = 0$ (car Q est séparé). Donc $\varpi_E^{n_0}$ annule la torsion de Q. Montrons que l'application composée $Q[\varpi_E^{n_0}] \hookrightarrow Q \twoheadrightarrow Q/\varpi_E^{n_0}$ est injective. Soit $v \in Q[\varpi_E^{n_0}]$ d'image 0, alors $v = \varpi_E^{n_0} w$ dans Q avec w aussi de torsion, donc $w \in Q[\varpi_E^{n_0}]$ par ce qui précède. On en déduit $v = \varpi_E^{n_0} w = 0$. Comme $Q/\varpi_E^{n_0}$ est une $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-représentation lisse de longueur finie (car $\oplus_{\mathfrak{p}\in X} A(\rho_{\mathfrak{p}})/\varpi_E^{n_0}$ l'est), il en est donc de même pour $Q[\varpi_E^{n_0}]$, et donc en particulier pour $Q[\varpi_E] \subseteq Q[\varpi_E^{n_0}]$. Maintenant la suite exacte courte :

$$0 \to Q[\varpi_E] \to A^{\psi}(L,X) \otimes_{\mathcal{O}_E} k_E \to \oplus_{\mathfrak{p}\in X} A(\rho_{\mathfrak{p}})/\varpi_E \tag{7}$$

entraîne par ce qui précède que $A^{\psi}(L,X) \otimes_{\mathcal{O}_E} k_E$ est lisse de longueur finie, ce qui démontre (i). Les applications $A^{\psi}(L,X') \to A^{\psi}(L,X)$ sont toutes d'images denses car leurs images contiennent par construction l'image de $\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} L$. On en déduit que les applications $A^{\psi}(L,X')/\varpi_E^n \to A^{\psi}(L,X)/\varpi_E^n$ sont surjectives pour tout n. Comme il s'agit de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-représentations de longueur finie, la condition de Mittag-Leffler est vérifiée sur les noyaux de ces applications et la limite projective sur n reste surjective, ce qui montre (ii). $\square$

On pose :

$$A^{\psi}(L,\overline{\rho}) \overset{\text{déf}}{=} \varprojlim_{X} A^{\psi}(L,X),$$

la limite projective étant prise sur tous les ensembles finis X d'idéaux maximaux de $R^{\square,\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})[1/p]$ (lorsque $R^{\square,\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})[1/p] = 0$, on a donc $A^{\psi}(L,\overline{\rho}) = 0$). C'est un $\mathcal{O}_E[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]$-module qui ne dépend que de $\overline{\rho}$ et de L par le lemme 3.1.3(iii).

Soit V le foncteur exact covariant défini dans [**9**] de la catégorie des représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $\mathcal{O}_E$ lisses de longueur finie avec caractère central dans la catégorie des représentations de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ sur $\mathcal{O}_E$ de longueur finie (on normalise V comme dans [**16**, Th.1.2.4]). Pour X comme ci-dessus, on définit :

$$T^{\psi}(L,X) \overset{\text{déf}}{=} \varprojlim_{n} V\big(A^{\psi}(L,X)/\varpi_E^n\big). \tag{8}$$

C'est une représentation linéaire continue de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ sur un $\mathcal{O}_E$-module libre de rang fini. De plus, on a une injection continue $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$-équivariante :

$$T^{\psi}(L,X) \hookrightarrow \oplus_{\mathfrak{p}\in X}\rho_{\mathfrak{p}}. \tag{9}$$

On pose :

$$T^{\psi}(L,\overline{\rho}) \overset{\text{déf}}{=} \varprojlim_{X} T^{\psi}(L,X),$$

c'est un $\mathcal{O}_E[\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)]$-module séparé complet sans torsion en tant que $\mathcal{O}_E$-module qui ne dépend que de $\overline{\rho}$ et de L par le lemme 3.1.3(iii).

Soit maintenant $R^{\mathrm{ps}}(\mathrm{tr}\,\overline{\rho})$ l'anneau paramétrant les pseudo-déformations de $\mathrm{tr}\,\overline{\rho}$ sur des $\mathcal{O}_E$-algèbres locales complètes noethériennes de corps résiduel k_E (cf. [**16**, § 1.4], on utilise ici $p > 2$). C'est une $\mathcal{O}_E$-algèbre locale complète noethérienne de corps résiduel k_E et la trace induit un morphisme de $\mathcal{O}_E$-algèbres locales $R^{\mathrm{ps}}(\mathrm{tr}\,\overline{\rho}) \to R^{\square,\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})$ dont on note $R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})$ l'image.

Lemme 3.1.4. — *La $\mathcal{O}_E$-algèbre $R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})$ est fidèlement plate, réduite et de dimension de Krull 2 si elle est non nulle.*

Démonstration. — Les deux premières assertions viennent du fait que c'est une sous-algèbre de $R^{\square,\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})$. La dernière est démontrée dans [**16**, Lem.1.6.6] et [**16**, § 1.6.7]. □

Remarque 3.1.5. — Lorsque $\mathrm{End}_{k_E[\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)]}(\overline{\rho}) = k_E$, on a $R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho}) \hookrightarrow R^{\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})(\hookrightarrow R^{\square,\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho}))$ et lorsque de plus $\overline{\rho} \not\cong \left(\begin{smallmatrix}\omega & * \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ à torsion près par un caractère, on a $R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho}) \xrightarrow{\sim} R^{\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})$ par [**16**, Cor.1.4.4].

Lemme 3.1.6. — *(i) Pour tout X comme ci-dessus, $T^{\psi}(L,X)$ est naturellement un $R^{\mathrm{ps}}(\mathrm{tr}\,\overline{\rho})$-module et pour tous $X \subseteq X'$, les applications $T^{\psi}(L,X') \to T^{\psi}(L,X)$ sont des morphismes surjectifs de $R^{\mathrm{ps}}(\mathrm{tr}\,\overline{\rho})$-modules.*

(ii) Le $R^{\mathrm{ps}}(\mathrm{tr}\,\overline{\rho})$-module $T^{\psi}(L,\overline{\rho})$ est de type fini.
(iii) La surjection $R^{\mathrm{ps}}(\mathrm{tr}\,\overline{\rho}) \twoheadrightarrow R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})$ fait de $T^{\psi}(L,\overline{\rho})$ un $R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})$-module fidèle.

Démonstration. — Le (i) est démontré dans [**16**, Lem.1.6.3] (la surjectivité découle facilement du lemme 3.1.3(ii) et de l'exactitude du foncteur V) et le (ii) dans [**16**, Lem.1.6.6]. Montrons le (iii). Si $R^{\square,\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho}) = 0$, il n'y a rien à montrer, supposons donc $R^{\square,\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho}) \neq 0$. Il suit directement de la preuve de [**16**, Lem.1.6.3] que l'injection (9) est un morphisme de $R^{\mathrm{ps}}(\mathrm{tr}\,\overline{\rho})$-modules. Mais chaque $\rho_{\mathfrak{p}}$ étant une déformation de $\overline{\rho}$ de type $(\mathbf{v},\mathrm{t},\psi)$, l'action de $R^{\mathrm{ps}}(\mathrm{tr}\,\overline{\rho})$ sur $\oplus_{\mathfrak{p}\in X}\rho_{\mathfrak{p}}$ se factorise par le quotient $R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})$, donc il en est de même sur le sous-$R^{\mathrm{ps}}(\mathrm{tr}\,\overline{\rho})$-module $T^{\psi}(L,X)$, et aussi sur $T^{\psi}(L,\overline{\rho})$ par (i). Soit $x \in R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})$ qui agit par 0 sur $T^{\psi}(L,\overline{\rho})$, donc par 0 sur $T^{\psi}(L,\{\mathfrak{p}\})$ pour tout idéal maximal $\mathfrak{p}$ de $R^{\square,\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})[1/p]$ par (i). Par (9), $T^{\psi}(L,\{\mathfrak{p}\})[1/p]$ est un sous-E-espace vectoriel non nul du $R^{\square,\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})[1/p]/\mathfrak{p}$-espace vectoriel $\rho_{\mathfrak{p}}$. Comme x agit sur $\rho_{\mathfrak{p}}$ par la multiplication par son image $x_{\mathfrak{p}}$ dans le corps $R^{\square,\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})[1/p]/\mathfrak{p}$, on voit que la multiplication par $x_{\mathfrak{p}}$ agit par 0 sur des éléments non nuls de $\rho_{\mathfrak{p}}$, ce qui entraîne $x_{\mathfrak{p}} = 0$ dans $R^{\square,\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})[1/p]/\mathfrak{p}$ c'est-à-dire $x \in \mathfrak{p}$. Comme c'est vrai pour tout idéal maximal $\mathfrak{p}$ et que $R^{\square,\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})[1/p]$ est réduit, on en déduit $x = 0$. $\square$

Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 3.1.7. — *Quitte à agrandir E, on peut choisir le $\mathcal{O}_E$-réseau invariant L de $\sigma(\mathbf{v}) \otimes_E \sigma(\mathrm{t})$ tel que $\overline{L} = L/\varpi_E$ est une représentation semi-simple de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ sur k_E.*

Démonstration. — Soit L un $\mathcal{O}_E$-réseau invariant de $\sigma(\mathbf{v}) \otimes_E \sigma(\mathrm{t})$ et $0 \subsetneq L_1 \subsetneq \cdots \subsetneq L_n = L$ une filtration de L par des sous-$\mathcal{O}_E$-modules facteurs directs tels que $\overline{L_i}$ est stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ dans $\overline{L}$ et $\overline{L_i}/\overline{L_{i-1}}$ est une représentation irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$. Soit E' une extension finie ramifiée de E d'uniformisante $\varpi_{E'}$ telle que $\varpi_E = \varpi_{E'}^n$. Alors le $\mathcal{O}_{E'}$-réseau de $E' \otimes_E (\sigma(\mathbf{v}) \otimes_E \sigma(\mathrm{t}))$:

$$\bigoplus_{i=1}^{n} \left(\varpi_{E'}^{i-1}\mathcal{O}_{E'} \otimes_{\mathcal{O}_E} L_i\right)$$

est stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ et sa réduction modulo $\varpi_{E'}$ est semi-simple. $\square$

3.2. Rappels sur les déformations côté $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$.

— On rappelle quelques résultats sur les déformations de représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$.

On fixe un caractère continu $\psi : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \to \mathcal{O}_E^{\times}$.

Soit $\overline{\pi}$ une représentation lisse de longueur finie de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur k_E de caractère central $\overline{\psi}$ et telle que $\mathrm{End}_{k_E[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]}(\overline{\pi}) = k_E$. Une déformation de $\overline{\pi}$ sur une $\mathcal{O}_E$-algèbre artinienne $(A, \mathfrak{m}_A)$ de corps résiduel k_E est une représentation linéaire lisse π_A de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur un A-module libre de caractère central l'image de ψ telle que $\pi_A \otimes_A A/\mathfrak{m}_A \cong \overline{\pi}$. Une déformation de $\overline{\pi}$ sur une $\mathcal{O}_E$-algèbre locale complète noethérienne $(A, \mathfrak{m}_A)$ de corps résiduel k_E est une représentation linéaire π_A de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur un A-module séparé complet pour la topologie $\mathfrak{m}_A$-adique tel que $\pi_A \otimes_A A/\mathfrak{m}_A^n$ est une déformation de $\overline{\pi}$ sur $A/\mathfrak{m}_A^n$ pour tout n au sens précédent (en particulier elle a un caractère central qui est ψ).

Soit $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \to \mathrm{GL}_2(k_E)$ une représentation continue de déterminant $\overline{\psi}\omega$. On suppose de plus $\mathrm{End}_{k_E[\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)]}(\overline{\rho}) = k_E$ et $\overline{\rho} \ncong \left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & \omega \end{smallmatrix}\right)$ à torsion près par un caractère. Soit $\overline{\pi}$ la représentation lisse de longueur finie de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur k_E de caractère central $\overline{\psi}$ associée à $\overline{\rho}$ par la correspondance de Langlands modulo p. On a $\mathrm{End}_{k_E[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]}(\overline{\pi}) = k_E$ et $V(\overline{\pi}) = \overline{\rho}$. On considère les foncteurs $D^{\psi}(\overline{\pi})$ et $D^{\det,\psi}(\overline{\pi})$ de la catégorie des $\mathcal{O}_E$-algèbres locales complètes noethériennes A de corps résiduel k_E dans la catégorie des ensembles définis comme suit : $D^{\psi}(\overline{\pi})(A)$ est l'ensemble des classes d'isomorphisme de déformations π_A de $\overline{\pi}$ sur A de caractère central l'image de ψ et $D^{\det,\psi}(\overline{\pi})(A)$ est l'ensemble des classes d'isomorphisme de déformations π_A de $\overline{\pi}$ sur A de caractère central l'image de ψ telles que $\det(V(\pi_A)) = \psi\varepsilon$ où $V(\pi_A) \overset{\text{déf}}{=} \varprojlim_n V(\pi_A \otimes_A A/\mathfrak{m}_A^n)$.

Les critères de représentabilité de Schlessinger ([**20**]) se vérifient facilement et on en déduit :

Proposition 3.2.1. — *Les foncteurs $D^{\psi}(\overline{\pi})$ et $D^{\det,\psi}(\overline{\pi})$ sont représentables.*

On note $R^{\psi}(\overline{\pi})$ (resp. $R^{\det,\psi}(\overline{\pi})$) la $\mathcal{O}_E$-algèbre locale complète noethérienne de corps résiduel k_E qui représente le foncteur $D^{\psi}(\overline{\pi})$ (resp. $D^{\det,\psi}(\overline{\pi})$). On a une surjection évidente de $\mathcal{O}_E$-algèbres locales $R^{\psi}(\overline{\pi}) \twoheadrightarrow R^{\det,\psi}(\overline{\pi})$.

On rappelle que $R^{\psi}(\overline{\rho})$ est la $\mathcal{O}_E$-algèbre locale complète noethérienne de corps résiduel k_E qui représente le foncteur associant à A l'ensemble des classes d'isomorphisme de déformations galoisiennes de $\overline{\rho}$ de déterminant l'image de $\psi\varepsilon$. Le foncteur V étant exact envoie une déformation de $\overline{\pi}$ sur une déformation de $\overline{\rho}$ et induit donc un morphisme de $\mathcal{O}_E$-algèbres $R^{\psi}(\overline{\rho}) \to R^{\det,\psi}(\overline{\pi})$. Le théorème suivant est une compilation de résultats dus à Colmez ([**9**]), Kisin ([**17**]) et Paškūnas ([**21**], [**22**]) (on rappelle que $p > 2$ et $\overline{\rho} \ncong \left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & \omega \end{smallmatrix}\right)$ à torsion près) :

Théorème 3.2.2. — *(i) Le morphisme $R^{\psi}(\overline{\rho}) \to R^{\det,\psi}(\overline{\pi})$ est un isomorphisme.*
(ii) Si $\overline{\rho}$ est irréductible, la surjection $R^{\psi}(\overline{\pi}) \twoheadrightarrow R^{\det,\psi}(\overline{\pi})$ est un isomorphisme.

Nous n'utiliserons que le (i) dans la suite. On note $T^{\psi}(\overline{\rho})$ la déformation universelle de $\overline{\rho}$ sur $R^{\psi}(\overline{\rho})$ de déterminant $\psi\varepsilon$ et $A^{\psi}(\overline{\rho})$ la déformation de $\overline{\pi}$ sur

$R^{\psi}(\overline{\rho})$ de caractère central ψ que l'on déduit de la proposition 3.2.1 et du théorème 3.2.2(i). Elle vérifie $V(A^{\psi}(\overline{\rho})) = T^{\psi}(\overline{\rho})$.

Le lemme suivant découle facilement de l'exactitude du foncteur V et est laissé au lecteur :

Lemme 3.2.3. — *Soit R un quotient de $R^{\psi}(\overline{\rho})$, $T_R \stackrel{\text{déf}}{=} T^{\psi}(\overline{\rho}) \otimes_{R^{\psi}(\overline{\rho})} R$ et $A_R \stackrel{\text{déf}}{=} A^{\psi}(\overline{\rho}) \otimes_{R^{\psi}(\overline{\rho})} R$, alors $V(A_R) = T_R$.*

4. Le cas $F = \mathbb{Q}_p$: preuve de la conjecture

On démontre la conjecture 2.2 lorsque $F = \mathbb{Q}_p$. On suppose $p > 2$ dans toute la partie et on fixe $\mathbf{v}$, t et ψ comme au § 2.

4.1. Le cas $\overline{\rho}$ irréductible. — On démontre la conjecture 2.2 lorsque $F = \mathbb{Q}_p$ et $\overline{\rho}$ est irréductible.

On fixe $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F) \to \mathrm{GL}_2(k_E)$ continue absolument irréductible de déterminant $\overline{\psi}\omega$ (pas forcément générique) et on note $\sigma_{\overline{\rho}}$, $\sigma_{\overline{\rho}}^s$ les deux poids de Serre de $\overline{\rho}$. On a $\{\sigma_{\overline{\rho}}, \sigma_{\overline{\rho}}^s\} = \{\sigma_0 \otimes \chi, \sigma_0^s \otimes \chi\}$ pour un caractère $\chi : \mathbb{F}_p^{\times} \to k_E^{\times}$ si et seulement si $\overline{\rho}$ n'est pas générique. On étend l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ sur $\sigma_{\overline{\rho}}$ et $\sigma_{\overline{\rho}}^s$ à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^{\times}$ en faisant agir $\mathbb{Q}_p^{\times}$ par $\overline{\psi}$. On rappelle que :

$$\mathrm{End}_{k_E[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]}\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^{\times}}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma_{\overline{\rho}}\big) = k_E[T] \qquad (\text{idem pour } \sigma_{\overline{\rho}}^{\mathrm{s}})$$

où T est l'"opérateur de Hecke T_p" (cf. [**1**]) et que l'on a des isomorphismes canoniques de représentations lisses absolument irréductibles admissibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur k_E (cf. [**3**]) :

$$\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^{\times}}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma_{\overline{\rho}}\big)/(T) \cong \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^{\times}}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma_{\overline{\rho}}^{s}\big)/(T). \tag{10}$$

On note $\overline{\pi}$ la représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ en (10).

Lemme 4.1.1. — *(i) Si $\{\sigma_{\overline{\rho}}, \sigma_{\overline{\rho}}^s\} \neq \{\sigma_0 \otimes \chi, \sigma_0^s \otimes \chi\}$ (resp. $\{\sigma_{\overline{\rho}}, \sigma_{\overline{\rho}}^s\} = \{\sigma_0 \otimes \chi, \sigma_0^s \otimes \chi\}$), les deux représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$:*

$$\varprojlim_n \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^{\times}}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma_{\overline{\rho}}\big)/T^n \quad \text{et} \quad \varprojlim_n \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^{\times}}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma_{\overline{\rho}}^{s}\big)/T^n$$

sont des déformations non isomorphes (resp. isomorphes) de $\overline{\pi}$ sur $k_E[[T]]$ (cf. § 3.2) de caractère central $\overline{\psi}$.
(ii) Si $\{\sigma_{\overline{\rho}}, \sigma_{\overline{\rho}}^s\} \neq \{\sigma_0 \otimes \chi, \sigma_0^s \otimes \chi\}$ (resp. $\{\sigma_{\overline{\rho}}, \sigma_{\overline{\rho}}^s\} = \{\sigma_0 \otimes \chi, \sigma_0^s \otimes \chi\}$), les deux représentations de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$:

$$V\Big(\varprojlim_n \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^{\times}}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma_{\overline{\rho}}\big)/T^n\Big) \quad \text{et} \quad V\Big(\varprojlim_n \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^{\times}}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma_{\overline{\rho}}^{s}\big)/T^n\Big)$$

sont des déformations non isomorphes (resp. isomorphes) de $\overline{\rho}$ sur $k_E[[T]]$ de déterminant $\overline{\psi}\omega$.

Démonstration. — Cela se déduit de [**16**, Lem.1.5.3] et de [**16**, Lem.1.5.5]. □

Si $\{\sigma_{\overline{\rho}}, \sigma^s_{\overline{\rho}}\} = \{\sigma_0 \otimes \chi, \sigma_0^s \otimes \chi\}$, la déformation du lemme 4.1.1 (côté $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ ou, de manière équivalente par le théorème 3.2.2(i), côté $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$) donne une surjection :

$$s_{\overline{\rho}} \ : \ R^{\psi}(\overline{\rho})/\varpi_E \twoheadrightarrow k_E[[T]] \tag{11}$$

dont le noyau est un idéal premier de $R^{\psi}(\overline{\rho})/\varpi_E$. Si $\{\sigma_{\overline{\rho}}, \sigma^s_{\overline{\rho}}\} \neq \{\sigma_0 \otimes \chi, \sigma_0^s \otimes \chi\}$, les deux déformations du lemme 4.1.1 donnent deux surjections :

$$s_{\sigma_{\overline{\rho}}}, s_{\sigma^s_{\overline{\rho}}} \ : \ R^{\psi}(\overline{\rho})/\varpi_E \twoheadrightarrow k_E[[T]] \tag{12}$$

dont les noyaux sont deux idéaux premiers distincts de $R^{\psi}(\overline{\rho})/\varpi_E$. Les déformations galoisiennes du lemme 4.1.1(ii) sont vues dans la suite comme des $R^{\psi}(\overline{\rho})/\varpi_E$-modules via ces surjections.

On rappelle que l'on a par ailleurs une surjection canonique de $\mathcal{O}_E$-algèbres $R^{\psi}(\overline{\rho}) \twoheadrightarrow R^{\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})$ et l'on pose :

$$T^{\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho}) \ \stackrel{\text{déf}}{=} \ T^{\psi}(\overline{\rho}) \otimes_{R^{\psi}(\overline{\rho})} R^{\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})$$

où $T^{\psi}(\overline{\rho})$ est comme au § 3.2. On fixe L un $\mathcal{O}_E$-réseau de $\sigma(\mathbf{v}) \otimes_E \sigma(\mathrm{t})$ stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^{\times}$ et on définit $T^{\psi}(L, \overline{\rho})$ comme en (8). Par le lemme 3.1.6 et la remarque 3.1.5, le $R^{\mathrm{ps}}(\mathrm{tr}\,\overline{\rho})$-module $T^{\psi}(L, \overline{\rho})$ est un $R^{\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})$-module de type fini (et aussi un $R^{\psi}(\overline{\rho})$-module de type fini). Le lemme suivant est démontré par Kisin dans la preuve de [**16**, Prop.1.6.10] :

Lemme 4.1.2 **(**[**16**]**)**. — *Il existe une injection de $R^{\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})$-modules de type fini commutant à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$:*

$$T^{\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho}) \hookrightarrow T^{\psi}(L, \overline{\rho}). \tag{13}$$

Pour alléger les notations, on pose dans la suite $A \stackrel{\text{déf}}{=} R^{\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})/\varpi_E$ et on rappelle que $\dim(A) = 1$ si $A \neq 0$ (cf. § 2). Par [**16**, Prop.1.3.4(1)] (dont la preuve est essentiellement celle de la proposition 4.1.3 ci-dessous) on déduit de (13) :

$$e\big(\mathfrak{m}_A, T^{\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})/\varpi_E\big) \leq e\big(\mathfrak{m}_A, T^{\psi}(L, \overline{\rho})/\varpi_E\big). \tag{14}$$

On aura besoin d'une variante de (14) :

Proposition 4.1.3. — *Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A et $A_{\mathfrak{p}}$ le localisé de A en $\mathfrak{p}$, on a :*

$$e\big(\mathfrak{m}_{A_{\mathfrak{p}}}, (T^{\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})/\varpi_E)_{\mathfrak{p}}\big) \leq e\big(\mathfrak{m}_{A_{\mathfrak{p}}}, (T^{\psi}(L, \overline{\rho})/\varpi_E)_{\mathfrak{p}}\big). \tag{15}$$

Démonstration. — Soit T le conoyau de l'injection (13) et $T[\varpi_E^\infty] \subseteq T$ le sous-module des éléments annulés par une puissance de ϖ_E. Comme $T[\varpi_E^\infty]$ est un $R^\psi(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})$-module de type fini (car T l'est et $R^\psi(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})$ est noethérien), il existe un entier n_0 tel que $T[\varpi_E^{n_0}] = T[\varpi_E^\infty]$. On pose $A' \overset{\text{déf}}{=} R^\psi(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})/\varpi_E^{n_0}$. L'injection (13) donne une suite exacte courte de A-modules :

$$(16)\quad 0 \longrightarrow T[\varpi_E] \longrightarrow T^\psi(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})/\varpi_E \longrightarrow T^\psi(L, \overline{\rho})/\varpi_E \longrightarrow T/\varpi_E \longrightarrow 0$$

et on a une suite exacte courte de A'-modules :

$$(17)\qquad 0 \longrightarrow T[\varpi_E] \longrightarrow T[\varpi_E^\infty] \xrightarrow{\varpi_E} T[\varpi_E^\infty] \longrightarrow T[\varpi_E^\infty]/\varpi_E \longrightarrow 0.$$

De plus l'injection $T[\varpi_E^\infty] \hookrightarrow T$ induit encore une injection de A-modules :

$$(18)\qquad T[\varpi_E^\infty]/\varpi_E \hookrightarrow T/\varpi_E.$$

Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A', ou de manière équivalente de A. En localisant la suite exacte (17) en $\mathfrak{p}$ (qui reste exacte), le comportement de la multiplicité de Hilbert-Samuel sur les suites exactes courtes ([**19**, Th.14.6]) entraîne :

$$\begin{aligned} e(\mathfrak{m}_{A_\mathfrak{p}}, (T[\varpi_E])_\mathfrak{p}) = e(\mathfrak{m}_{A'_\mathfrak{p}}, (T[\varpi_E])_\mathfrak{p}) &= e(\mathfrak{m}_{A'_\mathfrak{p}}, (T[\varpi_E^\infty]/\varpi_E)_\mathfrak{p}) \\ &= e(\mathfrak{m}_{A_\mathfrak{p}}, (T[\varpi_E^\infty]/\varpi_E)_\mathfrak{p}). \end{aligned}$$

En localisant de même la suite exacte (16), on en déduit (toutes les multiplicités sont celles de $A_\mathfrak{p}$-modules) :

$$\begin{aligned} e((T^\psi(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})/\varpi_E)_\mathfrak{p}) &= e((T^\psi(L, \overline{\rho})/\varpi_E)_\mathfrak{p}) - \Big(e((T/\varpi_E)_\mathfrak{p}) - e((T[\varpi_E])_\mathfrak{p})\Big) \\ &= e((T^\psi(L, \overline{\rho})/\varpi_E)_\mathfrak{p}) - \Big(e((T/\varpi_E)_\mathfrak{p}) - e((T[\varpi_E^\infty]/\varpi_E)_\mathfrak{p})\Big). \end{aligned}$$

En localisant en $\mathfrak{p}$ l'injection (18), on obtient $(T[\varpi_E^\infty]/\varpi_E)_\mathfrak{p} \hookrightarrow (T/\varpi_E)_\mathfrak{p}$ d'où $e((T/\varpi_E)_\mathfrak{p}) - e((T[\varpi_E^\infty]/\varpi_E)_\mathfrak{p}) \geq 0$ ce qui achève la preuve. $\square$

Rappelons que $m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma_{\overline{\rho}})$ (resp. $m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma_{\overline{\rho}}^s)$) est la multiplicité (éventuellement nulle) avec laquelle $\sigma_{\overline{\rho}}$ (resp. $\sigma_{\overline{\rho}}^s$) apparaît dans le semi-simplifié sur k_E de $\sigma(\mathbf{v}) \otimes_E \sigma(\mathrm{t})$ (cf. § 2).

Proposition 4.1.4. — *Choisissons L tel que $\overline{L}$ est semi-simple (ce que l'on peut toujours faire par le lemme 3.1.7 quitte à agrandir E). On a un isomorphisme de $R^\psi(\overline{\rho})[\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)]$-modules :*

$$\begin{aligned} T^\psi(L, \overline{\rho})/\varpi_E \cong V\Big(\varprojlim_n \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma_{\overline{\rho}}\big)/T^n\Big)^m \bigoplus \\ V\Big(\varprojlim_n \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma_{\overline{\rho}}^s\big)/T^n\Big)^{m^s} \bigoplus Q \end{aligned}$$

où $0 \leq m \leq m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma_{\overline{\rho}})$, $0 \leq m^s \leq m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma_{\overline{\rho}}^s)$ et Q est un $R^\psi(\overline{\rho})[\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)]$-module qui est un quotient de :

$$V\Big(\varprojlim_n \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma_{\overline{\rho}}\big)/T^n\Big)^{m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma_{\overline{\rho}})} \oplus V\Big(\varprojlim_n \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma_{\overline{\rho}}^s\big)/T^n\Big)^{m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma_{\overline{\rho}}^s)}$$

de dimension finie sur k_E.

Démonstration. — Pour tout ensemble fini X d'idéaux maximaux de $R^{\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})[1/p]$, l'application $\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^{\times}}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} L \to A^{\psi}(L,X)/\varpi_E$ (cf. § 3.1) est surjective car elle est d'image dense dans $A^{\psi}(L,X)$ par construction. Par le choix du réseau L, on en déduit une surjection $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariante (cf. § 2 pour $\mathcal{D}(\mathbf{v},\mathrm{t})$) :

$$\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^{\times}}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \overline{L} \cong \bigoplus_{\sigma\in\mathcal{D}(\mathbf{v},\mathrm{t})} \Big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^{\times}}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma\Big)^{m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma)} \twoheadrightarrow A^{\psi}(L,X)/\varpi_E. \tag{19}$$

De plus la représentation $A^{\psi}(L,X)/\varpi_E$ est de longueur finie (lemme 3.1.3(i)) et ses constituants sont tous isomorphes à $\overline{\pi}$. Or, si $\sigma \notin \{\sigma_{\overline{\rho}},\sigma_{\overline{\rho}}^{s}\}$, l'induite $\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^{\times}}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma$ n'a aucun quotient de longueur finie ayant $\overline{\pi}$ comme constituant. La surjection (19) se factorise donc par :

$$\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^{\times}}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma_{\overline{\rho}}\big)^{m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma_{\overline{\rho}})} \oplus \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^{\times}}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma_{\overline{\rho}}^{s}\big)^{m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma_{\overline{\rho}}^{s})}.$$

Les quotients de longueur finie de $\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^{\times}}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma$ pour $\sigma \in \{\sigma_{\overline{\rho}},\sigma_{\overline{\rho}}^{s}\}$ dont les constituants sont tous isomorphes à $\overline{\pi}$ sont les quotients $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^{\times}}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma\big)/T^n$ pour n entier strictement positif, donc (19) se factorise par :

$$\Big(\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^{\times}}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma_{\overline{\rho}}\big)/T^{n_X}\Big)^{m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma_{\overline{\rho}})} \oplus \Big(\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^{\times}}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma_{\overline{\rho}}^{s}\big)/T^{n_X}\Big)^{m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma_{\overline{\rho}}^{s})}$$

pour un entier n_X suffisamment grand. En prenant la limite projective sur X (les conditions de Mittag-Leffler étant satisfaites puisqu'il n'y a que des représentations lisses de longueur finie), on en déduit par le lemme 3.1.3(ii) une surjection $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariante :

$$\Big(\varprojlim_n \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^{\times}}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma_{\overline{\rho}}\big)/T^{n}\Big)^{m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma_{\overline{\rho}})} \oplus \Big(\varprojlim_n \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^{\times}}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma_{\overline{\rho}}^{s}\big)/T^{n}\Big)^{m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma_{\overline{\rho}}^{s})} \twoheadrightarrow A^{\psi}(L,\overline{\rho})/\varpi_E. \tag{20}$$

En appliquant le foncteur V, on obtient une surjection $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$-équivariante :

$$V\Big(\varprojlim_n \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^{\times}}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma_{\overline{\rho}}\big)/T^{n}\Big)^{m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma_{\overline{\rho}})} \bigoplus V\Big(\varprojlim_n \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^{\times}}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma_{\overline{\rho}}^{s}\big)/T^{n}\Big)^{m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma_{\overline{\rho}}^{s})} \twoheadrightarrow T^{\psi}(L,\overline{\rho})/\varpi_E. \tag{21}$$

Montrons que (21) est compatible aux structures de $R^{\psi}(\overline{\rho})$-modules des deux côtés (l'argument qui suit est celui de [**16**, Lem.1.6.3]). La trace sur la représentation $T^{\psi}(\overline{\rho})$ de rang 2 induit une application $\mathrm{tr} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \to R^{\psi}(\overline{\rho})$ dont l'image est dense. Sur tout $R^{\psi}(\overline{\rho})$-module quotient et $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$-équivariant de $T^{\psi}(\overline{\rho})$, par exemple sur $V\big(\varprojlim_n \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma_{\overline{\rho}}\big)/T^n\big)$, la multiplication par $\mathrm{tr}(g) \in R^\psi(\overline{\rho})$ pour tout $g \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ s'identifie à l'action de $g + \overline{\psi}\omega(g)g^{-1}$. Mais ceci est aussi vrai sur $T^\psi(L,\overline{\rho})/\varpi_E$ car vrai sur chaque $T^\psi(L,X)$ (car vérifié sur chaque déformation $\rho_{\mathfrak{p}}$ pour $\mathfrak{p} \in X$, cf. § 3.1). Ainsi, la commutation de la surjection (21) à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ implique aussi sa commutation à $R^\psi(\overline{\rho})$. On en déduit facilement l'énoncé de la proposition avec le lemme 4.1.1(ii). □

Si $\{\sigma_{\overline{\rho}}, \sigma_{\overline{\rho}}^s\} = \{\sigma_0 \otimes \chi, \sigma_0^s \otimes \chi\}$ et si $m + m^s \neq 0$ (m, m^s comme dans la proposition 4.1.4), la proposition 4.1.4 combinée avec le lemme 3.1.6(iii) implique que la surjection $s_{\overline{\rho}}$ en (11) se factorise par le quotient $A = R^\psi(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})/\varpi_E$ de $R^\psi(\overline{\rho})/\varpi_E$ et on note $\mathfrak{p}_{\overline{\rho}}$ l'image de son noyau dans A (on a donc $A/\mathfrak{p}_{\overline{\rho}} \cong k_E[[T]]$). C'est un idéal premier minimal de A car $\dim(A/\mathfrak{p}_{\overline{\rho}}) = \dim(k_E[[T]]) = 1 = \dim(A)$. Si $\{\sigma_{\overline{\rho}}, \sigma_{\overline{\rho}}^s\} \neq \{\sigma_0 \otimes \chi, \sigma_0^s \otimes \chi\}$ et si $m \neq 0$ (resp. $m^s \neq 0$), la surjection $s_{\sigma_{\overline{\rho}}}$ (resp. $s_{\sigma_{\overline{\rho}}^s}$) en (12) se factorise de même par le quotient A de $R^\psi(\overline{\rho})/\varpi_E$ et on note $\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}}$ (resp. $\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}^s}$) l'image de son noyau dans A. C'est un idéal premier minimal de A.

Théorème 4.1.5. — *On suppose $\{\sigma_{\overline{\rho}}, \sigma_{\overline{\rho}}^s\} \neq \{\sigma_0 \otimes \chi, \sigma_0^s \otimes \chi\}$.*
(i) Si $\mathcal{D}(\mathbf{v},\mathrm{t}) \cap \mathcal{D}(\overline{\rho}) = \emptyset$ alors $A = 0$.
(ii) Si $\mathcal{D}(\mathbf{v},\mathrm{t}) \cap \mathcal{D}(\overline{\rho}) = \{\sigma_{\overline{\rho}}\}$ alors $m = m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma_{\overline{\rho}}) \neq 0$ et $\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}}$ est l'unique idéal premier minimal de A. De plus $A/\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}}$ est formellement lisse sur k_E et on a :

$$\mathrm{long}_{A_{\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}}}}(A_{\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}}}) = m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma_{\overline{\rho}}).$$

(iii) Si $\mathcal{D}(\mathbf{v},\mathrm{t}) \cap \mathcal{D}(\overline{\rho}) = \{\sigma_{\overline{\rho}}^s\}$ alors $m^s = m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma_{\overline{\rho}}^s) \neq 0$ et $\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}^s}$ est l'unique idéal premier minimal de A. De plus $A/\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}}$ est formellement lisse sur k_E et on a :

$$\mathrm{long}_{A_{\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}^s}}}(A_{\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}^s}}) = m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma_{\overline{\rho}}^s).$$

(iv) Si $\mathcal{D}(\mathbf{v},\mathrm{t}) \cap \mathcal{D}(\overline{\rho}) = \{\sigma_{\overline{\rho}}, \sigma_{\overline{\rho}}^s\}$ alors $m = m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma_{\overline{\rho}}) \neq 0$, $m^s = m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma_{\overline{\rho}}^s) \neq 0$ et $\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}}$, $\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}^s}$ sont les idéaux premiers minimaux de A. De plus $A/\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}}$ et $A/\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}^s}$ sont formellement lisses sur k_E et on a :

$$\mathrm{long}_{A_{\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}}}}(A_{\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}}}) = m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma_{\overline{\rho}}) \quad \textit{et} \quad \mathrm{long}_{A_{\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}^s}}}(A_{\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}^s}}) = m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma_{\overline{\rho}}^s).$$

Démonstration. — (i) Si $\mathcal{D}(\mathbf{v},\mathrm{t}) \cap \mathcal{D}(\overline{\rho}) = \emptyset$ alors $\mu_{\mathrm{aut}}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho}) = 0$ d'où, par le cas classique de la conjecture de multiplicités modulaires [**16**, Cor.2.3.2], $\mu_{\mathrm{gal}}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho}) = e(A) = 0$ ce qui implique $A = 0$.
(ii) Supposons $\mathcal{D}(\mathbf{v},\mathrm{t}) \cap \mathcal{D}(\overline{\rho}) = \{\sigma_{\overline{\rho}}\}$, i.e. $m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma_{\overline{\rho}}) > 0$ et $m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma_{\overline{\rho}}^s) = 0$. On a $e(A) \neq 0$ par [**16**, Cor.2.3.2], donc $e\big(\mathfrak{m}_A, T^\psi(L,\overline{\rho})/\varpi_E\big) \neq 0$ par (14). Comme $e(\mathfrak{m}_A, Q) = 0$ dans la proposition 4.1.4 car Q est un A-module dont le k_E-espace vectoriel sous-jacent est de dimension finie, on doit avoir $m > 0$ dans cette même proposition et donc l'idéal minimal $\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}}$ de A est défini. La lissité formelle résulte de $A/\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}} \cong k_E[[T]]$. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier quelconque de A, que l'on voit indifféremment dans $R^\psi(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})$ via l'immersion fermée $\mathrm{Spec}(A) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(R^\psi(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho}))$. Comme $T^\psi(L,\overline{\rho})$ est un $R^\psi(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})$-module de

type fini fidèle par le lemme 3.1.6, le localisé $T^{\psi}(L,\overline{\rho})_{\mathfrak{p}}$ est non nul (cf. [**19**, p.26]). Par le lemme de Nakayama appliqué au $R^{\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})_{\mathfrak{p}}$-module de type fini $T^{\psi}(L,\overline{\rho})_{\mathfrak{p}}$, on a $\varpi_E T^{\psi}(L,\overline{\rho})_{\mathfrak{p}} \subsetneq T^{\psi}(L,\overline{\rho})_{\mathfrak{p}}$, ou encore $(T^{\psi}(L,\overline{\rho})/\varpi_E)_{\mathfrak{p}} \neq 0$. Or, par la proposition 4.1.4, le A-module $T^{\psi}(L,\overline{\rho})/\varpi_E$ est un $A/\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}}$-module. La non nullité de $(T^{\psi}(L,\overline{\rho})/\varpi_E)_{\mathfrak{p}}$ force donc $\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}} \subseteq \mathfrak{p}$, autrement dit $\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}}$ est l'unique idéal premier minimal de A. On en déduit par (4) et (3) :

$$\mu_{\mathrm{gal}}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho}) = e(A) = e(A/\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}})\,\mathrm{long}_{A_{\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}}}}(A_{\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}}}) = \mathrm{long}_{A_{\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}}}}(A_{\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}}}).$$

Comme $\mu_{\mathrm{aut}}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho}) = m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma_{\overline{\rho}})$, on a donc $\mathrm{long}_{A_{\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}}}}(A_{\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}}}) = m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma_{\overline{\rho}})$ par [**16**, Cor.2.3.2]. Par (14) et la proposition 4.1.4, on a (car $e(\mathfrak{m}_A,Q)=0$) :

$$2\mu_{\mathrm{gal}}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho}) = e(\mathfrak{m}_A, T^{\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})/\varpi_E) \leq e\big(\mathfrak{m}_A, T^{\psi}(L,\overline{\rho})/\varpi_E\big) = 2m \leq 2m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma_{\overline{\rho}}).$$

On en déduit $m = m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma_{\overline{\rho}})$ puisque $\mu_{\mathrm{gal}}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho}) = \mu_{\mathrm{aut}}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho}) = m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma_{\overline{\rho}})$. (iii) est pareil que (ii).
(iv) Supposons $\mathcal{D}(\mathbf{v},\mathrm{t}) \cap \mathcal{D}(\overline{\rho}) = \{\sigma_{\overline{\rho}}, \sigma_{\overline{\rho}}^s\}$, on montre par un argument analogue au (ii) utilisant la proposition 4.1.4 que $m+m^s \neq 0$. Supposons d'abord $mm^s \neq 0$ de sorte que les deux idéaux premiers minimaux $\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}}$ et $\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}^s}$ sont bien définis. Les lissités formelles résultent de $A/\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}} \cong A/\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}^s} \cong k_E[[T]]$. Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier quelconque de A, on montre comme au (ii) que $\mathfrak{p}$ est dans le support du A-module $T^{\psi}(L,\overline{\rho})/\varpi_E$, et comme c'est un $A/\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}} \cap \mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}^s}$-module par la proposition 4.1.4, on a $\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}} \cap \mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}^s} \subseteq \mathfrak{p}$. Si $\mathfrak{p}$ ne contient pas $\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}^s}$, soit $y \in \mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}^s}$ qui n'est pas dans $\mathfrak{p}$. Comme tout $x \in \mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}}$ est tel que $xy \in \mathfrak{p}$, on a $x \in \mathfrak{p}$, i.e. $\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}} \subseteq \mathfrak{p}$. Donc $\mathfrak{p}$ contient toujours soit $\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}^s}$ soit $\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}}$ ce qui montre que $\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}}$ et $\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}^s}$ sont les seuls idéaux premiers minimaux de A. L'inégalité (15) appliquée à $\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}}$ et $\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}^s}$ donne avec la proposition 4.1.4 (et le fait que Q ne contribue pas aux multiplicités) :

$$\begin{array}{rcccl} 2e(A_{\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}}}) = 2\,\mathrm{long}_{A_{\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}}}}(A_{\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}}}) & \leq & 2m & \leq & 2m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma_{\overline{\rho}}) \\ 2e(A_{\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}^s}}) = 2\,\mathrm{long}_{A_{\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}^s}}}(A_{\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}^s}}) & \leq & 2m^s & \leq & 2m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma_{\overline{\rho}}^s). \end{array}$$

Or par (4), (3), $e(k_E[[T]]) = 1$ et [**16**, Cor.2.3.2], on doit avoir :

$$\mu_{\mathrm{gal}}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho}) = \mathrm{long}_{A_{\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}}}}(A_{\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}}}) + \mathrm{long}_{A_{\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}^s}}}(A_{\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}^s}}) = \mu_{\mathrm{aut}}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho}) = m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma_{\overline{\rho}}) + m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma_{\overline{\rho}}^s).$$

Les inégalités ci-dessus forcent donc $\mathrm{long}_{A_{\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}}}}(A_{\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}}}) = m = m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma_{\overline{\rho}})$ et $\mathrm{long}_{A_{\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}^s}}}(A_{\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}^s}}) = m^s = m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma_{\overline{\rho}}^s)$. Il reste à traiter les éventuels cas où $mm^s = 0$, mais ces cas ne peuvent arriver car la même preuve qu'en (ii) utilisant (14) donnerait soit $\mu_{\mathrm{gal}}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho}) \leq m \leq m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma_{\overline{\rho}})$ soit $\mu_{\mathrm{gal}}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho}) \leq m^s \leq m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma_{\overline{\rho}}^s)$ ce qui est impossible puisque $\mu_{\mathrm{gal}}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho}) = \mu_{\mathrm{aut}}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho}) = m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma_{\overline{\rho}}) + m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma_{\overline{\rho}}^s)$ et que l'on a $m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma_{\overline{\rho}})m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma_{\overline{\rho}}^s) \neq 0$. □

En particulier on a :

Corollaire 4.1.6. — *La conjecture 2.2 est vraie pour $F = \mathbb{Q}_p$ et $\overline{\rho}$ irréductible.*

Par une preuve similaire à celle du théorème 4.1.5(ii), on a aussi quand $\overline{\rho}$ est irréductible non générique :

Théorème 4.1.7. — *On suppose* $\{\sigma_{\overline{\rho}}, \sigma_{\overline{\rho}}^s\} = \{\sigma_0 \otimes \chi, \sigma_0^s \otimes \chi\}$.
(i) Si $\mathcal{D}(\mathbf{v}, \mathrm{t}) \cap \mathcal{D}(\overline{\rho}) = \emptyset$ *alors* $A = 0$.
(ii) Si $\mathcal{D}(\mathbf{v}, \mathrm{t}) \cap \mathcal{D}(\overline{\rho}) \neq \emptyset$ *alors* $m = m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma_{\overline{\rho}})$, $m^s = m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma_{\overline{\rho}}^s)$, $m + m^s \neq 0$ *et* $\mathfrak{p}_{\overline{\rho}}$ *est l'unique idéal premier minimal de* A*. De plus* $A/\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}}$ *est formellement lisse sur* k_E *et on a :*

$$\mathrm{long}_{A_{\mathfrak{p}_{\overline{\rho}}}}(A_{\mathfrak{p}_{\overline{\rho}}}) = m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma_{\overline{\rho}}) + m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma_{\overline{\rho}}^s).$$

Remarque 4.1.8. — Notons $\sigma_{\overline{\rho}} = (\mathrm{Sym}^m k_E^2) \otimes_{k_E} \det^n$ (où $0 \leq m \leq p-1$ et $0 \leq n \leq p-2$). La proposition 4.1.4 avec les résultats précédents impliquent en particulier que la composante irréductible $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}})$ est isomorphe à $\mathrm{Spec}(R^{\psi}((n, m+2), \mathrm{triv}, \overline{\rho})/\varpi_E)$ (et un énoncé analogue pour $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}^s})$) : il suffit de remarquer que, aux multiplicités près, les constituants de dimension infinie à droite de l'isomorphisme dans l'énoncé de 4.1.4 ne dépendent que du poids de Serre considéré.

La bijection entre l'ensemble des composantes irréductibles (ou des idéaux premiers minimaux) de A et l'ensemble $\mathcal{D}(\mathbf{v}, \mathrm{t}) \cap \mathcal{D}(\overline{\rho})$ implicite dans l'énoncé du théorème 4.1.5 est donc celle qui envoie un idéal premier minimal $\mathfrak{p}$ de A sur le poids de Serre σ tel que :

$$T^{\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})/\varpi_E \otimes_A A/\mathfrak{p} \simeq V\Big(\varprojlim_n \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma\big)/T^n\Big). \tag{22}$$

Il y a une manière plus agréable de la décrire. Posons (cf. § 3.2 pour $A^{\psi}(\overline{\rho})$) :

$$A^{\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho}) \overset{\text{déf}}{=} A^{\psi}(\overline{\rho}) \otimes_{R^{\psi}(\overline{\rho})} R^{\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho}).$$

Proposition 4.1.9. — *La bijection du théorème 4.1.5 entre l'ensemble des idéaux premiers minimaux* $\mathfrak{p}$ *de* A *et l'ensemble* $\mathcal{D}(\mathbf{v}, \mathrm{t}) \cap \mathcal{D}(\overline{\rho})$ *est :*

$$\mathfrak{p} \mapsto \mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)}\big((A^{\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})/\varpi_E) \otimes_A \mathrm{Frac}(A/\mathfrak{p})\big)$$

où l'on identifie un poids de Serre sur k_E *avec son extension des scalaires au corps* $\mathrm{Frac}(A/\mathfrak{p})$.

Démonstration. — On a par hypothèse $\{\sigma_{\overline{\rho}}, \sigma_{\overline{\rho}}^s\} \neq \{\sigma_0 \otimes \chi, \sigma_0^s \otimes \chi\}$. Par le lemme 3.2.3 on a :

$$V\big((A^{\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})/\varpi_E) \otimes_A A/\mathfrak{p}\big) \cong T^{\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})/\varpi_E \otimes_A A/\mathfrak{p}.$$

Par le théorème 4.1.5 et (22), on a soit $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}}$ et :

$$V\Big(\varprojlim_n \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma_{\overline{\rho}}\big)/T^n\Big) \cong T^{\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})/\varpi_E \otimes_A A/\mathfrak{p},$$

soit $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{\sigma^s_{\overline{\rho}}}$ et :

$$V\Big(\varprojlim_n \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma^s_{\overline{\rho}}\big)/T^n\Big) \cong T^\psi(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})/\varpi_E \otimes_A A/\mathfrak{p}.$$

Les représentations $(A^\psi(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})/\varpi_E) \otimes_A A/\mathfrak{p}_{\sigma_{\overline{\rho}}}$ et $\varprojlim_n\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma_{\overline{\rho}}\big)/T^n$ (resp. $(A^\psi(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})/\varpi_E) \otimes_A A/\mathfrak{p}_{\sigma^s_{\overline{\rho}}}$ et $\varprojlim_n\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma^s_{\overline{\rho}}\big)/T^n)$ sont donc toutes les deux des déformations de $\overline{\pi}$ sur $k_E[[T]]$ de caractère central $\overline{\psi}$ telles que leur image par V est la même déformation de $\overline{\rho}$ sur $k_E[[T]]$ de déterminant $\overline{\psi}\omega$. Par le théorème 3.2.2(i), elles doivent être isomorphes. Le résultat découle donc du (i) du lemme suivant laissé en exercice au lecteur. □

Lemme 4.1.10. — *Soit σ un poids de Serre.*
(i) Si $\{\sigma, \sigma^s\} \neq \{\sigma_0 \otimes \chi, \sigma_0^s \otimes \chi\}$, on a :

$$\mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)}\Big(\big(\varprojlim_n \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma\big)/T^n\big) \otimes_{k_E[[T]]} k_E((T))\Big) = \sigma \otimes_{k_E} k_E((T)).$$

(ii) Si $\{\sigma, \sigma^s\} = \{\sigma_0 \otimes \chi, \sigma_0^s \otimes \chi\}$, on a :

$$\mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)}\Big(\big(\varprojlim_n \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma\big)/T^n\big) \otimes_{k_E[[T]]} k_E((T))\Big) = \sigma \otimes_{k_E} k_E((T)) \oplus \sigma^s \otimes_{k_E} k_E((T)).$$

Remarque 4.1.11. — Lorsque $\overline{\rho}$ est non générique, i.e. $\{\sigma_{\overline{\rho}}, \sigma^s_{\overline{\rho}}\} = \{\sigma_0 \otimes \chi, \sigma_0^s \otimes \chi\}$, on montre de même que $(A^\psi(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})/\varpi_E) \otimes_A A/\mathfrak{p}_{\overline{\rho}}$ est isomorphe à $\varprojlim_n\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma_{\overline{\rho}}\big)/T^n = \varprojlim_n\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma^s_{\overline{\rho}}\big)/T^n$. Dans ce cas, par le lemme 4.1.10(ii), l'unique idéal premier minimal de A (théorème 4.1.7(ii)) est envoyé sur $\{\sigma_{\overline{\rho}}, \sigma^s_{\overline{\rho}}\}$ par l'application de la proposition 4.1.9.

4.2. Le cas $\overline{\rho}$ réductible non scindée. —

On démontre la conjecture 2.2 lorsque $F = \mathbb{Q}_p$ et $\overline{\rho}$ est réductible non scindée.

On note τ l'unique plongement de $\mathbb{F}_p$ dans k_E. On fixe $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F) \to \mathrm{GL}_2(k_E)$ continue réductible (scindée ou pas et générique ou pas pour l'instant) de déterminant $\overline{\psi}\omega$. Dans *toute* cette partie on suppose $\overline{\rho} \ncong \left(\begin{smallmatrix}\omega & * \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \otimes \chi$ (avec $*$ nul ou non) et $\overline{\rho} \ncong \left(\begin{smallmatrix}1 & * \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \otimes \chi$ (avec $*$ nul ou non) (ces hypothèses sont plus faibles que la généricité). On écrit $\overline{\rho}$ sous la forme :

$$\overline{\rho} \cong \begin{pmatrix}\omega^{s_1}\,\mathrm{nr}(\lambda) & * \\ 0 & \omega^{s_2}\,\mathrm{nr}(\lambda^{-1}\mu)\end{pmatrix}$$

où $\lambda, \mu \in k_E^\times$. On a donc $\overline{\psi} = \omega^{s_1+s_2-1}\,\mathrm{nr}(\mu)$ et $\omega^{s_1-s_2} \notin \{1, \omega, \omega^{-1}\}$ (resp. $\omega^{s_1-s_2} \notin \{1, \omega\}$) lorsque $\lambda^2 = \mu$ et $* = 0$ (resp. $\lambda^2 = \mu$ et $* \neq 0$). On a alors les cas suivants :

(i) $\overline{\rho}$ scindée
(ia) $\omega^{s_1-s_2}\notin\{1,\omega,\omega^{-1}\}$, alors $\mathcal{D}(\overline{\rho})=\{\sigma^1_{\overline{\rho}},\sigma^2_{\overline{\rho}}\}$ pour deux poids de Serre distincts qui ne sont pas de la forme $\sigma_0\otimes\chi$ ou $\sigma_0^s\otimes\chi$ pour $\chi:\mathbb{F}_p^\times\to k_E^\times$ quelconque
(ib) $\omega^{s_1-s_2}=1$, alors $\mathcal{D}(\overline{\rho})=\{\sigma^1_{\overline{\rho}}\}=\{\sigma^2_{\overline{\rho}}\}$ où $\sigma^1_{\overline{\rho}}=\sigma^2_{\overline{\rho}}=(\mathrm{Sym}^{p-2}\,k_E^2)\otimes_{k_E}\tau\circ\det^{s_1}$
(ic) $\omega^{s_1-s_2}=\omega^{-1}$ et $p>3$, alors $\mathcal{D}(\overline{\rho})=\{\sigma^1_{\overline{\rho}},\sigma_0\otimes_{k_E}\tau\circ\det^{s_1},\sigma_0^s\otimes_{k_E}\tau\circ\det^{s_1}\}$ où $\sigma^1_{\overline{\rho}}=(\mathrm{Sym}^{p-3}\,k_E^2)\otimes_{k_E}\tau\circ\det^{s_2}$
(id) $\omega^{s_1-s_2}=\omega$ et $p>3$, alors $\mathcal{D}(\overline{\rho})=\{\sigma_0\otimes_{k_E}\tau\circ\det^{s_2},\sigma_0^s\otimes_{k_E}\tau\circ\det^{s_2},\sigma^2_{\overline{\rho}}\}$ où $\sigma^2_{\overline{\rho}}=(\mathrm{Sym}^{p-3}\,k_E^2)\otimes_{k_E}\tau\circ\det^{s_1}$
(ie) $\omega^{s_1-s_2}=\omega=\omega^{-1}$ et $p=3$, alors $\mathcal{D}(\overline{\rho})=\{\sigma_0\otimes_{k_E}\tau\circ\det^{s_2},\sigma_0^s\otimes_{k_E}\tau\circ\det^{s_2},\sigma_0\otimes_{k_E}\tau\circ\det^{s_1},\sigma_0^s\otimes_{k_E}\tau\circ\det^{s_1}\}$

(ii) $\overline{\rho}$ non scindée
(iia) $\overline{\rho}^{\rm ss}$ comme en (ia), (ib) ou (ic), alors $\mathcal{D}(\overline{\rho})=\{\sigma^1_{\overline{\rho}^{\rm ss}}\}$
(iib) $\overline{\rho}^{\rm ss}$ comme en (id) ou (ie), alors $\mathcal{D}(\overline{\rho})=\{\sigma_0\otimes_{k_E}\tau\circ\det^{s_2},\sigma_0^s\otimes_{k_E}\tau\circ\det^{s_2}\}$.

On étend l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times$ sur un poids de Serre en faisant agir $p\in\mathbb{Q}_p^\times$ par $\overline{\psi}(p)=\mu$.

Rappelons que, si $\lambda^2\neq\mu$, on a un isomorphisme ([**16**, Lem.1.5.5]) :

$$\varprojlim_n\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\sigma_0\big)/(T-\lambda)^n\cong\varprojlim_n\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\sigma_0^s\big)/(T-\lambda)^n. \tag{23}$$

Dans la suite, lorsque $\overline{\rho}^{\rm ss}$ est comme en (id) ou (ie) (que $\overline{\rho}$ soit scindée ou non), on note $\sigma^1_{\overline{\rho}^{\rm ss}}$ l'un quelconque des poids de Serre $\sigma_0\otimes_{k_E}\tau\circ\det^{s_2}$, $\sigma_0^s\otimes_{k_E}\tau\circ\det^{s_2}$. De même, lorsque $\overline{\rho}^{\rm ss}$ est comme en (ic) ou (ie), on note $\sigma^2_{\overline{\rho}^{\rm ss}}$ l'un quelconque des poids de Serre $\sigma_0\otimes_{k_E}\tau\circ\det^{s_1}$, $\sigma_0^s\otimes_{k_E}\tau\circ\det^{s_1}$. Par (23), les représentations $\varprojlim_n\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\sigma^1_{\overline{\rho}^{\rm ss}}\big)/(T-\lambda)^n$ et $\varprojlim_n\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\sigma^2_{\overline{\rho}^{\rm ss}}\big)/(T-\lambda)^n$ sont donc toujours bien définies lorsque $\lambda^2\neq\mu$.

Lemme 4.2.1. — *(i) La représentation de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ *:*

$$V\Big(\varprojlim_n\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\sigma^1_{\overline{\rho}^{\rm ss}}\big)/(T-\lambda)^n\Big)$$

est toujours bien définie et est la déformation du caractère $\omega^{s_1}\,\mathrm{nr}(\lambda)$ *sur* $k_E[[T-\lambda]]$ *donnée par* $\omega^{s_1}\,\mathrm{nr}(T)$.
(ii) La représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ *:*

$$V\Big(\varprojlim_n\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\sigma^2_{\overline{\rho}^{\rm ss}}\big)/(T-\lambda^{-1}\mu)^n\Big)$$

est toujours bien définie et est la déformation du caractère $\omega^{s_2}\,\mathrm{nr}(\lambda^{-1}\mu)$ *sur* $k_E[[T-\lambda^{-1}\mu]]$ *donnée par* $\omega^{s_2}\,\mathrm{nr}(T)$.

Démonstration. — Cela se déduit de [**16**, Lem.1.5.9]. Notons que, lorsque $\lambda^2 = \mu$, ce résultat montre aussi que :

$$V\Big(\varprojlim_n \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\,\sigma_0\big)/(T-\lambda)^n\Big) \cong V\Big(\varprojlim_n \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\,\sigma_0^s\big)/(T-\lambda)^n\Big)$$

de sorte que les représentations de l'énoncé sont toujours bien définies. □

Soit S une variable formelle et munissons la représentation du lemme 4.2.1(i) d'une structure de $k_E[[S]]$-module en faisant agir S par $T-\lambda$. Munissons la représentation du lemme 4.2.1(ii) d'une structure de $k_E[[S]]$-module en faisant agir S par $\mu T^{-1}-\lambda = \big((T-\lambda^{-1}\mu)+\lambda^{-1}\mu\big)^{-1}\mu-\lambda \in (T-\lambda^{-1}\mu)k_E[[T-\lambda^{-1}\mu]]^\times$. La somme directe des deux déformations du lemme 4.2.1 donne la déformation $\omega^{s_1}\,\mathrm{nr}(\lambda+S)\oplus\omega^{s_2}\,\mathrm{nr}((\lambda+S)^{-1}\mu)$ de $\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}$ sur $k_E[[S]]$. Sa trace est une déformation sur $k_E[[S]]$ de la pseudo-représentation $\mathrm{tr}\,\overline{\rho}$ et fournit une surjection :

$$s_{\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}} : R^{\mathrm{ps}}(\mathrm{tr}\,\overline{\rho})/\varpi_E \twoheadrightarrow k_E[[S]]. \tag{24}$$

Les déformations galoisiennes sur $k_E[[S]]$ du lemme 4.2.1 sont vues dans la suite comme des $R^{\mathrm{ps}}(\mathrm{tr}\,\overline{\rho})/\varpi_E$-modules via la surjection $s_{\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}}$. En particulier, si $\mathrm{tr} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \to R^{\mathrm{ps}}(\mathrm{tr}\,\overline{\rho})$ est la trace universelle et si $g \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$, la multiplication par $s_{\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}}(\mathrm{tr}(g)) \in k_E[[S]]$ sur les $k_E[[S]][\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)]$-modules du lemme 4.2.1 n'est autre que l'action de $g+\overline{\psi}\omega(g)g^{-1}$.

Lorsque $\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}$ est comme en (ia), (ib) ou (ic) (resp. comme en (ia), (ib) et (id)), on rappelle que $m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma^1_{\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}})$ (resp. $m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma^2_{\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}})$) est la multiplicité (éventuellement nulle) avec laquelle $\sigma^1_{\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}}$ (resp. $\sigma^2_{\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}}$) apparaît dans le semi-simplifié sur k_E de $\sigma(\mathbf{v})\otimes_E\sigma(\mathrm{t})$ (voir § 2). Lorsque $\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}$ est comme en (id) ou (ie) (resp. comme en (ic) ou (ie)), on pose :

$$\begin{aligned} m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma^1_{\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}}) &\overset{\text{déf}}{=} m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma_0\otimes_{k_E}\tau\circ\det{}^{s_2}) + m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma_0^s\otimes_{k_E}\tau\circ\det{}^{s_2}) \\ \big(\text{resp. } m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma^2_{\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}}) &\overset{\text{déf}}{=} m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma_0\otimes_{k_E}\tau\circ\det{}^{s_1}) + m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma_0^s\otimes_{k_E}\tau\circ\det{}^{s_1})\big). \end{aligned}$$

Proposition 4.2.2. — *Choisissons L tel que $\overline{L}$ est semi-simple (ce que l'on peut toujours faire par le lemme 3.1.7 quitte à agrandir E). On a un isomorphisme de $R^{\mathrm{ps}}(\mathrm{tr}\,\overline{\rho})[\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)]$-modules :*

$$\begin{aligned} T^\psi(L,\overline{\rho})/\varpi_E \cong\ & V\Big(\varprojlim_n \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\,\sigma^1_{\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}}\big)/(T-\lambda)^n\Big)^{m^1} \bigoplus \\ & V\Big(\varprojlim_n \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\,\sigma^2_{\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}}\big)/(T-\lambda^{-1}\mu)^n\Big)^{m^2} \bigoplus Q \end{aligned}$$

où $0 \leq m^1 \leq m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma^1_{\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}})$, $0 \leq m^2 \leq m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma^2_{\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}})$ *et* Q *est un* $R^{\mathrm{ps}}(\mathrm{tr}\,\overline{\rho})[\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)]$*-module qui est un quotient de :*

$$V\Big(\varprojlim_n \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma^1_{\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}}\big)/(T-\lambda)^n\Big)^{m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma^1_{\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}})} \bigoplus V\Big(\varprojlim_n \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma^2_{\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}}\big)/(T-\lambda^{-1}\mu)^n\Big)^{m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma^2_{\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}})}$$

de dimension finie sur k_E.

Démonstration. — Supposons d'abord $\overline{\rho} \not\cong \left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & \omega \end{smallmatrix}\right)$ à torsion près avec $* \neq 0$ (et forcément $p > 3$ par les hypothèses sur $\overline{\rho}$). Il suffit de montrer que $A^\psi(L, \overline{\rho})/\varpi_E$ est un quotient de la représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$:

$$\Big(\varprojlim_n \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma^1_{\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}}\big)/(T-\lambda)^n\Big)^{m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma^1_{\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}})} \bigoplus \Big(\varprojlim_n \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma^2_{\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}}\big)/(T-\lambda^{-1}\mu)^n\Big)^{m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma^2_{\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}})}$$

car la compatibilité aux structures de $R^{\mathrm{ps}}(\mathrm{tr}\,\overline{\rho})$-modules après avoir appliqué V se montre exactement comme dans la preuve de la proposition 4.1.4 via l'argument de [**16**, Lem.1.6.3]. Or la représentation $A^\psi(L, X)/\varpi_E$ est de longueur finie et ses constituants sont contenus dans :

$$\Big\{\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma^1_{\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}}\big)/(T-\lambda)\ , \quad \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma^2_{\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}}\big)/(T-\lambda^{-1}\mu)\Big\}$$

(noter que ces représentations sont toujours irréductibles et non isomorphes sous les hypothèses sur $\overline{\rho}$). De plus, si $\sigma \notin \{\sigma^1_{\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}}, \sigma^2_{\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}}\}$, l'induite $\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma$ n'a aucun quotient de longueur finie formé de ces constituants. La preuve est alors analogue à celle de la proposition 4.1.4. Supposons $\overline{\rho} \cong \left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & \omega \end{smallmatrix}\right)$ à torsion près avec $* \neq 0$ et $p > 3$ où $\sigma^1_{\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}} = (\mathrm{Sym}^{p-3}\, k_E^2) \otimes_{k_E} \tau \circ \det^{s_2}$, $\sigma^2_{\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}} \in \{\sigma_0 \otimes_{k_E} \tau \circ \det^{s_1}, \sigma_0^s \otimes_{k_E} \tau \circ \det^{s_1}\}$ et $\lambda^2 = \mu$. La seule différence est que les représentations $\varprojlim_n \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma_0 \otimes_{k_E} \tau \circ \det^{s_1}\big)/(T-\lambda)^n$ et $\varprojlim_n \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma_0^s \otimes_{k_E} \tau \circ \det^{s_1}\big)/(T-\lambda)^n$ ne sont plus isomorphes. Néanmoins, leurs constituants n'apparaissent dans aucun quotient d'une autre induite $\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma$ et leurs images par le foncteur V sont les mêmes par le lemme 4.2.1. La preuve marche donc encore. $\square$

On pose $B \overset{\text{déf}}{=} R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})/\varpi_E$. Si $m^1 + m^2 \neq 0$ (m^1, m^2 comme dans la proposition 4.2.2), la proposition 4.2.2 combinée avec le lemme 3.1.6(iii) implique que la surjection $s_{\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}}$ en (24) se factorise par le quotient B de $R^{\mathrm{ps}}(\mathrm{tr}\,\overline{\rho})/\varpi_E$ et on note $\mathfrak{p}_{\overline{\rho}}$ l'image de son noyau dans B. C'est un idéal premier minimal de B car $\dim(B/\mathfrak{p}_{\overline{\rho}}) = \dim(k_E[[S]]) = 1 = \dim(B)$ (lemme 3.1.4).

Proposition 4.2.3. — *(i) Si $\mathcal{D}(\mathbf{v},\mathrm{t})\cap\mathcal{D}(\overline{\rho})=\emptyset$ alors $B=0$.*
(ii) Si $\mathcal{D}(\mathbf{v},\mathrm{t})\cap\mathcal{D}(\overline{\rho})\neq\emptyset$ alors $m^1+m^2\neq 0$ et $\mathfrak{p}_{\overline{\rho}}$ est l'unique idéal premier minimal de B.

Démonstration. — La preuve est similaire à celle du théorème 4.1.5.
(i) Si $\mathcal{D}(\mathbf{v},\mathrm{t})\cap\mathcal{D}(\overline{\rho})=\emptyset$ alors on a $\mu_{\mathrm{aut}}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})=0$ d'où par [**16**, Cor.2.3.2] $\mu_{\mathrm{gal}}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})=0$ ce qui implique $R^{\square,\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})/\varpi_E=0$ et donc aussi $B=0$.
(ii) On a $R^{\square,\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})\neq 0$ par [**16**, Cor.2.3.2] donc aussi $R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})\neq 0$ et $B\neq 0$. On montre d'abord exactement comme pour le théorème 4.1.5(ii) (en utilisant le lemme 3.1.6 et le lemme de Nakayama) que si $\mathfrak{q}$ est un idéal premier quelconque de B, alors le localisé $(T^{\psi}(L,\overline{\rho})/\varpi_E)_{\mathfrak{q}}$ est non nul, autrement dit $\mathfrak{q}$ est dans le support de $T^{\psi}(L,\overline{\rho})/\varpi_E$. Comme $T^{\psi}(L,\overline{\rho})/\varpi_E$ est un B-module de type fini, l'idéal $\mathfrak{q}$ contient donc l'idéal annulateur I de $T^{\psi}(L,\overline{\rho})/\varpi_E$ (cf. [**19**, p.26]). Supposons $m^1+m^2=0$, alors $T^{\psi}(L,\overline{\rho})/\varpi_E$ est de dimension finie sur k_E par la proposition 4.2.2. Comme $B/I\hookrightarrow\mathrm{End}_{k_E}(T^{\psi}(L,\overline{\rho})/\varpi_E)$, cela implique qu'il en est de même pour B/I, et donc aussi pour $B/\mathfrak{q}$. On a donc $\dim(B/\mathfrak{q})=0$ pour tout idéal premier $\mathfrak{q}$ de B ce qui est impossible car $\dim(B)=1$. Donc $m^1+m^2\neq 0$ et la proposition 4.2.2 implique alors $I=\mathfrak{p}_{\overline{\rho}}$. Comme tout idéal premier de B contient $\mathfrak{p}_{\overline{\rho}}$, ce dernier est l'unique idéal premier minimal de B. □

Corollaire 4.2.4. — *Si $\overline{\rho}$ est réductible non scindée,* Spec $\big(R^{\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})/\varpi_E\big)$ *n'a qu'une composante irréductible C qui est lisse et on a :*

$$\mu_{\mathrm{gal}}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})=m(C)=m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma^1_{\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}}).$$

Démonstration. — Les hypothèses sur $\overline{\rho}$ impliquent $\mathrm{End}_{k_E[\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)]}(\overline{\rho})=k_E$ et $R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})=R^{\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})$ par la remarque 3.1.5. Par la proposition 4.2.3, seule l'égalité reste donc à vérifier. On a par (4), (3), la proposition 4.2.3 et [**16**, Cor.2.3.2] :

$$\mu_{\mathrm{gal}}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})=e(B)=e(B/\mathfrak{p}_{\overline{\rho}})\,\mathrm{long}_{B_{\mathfrak{p}_{\overline{\rho}}}}(B_{\mathfrak{p}_{\overline{\rho}}})=\mathrm{long}_{B_{\mathfrak{p}_{\overline{\rho}}}}(B_{\mathfrak{p}_{\overline{\rho}}})=\mu_{\mathrm{aut}}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})=m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma^1_{\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}}).$$

□

En particulier, on en déduit :

Corollaire 4.2.5. — *La conjecture 2.2 est vraie pour $F=\mathbb{Q}_p$ et $\overline{\rho}$ réductible non scindée.*

Remarque 4.2.6. — On a une remarque analogue au (ii) de la remarque 4.1.8 en utilisant la remarque 3.1.5, (24) et les résultats précédents.

Le schéma $\mathrm{Spec}(B)=\mathrm{Spec}(R^{\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})/\varpi_E)$ n'ayant au plus qu'une composante irréductible lorsque $\overline{\rho}$ est réductible non scindée, il n'y a trivialement qu'une bijection possible comme dans la conjecture 2.2 (quand $\overline{\rho}$ est de plus générique). Comme dans le cas $\overline{\rho}$ irréductible, on peut la décrire de manière plus intrinsèque en utilisant la représentation $A^\psi(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho}) = A^\psi(\overline{\rho}) \otimes_{R^\psi(\overline{\rho})} R^\psi(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})$ (cf. § 4.1).

Lemme 4.2.7. — *Supposons $\overline{\rho}$ réductible non scindée, $\overline{\rho} \not\cong \left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & \omega \end{smallmatrix}\right) \otimes \chi$ et $R^\psi(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho}) \neq 0$. On a une suite exacte courte non scindée de $k_E[[S]][\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]$-modules :*

$$0 \longrightarrow \varprojlim_n \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma^1_{\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}}\big)/(T-\lambda)^n \longrightarrow (A^\psi(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})/\varpi_E) \otimes_B B/\mathfrak{p}_{\overline{\rho}} \longrightarrow \varprojlim_n \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma^2_{\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}}\big)/(T-\lambda^{-1}\mu)^n \longrightarrow 0.$$

où la représentation tout à gauche (resp. tout à droite) est munie d'une structure de $k_E[[S]]$-module en faisant agir S par $T-\lambda$ (resp. par $\mu T^{-1}-\lambda$).

Démonstration. — Par définition de $\mathfrak{p}_{\overline{\rho}}$, la trace de la déformation :

$$(25)\quad (T^\psi(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})/\varpi_E) \otimes_B B/\mathfrak{p}_{\overline{\rho}} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \to \mathrm{GL}_2(B/\mathfrak{p}_{\overline{\rho}}) \cong \mathrm{GL}_2(k_E[[S]])$$

est la pseudo-déformation :

$$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \to R^{\mathrm{ps}}(\mathrm{tr}\,\overline{\rho})/\varpi_E \overset{s_{\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}}}{\twoheadrightarrow} k_E[[S]].$$

Or, cette pseudo-déformation est la somme directe des deux caractères du lemme 4.2.1. La représentation (25) après extension des scalaires de $k_E[[S]]$ au corps $\mathrm{Frac}(B/\mathfrak{p}_{\overline{\rho}}) = k_E((S))$ est donc une extension non scindée entre ces deux caractères. Mais cela veut dire que le $k_E[[S]]$-réseau de départ (25) est aussi une extension non scindée entre ces deux caractères, et on a donc une suite exacte courte non scindée de $k_E[[S]][\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]$-modules :

$$(26)\quad 0 \to V\Big(\varprojlim_n \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma^1_{\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}}\big)/(T-\lambda)^n\Big) \to (T^\psi(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})/\varpi_E) \otimes_B B/\mathfrak{p}_{\overline{\rho}} \to V\Big(\varprojlim_n \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma^2_{\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}}\big)/(T-\lambda^{-1}\mu)^n\Big) \to 0.$$

Notons $\overline{\pi}_1 \overset{\text{déf}}{=} \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma^1_{\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}}\big)/(T-\lambda)$, $\overline{\pi}_2 \overset{\text{déf}}{=} \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma^2_{\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}}\big)/(T-\lambda^{-1}\mu)$, $\chi_1 \overset{\text{déf}}{=} \omega^{s_1}\,\mathrm{nr}(\lambda)$, $\chi_2 \overset{\text{déf}}{=} \omega^{s_2}\,\mathrm{nr}(\lambda^{-1}\mu)$ et rappelons que $V(\overline{\pi}_i) = \chi_i$ $(i=1,2)$. Soit $\overline{\pi}$ la représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur k_E associée à $\overline{\rho}$ par la correspondance de Langlands modulo p. Les hypothèsessur $\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}$ font que les représentations $\overline{\pi}_1$ et $\overline{\pi}_2$ sont irréductibles, distinctes et $\overline{\pi}$ est l'unique extension non scindée $0 \to \overline{\pi}_1 \to \overline{\pi} \to \overline{\pi}_2 \to 0$ ([**7**, Cor 8.3]). De plus, par symétrie, il existe une unique extension non scindée $0 \to \overline{\pi}_2 \to \overline{\pi}' \to \overline{\pi}_1 \to 0$ et son image par le foncteur V est (l'unique) extension non scindée de χ_1 par χ_2. Comme V est exact et que $V(\overline{\pi}')$ n'est jamais un sous-quotient de $V\big(A^\psi(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})/\varpi_E\big) \otimes_B B/\mathfrak{p}_{\overline{\rho}} = (T^\psi(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})/\varpi_E) \otimes_B B/\mathfrak{p}_{\overline{\rho}}$ par la suite exacte (26), la représentation $\overline{\pi}'$ n'apparaît jamais en sous-quotient de $\big(A^\psi(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})/\varpi_E\big) \otimes_B B/\mathfrak{p}_{\overline{\rho}}$. Soit $n \geq 1$, en considérant la sous-représentation maximale de $\big(A^{\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})/\varpi_E\big)\otimes_B(k_E[S]/S^n)$ n'ayant que $\overline{\pi}_1$ dans ses constituants (rappelons que $\big(A^{\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})/\varpi_E\big)\otimes_B(k_E[S]/S^n)$ est une extension successive finie de $\overline{\pi}$), on en déduit facilement que $\big(A^{\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})/\varpi_E\big)\otimes_B(k_E[S]/S^n)$ est extension d'une déformation de $\overline{\pi}_2$ sur $k_E[S]/S^n$ par une déformation de $\overline{\pi}_1$ sur $k_E[S]/S^n$ (les deux déformations ayant caractère central $\overline{\psi}$). Or, il n'y a qu'une seule déformation de $\overline{\pi}_1$ sur $k_E[S]/S^n$ avec caractère central $\overline{\psi}$ dont l'image par V donne la déformation $V\big(\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\sigma^1_{\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}}\big)/(T-\lambda)^n\big)$, à savoir la déformation $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\sigma^1_{\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}}\big)/(T-\lambda)^n$ (en effet, d'après [**9**, § VII.5], le foncteur V induit une injection entre les espaces tangents des deux problèmes de déformations : de $\overline{\pi}_1$ avec caractère central ψ côté $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et de χ_1 côté $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$). On a le même résultat avec $\overline{\pi}_2$. On a donc une suite exacte courte non scindée de $(k_E[S]/S^n)[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]$-modules :

$$0\longrightarrow\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\sigma^1_{\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}}\big)/(T-\lambda)^n\longrightarrow(A^{\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})/\varpi_E)\otimes_B k_E[S]/S^n\longrightarrow\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\sigma^2_{\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}}\big)/(T-\lambda^{-1}\mu)^n\longrightarrow 0.$$

En passant à la limite projective sur n, on en déduit que $(A^{\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})/\varpi_E)\otimes_B B/\mathfrak{p}_{\overline{\rho}}$ est une extension de $k_E[[S]][\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)]$-modules comme dans l'énoncé. $\square$

Proposition 4.2.8. — *Supposons $\overline{\rho}$ réductible non scindée, $\overline{\rho}\not\cong\left(\begin{smallmatrix}1&*\\0&\omega\end{smallmatrix}\right)\otimes\chi$, $\sigma^1_{\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}}\notin\{\sigma_0\otimes_{k_E}\tau\circ\det^{s_2},\sigma_0^s\otimes_{k_E}\tau\circ\det^{s_2}\}$ et $R^{\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})\neq 0$. L'application qui envoie l'unique idéal premier minimal de $R^{\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})/\varpi_E$ sur le singleton $\mathcal{D}(\mathbf{v},\mathrm{t})\cap\mathcal{D}(\overline{\rho})$ est :*

$$\mathfrak{p}_{\overline{\rho}}\mapsto\mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)}\big((A^{\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})/\varpi_E)\otimes_B\mathrm{Frac}(B/\mathfrak{p}_{\overline{\rho}})\big)$$

où l'on identifie un poids de Serre sur k_E avec son extension des scalaires au corps $\mathrm{Frac}(B/\mathfrak{p}_{\overline{\rho}})$.

Démonstration. — Avec les notations de la preuve du lemme 4.2.7, la représentation $\overline{\pi}$ vérifie $\mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)}(\overline{\pi})=\mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)}(\overline{\pi}_1)$. Comme la représentation $(A^{\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})/\varpi_E)\otimes_B B/\mathfrak{p}_{\overline{\rho}}$ est une extension successive de $\overline{\pi}$, aucun des poids de Serre apparaissant dans le $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$-socle de $\overline{\pi}_2$ n'est une sous-représentation de $(A^{\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})/\varpi_E)\otimes_B B/\mathfrak{p}_{\overline{\rho}}$. Autrement dit, par le lemme 4.2.7, on a :

$$\mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)}\big((A^{\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})/\varpi_E)\otimes_B(B/\mathfrak{p}_{\overline{\rho}})\big)=\mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)}\Big(\varprojlim_n\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\sigma^1_{\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}}\big)/(T-\lambda)^n\Big).$$

Le résultat découle donc du (i) du lemme suivant dont la preuve, comme celle du lemme 4.1.10, est laissée en exercice au lecteur. $\square$

Lemme 4.2.9. — *Soit σ un poids de Serre et $\lambda\in k_E^\times$. On étend l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ sur σ à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times$ en envoyant p vers $\mu\in k_E^\times$ et on pose $S\overset{\text{déf}}{=}T-\lambda$.*

(i) Si $\{\sigma, \sigma^s\} \neq \{\sigma_0 \otimes \chi, \sigma_0^s \otimes \chi\}$*, on a :*

$$\mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)}\Big(\big(\varprojlim_n \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma\big)/(T-\lambda)^n\big) \otimes_{k_E[[S]]} k_E((S))\Big) = \sigma \otimes_{k_E} k_E((S)).$$

(ii) Si $\{\sigma, \sigma^s\} = \{\sigma_0 \otimes \chi, \sigma_0^s \otimes \chi\}$ *et* $\lambda^2 \neq \mu$*, on a :*

$$\mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)}\Big(\big(\varprojlim_n \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma\big)/(T-\lambda)^n\big) \otimes_{k_E[[S]]} k_E((S))\Big) = \{\sigma \otimes_{k_E} k_E((S)), \sigma^s \otimes_{k_E} k_E((S))\}.$$

Remarque 4.2.10. — Lorsque $\overline{\rho}$ est réductible non scindée et $\sigma^1_{\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}} \in \{\sigma_0 \otimes_{k_E} \tau \circ \det^{s_2}, \sigma_0^s \otimes_{k_E} \tau \circ \det^{s_2}\}$, par le lemme 4.1.10(ii) l'unique idéal premier minimal de $R^\psi(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})/\varpi_E$ est envoyé sur $\{\sigma_0 \otimes_{k_E} \tau \circ \det^{s_2}, \sigma_0^s \otimes_{k_E} \tau \circ \det^{s_2}\}$ par l'application de la proposition 4.2.8.

4.3. Le cas $\overline{\rho}$ réductible scindée. — On démontre la conjecture 2.2 lorsque $F = \mathbb{Q}_p$ et $\overline{\rho}$ est réductible scindée.

On conserve toutes les notations du § 4.2. On fixe $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F) \to \mathrm{GL}_2(k_E)$ continue réductible scindée (pas forcément générique) de déterminant $\overline{\psi}\omega$ et on suppose $\overline{\rho} \ncong \left(\begin{smallmatrix} \omega & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \otimes \chi$ et $\overline{\rho} \ncong \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \otimes \chi$ dans toute la partie. On écrit $\overline{\rho}$ comme au début du § 4.2. On suppose également $\mathcal{D}(\mathbf{v}, \mathrm{t}) \cap \mathcal{D}(\overline{\rho}) \neq \emptyset$ de sorte que $B \neq 0$.

On note $\chi_1 \overset{\text{déf}}{=} \omega^{s_1} \mathrm{nr}(\lambda)$, $\chi_2 \overset{\text{déf}}{=} \omega^{s_2} \mathrm{nr}(\lambda^{-1}\mu)$ et $\overline{\rho}^1$ (resp. $\overline{\rho}^2$) l'unique extension non scindée de χ_2 par χ_1 (resp. de χ_1 par χ_2). Rappelons que les applications de $\mathcal{O}_E$-algèbres locales $R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho}^i) \to R^\psi(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho}^i)$ ($i = 1, 2$) sont des isomorphismes par la remarque 3.1.5. On pose $A \overset{\text{déf}}{=} R^{\square,\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})/\varpi_E$, on a un morphisme non nul de k_E-algèbres locales $f : B \to A$ (cf. § 3.1).

Proposition 4.3.1. — *(i) L'anneau A a un ou deux idéaux premiers minimaux.*
(ii) Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier minimal de A, alors la déformation $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \to \mathrm{GL}_2(A/\mathfrak{p})$ possède un sous-$A/\mathfrak{p}$-module facteur direct de rang 1 qui est stable par $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ et sur lequel $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ agit par un caractère qui relève soit χ_1 soit χ_2.
(iii) Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier minimal de A, alors le quotient $A/\mathfrak{p}$ est formellement lisse sur k_E et $\mathfrak{p}$ s'envoie sur $\mathfrak{p}_{\overline{\rho}} \in \mathrm{Spec}(B)$.

Démonstration. — (i) Comme dans [**16**, § 1.7.3], notons J le noyau de la surjection composée :

$$R^{\mathrm{ps}}(\mathrm{tr}\,\overline{\rho}) \twoheadrightarrow R^{\mathrm{ps}}(\mathrm{tr}\,\overline{\rho})/\varpi_E \overset{s_{\overline{\rho}}}{\twoheadrightarrow} k_E[[S]]$$

et $R^{\mathrm{ord}} \overset{\text{déf}}{=} R^{\square,\psi}(\overline{\rho}) \otimes_{R^{\mathrm{ps}}(\mathrm{tr}\,\overline{\rho})} R^{\mathrm{ps}}(\mathrm{tr}\,\overline{\rho})/J = R^{\square,\psi}(\overline{\rho}) \otimes_{R^{\mathrm{ps}}(\mathrm{tr}\,\overline{\rho})} k_E[[S]]$. Rappelons que, par [**16**, Lem.1.7.4] et sa preuve, $\mathrm{Spec}(R^{\mathrm{ord}})$ a deux composantes irréductibles qui représentent le foncteur associant à une k_E-algèbre locale artinienne R de corps résiduel k_E l'ensemble des déformations de $\overline{\rho}$ sur R avec un choix de relevé d'une base fixée de $\overline{\rho}$ qui ont pour déterminant (l'image de) $\overline{\psi}\omega$ et qui possèdent un sous-R-module facteur direct de rang 1 sur lequel $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ agit par un relevé de χ_1 et $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}})$ par $\chi_1|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}})}$ (première composante) ou par un relevé de χ_2 et par $\chi_2|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}})}$ (deuxième composante). De plus, toujours par [**16**, Lem.1.7.4], ces composantes sont formellement lisses et chacune domine $\mathrm{Spec}\left(R^{\mathrm{ps}}(\mathrm{tr}\,\overline{\rho})/J\right)$. Enfin, on vérifie facilement sur le problème de modules que leur dimension de Krull est 4. Soit maintenant $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A, alors $f^{-1}(\mathfrak{p})$ contient $\mathfrak{p}_{\overline{\rho}}$ par la proposition 4.2.3 d'où $f(\mathfrak{p}_{\overline{\rho}}) \subseteq \mathfrak{p}$, i.e. tous les idéaux premiers de A sont des idéaux premiers de $A/f(\mathfrak{p}_{\overline{\rho}})$. On a donc $\mathrm{Spec}\left(A/f(\mathfrak{p}_{\overline{\rho}})\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spec}(A)$. Comme l'image de $J \subset R^{\mathrm{ps}}(\mathrm{tr}\,\overline{\rho})$ par l'application composée :

$$R^{\mathrm{ps}}(\mathrm{tr}\,\overline{\rho}) \to R^{\square,\psi}(\overline{\rho}) \twoheadrightarrow R^{\square,\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho}) \twoheadrightarrow A$$

est par définition $f(\mathfrak{p}_{\overline{\rho}})$, on a une immersion fermée :

$$\mathrm{Spec}\left(A/f(\mathfrak{p}_{\overline{\rho}})\right) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(R^{\mathrm{ord}}). \tag{27}$$

Ces deux schémas ont même dimension : celle du premier est celle de A par ce qui précède, i.e. 4 (cf. § 2) et on a vu que c'est aussi celle du deuxième. Comme $\mathrm{Spec}(A/f(\mathfrak{p}_{\overline{\rho}})) = \mathrm{Spec}(A)$ est équidimensionnel (lemme 2.1), l'immersion fermée (27) est donc une union de composantes irréductibles de $\mathrm{Spec}(R^{\mathrm{ord}})$. Les propriétés de $\mathrm{Spec}(R^{\mathrm{ord}})$ rappelées au début donnent alors toutes les assertions de la proposition. $\square$

Lorsqu'il existe, on note dans la suite $\mathfrak{p}^i_{\overline{\rho}}$ $(i = 1, 2)$ l'idéal premier minimal de A tel que, dans la proposition 4.3.1(ii), $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ agit par un relevé de χ_i.

La $\mathcal{O}_E$-algèbre $R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})$ définie au § 3.1.3 peut aussi se voir comme l'image de $R^{\mathrm{ps}}(\mathrm{tr}\,\overline{\rho})$ dans $R^{\mathrm{ps}}(\mathrm{tr}\,\overline{\rho})[1/p]/(\cap\mathfrak{p})$ où l'intersection est prise sur les idéaux maximaux $\mathfrak{p}$ de $R^{\mathrm{ps}}(\mathrm{tr}\,\overline{\rho})[1/p]$ tels que la pseudo-représentation :

$$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \longrightarrow R^{\mathrm{ps}}(\mathrm{tr}\,\overline{\rho})[1/p]/\mathfrak{p} \tag{28}$$

est la trace d'une représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ de dimension 2 (sur une extension finie de E) de type $(\mathbf{v},\mathrm{t},\psi)$ contenant un réseau se réduisant sur $\overline{\rho}$. On définit le quotient $R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})_{\mathrm{irr}}$ de $R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})$ en prenant seulement l'intersection sur ceux des idéaux maximaux précédents tels que la pseudo-représentation (28) est la trace d'une représentation absolument irréductible. On définit de même les quotients $R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})_{\mathrm{réd}^i}$ de $R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})$ $(i = 1, 2)$ en prenant l'intersection sur ceux des $\mathfrak{p}$ tels que la pseudo-représentation (28) est la trace d'une représentation absolument réductible possédant une sous-représentation qui relève χ_i et sur laquelle $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ agit avec le poids de Hodge-Tate le plus haut. On définit de manière strictement analogue les quotients $R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho}^i)_{\mathrm{irr}}$ et $R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho}^i)_{\mathrm{réd}^i}$ de $R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho}^i) \cong R^{\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho}^i)$ (remarque 3.1.5).

Lemme 4.3.2. — *(i) On a des isomorphismes de $\mathcal{O}_E$-algèbres locales pour $i = 1, 2$:*

$$R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})_{\mathrm{irr}} \simeq R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho}^i)_{\mathrm{irr}}.$$

(ii) On a des isomorphismes de $\mathcal{O}_E$-algèbres locales pour $i = 1, 2$:

$$R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})_{\mathrm{réd}^i} \simeq R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho}^i)_{\mathrm{réd}^i}.$$

Démonstration. — (i) Par des arguments classiques ([**24**, Prop. 2.1]), une représentation irréductible de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ sur une extension finie E' de $\mathbb{Q}_p$ contient un réseau se réduisant sur $\overline{\rho}$ si et seulement si elle en contient aussi un se réduisant sur $\overline{\rho}^i$ (quitte à étendre E'). Autrement dit $R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})_{\mathrm{irr}}$ et $R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho}^i)_{\mathrm{irr}}$ sont définis en prenant l'image de $R^{\mathrm{ps}}(\mathrm{tr}\,\overline{\rho}) = R^{\mathrm{ps}}(\mathrm{tr}\,\overline{\rho}^i)$ dans le même quotient de $R^{\mathrm{ps}}(\mathrm{tr}\,\overline{\rho})[1/p]$. Ils sont donc égaux. (ii) se démontre de manière analogue. □

Lemme 4.3.3. — *Le morphisme naturel suivant de $R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})$-modules est un isomorphisme en chaque idéal premier minimal de $R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})$:*

$$R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho}) \quad \longrightarrow \quad R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})_{\mathrm{irr}} \;\oplus\; R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})_{\mathrm{réd}^1} \;\oplus\; R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})_{\mathrm{réd}^2}.$$

Autrement dit, les idéaux premiers minimaux de $R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})_{\mathrm{irr}}$, $R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})_{\mathrm{réd}^i}$, $i = 1, 2$ forment une partition des idéaux premiers minimaux de $R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})$.

Démonstration. — L'anneau $R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})$ étant plat sur $\mathcal{O}_E$, ses idéaux premiers minimaux sont les mêmes que ceux de $R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})[1/p]$ (voir preuve du lemme 2.1). Il suffit donc de montrer l'énoncé après avoir inversé p. L'anneau $R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})$ étant réduit, il suffit de montrer que les sous-schémas fermés $\mathrm{Spec}\left(R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})_{\mathrm{réd}^i}[1/p]\right)$ ($i = 1, 2$) et $\mathrm{Spec}\left(R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})_{\mathrm{irr}}[1/p]\right)$ forment une partition de l'ensemble des composantes irréductibles de $\mathrm{Spec}(R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})[1/p])$. Le sous-schéma fermé $\mathrm{Spec}\left(R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})_{\mathrm{réd}^i}[1/p]\right)$ ($i = 1, 2$) (si non vide) est une réunion de composantes irréductibles qui sont explicitement calculées dans [**16**, Lem.1.6.13] et qui sont toutes distinctes de celles du sous-schéma fermé $\mathrm{Spec}\left(R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})_{\mathrm{réd}^{3-i}}[1/p]\right)$. Rappelons que, $R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})[1/p]$ étant un anneau de Jacobson, ses points fermés sont denses pour la topologie de Zariski (ce que l'on abrège par "Zariski dense"). Appelons point fermé irréductible (resp. réductible) de $\mathrm{Spec}\left(R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})[1/p]\right)$ tout point fermé correspondant à une représentation absolument irréductible (resp. réductible) de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$. Alors par [**16**, Lem.1.6.13] et sa preuve tout point fermé réductible est un point fermé de $\mathrm{Spec}\left(R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})_{\mathrm{réd}^1}[1/p]\right)$ ou de $\mathrm{Spec}\left(R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})_{\mathrm{réd}^2}[1/p]\right)$. Soit X le sous-schéma fermé réunion des composantes irréductibles autres que celles de $\mathrm{Spec}\left(R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})_{\mathrm{réd}^i}[1/p]\right)$, $i = 1, 2$. L'adhérence dans X des points fermés réductibles étant de dimension strictement inférieure par définition de X et ce qui précède, le schéma X admet un ensemble Zariski dense de points fermés irréductibles, i.e. $X \subseteq \mathrm{Spec}\left(R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})_{\mathrm{irr}}[1/p]\right)$. Si l'inclusion est stricte, cela veut dire que $\mathrm{Spec}\left(R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})_{\mathrm{irr}}[1/p]\right)$ possède d'autres composantes irréductibles qui sont forcément des sous-schémas fermés des $\mathrm{Spec}\left(R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})_{\mathrm{réd}^i}[1/p]\right)$ par définition de X, et qui de plus doivent admettre un sous-ensemble Zariski dense de points fermés irréductibles par définition de

$R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})_{\mathrm{irr}}$. Comme tous les points fermés des composantes irréductibles de $\mathrm{Spec}\,\big(R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})_{\mathrm{réd}^i}[1/p]\big)$ sont des points réductibles, cela est impossible et achève la preuve. $\square$

On a un énoncé analogue au lemme 4.3.3 avec $\mathrm{Spec}\,\big(R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho}^i)\big)$ $(i=1,2)$ au lieu de $\mathrm{Spec}\,\big(R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})\big)$ que l'on laisse au lecteur.

Pour $*\in\{\mathrm{irr},\ \mathrm{réd}^1,\ \mathrm{réd}^2\}$, on pose comme dans [**16**, Lem.1.7.7] :

$$R^{\square,\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})_* \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Im}\Big(R^{\square,\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho}) \to R^{\square,\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})[1/p]\otimes_{R^{\mathrm{ps}}(\mathrm{tr}\,\overline{\rho})} R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})_*\Big).$$

Ce sont des $\mathcal{O}_E$-algèbres locales complètes de corps résiduel k_E et sans ϖ_E-torsion. On pose :

$$A_* \overset{\text{déf}}{=} R^{\square,\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})_*/\varpi_E\ ,\quad B_* \overset{\text{déf}}{=} R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})_*/\varpi_E.$$

On a des morphismes de k_E-algèbres locales $B_*\to A_*$. On a $\dim(B_*)=1=\dim(B)$ si $B_*\neq 0$ ([**16**, Lem.1.6.6]).

Lemme 4.3.4. — *(i) Le morphisme naturel suivant de $R^{\square,\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})$-modules est un isomorphisme en chaque idéal premier minimal de $R^{\square,\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})$:*

$$R^{\square,\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho}) \quad\longrightarrow\quad R^{\square,\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})_{\mathrm{irr}}\ \oplus\ R^{\square,\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})_{\mathrm{réd}^1}\ \oplus\ R^{\square,\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})_{\mathrm{réd}^2}.$$

(ii) L'image de l'immersion fermée $\mathrm{Spec}(A_{\mathrm{réd}^i})\hookrightarrow\mathrm{Spec}(A)$ *est contenue dans la composante irréductible associée à $\mathfrak{p}_{\overline{\rho}}^i$ $(i=1,2)$.*

Démonstration. — (i) Comme pour le lemme 4.3.3, il suffit de démontrer l'assertion après avoir inversé p. L'anneau $R^{\square,\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})[1/p]$ étant réduit, il suffit de montrer qu'une composante irréductible de $\mathrm{Spec}\,\big(R^{\square,\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})[1/p]\big)$ est une composante irréductible d'un et d'un seul des sous-schémas fermés $\mathrm{Spec}\,\big(R^{\square,\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})_{\mathrm{réd}^i}[1/p]\big)$ $(i=1,2)$ et $\mathrm{Spec}\,\big(R^{\square,\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})_{\mathrm{irr}}[1/p]\big)$. Ces sous-schémas sont l'image inverse des sous-schémas fermés $\mathrm{Spec}\,\big(R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})_{\mathrm{réd}^i}[1/p]\big)$ $(i=1,2)$, $\mathrm{Spec}\,\big(R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})_{\mathrm{irr}}[1/p]\big)$ de $\mathrm{Spec}\,\big(R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})[1/p]\big)$ et, par le lemme 4.3.3 (et sa preuve), leur union topologique est égale à $\mathrm{Spec}\,\big(R^{\square,\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})[1/p]\big)$. Toute composante irréductible de $\mathrm{Spec}\,\big(R^{\square,\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})[1/p]\big)$ est donc contenue dans un au moins de ces trois sous-schémas fermés. Il suffit de montrer qu'elle est contenue dans un au plus. Sinon, soit $Z\subseteq\mathrm{Spec}\,\big(R^{\square,\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})[1/p]\big)$ une composante irréductible qui est dans au moins deux de ces sous-schémas fermés. Son image schématique dans $\mathrm{Spec}\,\big(R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})[1/p]\big)$ est d'une part irréductible et d'autre part contenue par hypothèse dans l'intersection d'au moins deux des sous-schémas fermés du lemme 4.3.3 (en inversant p). Or, une telle intersection est de dimension <1, donc de dimension nulle, donc est une union finie de points fermés. On en déduit finalement que l'image schématique de Z est un point fermé de $\mathrm{Spec}\,\big(R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})[1/p]\big)$. Les points fermés de Z correspondent donc à des déformations galoisiennes de $\overline{\rho}$ (sur des extensions finie de E) de type $(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \psi)$ dont la trace est fixée. Cela implique :

$$\dim(Z) \leq 3 < \dim\left(R^{\square,\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})[1/p]\right) = 4.$$

Mais $\mathrm{Spec}\left(R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})[1/p]\right)$ étant équidimensionnel ([**18**, Th.1.2.1]), cela est impossible et une telle composante Z n'existe pas.
(ii) On suppose $\mathrm{Spec}(A_{\mathrm{réd}^i}) \neq \emptyset$ sinon il n'y a rien à montrer. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier minimal de $R^{\square,\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})_{\mathrm{réd}^i}$ et notons $\rho_{\mathfrak{p}}$ la représentation :

$$\rho_{\mathfrak{p}} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \longrightarrow \mathrm{GL}_2\left(R^{\square,\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})_{\mathrm{réd}^i}/\mathfrak{p}\right).$$

L'image de $\mathfrak{p}$ dans $\mathrm{Spec}\left(R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})_{\mathrm{réd}^i}\right)$ contient un idéal premier minimal $\mathfrak{q}$ de $R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})_{\mathrm{réd}^i}$. Or, par [**16**, Lem.1.6.13] et sa preuve, la pseudo-représentation $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \to R^{\mathrm{ps},\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})_{\mathrm{réd}^i}/\mathfrak{q}$ est la somme directe de deux caractères distincts $\widetilde{\chi}_1$, $\widetilde{\chi}_2$ tels que $\widetilde{\chi}_i$ relève χ_i modulo l'idéal maximal et $\widetilde{\chi}_i|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}})}$ relève $\chi_i|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}})}$ modulo ϖ_E. On en déduit en particulier en regardant sa trace que la représentation :

$$\rho_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{Frac}} \stackrel{\text{déf}}{=} \rho_{\mathfrak{p}} \otimes \mathrm{Frac}(R^{\square,\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})_{\mathrm{réd}^i}/\mathfrak{p})$$

est réductible. Soit $\rho_{\mathfrak{p}}^0$ l'intersection de $\rho_{\mathfrak{p}}$ avec une sous-représentation non nulle stricte de $\rho_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{Frac}}$ (on identifie ici et dans la suite une représentation avec son espace sous-jacent). On a une suite exacte courte de $R^{\square,\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})_{\mathrm{réd}^i}/\mathfrak{p}$-modules non nuls $0 \to \rho_{\mathfrak{p}}^0 \to \rho_{\mathfrak{p}} \to \rho_{\mathfrak{p}}/\rho_{\mathfrak{p}}^0 \to 0$ où $g \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ agit sur le module de gauche par la multiplication par l'image de $\widetilde{\chi}_1(g)$ et sur le module de droite par la multiplication par l'image de $\widetilde{\chi}_2(g)$, ou bien l'inverse (i.e. on échange $\widetilde{\chi}_1$ et $\widetilde{\chi}_2$). Comme $\rho_{\mathfrak{p}}$ se réduit sur $\overline{\rho} = \chi_1 \oplus \chi_2$, l'injection $\rho_{\mathfrak{p}}^0 \hookrightarrow \rho_{\mathfrak{p}}$ reste injective après réduction modulo l'idéal maximal (sinon g agirait sur son noyau par un caractère différent de celui avec lequel il agit sur la réduction de $\rho_{\mathfrak{p}}^0$ car $\chi_1 \neq \chi_2$). On en déduit que $\rho_{\mathfrak{p}}^0$ est un $R^{\square,\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})_{\mathrm{réd}^i}/\mathfrak{p}$-module libre de rang 1, facteur direct de $\rho_{\mathfrak{p}}$, i.e. que la déformation initiale $\rho_{\mathfrak{p}}$ est réductible. En spécialisant aux points fermés de $(R^{\square,\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})_{\mathrm{réd}^i}/\mathfrak{p})[1/p]$, on voit que c'est (l'image de) $\widetilde{\chi}_i$ qui doit y apparaître en sous-objet. Comme tout idéal premier contient un idéal premier minimal, la déformation $\rho_{\mathfrak{p}}$ est réductible avec $\widetilde{\chi}_i$ en sous-objet pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de $R^{\square,\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})_{\mathrm{réd}^i}$. Si l'on prend $\mathfrak{p}$ au-dessus de (p), c'est-à-dire $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A_{\mathrm{réd}^i})$, il suit de la proposition 4.3.1 et de sa preuve (et de ce qui précède) que $\mathfrak{p}$ contient $\mathfrak{p}_{\overline{\rho}}^i$, d'où l'énoncé (ii). □

Si $\mathfrak{p}_{\overline{\rho}}^i$ existe, on note $A_{\mathrm{irr},\mathfrak{p}_{\overline{\rho}}^i}$ le localisé de A_{irr} en l'idéal premier $\mathfrak{p}_{\overline{\rho}}^i$. Sinon on pose $A_{\mathrm{irr},\mathfrak{p}_{\overline{\rho}}^i} = 0$.

Proposition 4.3.5. — *(i) On a les égalités pour $i = 1, 2$:*

$$e(A_{\mathfrak{p}_{\overline{\rho}}^i}) = e(\mathfrak{m}_{A_{\mathfrak{p}_{\overline{\rho}}^i}}, A_{\mathrm{irr},\mathfrak{p}_{\overline{\rho}}^i}) + e(\mathfrak{m}_A, A_{\mathrm{réd}^i}).$$

(ii) On a les égalités pour $i = 1, 2$:

$$e(R^{\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho}^i)/\varpi_E) = e(B_{\mathrm{irr}}) + e(B_{\mathrm{réd}^i}).$$

(iii) On a les inégalités pour $i = 1, 2$:

$$e(\mathfrak{m}_{A_{\mathfrak{p}^i_{\overline{\rho}}}}, A_{\mathrm{irr}, \mathfrak{p}^i_{\overline{\rho}}}) \leq e(B_{\mathrm{irr}}) \quad et \quad e(\mathfrak{m}_A, A_{\mathrm{réd}^i}) \leq e(B_{\mathrm{réd}^i}).$$

Démonstration. — (i) On voit un idéal de A comme un idéal de $R^{\square,\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})$ via l'immersion fermée évidente. Si $i \neq j$, le lemme 4.3.4(ii) implique $(A_{\mathrm{réd}^j})_{\mathfrak{p}^i_{\overline{\rho}}} = 0$, c'est-à-dire :

$$(R^{\square,\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})_{\mathrm{réd}^j})_{\mathfrak{p}^i_{\overline{\rho}}} / \varpi_E (R^{\square,\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})_{\mathrm{réd}^j})_{\mathfrak{p}^i_{\overline{\rho}}} = 0$$

ce qui implique $(R^{\square,\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})_{\mathrm{réd}^j})_{\mathfrak{p}^i_{\overline{\rho}}} = 0$ par le lemme de Nakayama. Le lemme 4.3.4(i) implique que le morphisme de $R^{\square,\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})_{\mathfrak{p}^i_{\overline{\rho}}}$-modules de type fini sans ϖ_E-torsion :

$$R^{\square,\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})_{\mathfrak{p}^i_{\overline{\rho}}} \longrightarrow (R^{\square,\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})_{\mathrm{irr}})_{\mathfrak{p}^i_{\overline{\rho}}} \oplus (R^{\square,\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})_{\mathrm{réd}^i})_{\mathfrak{p}^i_{\overline{\rho}}}$$

est un isomorphisme en chaque idéal premier minimal de $R^{\square,\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})_{\mathfrak{p}^i_{\overline{\rho}}}$. Par [**16**, Prop.1.3.4(2)] (appliqué avec $x = \varpi_E$), on en déduit pour $i = 1, 2$:

$$e(A_{\mathfrak{p}^i_{\overline{\rho}}}) = e(\mathfrak{m}_{A_{\mathfrak{p}^i_{\overline{\rho}}}}, (A_{\mathrm{irr}})_{\mathfrak{p}^i_{\overline{\rho}}}) + e\big(\mathfrak{m}_{A_{\mathfrak{p}^i_{\overline{\rho}}}}, (A_{\mathrm{réd}^i})_{\mathfrak{p}^i_{\overline{\rho}}}\big). \tag{29}$$

Par [**19**, Th.14.7], la proposition 4.3.1(iii) et le lemme 4.3.4(ii), on a aussi :

$$\begin{aligned} e\big(\mathfrak{m}_{A_{\mathfrak{p}^i_{\overline{\rho}}}}, (A_{\mathrm{réd}^i})_{\mathfrak{p}^i_{\overline{\rho}}}\big) = \mathrm{long}_{A_{\mathfrak{p}^i_{\overline{\rho}}}} \big((A_{\mathrm{réd}^i})_{\mathfrak{p}^i_{\overline{\rho}}}\big) &= e(A/\mathfrak{p}^i_{\overline{\rho}}) \, \mathrm{long}_{A_{\mathfrak{p}^i_{\overline{\rho}}}} \big((A_{\mathrm{réd}^i})_{\mathfrak{p}^i_{\overline{\rho}}}\big) \\ &= e(\mathfrak{m}_A, A_{\mathrm{réd}^i}). \end{aligned} \tag{30}$$

Les égalités (29) et (30) donnent (i).
Le (ii) découle de l'analogue du lemme 4.3.3 pour $\overline{\rho}^i$, du lemme 4.3.2 et d'une preuve similaire à celle du (i).
Montrons la première inégalité de (iii). Si $(A_{\mathrm{irr}})_{\mathfrak{p}^i_{\overline{\rho}}} = 0$, le résultat est clair de sorte que l'on peut supposer $(A_{\mathrm{irr}})_{\mathfrak{p}^i_{\overline{\rho}}} \neq 0$, et donc $B_{\mathrm{irr}} \neq 0$ et $\dim(B_{\mathrm{irr}}) = 1$. Comme $\mathrm{Spec}(A_{\mathfrak{p}^i_{\overline{\rho}}})$ (resp. $\mathrm{Spec}(B)$) n'a qu'une seule composante irréductible et que $\mathrm{Spec}\big((A_{\mathrm{irr}})_{\mathfrak{p}^i_{\overline{\rho}}}\big)$ (resp. $\mathrm{Spec}(B_{\mathrm{irr}})$) en est un sous-schéma fermé de même dimension, on a forcément $\mathrm{Spec}\big((A_{\mathrm{irr}})_{\mathfrak{p}^i_{\overline{\rho}}}\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spec}(A_{\mathfrak{p}^i_{\overline{\rho}}})$ (resp. $\mathrm{Spec}(B_{\mathrm{irr}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spec}(B)$). En particulier $(A_{\mathrm{irr}})_{\mathfrak{p}^i_{\overline{\rho}}}$ (resp. B_{irr}) a aussi un seul idéal premier minimal. De plus, l'idéal premier minimal de $(A_{\mathrm{irr}})_{\mathfrak{p}^i_{\overline{\rho}}}$ est au-dessus de celui de B_{irr} par la proposition 4.3.1(iii). L'inégalité découle alors de [**16**, Prop.1.3.9]. La deuxième inégalité de (iii) se montre de manière analogue en utilisant que, si $\dim(A_{\mathrm{réd}^i}) < \dim(A)$, il n'y a rien à montrer et, si $\dim(A_{\mathrm{réd}^i}) = \dim(A)$, alors $A_{\mathrm{réd}^i}$ n'a qu'un seul idéal premier minimal par le lemme 4.3.4(ii). □

On renvoie au § 4.2 pour la définition de $m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma^i_{\overline{\rho}})$, $i = 1, 2$.

Corollaire 4.3.6. — *Si $\overline{\rho}$ est réductible scindée,* $\mathrm{Spec}\big(R^{\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})/\varpi_E\big)$ *a une ou deux composante(s) irréductible(s) C^i ($i=1$ ou $i=1,2$) qui est (ou sont) formellement lisse(s) et on a :*

$$m(C^i)=m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma^i_{\overline{\rho}}).$$

Démonstration. — Par la proposition 4.3.1, seules les égalités restent à vérifier. On a pour $i=1,2$ par la proposition 4.3.5 :

$$e(A_{\mathfrak{p}^i_{\overline{\rho}}})=e\big(\mathfrak{m}_{A_{\mathfrak{p}^i_{\overline{\rho}}}},(A_{\mathrm{irr}})_{\mathfrak{p}^i_{\overline{\rho}}}\big)+e(\mathfrak{m}_A,A_{\mathrm{réd}^i})\leq e(B_{\mathrm{irr}})+e(B_{\mathrm{réd}^i})=e(R^{\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho}^i)/\varpi_E).$$

Or par [**16**, Cor.2.3.2] appliqué à $\overline{\rho}^i$ on a :

$$e(R^{\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho}^i)/\varpi_E)=\mu_{\mathrm{gal}}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho}^i)=\mu_{\mathrm{aut}}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho}^i)=m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma^i_{\overline{\rho}}).$$

Comme $e(A_{\mathfrak{p}^i_{\overline{\rho}}})=\mathrm{long}_{A_{\mathfrak{p}^i_{\overline{\rho}}}}(A_{\mathfrak{p}^i_{\overline{\rho}}})$ par [**19**, Th.14.7], on en déduit les inégalités pour $i=1,2$:

$$\mathrm{long}_{A_{\mathfrak{p}^i_{\overline{\rho}}}}(A_{\mathfrak{p}^i_{\overline{\rho}}})\leq m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma^i_{\overline{\rho}}). \tag{31}$$

Mais par [**16**, Cor.2.3.2] appliqué cette fois à $\overline{\rho}$, on a en utilisant (4), (3) et la proposition 4.3.1 :

$$\mu_{\mathrm{gal}}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})=e(A)=e(A/\mathfrak{p}^1_{\overline{\rho}})\,\mathrm{long}_{A_{\mathfrak{p}^1_{\overline{\rho}}}}(A_{\mathfrak{p}^1_{\overline{\rho}}})+e(A/\mathfrak{p}^2_{\overline{\rho}})\,\mathrm{long}_{A_{\mathfrak{p}^2_{\overline{\rho}}}}(A_{\mathfrak{p}^2_{\overline{\rho}}})=$$
$$\mathrm{long}_{A_{\mathfrak{p}^1_{\overline{\rho}}}}(A_{\mathfrak{p}^1_{\overline{\rho}}})+\mathrm{long}_{A_{\mathfrak{p}^2_{\overline{\rho}}}}(A_{\mathfrak{p}^2_{\overline{\rho}}})=\mu_{\mathrm{aut}}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})=m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma^1_{\overline{\rho}})+m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma^2_{\overline{\rho}})$$

et on voit que les inégalités (31) forcent $m(C^i)=\mathrm{long}_{A_{\mathfrak{p}^i_{\overline{\rho}}}}(A_{\mathfrak{p}^i_{\overline{\rho}}})=m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma^i_{\overline{\rho}})$ ($i=1,2$). □

En particulier on obtient :

Corollaire 4.3.7. — *La conjecture 2.2 est vraie pour $F=\mathbb{Q}_p$ et $\overline{\rho}$ réductible scindée.*

5. Une famille d'exemples pour $F=\mathbb{Q}_{p^f}$

On montre par un calcul explicite basé sur les résultats de [**4**] que la conjecture 2.2 est vraie lorsque $k_\tau=2$ pour tout $\tau\in\mathcal{S}$, $\mathrm{t}=\eta\oplus\eta'$ où η,η' : $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F^{\mathrm{nr}})\to\mathcal{O}_E^{\times}$ sont deux caractères distincts modérément ramifiés qui s'étendent à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)$ et $\mathrm{End}_{k_E[\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)]}(\overline{\rho})=k_E$. On explicite au passage complètement l'anneau de déformations dans ce cas.

5.1. Rappels et compléments sur [4]. — On rappelle et précise certains résultats de [4].

On fixe deux caractères distincts $\eta, \eta' : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F^{\mathrm{nr}}) \to \mathcal{O}_E^{\times}$ qui s'étendent à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)$ et qui sont de plus modérément ramifiés. On pose $\mathrm{t} \overset{\text{déf}}{=} \eta \oplus \eta'$. Les conditions sur η, η' impliquent qu'ils se factorisent par $\mathrm{Gal}(F^{\mathrm{nr}}[\sqrt[q-1]{-p}]/F^{\mathrm{nr}}) = \mathrm{Gal}(F[\sqrt[q-1]{-p}]/F) \simeq \mathbb{F}_q^{\times}$ (cf. (1)) et qu'il y a donc une manière naturelle de les étendre à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)$ (via la théorie du corps de classes local, cela revient juste à envoyer $p \in \widehat{F}^{\times}$ vers 1). On a $\sigma(\mathrm{t}) = \mathrm{Ind}_{\mathrm{I}(\mathcal{O}_F)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)} \eta' \otimes \eta$ où $\eta' \otimes \eta : \mathrm{I}(\mathcal{O}_F) \to \mathcal{O}_E^{\times}$ est le caractère :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ pc & d \end{pmatrix} \mapsto \eta'(\overline{a})\eta(\overline{d})$$

et où $\mathrm{Ind}_{\mathrm{I}(\mathcal{O}_F)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)} \eta' \otimes \eta$ est le E-espace vectoriel des fonctions $f : \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F) \to E$ telles que :

$$f(kk') = (\eta' \otimes \eta)(k) f(k')$$

($k \in \mathrm{I}(\mathcal{O}_F)$, $k' \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)$) muni de l'action à gauche de $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)$ par translation à droite sur les fonctions. Cette action se factorise par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$.

On note de même $\mathrm{Ind}_{\mathrm{I}(\mathcal{O}_F)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)} \overline{\eta}' \otimes \overline{\eta}$ le k_E-espace vectoriel des fonctions $f : \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F) \to k_E$ telles que $f(kk') = (\overline{\eta}' \otimes \overline{\eta})(k) f(k')$ muni de la même action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$. C'est la réduction modulo ϖ_E du $\mathcal{O}_E$-réseau de $\sigma(t)$ des fonctions à valeurs dans $\mathcal{O}_E$. On note $\mathcal{D}(\mathrm{t})$ l'ensemble des poids de Serre qui sont des constituants de $\mathrm{Ind}_{\mathrm{I}(\mathcal{O}_F)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)} \overline{\eta}' \otimes \overline{\eta}$ (qui a tous ses constituants distincts). Les éléments de $\mathcal{D}(\mathrm{t})$ sont naturellement paramétrés par un sous-ensemble de cardinal > 2 de l'ensemble des parties de $\mathcal{S}$ qui contient $\emptyset$ et $\mathcal{S}$ (et qui, génériquement, est tout l'ensemble des parties de $\mathcal{S}$). Par exemple le socle de $\mathrm{Ind}_{\mathrm{I}(\mathcal{O}_F)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)} \overline{\eta}' \otimes \overline{\eta}$ (qui est irréductible) correspond à $\emptyset$ et son cosocle (irréductible aussi) correspond à $\mathcal{S}$. Pour plus de détails sur $\mathcal{D}(\mathrm{t})$ voir [**7**, § 2] ou [**4**, § 2].

On suppose maintenant $p > 2$. Soit $e \overset{\text{déf}}{=} q - 1$, S le complété p-adique de l'enveloppe aux puissances divisées de $\mathcal{O}_F[u]$ par rapport à l'idéal $(u^e + p)\mathcal{O}_F[u]$ compatibles avec les puissances divisées sur l'idéal $p\mathcal{O}_F[u]$ et $\mathrm{Fil}^j S \subseteq S$ ($j \geq 0$) le complété p-adique de l'idéal engendré par $\frac{(u^e+p)^i}{i!}$ pour $i \geq j$. On munit S de l'unique endomorphisme d'anneau injectif et continu φ tel que $\varphi(au^j) = \varphi(a)u^{pj}$ et de l'unique action continue $\mathcal{O}_F$-linéaire de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)$ telle que $g(u^j) = \left(\frac{g(\sqrt[e]{-p})}{\sqrt[e]{-p}}\right)^j u^j$ pour tout entier positif j et tout $g \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)$.

L'isomorphisme usuel $\mathcal{O}_F \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_E \overset{\sim}{\to} \prod_{\tau \in \mathcal{S}} \mathcal{O}_E$, $a \otimes b \mapsto (\tau(a)b)_{\tau \in \mathcal{S}}$ induit un isomorphisme $S \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_E \overset{\sim}{\to} \prod_{\tau \in \mathcal{S}} S^{\tau}$. Pour $\tau \in \mathcal{S}$ on note $\mathrm{Fil}^j S^{\tau}$ l'image de $\mathrm{Fil}^j S \otimes \mathcal{O}_E$ dans la composante S^{τ} et on pose $\widetilde{S}^{\tau} \overset{\text{déf}}{=} S^{\tau}/\mathrm{Fil}^p S^{\tau}$. On renvoie à [**4**, § 5] (et aux références données dans *loc.cit.*) pour le rappel de ce qu'est un

$\mathcal{O}_E$-module fortement divisible $\mathcal{M} = \prod_{\tau\in\mathcal{S}} \mathcal{M}^\tau$ de type $\eta\otimes\eta'$ (attention, dans *loc.cit.* on notait simplement S ce que l'on note ici S^τ mais tout est consistant). En particulier, un tel module est par définition tel que $\varphi(\bigwedge^2_{S^\tau}\mathcal{M}^\tau)$ engendre $p\mathcal{M}^{\tau\circ\varphi^{-1}}$ pour tout $\tau\in\mathcal{S}$, i.e. est de “poids parallèles 2”.

À un $\mathcal{O}_E$-module fortement divisible $\mathcal{M}$ de type $\eta\otimes\eta'$ on peut associer un groupe p-divisible sur $\mathcal{O}_F[\sqrt[q-1]{-p}]$ avec donnée de descente dont le module de Tate $\rho_{\mathcal{M}}$ est un $\mathcal{O}_E$-module libre de rang deux avec action linéaire continue de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)$. Si $\overline{\rho}_{\mathcal{M}} \overset{\text{déf}}{=} \rho_{\mathcal{M}}\otimes_{\mathcal{O}_E} k_E$, on a $\overline{\rho}_{\mathcal{M}} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fil}^1,\varphi_1}(\overline{\mathcal{M}}, \widehat{A}_{\mathrm{cris}}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{F}_p)^\vee(1)$ où $\overline{\mathcal{M}} \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{M}\otimes_{\mathcal{O}_E} k_E$ (voir [**4**]).

On fixe un plongement $\tau_0\in\mathcal{S}$ (rien ne dépend de ce choix dans la suite). Soit $(c_\tau)_{\tau\in\mathcal{S}}\in\{0,\cdots,p-1\}^f$ tel que $\eta = \eta'\prod_{\tau\in\mathcal{S}}[\omega_\tau^{c_\tau}]$. Pour $i,j\in\{0,\cdots,f-1\}$ on note $c_i \overset{\text{déf}}{=} c_{\tau_0\circ\varphi^i}$, $c \overset{\text{déf}}{=} \sum_{i=0}^{f-1} c_i p^i \in\{1,\cdots,q-2\}$ et $c^{(j)} \overset{\text{déf}}{=} \sum_{i=0}^{j-1} c_{f-(j-i)}p^i + \sum_{i=j}^{f-1} c_{i-j}p^i\in\{1,\cdots,q-2\}$. Par [**4**, Prop.7.1] les $\mathcal{O}_E$-modules fortement divisibles $\mathcal{M} = \prod_{\tau\in\mathcal{S}}\mathcal{M}^\tau$ de type $\eta\otimes\eta'$ et tels que $\overline{\rho}_{\mathcal{M}}$ est générique sont tous de la forme suivante :

(i) $\mathcal{M} = \mathcal{M}^{\tau_0}\times\mathcal{M}^{\tau_0\circ\varphi^{-1}}\times\cdots\times\mathcal{M}^{\tau_0\circ\varphi^{-(f-1)}}$ avec $\mathcal{M}^{\tau_0\circ\varphi^{-j}} = S^{\tau_0\circ\varphi^{-j}} e_\eta^{\tau_0\circ\varphi^{-j}} \oplus S^{\tau_0\circ\varphi^{-j}} e_{\eta'}^{\tau_0\circ\varphi^{-j}}$ et $\mathrm{Gal}(F[\sqrt[e]{-p}]/F)$ agissant sur $e_\eta^{\tau_0\circ\varphi^{-j}}$ (resp. $e_{\eta'}^{\tau_0\circ\varphi^{-j}}$) par η (resp. η')

(ii) pour tout $j\in\{0,\cdots,f-1\}$, on a une (et une seulement) des trois possibilités ci-dessous pour l'application $\varphi_1 : \mathrm{Fil}^1\mathcal{M}^{\tau_0\circ\varphi^{-j}} \to \mathcal{M}^{\tau_0\circ\varphi^{-(j+1)}}$ (où l'on remplace $\tau_0\circ\varphi^{-j}$ par j pour alléger l'écriture et où $\widetilde{\mathrm{Fil}}^1\mathcal{M}^j \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Fil}^1\mathcal{M}^j/\mathrm{Fil}^p S^j\mathcal{M}^j$) :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_j\in\mathcal{O}_E & & \\ \widetilde{\mathrm{Fil}}^1\mathcal{M}^j & = & \widetilde{S}^j(e_\eta^j + a_j u^{c^{(j)}} e_{\eta'}^j)\oplus\widetilde{S}^j(u^e+p)e_{\eta'}^j \\ \varphi_1(e_\eta^j + a_j u^{c^{(j)}} e_{\eta'}^j) & = & e_\eta^{j+1} \\ \varphi_1((u^e+p)e_{\eta'}^j) & = & e_{\eta'}^{j+1} \end{array}\right. \tag{32}$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_j\in\mathcal{O}_E & & \\ \widetilde{\mathrm{Fil}}^1\mathcal{M}^j & = & \widetilde{S}^j(u^e+p)e_\eta^j \oplus\widetilde{S}^j(e_{\eta'}^j + a_j u^{e-c^{(j)}} e_\eta^j) \\ \varphi_1((u^e+p)e_\eta^j) & = & e_\eta^{j+1} \\ \varphi_1(e_{\eta'}^j + a_j u^{e-c^{(j)}} e_\eta^j) & = & e_{\eta'}^{j+1} \end{array}\right. \tag{33}$$

(34)

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_j\in\mathcal{O}_E & & \\ 0<\mathrm{val}(a_j)<1 & & \\ \widetilde{\mathrm{Fil}}^1\mathcal{M}^j & = & \widetilde{S}^j(a_j e_\eta^j + u^{c^{(j)}} e_{\eta'}^j)\oplus\widetilde{S}^j(\frac{-p}{a_j}e_{\eta'}^j + u^{e-c^{(j)}} e_\eta^j) \\ \varphi_1(a_j e_\eta^j + u^{c^{(j)}} e_{\eta'}^j) & = & e_\eta^{j+1} \\ \varphi_1(\frac{-p}{a_j}e_{\eta'}^j + u^{e-c^{(j)}} e_\eta^j) & = & e_{\eta'}^{j+1} \end{array}\right.$$

en remplaçant e_η^{j+1} et $e_{\eta'}^{j+1}$ dans l'image de φ_1 quand $j = f-1$ par αe_η^0 et $\alpha' e_{\eta'}^0$ pour des $\alpha, \alpha' \in \mathcal{O}_E^\times$. On note I_η^0 (resp. $I_\eta^\times$) le sous-ensemble de $\mathcal{S}$ formé des $\tau_0 \circ \varphi^{-j}$ tel que $\mathcal{M}^j = \mathcal{M}^{\tau_0 \circ \varphi^{-j}}$ est comme en (32) avec de plus $\mathrm{val}(a_j) > 0$ (resp. avec de plus $\mathrm{val}(a_j) = 0$). On définit de manière analogue $I_{\eta'}^0$ et $I_{\eta'}^\times$ en considérant les $\tau_0 \circ \varphi^{-j}$ pour $\mathcal{M}^j$ comme en (33). Enfin on note II le sous-ensemble de $\mathcal{S}$ formé des $\tau_0 \circ \varphi^{-j}$ tel que $\mathcal{M}^j$ est comme en (34). On a $\mathcal{S} = I_\eta^0 \amalg I_\eta^\times \amalg I_{\eta'}^0 \amalg I_{\eta'}^\times \amalg II$ et on appelle *genre* de $\mathcal{M}$ le quintuplet $(I_\eta^0, I_\eta^\times, I_{\eta'}^0, I_{\eta'}^\times, II)$.

Le théorème suivant est essentiellement un corollaire des résultats de [**4**] :

Théorème 5.1.1. — *Soit $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F) \to \mathrm{GL}_2(k_E)$ une représentation continue générique (cf. § 2).*
(i) Il existe un $\mathcal{O}_E$-module fortement divisible $\mathcal{M}$ de type $\eta \otimes \eta'$ tel que $\overline{\rho} \cong \overline{\rho}_{\mathcal{M}}$ si et seulement si $\mathcal{D}(\mathrm{t}) \cap \mathcal{D}(\overline{\rho}) \neq \emptyset$.
(ii) Si $\mathcal{D}(\mathrm{t}) \cap \mathcal{D}(\overline{\rho}) \neq \emptyset$, alors tous les $\mathcal{O}_E$-modules fortement divisibles $\mathcal{M}$ de type $\eta \otimes \eta'$ tels que $\overline{\rho} \cong \overline{\rho}_{\mathcal{M}}$ ont même genre (dépendant de $\overline{\rho}$ et de η, η').

Démonstration. — On démontre d'abord le (ii). Par [**4**, Prop.4.3] il existe un unique $J_{\overline{\rho}}^{\min} \subseteq \mathcal{S}$ et un unique $J_{\overline{\rho}}^{\max} \subseteq \mathcal{S}$ contenant $J_{\overline{\rho}}^{\min}$ tels que $\mathcal{D}(\mathrm{t}) \cap \mathcal{D}(\overline{\rho})$ est exactement le sous-ensemble de $\mathcal{D}(\mathrm{t})$ des éléments paramétrés par les $J \subseteq \mathcal{S}$ tels que $J_{\overline{\rho}}^{\min} \subseteq J \subseteq J_{\overline{\rho}}^{\max}$. Si $\overline{\rho}$ est semi-simple, posons $J_{\overline{\rho}} \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{S}$. Si $\overline{\rho}$ est réductible non-scindée, il existe un unique caractère continu $\chi : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F^{\mathrm{nr}}) \to k_E^\times$ qui s'étend à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)$ tel que $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F^{\mathrm{nr}})}$ s'écrit comme au (i) du § 2. La représentation $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F^{\mathrm{nr}})} \otimes \chi^{-1}$ est la restriction à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F^{\mathrm{nr}})$ d'une extension non scindée de 1 par $\prod_{\tau \in \mathcal{S}} \omega_\tau^{r_\tau+1}$ (pour des r_τ comme au (i) du § 2) et les conditions de généricité sur les r_τ font que cette extension est de la forme $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Fil}^{\cdot},\varphi_{\cdot}}(M, A_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}_p)$ où $M = \prod_{\tau \in \mathcal{S}} M^\tau$ est un objet réductible de la catégorie de Fontaine-Laffaille. On définit alors $J_{\overline{\rho}} \subset \mathcal{S}$ comme l'ensemble des τ où le "paramètre d'extension en τ" est nul (à un décalage près), voir [**4**, (17)] et [**4**, (18)] pour une formule précise. De plus, par [**4**, Prop.4.3], on a $J_{\overline{\rho}}^{\max} \backslash J_{\overline{\rho}}^{\min} \subseteq J_{\overline{\rho}} \circ \varphi^{-1}$ où $J \circ \varphi^{-1} \overset{\text{déf}}{=} \{\tau \circ \varphi^{-1}, \tau \in J\}$ si $J \subseteq \mathcal{S}$. Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{O}_E$-module fortement divisible de type $\eta \otimes \eta'$ tel que $\overline{\rho}_{\mathcal{M}} \cong \overline{\rho}$, il résulte de [**4**, Th.8.1(ii)] et [**4**, (26)] que $I_\eta \circ \varphi^{-1} = J_{\overline{\rho}}^{\min}$, $II \circ \varphi^{-1} = J_{\overline{\rho}}^{\max} \backslash J_{\overline{\rho}}^{\min}$ et de [**4**, Th.8.1(ii)] et [**4**, Prop.7.3] que $I_\eta^0 \amalg I_{\eta'}^0 \amalg II = J_{\overline{\rho}}$. Le genre de $\mathcal{M}$ est donc :

$$\begin{aligned}(35)\quad \Big((J_{\overline{\rho}}^{\min} \circ \varphi) \cap J_{\overline{\rho}}, (J_{\overline{\rho}}^{\min} \circ \varphi) \backslash ((J_{\overline{\rho}}^{\min} \circ \varphi) \cap J_{\overline{\rho}}), J_{\overline{\rho}} \backslash ((J_{\overline{\rho}}^{\max} \circ \varphi) \cap J_{\overline{\rho}}),&\\ \mathcal{S} \backslash ((J_{\overline{\rho}}^{\min} \circ \varphi) \cup J_{\overline{\rho}}), (J_{\overline{\rho}}^{\max} \backslash J_{\overline{\rho}}^{\min}) \circ \varphi\Big)&\end{aligned}$$

qui ne dépend que de $\overline{\rho}$ et de η, η'. Notons que la donnée du quintuplet (35) est équivalente à celle du triplet $(J_{\overline{\rho}}^{\min}, J_{\overline{\rho}}^{\max}, J_{\overline{\rho}})$.
On démontre (i). Si $\overline{\rho}$ provient d'un $\mathcal{M}$, alors le résultat est [**4**, Cor.8.2]. On suppose $\mathcal{D}(\mathrm{t}) \cap \mathcal{D}(\overline{\rho}) \neq \emptyset$. Soit $J_{\overline{\rho}}^{\min} \subseteq J_{\overline{\rho}}^{\max} \subseteq \mathcal{S}$ et $J_{\overline{\rho}}$ comme ci-dessus. Au triplet $(J_{\overline{\rho}}^{\min}, J_{\overline{\rho}}^{\max}, J_{\overline{\rho}})$, on peut associer comme dans [**4**, § 4] des f-uplets $\lambda =$

$(\lambda_j(x))_{0\leq j\leq f-1}$ avec $\lambda_j(x)\in\{x,x+1,x+2,p-3-x,p-2-x,p-1-x\}$ si $\overline{\rho}$ est réductible ou si $j\neq 0$ et $\lambda_0(x)\in\{x-1,x,x+1,p-2-x,p-1-x,p-x\}$ si $\overline{\rho}$ est irréductible, et vérifiant les conditions de [**4**, § 4] et les formules [**4**, (19)] et [**4**, (20)]. Par [**4**, Prop.4.4] (plus exactement sa preuve), il existe un seul tel f-uplet lorsque $\overline{\rho}$ est réductible non scindée et il en existe deux lorsque $\overline{\rho}$ est semi-simple et, si l'on pose pour un tel f-uplet :

$$r_{\tau_0\circ\varphi^j}\overset{\text{déf}}{=}\lambda_j^{-1}(c_j)\quad\text{pour}\quad j\in\{0,\cdots,f-1\}\tag{36}$$

et $\chi\overset{\text{déf}}{=}\overline{\eta}'\det^{-e(\lambda)((r_\tau)_{\tau\in\mathcal{S}})}$ (avec les notations de [**4**, § 4]), on a alors :

(i) $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F^{\mathrm{nr}})}\cong\begin{pmatrix}\prod_{\tau\in\mathcal{S}}\omega_\tau^{r_\tau+1} & * \\ 0 & 1\end{pmatrix}\otimes\chi$ si $\overline{\rho}$ est réductible

(ii) $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F^{\mathrm{nr}})}\cong\begin{pmatrix}\prod_{\tau\in\mathcal{S}_0}\omega_\tau^{r_\tau+1} & 0 \\ 0 & \prod_{\tau\in\mathcal{S}_0}\omega_\tau^{q(r_\tau+1)}\end{pmatrix}\otimes\chi$ si $\overline{\rho}$ est irréductible

où $\mathcal{S}_0=\{\tau_0',\tau_0'\circ\varphi,\cdots,\tau_0'\circ\varphi^{f-1}\}$, τ_0' étant l'un quelconque des deux plongements $\mathbb{F}_{q^2}\hookrightarrow k_E$ relevant le plongement τ_0 fixé ci-dessus (lorsque $\overline{\rho}$ est semi-simple, les deux f-uplets λ donnent les deux manières d'écrire $\overline{\rho}$ dans ce cas, voir [**4**, Rem.4.5(ii)]). Soit maintenant $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_E$-module fortement divisible de type $\eta\otimes\eta'$ de la forme (ii) ci-dessus avec $(I_\eta^0,I_\eta^\times,I_{\eta'}^0,I_{\eta'}^\times,II)$ donné par (35). Supposons d'abord $\overline{\rho}$ semi-simple (i.e. $I_\eta^\times\amalg I_{\eta'}^\times=\mathcal{S}\backslash J_{\overline{\rho}}=\emptyset$). Alors un examen de la preuve de [**4**, Th.8.1] montre que dans ce cas le même calcul marche encore et donne $\overline{\rho}_{\mathcal{M}}|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F^{\mathrm{nr}})}=\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F^{\mathrm{nr}})}$ (et implique en particulier que $\overline{\rho}_{\mathcal{M}}$ est automatiquement générique, ce que l'on ignorait *a priori*). Supposons $\overline{\rho}$ réductible non scindée (i.e. $I_\eta^\times\amalg I_{\eta'}^\times=\mathcal{S}\backslash J_{\overline{\rho}}\neq\emptyset$). Un exercice élémentaire de combinatoire montre qu'il existe une unique suite $(\eta_\tau)_{\tau\in\mathcal{S}}$ avec $\eta_\tau\in\{\eta,\eta'\}$ vérifiant pour $\tau\in\mathcal{S}$:

$$\left\{\begin{array}{lclcc}\eta_{\tau\circ\varphi^{-1}} & = & \eta' & si & \tau\in I_\eta^\times\\ \eta_{\tau\circ\varphi^{-1}} & = & \eta & si & \tau\in I_{\eta'}^\times\\ \eta_{\tau\circ\varphi^{-1}} & = & \eta_\tau^{\mathrm{c}} & si & \tau\in II\\ \eta_{\tau\circ\varphi^{-1}} & = & \eta_\tau & si & \tau\in I_\eta^0\amalg I_{\eta'}^0\end{array}\right.\tag{37}$$

où $\eta_\tau^{\mathrm{c}}\overset{\text{déf}}{=}\eta$ (resp. $\eta_\tau^{\mathrm{c}}\overset{\text{déf}}{=}\eta'$) si $\eta_\tau=\eta'$ (resp. $\eta_\tau=\eta$). Le même calcul que celui de la preuve de [**4**, Lem.6.3] montre que $\overline{\mathcal{M}}$ possède alors un sous-φ_1-module filtré (avec filtration induite) facteur direct comme $S\otimes_{\mathbb{Z}_p}k_E$-module qui est :

$$\left(\overline{S}^{\tau_0\circ\varphi^{-j}}\varphi_1\big(u^{h_j}\overline{e}^j_{\eta_{\tau_0\circ\varphi^{-j}}}\big)\right)_{0\leq j\leq f-1}$$

où $h_j\overset{\text{déf}}{=}c^{(j)}$ si $\eta_{\tau_0\circ\varphi^{-j}}=\eta'$ et $\eta_{\tau_0\circ\varphi^{-j-1}}=\eta$, $h_j\overset{\text{déf}}{=}e-c^{(j)}$ si $\eta_{\tau_0\circ\varphi^{-j}}=\eta$ et $\eta_{\tau_0\circ\varphi^{-j-1}}=\eta'$, $h_j\overset{\text{déf}}{=}e$ si $\tau_0\circ\varphi^{-j}\in I_{\eta^{\mathrm{c}}_{\tau_0\circ\varphi^{-j}}}$ et $h_j\overset{\text{déf}}{=}0$ si $\tau_0\circ\varphi^{-j}\in I^0_{\eta_{\tau_0\circ\varphi^{-j}}}$. Plus précisément, un examen de la preuve de [**4**, Lem.6.3(ii)] montre que sont utilisées de manière cruciale certaines bornes sur les entiers c_j, bornes qui sont ici vérifiées car elles découlent automatiquement de (36) et de la généricité de $\overline{\rho}$. La suite de la preuve de [**4**, Th.8.1] dans ce cas est alors la même et donne :

$$\overline{\rho}_{\mathcal{M}}|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F^{\mathrm{nr}})} \cong \begin{pmatrix} \prod_{\tau\in\mathcal{S}}\omega_\tau^{r_\tau+1} & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \chi$$

avec de plus $J_{\overline{\rho}_{\mathcal{M}}} = J_{\overline{\rho}}$ (en particulier $\overline{\rho}_{\mathcal{M}}$ est automatiquement générique). Dans tous les cas de $\overline{\rho}$, quitte à modifier α et α' sur $\mathcal{M}$, on voit donc que l'on peut choisir $\mathcal{M}$ tel que $\overline{\rho}^{\mathrm{ss}} = \overline{\rho}^{\mathrm{ss}}_{\mathcal{M}}$. Cela achève la preuve de (i) quand $\overline{\rho}$ est semi-simple. Lorsque $\overline{\rho}$ est réductible non scindée, la proposition 5.1.2 ci-dessous montre que l'on peut toujours modifier les a_τ sur $\mathcal{M}$ pour $\tau \in I_\eta^\times \amalg I_{\eta'}^\times$ (en restant dans $\mathcal{O}_E^\times$) de telle sorte que l'on ait $\overline{\rho} = \overline{\rho}_{\mathcal{M}}$. □

Proposition 5.1.2. — *Soit* $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F) \to \mathrm{GL}_2(k_E)$ *une représentation continue générique réductible non scindée et soit* $\mathcal{M}$ *un* $\mathcal{O}_E$*-module fortement divisible de type* $\eta \otimes \eta'$ *et de genre (35) tel que* $\overline{\rho}^{\mathrm{ss}} = \overline{\rho}^{\mathrm{ss}}_{\mathcal{M}}$*. Alors, quitte à modifier les* a_τ *sur* $\mathcal{M}$ *pour* $\tau \in I_\eta^\times \amalg I_{\eta'}^\times$*, on a* $\overline{\rho} \cong \overline{\rho}_{\mathcal{M}}$*.*

Démonstration. — Notons que $\overline{\rho}^{\mathrm{ss}} = \overline{\rho}^{\mathrm{ss}}_{\mathcal{M}}$ implique $\overline{\rho}_{\mathcal{M}}$ générique. On note :

$$\overline{\rho} \otimes \chi^{-1} \cong \begin{pmatrix} \mathrm{nr}(A)\prod_{\tau\in\mathcal{S}}\omega_\tau^{r_\tau+1} & * \\ 0 & \mathrm{nr}(A') \end{pmatrix}$$

pour des $A, A' \in k_E^\times$ (uniques) et des $r_\tau \in \{0, \cdots, p-3\}$ (uniques) avec $(r_\tau)_{\tau\in\mathcal{S}} \notin \{(0,\cdots,0),(p-3,\cdots,p-3)\}$. On note $(I_\eta^0, I_\eta^\times, I_{\eta'}^0, I_{\eta'}^\times, II)$ le genre (35) associé à $\overline{\rho}$. Par la preuve du théorème 5.1.1(i), on a :

$$\overline{\rho}_{\mathcal{M}} \otimes \chi^{-1} \cong \begin{pmatrix} \mathrm{nr}(A)\prod_{\tau\in\mathcal{S}}\omega_\tau^{r_\tau+1} & *_{\mathcal{M}} \\ 0 & \mathrm{nr}(A') \end{pmatrix}$$

mais avec une extension $*_{\mathcal{M}}$ éventuellement différente de $*$. Soit $(\eta_\tau)_{\tau\in\mathcal{S}}$ comme en (37). Le module de Fontaine-Laffaille $M = M^{\tau_0} \times M^{\tau_0\circ\varphi^{-1}} \times \cdots \times M^{\tau_0\circ\varphi^{-(f-1)}}$ tel que $\overline{\rho}_{\mathcal{M}} \otimes \chi^{-1} \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fil}^{\cdot},\varphi^{\cdot}}(M, A_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}_p)$ est donné explicitement à la fin de la preuve de [**4**, Prop.7.3] par (on note j au lieu de $\tau_0 \circ \varphi^{-j}$) :

$\mathrm{Fil}^0 M^j = M^j$, $\left\{\begin{array}{lcl} \mathrm{Fil}^{r_j+1}M^j & = & k_E f^j \quad \text{si} \quad \eta_j = \eta \\ \mathrm{Fil}^{r_j+1}M^j & = & k_E e^j \quad \text{si} \quad \eta_j = \eta' \end{array}\right.$, $\mathrm{Fil}^{r_j+2}M^j = 0$ et :

$$
\begin{array}{ll}
\left\{\begin{array}{lcl} \varphi(e^j) & = & e^{j+1} \\ \varphi_{r_j+1}(f^j) & = & f^{j+1} - \overline{a}_j e^{j+1} \end{array}\right. & \text{si} \quad j \in I_\eta^0 \amalg I_{\eta'} \text{ et } \eta_j = \eta \\
\left\{\begin{array}{lcl} \varphi(e^j) & = & e^{j+1} - \overline{a}_j f^{j+1} \\ \varphi_{r_j+1}(f^j) & = & f^{j+1} \end{array}\right. & \text{si} \quad j \in I_\eta^\times \text{ et } \eta_j = \eta \\
\left\{\begin{array}{lcl} \varphi(e^j) & = & f^{j+1} \\ \varphi_{r_j+1}(f^j) & = & e^{j+1} \end{array}\right. & \text{si} \quad j \in II \text{ et } \eta_j = \eta \\
\left\{\begin{array}{lcl} \varphi(f^j) & = & f^{j+1} \\ \varphi_{r_j+1}(e^j) & = & e^{j+1} - \overline{a}_j f^{j+1} \end{array}\right. & \text{si} \quad j \in I_{\eta'}^0 \amalg I_\eta \text{ et } \eta_j = \eta' \\
\left\{\begin{array}{lcl} \varphi(f^j) & = & f^{j+1} - \overline{a}_j e^{j+1} \\ \varphi_{r_j+1}(e^j) & = & e^{j+1} \end{array}\right. & \text{si} \quad j \in I_{\eta'}^\times \text{ et } \eta_j = \eta' \\
\left\{\begin{array}{lcl} \varphi(f^j) & = & e^{j+1} \\ \varphi_{r_j+1}(e^j) & = & f^{j+1} \end{array}\right. & \text{si} \quad j \in II \text{ et } \eta_j = \eta'
\end{array}
$$

en remplaçant e^{j+1} et f^{j+1} par $\overline{\alpha}'^{-1}e^0$ et $\overline{\alpha}^{-1}f^0$ si $j = f-1$ et $\eta_0 = \eta$, par $\overline{\alpha}^{-1}e^0$ et $\overline{\alpha}'^{-1}f^0$ si $j = f-1$ et $\eta_0 = \eta'$ (le calcul dans la preuve de [**4**, Prop.7.3] suppose $\eta_0 = \eta$ mais donne le même résultat par symétrie si $\eta_0 = \eta'$). Après un changement de base évident, on obtient le module (la filtration est implicite) :

$$
\begin{array}{lll}
\left\{\begin{array}{lcl} \varphi(E^j) & = & E^{j+1} \\ \varphi_{r_j+1}(F^j) & = & F^{j+1} - \overline{a}_j E^{j+1} \end{array}\right. & \text{si} & \left\{\begin{array}{lcl} j \in I_\eta^0 \amalg I_{\eta'} & \text{et} & \eta_j = \eta \\ j \in I_{\eta'}^0 \amalg I_\eta & \text{et} & \eta_j = \eta' \end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{lcl} \varphi(E^j) & = & -\overline{a}_j E^{j+1} \\ \varphi_{r_j+1}(F^j) & = & \overline{a}_j^{-1} F^{j+1} + E^{j+1} \end{array}\right. & \text{si} & \left\{\begin{array}{lcl} j \in I_\eta^\times & \text{et} & \eta_j = \eta \\ j \in I_{\eta'}^\times & \text{et} & \eta_j = \eta' \end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{lcl} \varphi(E^j) & = & E^{j+1} \\ \varphi_{r_j+1}(F^j) & = & F^{j+1} \end{array}\right. & \text{si} & j \in II
\end{array}
$$

en remplaçant E^{j+1} et F^{j+1} par $\overline{\alpha}'^{-1}E^0$ et $\overline{\alpha}^{-1}F^0$ si $j = f-1$ et $\eta_0 = \eta$, par $\overline{\alpha}^{-1}E^0$ et $\overline{\alpha}'^{-1}F^0$ si $j = f-1$ et $\eta_0 = \eta'$. Posons $I^\times \overset{\text{déf}}{=} \{\tau \in I_\eta^\times,\ \eta_\tau = \eta\} \amalg \{\tau \in I_{\eta'}^\times,\ \eta_\tau = \eta'\} \subseteq \mathcal{S}$, en remplaçant E^j et F^j pour $j \in \{1, \cdots, f-1\}$ par respectivement :

$$\Big(\prod_{\substack{0 \leq i \leq j-1 \\ \tau_0 \circ \varphi^{-i} \in I^\times}} (-\overline{a}_i)\Big) E^j \text{ et } \Big(\prod_{\substack{0 \leq i \leq j-1 \\ \tau_0 \circ \varphi^{-i} \in I^\times}} (\overline{a}_i^{-1})\Big) F^j,$$

on obtient finalement que le module de Fontaine-Laffaille $M = \prod_{j \in \{0, \cdots, f-1\}} M^j$ tel que $\overline{\rho}_{\mathcal{M}} \otimes \chi^{-1} \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fil}^\cdot, \varphi^\cdot}(M, A_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}_p)$ est donné par $M^j = k_E E^j \oplus k_E F^j$ avec pour $j \in \{0, \cdots, f-2\}$ (la filtration est implicite) :

$$
\left\{\begin{array}{lcl} \varphi(E^j) & = & E^{j+1} \\ \varphi_{r_j+1}(F^j) & = & F^{j+1} - \overline{a}_j^{\pm 1}\Big(\prod_{\substack{0 \leq i \leq j-1 \\ \tau_0 \circ \varphi^{-i} \in I^\times}} (-\overline{a}_i^{-2})\Big) E^{j+1} \end{array}\right. \tag{38}
$$

(le facteur $\prod_{\substack{0\leq i\leq j-1\\ \tau_0\circ\varphi^{-i}\in I^\times}}(-\overline{a}_i^{-2})$ étant 1 si $j=0$) et pour $j=f-1$:

$$(39)\quad \begin{cases} \varphi(E^{f-1}) & = & A'^{-1}E^0 \\ \varphi_{r_{f-1}+1}(F^{f-1}) & = & A^{-1}F^0-\overline{a}_{f-1}^{\pm 1}\Big(\displaystyle\prod_{\substack{0\leq i\leq f-2\\ \tau_0\circ\varphi^{-i}\in I^\times}}(-\overline{a}_i^{-2})\Big)A'^{-1}E^0 \end{cases}$$

avec en facteur à droite $\overline{a}_j^{-1}$ si $j\in I^\times$, $\overline{a}_j$ si $j\notin I^\times$ et où :

$$(40)\quad \begin{cases} A' & \overset{\text{déf}}{=} & \overline{\alpha}'\displaystyle\prod_{\tau_0\circ\varphi^{-i}\in I^\times}(-\overline{a}_i^{-1}) & \text{et} & A & \overset{\text{déf}}{=} & \overline{\alpha}\displaystyle\prod_{\tau_0\circ\varphi^{-i}\in I^\times}\overline{a}_i & \text{si} & \eta_0=\eta \\ A' & \overset{\text{déf}}{=} & \overline{\alpha}\displaystyle\prod_{\tau_0\circ\varphi^{-i}\in I^\times}(-\overline{a}_i^{-1}) & \text{et} & A & \overset{\text{déf}}{=} & \overline{\alpha}'\displaystyle\prod_{\tau_0\circ\varphi^{-i}\in I^\times}\overline{a}_i & \text{si} & \eta_0=\eta'. \end{cases}$$

En faisant varier les a_j pour $\tau_0\circ\varphi^{-j}\in I_\eta^\times\amalg I_{\eta'}^\times$, on voit sur les formules (38) et (39) que l'on obtient comme cela *toutes* les extensions possibles de $\mathrm{nr}(A')$ par $\mathrm{nr}(A)\prod_{\tau\in\mathcal{S}}\omega_\tau^{r_\tau+1}$ telles que $J_{\overline{\rho}_\mathcal{M}}=J_{\overline{\rho}}$. En particulier, il existe des valeurs de ces a_j qui donnent l'extension $*$ dans $\overline{\rho}\otimes\chi^{-1}$. □

5.2. Anneaux de déformations explicites. — On calcule $R^\psi(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})$ lorsque $\mathbf{v}=(0,2)_{\tau\in\mathcal{S}}$, $\mathrm{t}=\eta\oplus\eta'$ et $\overline{\rho}$ est générique telle que $\mathrm{End}_{k_E[\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)]}(\overline{\rho})=k_E$. On en déduit une preuve de la conjecture 2.2 dans ce cas particulier.

On conserve les notations du § 5.1 et on suppose $p>2$. On note $\mathbf{v}\overset{\text{déf}}{=}(0,2)_{\tau\in\mathcal{S}}$ et on fixe un caractère continu $\psi:\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)\to\mathcal{O}_E^\times$ tel que $\psi|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F^{\mathrm{nr}})}=\det\mathrm{t}=\eta\eta'$. Si $\overline{\rho}:\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)\to\mathrm{GL}_2(k_E)$ est une représentation continue générique telle que $\mathcal{D}(\mathrm{t})\cap\mathcal{D}(\overline{\rho})\neq\emptyset$, on définit les sous-ensembles $J_{\overline{\rho}}^{\min}$, $J_{\overline{\rho}}^{\max}$ et $J_{\overline{\rho}}$ de $\mathcal{S}$ comme au début de la preuve du théorème 5.1.1. On définit également la partition $\mathcal{S}=I_\eta^0\amalg I_\eta^\times\amalg I_{\eta'}^0\amalg I_{\eta'}^\times\amalg II$ associée à $\overline{\rho}$ en (35).

Théorème 5.2.1. — *Soit $\overline{\rho}:\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)\to\mathrm{GL}_2(k_E)$ une représentation continue générique telle que* $\det\overline{\rho}=\overline{\psi}\omega$ *et* $\mathrm{End}_{k_E[\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)]}(\overline{\rho})=k_E$.
(i) Si $\mathcal{D}(\mathrm{t})\cap\mathcal{D}(\overline{\rho})=\emptyset$, alors $R^\psi(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})=0$.
(ii) Si $\mathcal{D}(\mathrm{t})\cap\mathcal{D}(\overline{\rho})\neq\emptyset$, alors $R^\psi(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})$ est un anneau de séries formelles à $(f-|II|)$-variables sur l'anneau $\mathcal{O}_E[[X_\tau,Y_\tau,\tau\in II]]/(X_\tau Y_\tau-p,\tau\in II)$.

Démonstration. — On se permet ici de ne donner que les grandes lignes de la preuve pour éviter trop de détails techniques. Par l'application "module de Tate : $\mathcal{M}\mapsto\rho_\mathcal{M}$", rappelons (cf. [**25**, Prop.4.13] par exemple) qu'un $\mathcal{O}_{E'}$-module fortement divisible $\mathcal{M}$ de type $\eta\otimes\eta'$ tel que $\det\rho_\mathcal{M}=\psi\varepsilon$ et $\overline{\rho}_\mathcal{M}\cong\overline{\rho}$ est la même chose qu'une déformation de $\overline{\rho}$ de type $(\mathbf{v},\mathrm{t},\psi)$ sur l'anneau des entiers $\mathcal{O}_{E'}$ d'une extension finie E' de E. En particulier, le (i) découle du théorème 5.1.1(i). Supposons donc $\mathcal{D}(\mathrm{t})\cap\mathcal{D}(\overline{\rho})\neq\emptyset$. Comme $\det\rho_\mathcal{M}=\eta\eta'\,\mathrm{nr}(\alpha\alpha'(-1)^{|II|})\varepsilon$ (calcul facile), la condition $\det \rho_{\mathcal{M}} = \psi\varepsilon$ est équivalente à :

$$(\eta\eta')^{-1}\psi = \mathrm{nr}(\alpha\alpha'(-1)^{|II|}). \tag{41}$$

Comme dans [**6**] ou [**25**], on construit explicitement ci-dessous un module fortement divisible au sens de [**25**, Def.4.1] (sans l'opérateur N, inutile ici) de type $\eta \otimes \eta'$ à coefficients dans un anneau de séries formelles à $(f - |II|)$-variables sur l'anneau $\mathcal{O}_E[[X_\tau, Y_\tau, \tau \in II]]/(X_\tau Y_\tau - p)_{\tau\in II}$.
Supposons d'abord $\overline{\rho}$ irréductible. Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{O}_{E'}$-module fortement divisible de type $\eta \otimes \eta'$ et de poids parallèle 2 tel que $\overline{\rho}_{\mathcal{M}} \cong \overline{\rho}$, alors $\mathcal{M}$ est de genre (35) par le théorème 5.1.1(ii). En particulier, par [**4**, Th.8.1(i)] on a $|II|$ impair, $\mathrm{val}(a_\tau) > 0$ pour $\tau \notin II$ et $0 < \mathrm{val}(a_\tau) < 1$ pour $\tau \in II$. De plus, par [**4**, Prop.5.4(iii)] (et [**4**, Rem.5.5(iv)]), un changement de base sur $\mathcal{M}$ permet de supposer $\alpha = 1$ sur $\mathcal{M}$. Toujours par [**4**, Prop.5.4(iii)] (plus exactement la preuve de cette proposition), la condition $\alpha = 1$ fait alors que les autres paramètres a_τ ($\tau \in \mathcal{S}$) et α' de $\mathcal{M}$ sont bien déterminés (i.e. pas seulement leur valuation). Si de plus $\det \rho_{\mathcal{M}} = \psi\varepsilon$, alors α' est uniquement déterminé par (41). Réciproquement, tout $\mathcal{O}_{E'}$-module fortement divisible $\mathcal{M}$ (de type $\eta\otimes\eta'$ et de poids parallèle 2) de genre (35) et avec $\alpha = 1$ et α' satisfaisant (41) est tel que $\rho_{\mathcal{M}}$ est une déformation de $\overline{\rho}$ de type $(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \psi)$ sur $\mathcal{O}_{E'}$. En effet, par la preuve du théorème 5.1.1(i), on a $\overline{\rho}_{\mathcal{M}}|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F^{\mathrm{nr}})} = \overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F^{\mathrm{nr}})}$. Mais on a aussi $\det \overline{\rho}_{\mathcal{M}} = \overline{\psi}\omega = \det \overline{\rho}$ ce qui implique ici $\overline{\rho}_{\mathcal{M}} = \overline{\rho}$ (car $\overline{\rho}$ est irréductible). En remplaçant formellement a_τ par la variable X_τ pour $\tau \in \mathcal{S}$ et p/a_τ par la variable Y_τ pour $\tau \in II$, on obtient comme cela un S_R-module libre de rang 2 $\mathcal{M}_R$ muni d'un Frobenius φ et d'une action de $\mathrm{Gal}(F[\sqrt[e]{-p}]/F)$ où S_R est le complété $\mathfrak{m}_R$-adique de $S \otimes_{\mathbb{Z}_p} R$ avec :

$$R \overset{\text{déf}}{=} \frac{\mathcal{O}_E[[X_\tau, Y_\tau, \tau \in II]]}{(X_\tau Y_\tau - p, \tau \in II)}[[X_\tau, \tau \notin II]].$$

Pour montrer que $\mathcal{M}_R$ est un "R-module fortement divisible avec donnée de descente modérée" au sens de [**25**, Def.4.1] (sans l'opérateur N), le seul point non trivial est la condition $\mathrm{Fil}^1\mathcal{M}_R \cap I\mathcal{M}_R = I\mathrm{Fil}^1\mathcal{M}_R$ pour tout idéal I de R. Elle se vérifie exactement comme dans la preuve de [**6**, Prop.5.2.4.1].
Supposons maintenant $\overline{\rho}$ réductible (non scindée). Un $\mathcal{O}_{E'}$-module fortement divisible $\mathcal{M}$ de type $\eta \otimes \eta'$ et de poids parallèle 2 tel que $\overline{\rho}_{\mathcal{M}} \cong \overline{\rho}$ est de genre (35) par le théorème 5.1.1(ii), et par [**4**, Th.8.1(i)] il existe $\tau_1 \in \mathcal{S}\backslash II$ tel que $a_{\tau_1} \in \mathcal{O}_{E'}^\times$. Par [**4**, Prop.5.4(iii)] (et [**4**, Rem.5.5(iv)]), un changement de base sur $\mathcal{M}$ permet de supposer $a_{\tau_1} = 1$ sur $\mathcal{M}$ et cette condition fait alors que les autres paramètres a_τ ($\tau \in \mathcal{S}\backslash\{\tau_1\}$) et α, α' de $\mathcal{M}$ sont bien déterminés. Si de plus $\det \rho_{\mathcal{M}} = \psi\varepsilon$, alors $\alpha = v\alpha'$ où $v \in \mathcal{O}_E^\times$ est déterminé par (41) et ne dépend que de η, η', ψ et $\overline{\rho}$. Enfin, les valeurs de $\overline{a}_\tau$ pour $\tau \in (I_\eta^\times \amalg I_{\eta'}^\times)\backslash\{\tau_1\}$ et de $\overline{\alpha}'$ sont alors fixées par les formules (38), (39) et (40) (car ces formules doivent donner le module de Fontaine-Laffaille de $\overline{\rho} \otimes \chi^{-1}$). Réciproquement, tout $\mathcal{O}_{E'}$-module fortement divisible (de type $\eta \otimes \eta'$ et de poids parallèle 2) de genre (35) avec $\alpha = v\alpha'$, $a_{\tau_1} = 1$ et $\overline{\alpha}'$, $\overline{a}_\tau$ pour $\tau \in (I_\eta^\times \amalg I_{\eta'}^\times)\backslash\{\tau_1\}$ prenant les valeurs précédentes est tel que $\rho_{\mathcal{M}}$ est une déformation de $\overline{\rho}$ de type $(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \psi)$ sur $\mathcal{O}_{E'}$.

Cela découle encore de la preuve du théorème 5.1.1(i) et de (38), (39) et (40). En remplaçant formellement a_τ par X_τ pour $\tau \in I_\eta^0 \amalg I_{\eta'}^0 \amalg II$, p/a_τ par Y_τ pour $\tau \in II$, a_τ par $[\overline{a}_\tau] + X_\tau$ pour $\tau \in (I_\eta^\times \amalg I_{\eta'}^\times)\backslash\{\tau_1\}$ et α' par $[\overline{\alpha}'] + X$, on obtient un S_R-module libre de rang 2 $\mathcal{M}_R$ muni d'un Frobenius φ et d'une action de $\mathrm{Gal}(F[\sqrt[e]{-p}]/F)$ où :

$$R \overset{\text{déf}}{=} \frac{\mathcal{O}_E[[X_\tau, Y_\tau, \tau \in II]]}{(X_\tau Y_\tau - p, \tau \in II)}[[X_\tau, \tau \in \mathcal{S}\backslash(II \amalg \{\tau_1\}), X]].$$

Comme pour $\overline{\rho}$ irréductible, on vérifie que $\mathcal{M}_R$ est un "R-module fortement divisible avec donnée de descente modérée" au sens de [**25**, Def.4.1] (sans l'opérateur N).

Par [**25**, Def.4.1] et [**25**, Cor.4.12(1)], le foncteur "module de Tate $\mathcal{M} \mapsto \rho_{\mathcal{M}}$" s'étend à $\mathcal{M}_R$ et permet de lui associer une déformation ρ_R de $\overline{\rho}$ sur R. Par construction de R et $\mathcal{M}_R$ et par [**25**, Cor.4.12(2)], pour toute extension finie E' de E, l'application $(f : R \to \mathcal{O}_{E'}) \mapsto \rho_R \otimes_{R,f} \mathcal{O}_{E'}$ induit une bijection entre $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E-\text{algèbres}}(R, \mathcal{O}_{E'})$ et l'ensemble des classes d'isomorphisme de déformations de $\overline{\rho}$ de type $(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \psi)$ sur $\mathcal{O}_{E'}$. Par la même preuve que celle de [**6**, Th.5.3.1] (voir (i) p.284 de *loc.cit.*), on en déduit une injection canonique de $\mathcal{O}_E$-algèbres locales noethériennes complètes $R^\psi(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho}) \hookrightarrow R$ qui induit un isomorphisme sur leur corps résiduel k_E. Pour montrer que cette injection est un isomorphisme, il suffit de montrer que l'application induite $R^\psi(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho}) \to R/(\varpi_E, \mathfrak{m}_R^2)$ est surjective, ou de manière équivalente que la déformation $\rho_R \otimes_R R/(\varpi_E, \mathfrak{m}_R^2)$ n'est pas définie sur une sous-k_E-algèbre stricte de $R/(\varpi_E, \mathfrak{m}_R^2)$. Les quotients $\rho_R \otimes_R k_E[[X_\tau]]/(X_\tau^2)$, $\rho_R \otimes_R k_E[[Y_\tau]]/(Y_\tau^2)$ (et $\rho_R \otimes_R k_E[[X]]/(X)^2$ si $\overline{\rho}$ est réductible) correspondent à $f + |II|$ éléments de $\mathrm{Ext}^1_{k_E[\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)]}(\overline{\rho}, \overline{\rho})$ et il suffit de vérifier que ces éléments sont tous linéairement indépendants sur k_E (en particulier non nuls). Cela résulte encore de calculs explicites sur les φ_1-modules filtrés $\mathcal{M}_R \otimes_R k_E[[X_\tau]]/(X_\tau^2)$ $(\tau \notin II)$, $\mathcal{M}_R \otimes_R k_E[[X_\tau, Y_\tau]]/(X_\tau^2, X_\tau Y_\tau, Y_\tau^2)$ $(\tau \in II)$, etc. analogues à ceux du début de la preuve de [**4**, Prop.7.3] (noter que lorsque deux extensions sont dans des "directions" τ et τ' distinctes, leur indépendance linéaire résulte de leur non nullité). □

Corollaire 5.2.2. — *La conjecture 2.2 est vraie si $k_\tau = 2$ pour tout $\tau \in \mathcal{S}$, $\mathrm{t} = \eta \oplus \eta'$ (avec η, η' comme ci-dessus) et* $\mathrm{End}_{k_E[\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)]}(\overline{\rho}) = k_E$

Démonstration. — Quitte à tordre les déformations par le caractère (cristallin) $\prod_{\tau\in\mathcal{S}} \varepsilon_\tau^{-w_\tau}$ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)$, on peut supposer $\mathbf{v} = (0, 2)_{\tau\in\mathcal{S}}$. Par le théorème 5.2.1, l'anneau $\mathrm{Spec}\,\big(R^\psi(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})/\varpi_E\big)$ a exactement $2^{|II|}$ composantes irréductibles qui sont toutes formellement lisses sur k_E et de multiplicité 1. Par [**4**, Prop.4.3] (voir le début de la preuve du théorème 5.1.1), l'ensemble de poids de Serre $\mathcal{D}(\mathrm{t}) \cap \mathcal{D}(\overline{\rho})$ est paramétré par les $J \subseteq \mathcal{S}$ vérifiant $J_{\overline{\rho}}^{\min} \subseteq J \subseteq J_{\overline{\rho}}^{\max}$ et ces poids apparaissent avec multiplicité 1 dans le semi-simplifié sur k_E de $\sigma(\mathrm{t}) = \mathrm{Ind}_{\mathrm{I}(\mathcal{O}_F)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)} \eta' \otimes \eta$. Comme $J_{\overline{\rho}}^{\max}\backslash J_{\overline{\rho}}^{\min} = II \circ \varphi^{-1}$, on a $|\mathcal{D}(\mathrm{t}) \cap \mathcal{D}(\overline{\rho})| = 2^{|II|}$, d'où l'existence d'une bijection comme dans la conjecture 2.2. □

Comme les multiplicités sont toutes 1, il y a ici plein de bijections possibles entre l'ensemble des composantes irréductibles de Spec $\big(R^{\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})/\varpi_E\big)$, c'est-à-dire de Spec $\big(k_E[[X_\tau,Y_\tau,\tau\in II]]/(X_\tau Y_\tau,\tau\in II)\big)$ par le théorème 5.2.1, et l'ensemble $\mathcal{D}(\mathrm{t})\cap\mathcal{D}(\overline{\rho})$. On termine cet article en donnant une bijection particulière naturelle (inspirée par [**4**, Th.8.5]). Les composantes irréductibles de Spec $\big(k_E[[X_\tau,Y_\tau,\tau\in II]]/(X_\tau Y_\tau,\tau\in II)\big)$ sont paramétrées par les parties J de $II=J_{\overline{\rho}}^{\max}\backslash J_{\overline{\rho}}^{\min}\circ\varphi$ de la façon suivante :

$$J\mapsto C_J\stackrel{\text{déf}}{=}\mathrm{Spec}\,\big(k_E[[X_\tau,\tau\in J]][[Y_\tau,\tau\notin J]]\big).$$

Les poids de Serre de $\mathcal{D}(\mathrm{t})\cap\mathcal{D}(\overline{\rho})$ sont les constituants τ_J de $\mathrm{Ind}_{\mathrm{I}(\mathcal{O}_F)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)}\overline{\eta}'\otimes\overline{\eta}$ paramétrés par les parties J de $\mathcal{S}$ comprises entre $J_{\overline{\rho}}^{\min}$ et $J_{\overline{\rho}}^{\max}$. Une bijection naturelle est alors :

$$C_J\mapsto\tau_{J_{\overline{\rho}}^{\min}\amalg(J\circ\varphi^{-1})}\quad(J\in II).\tag{42}$$

Remarque 5.2.3. — Lorsque $\overline{\rho}$ est générique scindée, il est très vraisemblable que l'anneau $R^{\square,\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho})$ soit encore un anneau de séries formelles sur l'anneau $\mathcal{O}_E[[X_\tau,Y_\tau,\tau\in II]]/(X_\tau Y_\tau-p,\tau\in II)$. Dans cet esprit, notons que la bijection ci-dessus entre l'ensemble des composantes irréductibles de Spec $\big(k_E[[X_\tau,Y_\tau,\tau\in II]]/(X_\tau Y_\tau,\tau\in II)\big)$ et l'ensemble $\mathcal{D}(\mathrm{t})\cap\mathcal{D}(\overline{\rho})$ garde un sens même si $\overline{\rho}$ est scindée.

Références

[1] Barthel L., Livné R., *Irreducible modular representations of* $\mathrm{GL}_2(F)$ *of a local field*, Duke Math. J. 75, 1994, 261–292.

[2] Berger L., *La correspondance de Langlands locale p-adique pour* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, Séminaire Bourbaki 1017, 2010, à paraître à Astérisque.

[3] Breuil C, *Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *I*, Compositio Math. 138, 2003, 165–188.

[4] Breuil C., *Sur un problème de compatibilité local-global modulo p pour* GL_2, prépublication 2009 révisée 2012, disponible à http://www.ihes.fr/~breuil/publications.

[5] Breuil C., *Correspondance de Langlands p-adique, compatibilité local-global et applications*, Séminaire Bourbaki 1031, 2011, à paraître à Astérisque.

[6] Breuil C., Mézard A., *Multiplicités modulaires et représentations de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ *et de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)$ *en* $\ell=p$, Duke Math. J. 115, 2002, 205-298.

[7] Breuil C., Paškūnas V., *Towards a modulo p Langlands correspondence for* GL_2, Memoirs of A.M.S. 216, 2012.

[8] Buzzard K., Diamond F., Jarvis F., *On Serre's conjecture for mod* ℓ *Galois representations over totally real fields*, Duke Math. J. 155, 2010, 105-161.

[9] Colmez P., *Représentations de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *et* (φ,Γ)*-modules*, Astérisque 330, 2010, 281-509.

[10] Emerton M., *Local-global compatibility in the p-adic Langlands programme for* $\mathrm{GL}_{2/\mathbb{Q}}$, prépublication, 2010.

[11] Emerton M., Gee T., *A geometric perspective on the Breuil-Mézard conjecture*, prépublication, 2011.

[12] Fontaine J.-M., *Représentations ℓ-adiques potentiellement semi-stables*, Astérisque 223, 1994, 321-347.

[13] Fontaine J.-M., Laffaille G., *Construction de représentations p-adiques*, Ann. Scient. E.N.S. 15, 1982, 547-608.

[14] Gee T., Kisin M., *The Breuil-Mézard conjecture for potentially Barsotti-Tate representations*, prépublication 2012.

[15] Henniart G., *Sur l'unicité des types pour* GL_2 (appendice à [**6**]), Duke Math. J. 115, 2002, 298-305.

[16] Kisin M., *The Fontaine-Mazur conjecture for* GL_2, J. Amer. Math. Soc. 22, 2009, 641-690.

[17] Kisin M., *Deformations of* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ *and* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *representations*, Astérisque 330, 2010, 513-529.

[18] Kisin M., *The structure of potentially semi-stable deformation rings*, Actes du Congrès International des Mathématiciens vol. II, 2010, 294-311.

[19] Matsumura H., *Commutative ring theory*, Cambridge Studies in Advanced Maths 8, Cambridge University Press, 1986.

[20] Mazur B., *Deforming Galois representations*, Math. Sci. Res. Inst. Publ. 16, 1989, 385-437.

[21] Paškūnas V., *Extensions for supersingular representations*, Astérisque 331, 2010, 317-353.

[22] Paškūnas V., *The image of Colmez's Montréal functor*, prépublication, 2010.

[23] Paškūnas V., *On the Breuil-Mézard conjecture*, prépublication 2012.

[24] Ribet K., *A modular construction of unramified p-extensions of* $\mathbb{Q}(\mu_p)$, Inventiones Math. 34, 1976, 151-162.

[25] Savitt D., *On a conjecture of Conrad, Diamond and Taylor*, Duke Math. J. 128, 2005, 141-197.

C. Breuil, Bâtiment 425, C.N.R.S. et Université Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex, France
E-mail : `christophe.breuil@math.u-psud.fr`

A. Mézard, Université Pierre et Marie Curie, 75252 Paris Cedex 05, France
E-mail : `mezard@math.jussieu.fr`