INVARIANT $\mathcal{L}$ ET SÉRIE SPÉCIALE p-ADIQUE

par

Christophe Breuil

Résumé. — À chaque entier $k \geq 2$ et chaque $\mathcal{L} \in \overline{\mathbf{Q}_p}$, on associe conjecturalement un espace de Banach p-adique $B(k,\mathcal{L})$ muni d'une action continue unitaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. On montre que $B(k,\mathcal{L})$ existe bien si $k = 2$ ou si $k > 2$ et $\mathcal{L}$ "provient" d'une forme modulaire de poids k sur $\Gamma_0(pN)$ avec $(p,N) = 1$ et $N = N^-N^+$ où $(N^-,N^+) = 1$ et N^- est le produit d'un nombre impair de nombres premiers. Les Banach $B(k,\mathcal{L})$ devraient "correspondre" (à torsion près par des caractères cristallins) aux représentations semi-stables non-cristallines de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$ de dimension 2 sur $\overline{\mathbf{Q}_p}$.

Table des matières

Pour des discussions lors de la rédaction de cet article, je remercie J.-F. Dat, M. Emerton, E. Grosse-Klönne, M. Harris, A. Iovita, M. Kisin, P. Schneider, M. Strauch, J. Teitelbaum et M.-F. Vignéras. Je suis reconnaissant à M. Harris et L. Lafforgue de leur soutien, à P. Schneider et M. Strauch de leurs explications et à E. Grosse-Klönne de sa rédaction rapide de [**17**]. Enfin, je remercie chaleureusement A. Genestier pour de nombreuses discussions et pour ses multiples remarques.

1. Préliminaires

1.1. Introduction. — Soit p un nombre premier et f une forme modulaire parabolique nouvelle de poids $k\geq 2$ sur $\Gamma_0(Np)$ avec $(N,p)=1$. Supposons f vecteur propre des opérateurs de Hecke avec, pour simplifier, des valeurs propres dans $\mathbf{Z}$. Lorsque $k=2$, l'invariant $\mathcal{L}$ de f, noté $\mathcal{L}(f)$, a été défini pour la première fois dans [**20**] par la formule :

$$\log(q)-\mathcal{L}(f)\mathrm{val}(q)=0$$

où val est la valuation normalisée par $\mathrm{val}(p)=1$, log est le logarithme p-adique normalisé par $\log(p)=0$ et où $q\in\mathbf{Q}_p^\times$ est tel que $J_0(f)(\mathbf{C}_p)\simeq\mathbf{C}_p/q^{\mathbf{Z}}$, $J_0(f)$ étant la courbe elliptique associée à f. Cet invariant intervient dans la comparaison entre valeurs spéciales des fonctions L complexe et p-adique de f. Lorsque $k\geq 2$, trois définitions *a priori* différentes de $\mathcal{L}(f)$ furent données un peu plus tard dans [**32**], [**10**] et [**19**]. On sait maintenant que ces trois définitions donnent toutes la même valeur. La définition peut-être la plus parlante conceptuellement est celle de [**19**] que nous rappelons maintenant. Soit ρ la représentation p-adique de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ associée à f, on sait que la composante locale $\rho_p=\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)}$ est *semi-stable* non cristalline. Il lui correspond donc par le foncteur de Fontaine un (φ,N)-module filtré $D_{\mathrm{st}}(\rho_p)$ de dimension 2 et $\mathcal{L}(f)$ est par définition *le paramètre de la filtration de Hodge sur* $D_{\mathrm{st}}(\rho_p)$ (voir e.g. [**9**],§4.3 ou l'exemple 1.3.5).

À la forme f est aussi associée une représentation automorphe $\pi = \otimes'_\ell \pi_\ell$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{A}_\mathbf{Q})$ où $\mathbf{A}_\mathbf{Q}$ désigne les adèles de $\mathbf{Q}$. La composante locale π_p est, à une torsion non ramifiée près, la représentation spéciale, ou Steinberg, de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ que l'on note St. C'est une représentation lisse irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ où il n'y a pas le moindre invariant $\mathcal{L}$. Pour cette raison, alors que $\mathcal{L}(f)$ est un invariant *local* en p côté Galois, il a le privilège d'être unanimement considéré comme un invariant *global* côté GL_2.

La motivation à l'origine de ce travail (et aussi de [**9**], [**6**], [**7**] et [**8**], voir l'introduction de [**5**]) est l'abolition de ce privilège.

Cette motivation est reliée à la question vague suivante : y-a-t'il une "correspondance de Langlands" (globale ou locale) entre représentations p-adiques continues de groupes de Galois et certaines représentations p-adiques continues de groupes linéaires ? En effet, si une telle correspondance existe, alors dans notre cas particulier l'hypothétique représentation p-adique Π_p de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ associée à ρ_p doit déterminer ρ_p (à isomorphisme près) et doit donc contenir une donnée équivalente à la filtration de Hodge sur $D_{\mathrm{st}}(\rho_p)$. Autrement dit, les poids de Hodge-Tate $(0, k-1)$ et l'invariant $\mathcal{L}$ doivent être quelque part dans la représentation *locale* Π_p.

Pour E une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ contenant $p^{k/2}$, notons $\mathrm{Sym}^{k-2}E^2$ la représentation algébrique de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ de plus haut poids $(0, k-2)$ et $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2 = |\det|^{\frac{k-2}{2}} \otimes \mathrm{Sym}^{k-2}E^2$ (où $|\cdot|$ est la norme p-adique). Notre approche pour construire Π_p est grossièrement la suivante : à chaque valeur $\mathcal{L} \in E \subset \overline{\mathbf{Q}_p}$ devrait être associé un E-espace de Banach p-adique $B(k, \mathcal{L}) = \Pi_p$ muni d'une action continue de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et obtenu (au moins pour $k > 2$) comme complétion p-adique "convenable" (dépendant de $\mathcal{L}$) de $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2 \otimes_E \mathrm{St}$.

On donne dans cet article un procédé conjectural local de construction de $B(k, \mathcal{L})$ pour tout k et tout $\mathcal{L}$ (pour $k = 2$, le procédé n'est pas conjectural). En utilisant la théorie globale, on montre que $B(k, \mathcal{L})$ existe vraiment pour k pair > 2 et $\mathcal{L}$ provenant des formes modulaires de poids k sur $\Gamma_0(pN)$ avec une hypothèse faible sur N (voir ci-après).

Commençons par le procédé conjectural local. Notons $\log_\mathcal{L}$ l'unique détermination du logarithme p-adique telle que $\log_\mathcal{L}(p) = \mathcal{L}$. On définit d'abord des représentations localement analytiques $\Sigma(k, \mathcal{L})$ (au sens de [**25**]) faisant intervenir $\log_\mathcal{L}$ et ayant $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2 \otimes_E \mathrm{St}$ comme (sous-représentation sur les) vecteurs localement algébriques de la façon suivante. La fonction $\log_\mathcal{L}$ permet de construire une extension non triviale $0 \to 1 \to \sigma(\mathcal{L}) \to 1 \to 0$ de représentations du Borel supérieur de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. En tordant cette extension par le caractère $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \mapsto |ad|^{\frac{k-2}{2}} d^{k-2}$ et en en prenant l'induite parabolique analytique au sens de [**25**], on obtient une représentation localement analytique qui a 6 facteurs de

Jordan-Hölder topologiques. Cette représentation possède un sous-quotient topologique naturel $\Sigma(k,\mathcal{L})$ qui n'a plus que 3 facteurs et qui vérifie $\Sigma(k,\mathcal{L}) \simeq \Sigma(k,\mathcal{L}') \Rightarrow \mathcal{L} = \mathcal{L}'$ (voir §2.1). C'est le plus "petit" sous-quotient ayant cette propriété. Il a un unique sous-objet irréductible : $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2 \otimes_E \mathrm{St}$. Si l'on agrandit E, la représentation $\Sigma(k,\mathcal{L})$ est modifiée de façon évidente par extension des scalaires de sorte qu'elle ne dépend pas vraiment de E.

Appelons réseau de $\Sigma(k,\mathcal{L})$ tout sous-$\mathcal{O}_E$-module fermé de $\Sigma(k,\mathcal{L})$ qui l'engendre sur E et qui ne contient pas de E-droite.

Conjecture 1.1.1. — *Pour tout $k \geq 2$ et tout $\mathcal{L} \in E \subset \overline{\mathbf{Q}_p}$, $\Sigma(k,\mathcal{L})$ possède à commensurabilité près un unique réseau stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$.*

J'ignore si l'on peut forcément choisir ce réseau topologiquement de type fini sur $\mathcal{O}_E[\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)]$. La définition conjecturale "brutale" (et provisoire) de $B(k,\mathcal{L})$ est alors :

Définition 1.1.2. — *On définit $B(k,\mathcal{L})$ comme le complété de $\Sigma(k,\mathcal{L})$ par rapport à un quelconque réseau stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$.*

La conjecture 1.1.1 entraîne que $B(k,\mathcal{L})$ doit de plus être topologiquement irréductible si $k > 2$.

Proposition 1.1.3. — *La conjecture 1.1.1 est vraie pour $k = 2$. De plus, $B(2,\mathcal{L})$ est admissible (au sens de [**27**]) de longueur 2 et $B(2,\mathcal{L}) \simeq B(2,\mathcal{L}')$ (isomorphisme topologique $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$-équivariant) si et seulement si $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$.*

En pratique, même lorsque l'on sait que $\Sigma(k,\mathcal{L})$ possède un réseau stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, on ignore si tous les autres lui sont commensurables. Il est donc plus commode de donner une autre définition de $B(k,\mathcal{L})$, toujours conjecturale mais plus facile à manier, comme complétion de $\Sigma(k,\mathcal{L})$ par rapport à une classe de commensurabilité *particulière* de réseaux stables par $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Cette classe sera, en un certain sens, "minimale".

Nous allons la définir par dualité. Il faut d'abord expliciter le dual topologique $\Sigma(k,\mathcal{L})'$ de $\Sigma(k,\mathcal{L})$. Pour tout $k \geq 2$, soit $O(k)$ l'espace usuel des fonctions rigides analytiques E-rationnelles sur le demi-plan p-adique $\Omega = \mathbf{C}_p \setminus \mathbf{Q}_p$ et munissons $O(k)$ de l'action à gauche de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ de poids k (à une torsion près, cf. (11)). Soit $O(k,\mathcal{L})$ l'espace des fonctions sur Ω qui, en restriction à chaque affinoïde, sont de la forme : une fonction rigide E-rationnelle + une E-combinaison linéaire de fonctions $z^n \log_{\mathcal{L}}(z - z_i)$ où $n \in \{0,\ldots,k-2\}$ et $z_i \in \mathbf{Q}_p$, et munissons $O(k,\mathcal{L})$ de l'action à gauche de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ de poids $2-k$ (à une torsion près, cf. (15)). La dérivation $(k-1)$-ième donne une surjection $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$-équivariante $O(k,\mathcal{L}) \twoheadrightarrow O(k)$. Les espaces $O(k)$ et $O(k,\mathcal{L})$ sont munis de topologies naturelles qui en font des espaces de Fréchet.

Théorème 1.1.4. — *Pour tout $k \geq 2$ et tout $\mathcal{L} \in E \subset \overline{\mathbf{Q}_p}$, on a un isomorphisme topologique* $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$*-équivariant :*

$$O(k, \mathcal{L}) \simeq \Sigma(k, \mathcal{L})'.$$

Ce théorème généralise un théorème de dualité de Morita où il n'y avait pas de logarithmes ([**22**]). Sa preuve, donnée en détail au §3, est assez calculatoire à cause des formules qui apparaissent lorsque l'on accouple les logarithmes des deux côtés (voir formules (17)). Mais les calculs marchent si bien que l'auteur soupçonne fortement ces formules, ainsi que l'accouplement, d'avoir une interprétation conceptuelle.

Soit Ω_U un affinoïde E-rationnel "suffisamment grand" de Ω (ou plutôt ses points à valeurs dans $\mathbf{C}_p$, cf. §3.1) et définissons :

$$O(k, \mathcal{L})^U = \{F \in O(k, \mathcal{L}) \mid \|(g \cdot F)|_{\Omega_U}\| \leq 1 \ \forall\ g \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)\}$$

où la norme $\|\cdot\|$ est définie sur l'espace des fonctions sur Ω_U sommes d'une fonction rigide sur Ω_U et d'une combinaison linéaire finie de $z^n \log_{\mathcal{L}}(z - z_i)$ comme précédemment. On peut montrer que $O(k, \mathcal{L})^U$ est un sous-$\mathcal{O}_E$-module compact de $O(k, \mathcal{L})$ stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et que $O(k, \mathcal{L})^{\mathrm{b}} = O(k, \mathcal{L})^U \otimes E$ est indépendant du choix de Ω_U. Il résulte de [**27**] que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E}(O(k, \mathcal{L})^U, E)$ (espace vectoriel des applications continues $\mathcal{O}_E$-linéaires) est naturellement un Banach sur E muni d'une action continue "unitaire" (i.e. stabilisant un ouvert borné) de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ indépendant du choix de Ω_U.

Définition 1.1.5. — *On définit $B(k, \mathcal{L}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E}(O(k, \mathcal{L})^U, E)$.*

Noter qu'on ignore *a priori* si $B(k, \mathcal{L}) \neq 0$ pour $k > 2$ (car on ignore si $O(k, \mathcal{L})^U \neq 0$). Si $O(k, \mathcal{L})^U \neq 0$, on peut montrer que $B(k, \mathcal{L})$ est le complété de $\Sigma(k, \mathcal{L})$ par rapport au réseau dual $\Theta(k, \mathcal{L})^U$ de $O(k, \mathcal{L})^U$ (i.e. le $\mathcal{O}_E$-module des éléments de $\Sigma(k, \mathcal{L})$ entiers contre tout élément de $O(k, \mathcal{L})^U$) et que tout réseau de $\Sigma(k, \mathcal{L})$ stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ contient $p^n \Theta(k, \mathcal{L})^U$ pour un n convenable (d'où l'appellation "classe de commensurabilité minimale", cf. précédemment). Ainsi, cette deuxième définition de $B(k, \mathcal{L})$ est conjecturalement équivalente à la précédente (équivalente si $k = 2$) et est celle que nous adoptons dans tout cet article. Pour $k > 2$, $B(k, \mathcal{L})$ est aussi le complété de $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2} E^2 \otimes_E \mathrm{St}$ par rapport au réseau $\Theta(k, \mathcal{L})^U \cap (\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2} E^2 \otimes_E \mathrm{St})$.

Lorsque $k > 2$, l'étude locale de $B(k, \mathcal{L})$ semble non-triviale. La théorie des formes modulaires rigides analytiques combinée avec le théorème 1.1.4 va montrer sans douleur que, pour $k > 2$ et pair, les $B(k, \mathcal{L})$, au moins pour certaines valeurs discrètes de $\mathcal{L}$, sont non nuls et tous distincts.

Pour Γ sous-groupe discret cocompact dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$, notons $S_k(\Gamma)$ le E-espace vectoriel des formes modulaires rigides analytiques E-rationnelles de poids k et niveau Γ, c'est-à-dire, vu nos conventions, $S_k(\Gamma) = O(k)^{{}^t\Gamma}$ (^{t} désigne la transposition usuelle des matrices). Soit $N \in \mathbf{N}$ premier à p et tel que $N = N^-N^+$ avec $(N^-, N^+) = 1$ et N^- produit d'un nombre impair de nombres premiers. Pour E suffisamment grand, on peut trouver Γ tel que $S_k(\Gamma) \hookrightarrow S_k(\Gamma_0(pN))$ (formes modulaires paraboliques classiques de poids k et niveau pN), l'injection étant compatible aux opérateurs de Hecke et ayant pour image les formes de $S_k(\Gamma_0(pN))$ nouvelles en p et aux places où Γ "n'est pas de type Γ_0". En particulier, l'image contient toutes les formes nouvelles $f \in S_k(\Gamma_0(pN))^{\mathrm{nouv}}$ qui peuvent donc se "voir" comme des formes rigides $F \in O(k)^{{}^t\Gamma}$, cf. §5.3.

Comme pour $O(k,\mathcal{L})^{\mathrm{b}}$, on définit par le même procédé $O(k)^{\mathrm{b}} = \{F \in O(k) \mid \|(g\cdot F)|_{\Omega_U}\| \leq 1 \ \forall\, g \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)\} \otimes E$ et on vérifie que la dérivation $O(k,\mathcal{L}) \twoheadrightarrow O(k)$ induit pour $k > 2$ une *injection* $O(k,\mathcal{L})^{\mathrm{b}} \hookrightarrow O(k)^{\mathrm{b}}$. De plus, on voit aisément que $O(k)^{{}^t\Gamma} \subset O(k)^{\mathrm{b}}$.

Théorème 1.1.6. — *Supposons $k > 2$. Soit f une forme modulaire propre nouvelle dans $S_k(\Gamma_0(pN))$ (de sorte que $\mathcal{L}(f) \in E$ est bien défini) et soit $F \in S_k(\Gamma) \subset O(k)^{\mathrm{b}}$ la forme modulaire rigide associée. Alors $F \in O(k,\mathcal{L})^{\mathrm{b}} \subsetneq O(k)^{\mathrm{b}}$ si et seulement si $\mathcal{L} = -\mathcal{L}(f)$.*

Du théorème 1.1.6, on déduit (cf. §5.4) :

Corollaire 1.1.7. — *Soit* $\mathbf{\Lambda}(k) \overset{\text{déf}}{=} \{-\mathcal{L}(f),\ f$ forme propre nouvelle dans $S_k(\Gamma_0(pN))$ pour N de la forme N^-N^+ comme avant$\} \subset \overline{\mathbf{Q}_p}$.
(i) Pour tout $\mathcal{L} \in \mathbf{\Lambda}(k)$, on a $B(k,\mathcal{L}) \neq 0$. En particulier $\Sigma(k,\mathcal{L})$ possède un réseau stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$.
(ii) Soit $\mathcal{L} \in \mathbf{\Lambda}(k)$, $\mathcal{L}' \in \overline{\mathbf{Q}_p}$ et E une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ dans $\overline{\mathbf{Q}_p}$ contenant $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}'$ et $p^{k/2}$. Si $B(k,\mathcal{L}) \overset{\sim}{\to} B(k,\mathcal{L}')$ est un isomorphisme E-linéaire continu $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$-équivariant, alors $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$.

La conjecture qui suit et ses conséquences rassemblent ce que l'auteur croit être vrai localement sur les Banach $B(k,\mathcal{L})$ pour $k > 2$ et donne en particulier un lien local avec les représentations semi-stables non-cristallines absolument irréductibles de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$. Comme dans [**29**], notons $B(k,\mathcal{L})_{\mathrm{an}}$ le sous-E-espace vectoriel des vecteurs localement analytiques de $B(k,\mathcal{L})$, c'est-à-dire les vecteurs v tels que l'application orbite $g \mapsto g\cdot v$ est une fonction localement analytique de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ dans $B(k,\mathcal{L})$. C'est naturellement une représentation localement analytique de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$.

Conjecture 1.1.8. — *Supposons $k > 2$.*
(i) L'application $\Sigma(k,\mathcal{L}) \to B(k,\mathcal{L})_{\mathrm{an}}$ est un isomorphisme topologique.
(ii) Soit $B(k,\mathcal{L})^0 = \{v \in B(k,\mathcal{L}) \mid \|v\| \leq 1\}$, alors $B(k,\mathcal{L})^0 \otimes_{\mathcal{O}_E} \overline{\mathbf{F}_p}$ est de longueur finie comme représentation (lisse) de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ sur $\overline{\mathbf{F}_p}$ et sa semi-simplifiée correspond à la semi-simplifiée modulo p de la représentation semi-stable non-cristalline $V(k,\mathcal{L})$ (voir l'exemple 1.3.5) selon la règle de [**7**],*Déf.1.1.*

En particulier, $B(k,\mathcal{L})^0 \otimes_{\mathcal{O}_E} \overline{\mathbf{F}_p}$ devrait être une "supersingulière" (cf. [**6**], [**7**]) si et seulement si $V(k,\mathcal{L})$ est résiduellement irréductible etc. L'auteur espère revenir sur des cas particuliers de (ii) dans le futur.

Proposition 1.1.9. — *La conjecture 1.1.8 a comme conséquences :*
(i)$_?$ $B(k,\mathcal{L}) \neq 0$ pour tout k et tout $\mathcal{L}$.
*(ii)$_?$ $B(k,\mathcal{L})$ est admissible (au sens de [**27**]) et, si $k > 2$, topologiquement irréductible.*
(iii)$_?$ Pour tout $\mathcal{L},\mathcal{L}' \in \overline{\mathbf{Q}_p}$, on a $B(k,\mathcal{L}) \xrightarrow{\sim} B(k,\mathcal{L}')$ (isomorphisme topologique $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$-équivariant) si et seulement si $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$.
(iv)$_?$ La conjecture 1.1.1 est vraie et $B(k,\mathcal{L})$ est l'unique complétion unitaire non-nulle de $\Sigma(k,\mathcal{L})$.

(Les ? sont là pour rappeler que les assertions sont conditionnelles à l'énoncé 1.1.8 pour $k > 2$.)

Notons au passage qu'un Banach peut être topologiquement irréductible sans que ses vecteurs localement analytiques forment une représentation localement analytique topologiquement irréductible.

Voici pour finir l'organisation de l'article. Le paragraphe 1 contient, outre l'introduction et les notations, un petit "programme" de synthèse entre les résultats et conjectures de [**7**], ceux de cet article et, plus généralement, ceux qu'on pourrait attendre, au vu de la situation côté $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$ et théorie de Hodge p-adique, concernant des représentations du type $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2 \otimes_E \pi_p$ avec π_p représentation lisse irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Le paragraphe 2 contient la construction et les propriétés des représentations $\Sigma(k,\mathcal{L})$. Le paragraphe 3 contient la définition des espaces $O(k)$ et $O(k,\mathcal{L})$ ainsi que la preuve du théorème 1.1.4. Le paragraphe 4 contient la définition et les propriétés de $O(k,\mathcal{L})^{\mathrm{b}}$, $O(k)^{\mathrm{b}}$ et $B(k,\mathcal{L})$, la conjecture 1.1.8 et la preuve de la proposition 1.1.9, l'examen du cas $k = 2$ et la preuve (en utilisant [**33**] et [**17**]) que le Banach $\mathrm{Hom}_E(O(k)^{\mathrm{b}}, E)$ n'est, lui, jamais admissible si $k > 2$. Le paragraphe 5 contient le lien avec la théorie globale et les preuves du théorème 1.1.6 et du corollaire 1.1.7.

1.2. Notations et conventions. — On fixe une clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}_p}$ de $\mathbf{Q}_p$ de corps résiduel $\overline{\mathbf{F}_p}$ et on note $\mathbf{C}_p$ la complétion p-adique de $\overline{\mathbf{Q}_p}$ et $|\cdot|$ la valeur absolue p-adique sur $\mathbf{C}_p$ donnée par $|x| = \frac{1}{p^{\mathrm{val}(x)}}$ où val est la valuation p-adique normalisée par $\mathrm{val}(p) = 1$. Si $E \subset \overline{\mathbf{Q}_p}$ est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, $\mathcal{O}_E$ est son anneau d'entiers, $\mathfrak{m}_E$ son idéal maximal et $\mathbf{F}_E \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{O}_E/\mathfrak{m}_E$ son corps résiduel.

On note $G = \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, $K = \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$, $P \subset G$ le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures, $I \subset K$ le sous-groupe d'Iwahori des matrices triangulaires supérieures modulo p, $I(1)$ le pro-p-sous-groupe de I et $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On désigne par k le poids modulaire, c'est un entier supérieur ou égal à 2. Si k est impair, on choisit une racine carrée $\sqrt{p}$ de p de sorte que $p^{k/2}$, $p^{(k-2)/2}$, etc. sont définis. On note $\mathrm{Sym}^{k-2}E^2$ la représentation algébrique évidente de G et, si $p^{k/2} \in E$, $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2 \overset{\text{déf}}{=} |\det|^{\frac{k-2}{2}} \otimes \mathrm{Sym}^{k-2}E^2$. On note St la représentation de Steinberg de $\overline{G}$, c'est-à-dire le E-espace vectoriel des fonctions localement constantes $H : \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p) \to E$ modulo les fonctions constantes muni de l'action à gauche $\big(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \cdot H\big)(z) = H(\frac{az+c}{bz+d})$.

On normalise la réciprocité locale en envoyant les Frobenius sur les inverses des uniformisantes. On note ε le caractère cyclotomique p-adique $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p) \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)^{\mathrm{ab}} \to \mathbf{Z}_p^\times$. Via la réciprocité locale $\mathbf{Q}_p^\times \subset \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)^{\mathrm{ab}}$, on a $\varepsilon(p) = 1$ et $\varepsilon\,|_{\mathbf{Z}_p^\times} = \mathrm{Id}$. On voit que le caractère central de $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2$ est exactement ε^{k-2}.

Une fonction localement analytique d'une variété analytique p-adique dans un espace de Banach est une fonction qui, dans une carte locale, s'écrit comme un développement analytique usuel. Pour $\mathcal{L} \in \overline{\mathbf{Q}_p}$, on note $\log_{\mathcal{L}} : \mathbf{C}_p \setminus \{0\} \to \mathbf{C}_p$ l'unique fonction (localement analytique) satisfaisant les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \log_{\mathcal{L}}(1-x) &= -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \quad \text{si} \quad |x| < 1 \\ \log_{\mathcal{L}}(xy) &= \log_{\mathcal{L}}(x) + \log_{\mathcal{L}}(y) \\ \log_{\mathcal{L}}(p) &= \mathcal{L}. \end{aligned}$$

On renvoie au livre [**24**] pour les notions d'analyse fonctionnelle p-adique utilisées (espaces topologiques localement convexes p-adiques, espaces de Banach p-adiques, espaces de Fréchet p-adiques, duaux faibles et forts, ensembles bornés, etc.). Tous les duaux topologiques sont implicitement munis de la topologie *forte* et tous les Banach B sont p-adiques et tels que $\|B\| \subset |E|$ où $E \subset \overline{\mathbf{Q}_p}$ désigne les coefficients. On appelle $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$-Banach unitaire tout espace de Banach B muni d'une action de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ telle que pour tout $v \in B$ les applications $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p) \to B$, $g \mapsto g \cdot v$ sont continues et telle que, pour un choix de norme $\|\ \|$ sur B, on a $\|g \cdot v\| = \|v\|$ pour tout $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et tout $v \in B$.

1.3. Stratégie et exemples. — Soit $E \subset \overline{\mathbf{Q}_p}$ une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et V une représentation potentiellement semi-stable de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$ sur un E-espace vectoriel de dimension 2. La représentation V a deux poids de Hodge-Tate $\lambda_1 \leq \lambda_2$. On fait sur V les deux hypothèses suivantes :

(i) les poids de Hodge-Tate sont distincts, i.e. $\lambda_1 < \lambda_2$,

(ii) V est absolument irréductible.

L'objectif est d'associer à V une représentation continue de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ "naturelle" (d'un point de vue arithmétique ou géométrique) sur un espace de Banach et qui *détermine* la classe d'isomorphisme de V.

On peut dans un premier temps associer à V deux représentations de G sur un E-espace vectoriel (quitte à agrandir E) :

(i) la représentation algébrique $\mathrm{Alg}(V)$ de plus haut poids $(\lambda_1, \lambda_2 - 1)$,

(ii) la représentation lisse irréductible $\mathrm{Lisse}(V)$ correspondant, via la correspondance de *Hecke* au sens de [**12**], à la F-semi-simplifiée de la représentation de *Weil-Deligne* associée à V dans [**16**] (voir aussi [**9**],§2.2). Cette représentation de Weil-Deligne est essentiellement le (φ, N)-module filtré $D_{\mathrm{pst}}(V)$ sans sa filtration.

Un point important est que le couple $(\mathrm{Alg}(V), \mathrm{Lisse}(V))$, ou ce qui revient au même la représentation localement algébrique $\mathrm{Alg}(V) \otimes_E \mathrm{Lisse}(V)$, *ne* détermine *pas* la classe d'isomorphisme de la représentation galoisienne V : on a oublié la filtration sur $D_{\mathrm{pst}}(V)$.

L'étude présente du cas V semi-stable suggère *a posteriori* la stratégie suivante : on devrait pouvoir associer à chaque V telle que $\dim_E \mathrm{Lisse}(V) > 1$ une représentation de G sur un E-espace de Banach $B(V)$ satisfaisant *au moins* les conditions suivantes :

(i) $B(V)$ est un G-Banach unitaire.

(ii) $B(V)$ est topologiquement irréductible et admissible (voir [**27**] ou §4.6).

(iii) Les vecteurs *localement algébriques* de $B(V)$, c'est-à-dire les vecteurs $v \in B(V)$ tels que l'action d'un sous-groupe ouvert compact de G suffisamment petit sur v est algébrique, forment une représentation (localement algébrique) $B(V)_{\mathrm{al}}$ de G isomorphe à $\mathrm{Alg}(V) \otimes_E \mathrm{Lisse}(V)$.

(iv) Les vecteurs *localement analytiques* de $B(V)$, c'est-à-dire les vecteurs $v \in B(V)$ tels que la fonction $G \to B(V), g \mapsto g \cdot v$ est localement analytique, forment une représentation (localement analytique au sens de [**25**]) $B(V)_{\mathrm{an}}$ de G dont la classe d'isomorphisme détermine celle de V. En particulier, $B(V)_{\mathrm{an}}$ "contient" la filtration de Hodge. On a bien sûr $B(V)_{\mathrm{al}} \subseteq B(V)_{\mathrm{an}}$.

Notons que $B(V)_{\mathrm{an}}$ est alors muni d'une topologie canonique (voir [**29**],§7). Comme déjà mentionné dans l'introduction, $B(V)_{\mathrm{an}}$ peut avoir plusieurs composantes topologiques de Jordan-Hölder même si $B(V)$ n'en a qu'une. L'avantage de $B(V)$ sur $B(V)_{\mathrm{an}}$ est son irréductibilité topologique et le fait que sa boule unité modulo $\mathfrak{m}_E$ donne lieu à des représentation *lisses* de G en caractéristique p. L'avantage de $B(V)_{\mathrm{an}}$ sur $B(V)$ est sa structure analytique (on peut faire agir l'algèbre de Lie).

S'il existe $B(V)$ satisfaisant les conditions (i)-(iv) ci-dessus, on peut aussi se demander si les duaux $B(V)'_{\mathrm{an}}$ et $B(V)'$ ont une interprétation rigide analytique et si la boule unité mod. $\mathfrak{m}_E$ de $B(V)$ prédit la semi-simplifiée mod. $\mathfrak{m}_E$ de V selon la règle donnée dans [**7**],Déf.1.1.

Remarque 1.3.1. — Lorsque V est réductible, il faut probablement laisser tomber la condition "$B(V)$ topologiquement irréductible". Voir par exemple §4.5.

Exemple 1.3.2. — Soit V comme précédemment cristalline et, quitte à tordre V, supposons $(\lambda_1, \lambda_2) = (0, k-1)$ et $\det(V) = \varepsilon^{k-1}$. On a $V = V(k, a_p)$ où $a_p \in \mathfrak{m}_E$ et $D_{\mathrm{pst}}(V(k, a_p))^\vee$ (le (φ, N)-module filtré dual) est isomorphe à $Ee_1 \oplus Ee_2$ avec $N = 0$ et :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \varphi(e_1) & = & p^{k-1}e_2 \\ \varphi(e_2) & = & -e_1 + a_pe_2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rclcc} \mathrm{Fil}^iD & = & D & \text{si} & i \leq 0 \\ \mathrm{Fil}^iD & = & Ee_1 & \text{si} & 1 \leq i \leq k-1 \\ \mathrm{Fil}^iD & = & 0 & \text{si} & i \geq k \end{array}\right.$$

(cela utilise [**11**]). Supposons $a_p \notin \{\pm(p^{k/2} + p^{k/2-1})\}$, on a :

$$\mathrm{Alg}(V) \otimes_E \mathrm{Lisse}(V) = \underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2 \otimes_E \mathrm{ind}_P^G(\mu_{p^{k/2-1}\alpha_1^{-1}} \otimes \mu_{p^{k/2}\alpha_2^{-1}})$$

où l'induite parabolique est l'induite lisse classique, $(\alpha_1, \alpha_2) \in E^2$ sont les valeurs propres de φ et $\mu_\lambda(x) = \lambda^{\mathrm{val}(x)}$ (voir [**7**],§3.2). On remarque qu'ici $\mathrm{Alg}(V) \otimes_E \mathrm{Lisse}(V)$ *suffit* à déterminer $V(k, a_p)$ puisqu'il n'y a pas de paramètre dans la filtration.

Voici un candidat pour le Banach $B(V) = B(k, a_p)$. Par réciprocité de Frobenius, on a une surjection $\mathrm{c-ind}_{K\mathbf{Q}_p^\times}^G \underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2 \twoheadrightarrow \mathrm{Alg}(V) \otimes_E \mathrm{Lisse}(V)$ où l'induite de gauche est l'induite lisse à support compact modulo $\mathbf{Q}_p^\times$ ([**7**],§3.2). On note $\Theta(k, a_p)$ l'image du réseau $\mathrm{c-ind}_{K\mathbf{Q}_p^\times}^G \underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}\mathcal{O}_E^2$. Dans [**7**], il est conjecturé que $\Theta(k, a_p)$ est *toujours* un réseau de $\mathrm{Alg}(V) \otimes_E \mathrm{Lisse}(V)$, i.e. ne contient pas de E-droite. Si tel est le cas, on note $B(k, a_p)$ le G-Banach unitaire complété de $\mathrm{Alg}(V) \otimes_E \mathrm{Lisse}(V)$ par rapport à $\Theta(k, a_p)$.

Théorème 1.3.3. — *Supposons* $\dim_E \mathrm{Lisse}(V) > 1$ *(i.e.* $a_p \notin \{\pm(p^{k/2}+p^{k/2-1})\}$*) et* $k \leq 2p$ *(avec* $k \neq 4$ *si* $p = 2$*).*
(i) Le $\mathcal{O}_E$*-module* $\Theta(k, a_p)$ *est un réseau de* $\mathrm{Alg}(V) \otimes_E \mathrm{Lisse}(V)$.
(ii) Le Banach $B(k, a_p)$ *est admissible.*
(iii) Si $\mathrm{val}(a_p) \neq 1$, $B(k, a_p)$ *est topologiquement irréductible.*

Démonstration. — (i) est montré dans [**7**]. Par le lemme 4.6.3, (ii) résulte du fait que $\Theta(k,a_p)\otimes\overline{\mathbf{F}_p}$ est une représentation de longueur finie ([**7**],Th.1.4) et du fait que l'espace des invariants sous $I(1)$ d'une représentation lisse irréductible avec caractère central de G sur $\overline{\mathbf{F}_p}$ est de dimension finie ([**1**],[**2**],[**6**]). (iii) résulte du fait que dans ce cas $\Theta(k,a_p)\otimes\overline{\mathbf{F}_p}$ est algébriquement irréductible ([**7**],Th.1.4). □

La borne $2p$ et les hypothèses "$k\neq 4$ si $p=2$" et "$\mathrm{val}(a_p)\neq 1$" devraient être inutiles. Notons que la semi-simplifiée modulo $\mathfrak{m}_E$ de $B(k,a_p)=B(V)$ semble effectivement prédire la semi-simplifiée modulo $\mathfrak{m}_E$ de V (voir [**7**],§6). Par ailleurs, déterminer la représentation localement analytique $B(k,a_p)_{\mathrm{an}}$ et son dual $B(k,a_p)'_{\mathrm{an}}$ me semble une question ouverte intéressante.

Remarque 1.3.4. — Le cas $a_p=\pm(p^{k/2}+p^{k/2-1})$ dans l'exemple 1.3.2 est particulier puisqu'alors $\mathrm{Alg}(V)\otimes_E\mathrm{Lisse}(V)=\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2$ (à torsion quadratique près) n'est pas un G-Banach unitaire. On peut néanmoins définir $\Theta(k,a_p)$ comme le $\mathcal{O}_E[G]$-module intersection de l'image de $\mathrm{c-ind}_{K\mathbf{Q}_p^\times}^G\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}\mathcal{O}_E^2$ dans $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2\otimes\mathrm{ind}_P^G|\ |\otimes|\ |^{-1}$ avec $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2\otimes\mathrm{St}$ et conjecturer que c'est un réseau pour tout k dans $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2\otimes\mathrm{St}$ (ça l'est pour $k\leq 2p$ par [**7**]). Le G-Banach unitaire $B(k,a_p)$ dans ce cas semble étrangement être (à torsion près) la complétion de $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2\otimes\mathrm{St}$ par rapport à $\Theta(k,a_p)$. Cette complétion est *a priori* différente des complétions "semi-stables" de $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2\otimes\mathrm{St}$ construites dans cet article.

Exemple 1.3.5. — Soit V comme précédemment semi-stable non cristalline et, quitte à tordre V, supposons $(\lambda_1,\lambda_2)=(0,k-1)$ et $\det(V)=\varepsilon^{k-1}$. À torsion près par un caractère quadratique non ramifié, on a $V=V(k,\mathcal{L})$ où $k\geq 3$, $\mathcal{L}\in E$ et $D_{\mathrm{pst}}(V(k,\mathcal{L}))^\vee$ est isomorphe à $Ee_1\oplus Ee_2$ avec :

$$\begin{cases}N(e_1)&=&e_2\\N(e_2)&=&0\end{cases}\begin{cases}\varphi(e_1)&=&p^{k/2}e_1\\\varphi(e_2)&=&p^{k/2-1}e_2\end{cases}\begin{cases}\mathrm{Fil}^iD&=&D&\text{si}&i\leq 0\\\mathrm{Fil}^iD&=&E(e_1+\mathcal{L}e_2)&\text{si}&1\leq i\leq k-1\\\mathrm{Fil}^iD&=&0&\text{si}&i\geq k\end{cases}$$

(cela utilise [**11**]). Notons que $\mathrm{Alg}(V)\otimes_E\mathrm{Lisse}(V)=\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2\otimes\mathrm{St}$ ne détermine pas V à cause de l'invariant $\mathcal{L}$. Pour $k=2$, le module filtré ci-dessus correspond à des représentations $V(2,\mathcal{L})$ qui sont réductibles. La suite de cet article va consister en particulier à donner une construction (largement conjecturale) de $B(V)=B(k,\mathcal{L})$.

Lorsque $\mathrm{Lisse}(V)$ est une série principale quelconque (e.g. ramifiée), on devrait avoir une situation analogue à celle de l'exemple 1.3.2 au sens où $\mathrm{Alg}(V)\otimes_E\mathrm{Lisse}(V)$ détermine encore V. Lorsque $\mathrm{Lisse}(V)$ est une série discrète quelconque (e.g. une supercuspidale), on devrait avoir une situation analogue à celle de l'exemple 1.3.5 au sens où $\mathrm{Alg}(V)\otimes_E\mathrm{Lisse}(V)$ ne détermine pas V.

2. Des représentations localement analytiques

On construit les représentations localement analytiques $\Sigma(k,\mathfrak{L})$ mentionnées dans l'introduction. L'idée est de combiner logarithme p-adique et induction parabolique.

2.1. Construction des représentations. — Soit $\mathfrak{L}\in\overline{\mathbf{Q}_p}$ et $E_{\mathfrak{L}}=\mathbf{Q}_p(\mathfrak{L},\sqrt{p})\subset\overline{\mathbf{Q}_p}$. Notons que $\log_{\mathfrak{L}}(\mathbf{Q}_p^\times)\subseteq\mathbf{Q}_p(\mathfrak{L})\subseteq E_{\mathfrak{L}}$. Soit $\sigma(\mathfrak{L})$ la représentation suivante de P sur $E_{\mathfrak{L}}^2=E_{\mathfrak{L}}e_1\oplus E_{\mathfrak{L}}e_2$:

$$\begin{aligned}\sigma(\mathfrak{L})\Big[\begin{pmatrix}a&b\\0&d\end{pmatrix}\Big](e_1)&=e_1\\ \sigma(\mathfrak{L})\Big[\begin{pmatrix}a&b\\0&d\end{pmatrix}\Big](e_2)&=\big(\log_{\mathfrak{L}}(a)-\log_{\mathfrak{L}}(d)\big)e_1+e_2.\end{aligned}$$

On a donc une extension non scindée : $0\to\mathbf{1}\to\sigma(\mathfrak{L})\to\mathbf{1}\to 0$ où $\mathbf{1}$ désigne la représentation triviale. On pose $\sigma(k,\mathfrak{L})=\sigma(\mathfrak{L})\otimes\chi_k$ où $\chi_k:P\to E_{\mathfrak{L}}^\times$ est le caractère $\left(\begin{smallmatrix}a&b\\0&d\end{smallmatrix}\right)\mapsto|ad|^{\frac{k-2}{2}}d^{k-2}$. Le caractère central de $\sigma(k,\mathfrak{L})$ est ε^{k-2} (et $\sigma(2,\mathfrak{L})=\sigma(\mathfrak{L})$).

On note $\mathrm{ind}_P^G\sigma(k,\mathfrak{L})$ le $E_{\mathfrak{L}}$-espace vectoriel des fonctions $f:G\to E_{\mathfrak{L}}e_1\oplus E_{\mathfrak{L}}e_2$ localement analytiques telles que $f(bg)=\sigma(k,\mathfrak{L})(b)\big(f(g)\big)$ pour tout $b\in P$, $g\in G$. Il s'injecte dans le $E_{\mathfrak{L}}$-espace vectoriel $C^{\mathrm{an}}(G,E_{\mathfrak{L}}e_1\oplus E_{\mathfrak{L}}e_2)$ de toutes les fonctions localement analytiques de G dans $E_{\mathfrak{L}}e_1\oplus E_{\mathfrak{L}}e_2$ et on le munit de la topologie localement convexe induite par la topologie naturelle de $C^{\mathrm{an}}(G,E_{\mathfrak{L}}e_1\oplus E_{\mathfrak{L}}e_2)$ (voir [**25**],§2). On note de même $\mathrm{ind}_P^G\chi_k$ le $E_{\mathfrak{L}}$-espace vectoriel des fonctions $f:G\to E_{\mathfrak{L}}$ localement analytiques telles que $f(bg)=\chi_k(b)f(g)$ ($b\in P$, $g\in G$) muni de la topologie induite par celle de $C^{\mathrm{an}}(G,E_{\mathfrak{L}})$. On munit $\mathrm{ind}_P^G\sigma(k,\mathfrak{L})$ et $\mathrm{ind}_P^G\chi_k$ de l'action à gauche continue de G usuelle : $(g\cdot f)(g')=f(g'g)$.

Une suite exacte d'espaces vectoriels topologiques $0\to V'\to V\to V''\to 0$ est dite stricte si la topologie de V' est induite par celle de V et si la topologie de V'' est la topologie quotient de celle de V.

Lemme 2.1.1. — *On a une suite exacte stricte d'espaces vectoriels localement convexes compatible à l'action de G :*

$$0\to\mathrm{ind}_P^G\chi_k\to\mathrm{ind}_P^G\sigma(k,\mathfrak{L})\xrightarrow{s}\mathrm{ind}_P^G\chi_k\to 0.$$

Démonstration. — Le seul point non trivial est que s est bien surjective et stricte pour les topologies. La décomposition d'Iwasawa $G=PK$ fournit par [**15**],Sa.4.1.4 des isomorphismes topologiques de restriction :

$$\mathrm{ind}_P^G\sigma(k,\mathfrak{L})\xrightarrow{\sim}\mathrm{ind}_{P\cap K}^K\sigma(k,\mathfrak{L})|_{P\cap K}\ \text{ et }\ \mathrm{ind}_P^G\chi_k\xrightarrow{\sim}\mathrm{ind}_{P\cap K}^K\chi_k|_{P\cap K}.$$

La décomposition de Bruhat $K = I \amalg (P \cap K)wI$ fournit un isomorphisme topologique ([**15**],Kor.2.2.4 et Sa.4.1.4) :

$$\mathrm{ind}_{P\cap K}^{K}\sigma(k,\mathcal{L})|_{P\cap K} \xrightarrow{\sim} \mathrm{ind}_{P\cap K}^{I}\sigma(k,\mathcal{L})|_{P\cap K} \oplus \mathrm{ind}_{wPw\cap I}^{I}\sigma(k,\mathcal{L})^{w}|_{wPw\cap I}$$

où $\sigma(k,\mathcal{L})^{w}(g) = \sigma(k,\mathcal{L})(wgw)$ (resp. avec χ_k à la place de $\sigma(k,\mathcal{L})$). Enfin, par [**15**],Sa.4.3.1, les deux applications :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{ind}_{P\cap K}^{I}\sigma(k,\mathcal{L})|_{P\cap K} & \xrightarrow{\sim} & C^{\mathrm{an}}(\mathbf{Z}_p, E_{\mathcal{L}}^{2}) \\ f & \mapsto & \Big(x \mapsto f\Big[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ px & 1 \end{pmatrix}\Big]\Big) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{ind}_{wPw\cap I}^{I}\sigma(k,\mathcal{L})^{w}|_{wPw\cap I} & \xrightarrow{\sim} & C^{\mathrm{an}}(\mathbf{Z}_p, E_{\mathcal{L}}^{2}) \\ f & \mapsto & \Big(x \mapsto f\Big[\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Big]\Big) \end{array}$$

sont des isomorphismes topologiques (resp. avec χ_k et $C^{\mathrm{an}}(\mathbf{Z}_p, E_{\mathcal{L}})$). Le résultat découle donc du fait que la projection $C^{\mathrm{an}}(\mathbf{Z}_p, E_{\mathcal{L}}^{2}) \to C^{\mathrm{an}}(\mathbf{Z}_p, E_{\mathcal{L}})$ sur une composante est surjective et stricte. □

Soit $\tilde{\chi}_k : P \to E_{\mathcal{L}}^{\times}$, $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \mapsto |ad|^{\frac{k-2}{2}} a^{k-1}d^{-1}$, on a d'après [**26**],§4 une suite exacte stricte compatible à G d'espaces vectoriels localement convexes :

$$0 \to \underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E_{\mathcal{L}}^{2} \otimes \big(\mathrm{ind}_{P}^{G}1\big)^{\mathrm{lisse}} \to \mathrm{ind}_{P}^{G}\chi_k \to \mathrm{ind}_{P}^{G}\tilde{\chi}_k \to 0$$

où $\big(\mathrm{ind}_{P}^{G}1\big)^{\mathrm{lisse}}$ désigne le $E_{\mathcal{L}}$-espace vectoriel des fonctions localement constantes sur $P\backslash G$ à valeurs dans $E_{\mathcal{L}}$ avec action à gauche usuelle de G. Dans cette suite exacte, la représentation de gauche est munie de la topologie localement convexe la plus fine (cf. [**26**],§4). On a $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E_{\mathcal{L}}^{2} \subset \underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E_{\mathcal{L}}^{2} \otimes \big(\mathrm{ind}_{P}^{G}1\big)^{\mathrm{lisse}}$: c'est le sous-espace de $\mathrm{ind}_{P}^{G}\chi_k$ des polynômes homogènes de degré $k-2$ en les variables c et d (en notant $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ un élément de G).

On définit les représentations suivantes de G :

$$\begin{array}{rcl} \Sigma(k) & \stackrel{\text{déf}}{=} & \mathrm{ind}_{P}^{G}\chi_k/\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E_{\mathcal{L}}^{2} \\ \Sigma(k,\mathcal{L}) & \stackrel{\text{déf}}{=} & s^{-1}(\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E_{\mathcal{L}}^{2})/\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E_{\mathcal{L}}^{2} \end{array}$$

où s est la surjection du lemme 2.1.1. On les munit de la topologie quotient de la topologie induite par $\mathrm{ind}_{P}^{G}\sigma(k,\mathcal{L})$ (ou de manière équivalente de la topologie induite par la topologie quotient de $\mathrm{ind}_{P}^{G}\sigma(k,\mathcal{L})/\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E_{\mathcal{L}}^{2}$). Le caractère central de $\Sigma(k)$ et $\Sigma(k,\mathcal{L})$ est ε^{k-2}.

Rappelons ([**25**],§3) qu'une représentation continue de G sur un $E_{\mathcal{L}}$-espace vectoriel localement convexe séparé tonnelé V est dite localement analytique si, pour tout $v \in V$, l'application $G \to V$, $g \mapsto g \cdot v$ est localement analytique ([**15**],§2.1). Le théorème suivant est une conséquence facile de ce qui précède et des résultats de [**25**] et [**26**] :

Théorème 2.1.2. — *(i) $\Sigma(k)$ et $\Sigma(k,\mathfrak{L})$ sont des représentations localement analytiques de G sur des $E_{\mathfrak{L}}$-espaces vectoriels localement convexes réflexifs.*
(ii) On a une suite exacte stricte compatible à G :

$$0 \to \Sigma(k) \to \Sigma(k,\mathfrak{L}) \to \underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E_{\mathfrak{L}}^2 \to 0.$$

(iii) $\Sigma(k,\mathfrak{L})$ (resp. $\Sigma(k)$) a trois (resp. deux) facteurs de Jordan-Hölder topologiques qui sont $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E_{\mathfrak{L}}^2 \otimes \mathrm{St}$, $\mathrm{ind}_P^G\tilde{\chi}_k$ et $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E_{\mathfrak{L}}^2$ (resp. $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E_{\mathfrak{L}}^2 \otimes \mathrm{St}$ et $\mathrm{ind}_P^G\tilde{\chi}_k$).
(iv) $\Sigma(k)$ est une extension topologiquement non scindée de $\mathrm{ind}_P^G\tilde{\chi}_k$ par $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E_{\mathfrak{L}}^2 \otimes \mathrm{St}$.

2.2. Un autre modèle.

— De façon analogue à [**22**],§3, on peut interpréter $\Sigma(k,\mathfrak{L})$ comme un espace de fonctions localement analytiques sur $\mathbf{Q}_p$ ayant un certain comportement à l'infini modulo les polynômes de degré $\leq k-2$.

Proposition 2.2.1. — *Il existe une bijection $E_{\mathfrak{L}}$-linéaire compatible à l'action de G entre $s^{-1}(\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E_{\mathfrak{L}}^2)$ et le $E_{\mathfrak{L}}$-espace vectoriel $C(k,\mathfrak{L})$ des fonctions localement analytiques H sur $\mathbf{Q}_p$ à valeurs dans $E_{\mathfrak{L}}$ telles que pour $|z| \gg 0$:*

$$H(z) = z^{k-2}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{z^n}\Big) - 2P(z)\log_{\mathfrak{L}}(z) \tag{1}$$

où $a_n \in E_{\mathfrak{L}}$, $P(z)$ est un polynôme en z de degré $\leq k-2$ à coefficients dans $E_{\mathfrak{L}}$ (dépendant de H) et où l'action de G est donnée par :

$$\begin{aligned}\Big[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\cdot H\Big](z) &= |ad-bc|^{\frac{k-2}{2}}(bz+d)^{k-2}\Big[H\Big(\frac{az+c}{bz+d}\Big) \\ &\quad + P\Big(\frac{az+c}{bz+d}\Big)\log_{\mathfrak{L}}\Big(\frac{ad-bc}{(bz+d)^2}\Big)\Big]\end{aligned} \tag{2}$$

(prolongé par continuité en z tel que $bz+d=0$).

Démonstration. — Si $P(X,Y)$ est un polynôme homogène de degré $\leq k-2$ en les variables X et Y, on note $P(g) = P(c,d)$ pour $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right) \in G$. L'espace sous-jacent à $s^{-1}(\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E_{\mathfrak{L}}^2) \otimes |\det|^{-\frac{k-2}{2}}$ est formé des fonctions $f : G \to E_{\mathfrak{L}}$ localement analytiques telles qu'il existe un polynôme $P_f(X,Y)$ homogène de degré $\leq k-2$ à coefficients dans $E_{\mathfrak{L}}$ (nécessairement unique) vérifiant pour $g \in G$ et $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d\end{smallmatrix}\right) \in P$:

$$f\Big(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d\end{pmatrix} g\Big) = d^{k-2}\Big(f(g) + \big(\log_{\mathfrak{L}}(a) - \log_{\mathfrak{L}}(d)\big)P_f(g)\Big). \tag{3}$$

Un calcul montre que la fonction $F_f(g) \overset{\text{déf}}{=} f(g) - P_f(g)\log_{\mathfrak{L}}(\det(g))$ satisfait $F_f\big(\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)g\big) = F_f(g)$ pour tout $\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \in P$, donc ne dépend que de (c,d) dans

$g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ puisque :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha + c\beta & b\alpha + d\beta \\ c & d \end{pmatrix}.$$

De plus, si $\lambda \in \mathbf{Q}_p^\times \hookrightarrow G$, un calcul facile donne :

$$F_f(\lambda g) = \lambda^{k-2}\big(F_f(g) - 2P_f(g)\log_{\mathcal{L}}(\lambda)\big). \tag{4}$$

On pose $H_f(z) \stackrel{\text{déf}}{=} F_f\big(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{smallmatrix}\right)\big) = f\big(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{smallmatrix}\right)\big)$ pour $z \in \mathbf{Q}_p$: c'est une fonction localement analytique à valeurs dans $E_{\mathcal{L}}$ vérifiant pour $z \neq 0$:

$$\begin{aligned} H_f(z) &= F_f\left(z\begin{pmatrix} z^{-1} & 0 \\ 1 & z^{-1} \end{pmatrix}\right) \\ &\stackrel{(4)}{=} z^{k-2}\left(F_f\left(\begin{pmatrix} z^{-1} & 0 \\ 1 & z^{-1} \end{pmatrix}\right) - 2P_f(1, z^{-1})\log_{\mathcal{L}}(z)\right) \\ &= z^{k-2}F_f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & z^{-1} \end{pmatrix}\right) - 2z^{k-2}P_f(1, z^{-1})\log_{\mathcal{L}}(z). \end{aligned}$$

Comme $F_f\big(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & z^{-1} \end{smallmatrix}\right)\big)$ est analytique en z^{-1} quand $|z| \gg 0$, $H_f(z)$ vérifie bien une équation du type (1) pour $|z| \gg 0$ avec $P(z) = z^{k-2}P_f(1, z^{-1}) = P_f(z, 1)$. L'application $f \mapsto H_f$ est clairement $E_{\mathcal{L}}$-linéaire. Si $H_f \equiv 0$, alors $F_f\big(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & 1 \end{smallmatrix}\right)\big) \equiv 0$ pour $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & 1 \end{smallmatrix}\right) \in G$, $z^{k-2}P_f(1, z^{-1})\log_{\mathcal{L}}(z) = 0$ pour $|z| \gg 0$ et $z^{k-2}F_f\big(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & z^{-1} \end{smallmatrix}\right)\big) = 0$ pour $|z| \gg 0$. Donc $P_f \equiv 0$ et $f(g) = F_f(g)$ est nul si $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ avec $d \neq 0$ par (4) ou si $g = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ par continuité. On en déduit facilement $f \equiv 0$ avec (3) d'où l'injectivité de $f \mapsto H_f$. Soit $H \in C(k, \mathcal{L})$, on pose $P_f(1, z) = z^{k-2}P(z^{-1})$ et :

$$\begin{aligned} F_f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) &= d^{k-2}\big(H(cd^{-1}) - 2P_f(c, d)\log_{\mathcal{L}}(d)\big) \text{ si } d \neq 0 \\ F_f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}\right) &= c^{k-2}\big(a_0 - 2P_f(1, 0)\log_{\mathcal{L}}(c)\big) \end{aligned}$$

où a_0 est le premier coefficient dans (1). Il est facile de vérifier que $f(g) \stackrel{\text{déf}}{=} F_f(g) + P_f(g)\log_{\mathcal{L}}(\det(g))$ est dans $s^{-1}(\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E_{\mathcal{L}}^2) \otimes |\det|^{-\frac{k-2}{2}}$ et a pour image H par l'application précédente, d'où sa surjectivité. La compatibilité à l'action de G est laissée au lecteur. □

On a de même un isomorphisme entre $\mathrm{ind}_B^G \chi_k$ et $C(k) \stackrel{\text{déf}}{=} \{H \in C(k, \mathcal{L}) \,|\, P \equiv 0\}$. On munit $C(k, \mathcal{L})$ (resp. $C(k)$) de la topologie déduite de celle de $s^{-1}(\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E_{\mathcal{L}}^2)$ (resp. de $\mathrm{ind}_B^G \chi_k$).

Corollaire 2.2.2. — *On a des isomorphismes topologiques compatibles à G :*

$$\begin{aligned} \Sigma(k) &\simeq C(k)/\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E_{\mathcal{L}}^2 \\ \Sigma(k, \mathcal{L}) &\simeq C(k, \mathcal{L})/\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E_{\mathcal{L}}^2 \end{aligned}$$

où $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E_{\mathfrak{L}}^2 \subset C(k) \subset C(k,\mathfrak{L})$ *est le sous-espace des* H *qui sont des polynômes en* z *de degré* $\leq k-2$.

2.3. Questions de topologie. — Précisons un peu la topologie sur $C(k,\mathfrak{L})$ et $C(k)$ (et donc sur $\Sigma(k)$ et $\Sigma(k,\mathfrak{L})$).

Soit $U = (U_i)_{0\leq i\leq s}$ un recouvrement fini de $\mathbf{Q}_p$ par des ouverts U_i deux à deux disjoints tels que :

$$\begin{aligned} U_0 &= \{z \in \mathbf{Q}_p \mid |z| > r_0\} \\ U_i &= \{z \in \mathbf{Q}_p \mid |z - z_i| < r_i\},\ 1 \leq i \leq s \end{aligned}$$

pour des $r_i \in |E_{\mathfrak{L}}^\times|$ et des $z_i \in \mathbf{Q}_p$. On définit $C(k,\mathfrak{L})_U$ comme le sous-espace de $C(k,\mathfrak{L})$ des fonctions H telles que :

$$H(z)|_{U_i} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{i,n}(z-z_i)^n,\ 1 \leq i \leq s \tag{5}$$

$$H(z)|_{U_0} = z^{k-2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{z^n} - 2P(z)\log_{\mathfrak{L}}(z) \tag{6}$$

avec $a_n, a_{i,n} \in E_{\mathfrak{L}}$ et $|a_n|r_0^{-n}$, $|a_{i,n}|r_i^n$ bornés quand $n \to +\infty$. On définit aussi :

$$C(k)_U \overset{\text{déf}}{=} \{H \in C(k,\mathfrak{L})_U \mid P \equiv 0 \text{ dans } (6)\}.$$

On a une injection (non compatible à G) :

$$\begin{aligned} \mathrm{Sym}^{k-2}E_{\mathfrak{L}}^2 &\hookrightarrow C(k,\mathfrak{L})_U \\ P(z) &\mapsto H(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } |z| \leq r_0 \\ -2P(z)\log_{\mathfrak{L}}(z) & \text{si } |z| > r_0 \end{cases} \end{aligned}$$

qui induit un isomorphisme $E_{\mathfrak{L}}$-linéaire $C(k,\mathfrak{L})_U \simeq C(k)_U \oplus \mathrm{Sym}^{k-2}E_{\mathfrak{L}}^2$. Les espaces $C(k)_U$ et $\mathrm{Sym}^{k-2}E_{\mathfrak{L}}^2$ sont tous les deux naturellement des Banach. Pour $\mathrm{Sym}^{k-2}E_{\mathfrak{L}}^2$ c'est évident et pour $C(k)_U$, il est bien connu que c'est un Banach pour la norme $\|H(z)\|_U = \max_{0\leq i\leq s}(\|H(z)|_{U_i}\|)$ où $\|H(z)|_{U_i}\| = \sup_{n\geq 0}|a_{i,n}|r_i^n$ si $i \geq 1$ et $\|H(z)|_{U_0}\| = \sup_{n\geq 0}|a_n|r_0^{-n}$. On munit $C(k,\mathfrak{L})_U$ de la topologie somme directe. Pour $H \in C(k,\mathfrak{L})_U$, posons :

$$[H]_U(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } |z| \leq r_0 \\ -2P(z)\log_{\mathfrak{L}}(z) & \text{si } |z| > r_0 \end{cases} \tag{7}$$

avec $P(z)$ comme en (6), alors $C(k,\mathfrak{L})_U$ est un Banach pour la norme :

$$\|H(z)\|_U = \max\big(\|(H-[H]_U)(z)\|_U, \max_{0\leq n\leq k-2}|b_n|\big) \tag{8}$$

où $-2P(z) = \sum_{n=0}^{k-2} b_n z^n$. Si U' est un recouvrement plus fin que U, les flèches de transition $C(k)_U \to C(k)_{U'}$ sont injectives, continues et compactes (cf. par exemple [**21**],§3.2), donc aussi les flèches $C(k,\mathfrak{L})_U \to C(k,\mathfrak{L})_{U'}$ car $\mathrm{Sym}^{k-2}E_{\mathfrak{L}}^2$

est de dimension finie (cf. [**24**],§§5 et 16). Il est clair par ailleurs qu'on a des isomorphismes $E_{\mathcal{L}}$-linéaires $C(k,\mathcal{L}) \xrightarrow{\sim} \varinjlim C(k,\mathcal{L})_U$ et $C(k) \xrightarrow{\sim} \varinjlim C(k)_U$.

Lemme 2.3.1. — *La topologie de $C(k,\mathcal{L}) = \varinjlim C(k,\mathcal{L})_U$ (resp. de $C(k) = \varinjlim C(k)_U$) définie au §2.2 est la topologie limite inductive ([**24**],§5.E).*

Démonstration. — Choisissant une section $E_{\mathcal{L}}$-linéaire $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E_{\mathcal{L}}^2 \hookrightarrow C(k,\mathcal{L})$ de la surjection $C(k,\mathcal{L}) \twoheadrightarrow \underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E_{\mathcal{L}}^2$, nécessairement continue pour les deux topologies de $C(k,\mathcal{L})$, on a un isomorphisme topologique $C(k,\mathcal{L}) \simeq C(k) \oplus \underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E_{\mathcal{L}}^2$ pour les deux topologies de sorte qu'il suffit de montrer le lemme pour $C(k)$. À torsion près par un caractère (ce qui ne change pas la topologie), on a $C(k) \simeq \mathrm{ind}_P^G 1 \otimes d^{k-2}$. L'isomorphisme topologique $\mathrm{ind}_P^G 1 \otimes d^{k-2} \simeq C^{\mathrm{an}}(\mathbf{Z}_p, E_{\mathcal{L}}) \oplus C^{\mathrm{an}}(\mathbf{Z}_p, E_{\mathcal{L}})$ de la preuve du lemme 2.1.1 se traduit via la proposition 2.2.1 par :

$$\begin{array}{ccc} C(k) & \xrightarrow{\sim} & C^{\mathrm{an}}(\mathbf{Z}_p, E_{\mathcal{L}}) \oplus C^{\mathrm{an}}(\mathbf{Z}_p, E_{\mathcal{L}}) \\ H & \mapsto & \big(x \mapsto H(px)\big) \oplus \big(x \mapsto x^{k-2}H(x^{-1})\big) \end{array}$$

où $x \mapsto x^{k-2}H(x^{-1})$ est prolongé par continuité en 0 en utilisant (1). Il est alors facile de vérifier que la topologie de droite induit bien la topologie de la limite inductive à gauche (voir par exemple [**24**],§16 pour la topologie sur $C^{\mathrm{an}}(\mathbf{Z}_p, E_{\mathcal{L}})$). □

2.4. Étude des entrelacements. — On regarde les entrelacements entre les représentations $\Sigma(k,\mathcal{L})$.

Si l'on remplace $E_{\mathcal{L}}$ par une extension finie quelconque E de $E_{\mathcal{L}}$, il est d'abord clair que toutes les représentations du §2.1, en particulier $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E_{\mathcal{L}}^2 \otimes \mathrm{St}$, $\Sigma(k)$ et $\Sigma(k,\mathcal{L})$, sont remplacées par leur extension des scalaires de $E_{\mathcal{L}}$ à E. On ne mentionnera pas dans la suite sur les représentations elles-mêmes cette dépendance triviale du corps des coefficients (que l'on s'autorise à agrandir si besoin est).

Lemme 2.4.1. — *Deux représentations $\Sigma(k,\mathcal{L})$ et $\Sigma(k',\mathcal{L}')$ sont topologiquement isomorphes (sur une extension finie commune E de $E_{\mathcal{L}}$ et $E_{\mathcal{L}'}$) si et seulement si $k = k'$ et $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$.*

Démonstration. — On a $k = k'$ en regardant les caractères centraux. Fixons un isomorphisme topologique $\psi : \Sigma(k,\mathcal{L}) \xrightarrow{\sim} \Sigma(k,\mathcal{L}')$ commutant à G. Par le théorème 2.1.2, ψ préserve $\Sigma(k) = \mathrm{ind}_P^G \chi_k / \underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2$. Quitte à multiplier par un scalaire non nul, on peut supposer $\psi|_{\Sigma(k)} = \mathrm{Id}$ par [**25**],Prop.6.2 puisque cette représentation n'est pas scindée. De plus, il existe $C \in E^\times$ tel que ψ induit la multiplication par C :

$$\Sigma(k,\mathcal{L})/\Sigma(k) \simeq \underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2 \xrightarrow{\times C} \underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2 \simeq \Sigma(k,\mathcal{L}')/\Sigma(k).$$

Via la proposition 2.2.1, ψ induit un isomorphisme :

$$C(k,\mathcal{L})/\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2 \simeq C(k,\mathcal{L}')/\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2$$

qui est donc l'identité sur les classes des H analytiques à l'infini. Soit $H \in C(k, \mathfrak{L})$ avec $P = 1$ et notons $H' \in C(k, \mathfrak{L}')$ un représentant de sa classe image (H' n'est pas ici la dérivée de H !), alors $H'(z) + 2C \log_{\mathfrak{L}'}(z)$ est analytique pour $|z| \gg 0$ par ce qui précède. Soit $a \in \mathbf{Q}_p^\times$, on vérifie avec (2) que $|a|^{-\frac{k-2}{2}}\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot H - H$ est analytique à l'infini. Puisque $\psi|_{\Sigma(k)} = \mathrm{Id}$, il existe un élément de $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2} E^2$, i.e. un polynôme $P_a(z)$ de degré $\leq k-2$, tel que :

$$|a|^{-\frac{k-2}{2}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot H - H = |a|^{-\frac{k-2}{2}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot H' - H' + P_a$$

c'est-à-dire $H(az) - H(z) + \log_{\mathfrak{L}}(a) = H'(az) - H'(z) + C \log_{\mathfrak{L}'}(a) + P_a(z)$ pour tout $z \in \mathbf{Q}_p$. En regardant le développement de ces fonctions au voisinage de 0, on obtient que le terme constant de $P_a(z) + C \log_{\mathfrak{L}'}(a) - \log_{\mathfrak{L}}(a)$ est nul. En regardant le développement de ces fonctions à l'infini et en identifiant les termes constants, on en déduit $-2 \log_{\mathfrak{L}}(a) = -2C \log_{\mathfrak{L}'}(a)$ pour tout $a \in \mathbf{Q}_p^\times$ d'où il vient $C = 1$ et $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}'$. □

Lemme 2.4.2. — *La représentation $\Sigma(k, \mathfrak{L})$ a un seul sous-objet topologiquement irréductible, qui est $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2} E_{\mathfrak{L}}^2 \otimes \mathrm{St}$, et un seul quotient topologiquement irréductible, qui est $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2} E_{\mathfrak{L}}^2$.*

Démonstration. — Vu le théorème 2.1.2, il suffit de vérifier qu'il n'y a pas de section G-équivariante (automatiquement continue) $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2} E_{\mathfrak{L}}^2 \hookrightarrow \Sigma(k, \mathfrak{L})$. Supposons qu'une telle section existe et soit $H \in C(k, \mathfrak{L})$ un représentant de l'image de $1 \in \underline{\mathrm{Sym}}^{k-2} E_{\mathfrak{L}}^2$, i.e. H vérifie (1) avec $P \equiv 1$. Il existe un polynôme $P_a(z)$ de degré $\leq k-2$ tel que $|a|^{-\frac{k-2}{2}}\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot H - H = P_a$, soit $H(az) - H(z) + \log_{\mathfrak{L}}(a) = P_a(z)$ pour tout $z \in \mathbf{Q}_p$. En regardant, comme dans la preuve d'avant, les termes constants en 0 et à l'infini, on obtient $-2 \log_{\mathfrak{L}}(a) = 0$ pour tout $a \in \mathbf{Q}_p^\times$ ce qui est absurde. □

Pour un caractère localement analytique $\chi : \mathbf{Q}_p^\times \to E^\times$ (où E est une extension finie quelconque de $E_{\mathfrak{L}}$ dans $\overline{\mathbf{Q}_p}$), posons $\Sigma(k, \mathfrak{L}, \chi) \overset{\text{déf}}{=} \Sigma(k, \mathfrak{L}) \otimes (\chi \circ \det)$. Des deux lemmes précédents, on déduit aisément :

Corollaire 2.4.3. — *Soit E une extension finie commune de $E_{\mathfrak{L}}$ et $E_{\mathfrak{L}'}$ et $\chi, \chi' : \mathbf{Q}_p^\times \to E^\times$ deux caractères localement analytiques, alors :*
(i) $\mathrm{Hom}_G\big(\Sigma(k, \mathfrak{L}, \chi), \Sigma(k', \mathfrak{L}', \chi')\big) \neq 0$ *si et seulement si* $(k, \mathfrak{L}, \chi) = (k', \mathfrak{L}', \chi')$,
(ii) $\mathrm{End}_G\big(\Sigma(k, \mathfrak{L}, \chi)\big) = E$.

3. Un théorème de dualité

Le but de cette partie est de montrer que le dual $\Sigma(k, \mathfrak{L})'$ de $\Sigma(k, \mathfrak{L})$ s'identifie topologiquement et de façon G-équivariante à un certain espace de fonctions "$\log_{\mathfrak{L}}$-rigides" sur le demi-plan de Poincaré p-adique. Ce résultat est une extension d'un théorème de Morita ([**22**],§5) qui concernait le dual $\Sigma(k)'$ de $\Sigma(k)$.

3.1. Rappel de la dualité de Morita. — On fixe un entier $k \geq 2$ et une extension finie E de $\mathbf{Q}_p$ dans $\overline{\mathbf{Q}_p}$. Soit $\Omega = \mathbf{C}_p \backslash \mathbf{Q}_p$ le demi-plan de Poincaré p-adique (ou plutôt ses points à valeurs dans $\mathbf{C}_p$). Soit $U = (U_i)_{0 \leq i \leq s}$ un recouvrement disjoint de $\mathbf{Q}_p$ dans $\mathbf{C}_p$ comme au §2.3, c'est-à-dire $U_i = \{z \in \mathbf{C}_p \mid |z - z_i| < r_i\}$, $r_i \in |E^\times|$, etc. On note Ω_U l'affinoïde $\mathbf{C}_p \backslash U \subset \Omega$ et $O(k)_U$ les fonctions rigides analytiques E-rationnelles sur Ω_U (la signification de k viendra de l'action de G), i.e. les fonctions $F_U : \Omega_U \to \mathbf{C}_p$ de la forme :

$$F_U(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n + \sum_{i=1}^{s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{i,n}}{(z - z_i)^n} \tag{9}$$

avec $b_n, b_{i,n} \in E$ et $|b_n| r_0^n \to 0$, $|b_{i,n}| r_i^{-n} \to 0$ quand $n \to +\infty$. L'algèbre $O(k)_U$ est une algèbre de Banach pour la norme :

$$\begin{aligned} \|F_U\| &= \max_{z \in \Omega_U} |F_U(z)| \\ &= \max\big(\max_{n \geq 0} |b_n| r_0^n, \max_{n \geq 1} |b_{1,n}| r_1^{-n}, \ldots, \max_{n \geq 1} |b_{s,n}| r_s^{-n}\big) \end{aligned} \tag{10}$$

et si U' est plus fin que U, les applications de restriction $O(k)_{U'} \to O(k)_U$, $F_{U'} \mapsto F_{U'}|_{\Omega_U}$ sont injectives et continues. On pose $O(k) \overset{\text{déf}}{=} \varprojlim O(k)_U$ muni de la topologie de la limite projective ([**24**],§5.D) et de l'action à gauche de G :

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot F\right](z) = |ad - bc|^{-\frac{k-2}{2}} \frac{ad - bc}{(bz + d)^k} F\Big(\frac{az + c}{bz + d}\Big) \tag{11}$$

où $F \in O(k)$. L'application $G \times O(k) \to O(k)$ est alors continue (voir [**28**],Lem.1.3 si $k = 2$, ou le lemme 3.2.1) et on vérifie que $\mathbf{Q}_p^\times$ agit par $\varepsilon^{-(k-2)}$. Comme il existe un système cofinal dénombrable de recouvrements U, $O(k)$ est un espace de Fréchet (voir [**24**], preuve de la proposition 16.5 ou [**28**],§1).

Soit $U = (U_i)_{0 \leq i \leq s}$ comme ci-dessus, F_U une fonction rigide analytique sur Ω_U comme en (9) et H une fonction de $\mathbf{Q}_p$ dans E comme en (5) et (6). On définit l'accouplement E-linéaire à valeurs dans E :

$$\langle F_U, H\rangle_{U,\mathrm{Mor}} \overset{\text{déf}}{=} \sum_{Q \in \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)} \mathrm{res}_Q\big(F_U(z)H(z)dz\big) \tag{12}$$

où "res_Q" signifie "résidu en Q". Explicitement :

$$\begin{aligned} \mathrm{res}_Q\big(F_U(z)H(z)dz\big) &= 0 \text{ si } Q \notin \{\infty,\ z_1, \ldots, z_s\} \\ \mathrm{res}_{z_i}\big(F_U(z)H(z)dz\big) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_{i,n} b_{i,n+1} \text{ si } i \in \{1, \ldots, s\} \\ \mathrm{res}_\infty\big(F_U(z)H(z)dz\big) &= -\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+k-1} b_n + \sum_{i=1}^{s} \sum_{n=0}^{k-2} a_n \sum_{m=1}^{k-1-n} b_{i,m} \mathrm{res}_\infty\Big(\frac{z^{k-2-n}}{(z - z_i)^m} dz\Big) \end{aligned}$$

et notons que les sommes infinies convergent bien (par exemple en écrivant $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{i,n} b_{i,n+1} = r_i \sum_{n=0}^{+\infty} (a_{i,n} r_i^n)\big(\frac{b_{i,n+1}}{r_i^{n+1}}\big)$).

Remarque 3.1.1. — Le terme $\sum_{i=1}^{s}\sum_{n=0}^{k-2}a_n\sum_{m=1}^{k-1-n}b_{i,m}\mathrm{res}_\infty\bigl(\frac{z^{k-2-n}}{(z-z_i)^m}dz\bigr)$ est oublié dans [**22**].

Soit $(F,H)\in O(k)\times C(k)$, alors $\langle F|_{\Omega_U},H\rangle_{U,\mathrm{Mor}}$ ne dépend pas de U tel que $H\in C(k)_U$ ([**21**],§3.4) et définit un accouplement E-linéaire continu G-équivariant ([**22**],§5) :

$$\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{Mor}}\ :\ O(k)\times C(k)\longrightarrow E$$

qui de plus s'annule sur $O(k)\times\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E$.

Théorème 3.1.2 ([22],Th.3 p. 293). — *L'accouplement* $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{Mor}}$ *induit un isomorphisme topologique compatible à* G *:*

$$O(k)\xrightarrow{\sim}\bigl(C(k)/\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2\bigr)'=\Sigma(k)'.$$

Le cas $k=2$ de ce théorème est généralisé en dimension supérieure dans [**28**].

Nous utiliserons le lemme facile suivant :

Lemme 3.1.3. — *Soit* $F\in O(k)$, $H\in C(k)$, $F^{(k-1)}\in O(k)$, $H^{(k-1)}\in C(k)$ *leur dérivée* $(k-1)$*-ième et* $Q\in\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$, *alors :*

$$\mathrm{res}_Q(F^{(k-1)}(z)H(z)dz)=(-1)^{k-1}\mathrm{res}_Q(F(z)H^{(k-1)}(z)dz).$$

En particulier $\langle F^{(k-1)},H\rangle_{\mathrm{Mor}}=(-1)^{k-1}\langle F,H^{(k-1)}\rangle_{\mathrm{Mor}}$.

Démonstration. — Par récurrence, il suffit de considérer le cas $k=2$. Dans un voisinage de $Q\in\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$, on a un développement de Laurent :

$$F(z)H(z)dz=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\alpha_n(z-z_Q)^n dz$$

et $\mathrm{res}_Q(F(z)H(z)dz)=\alpha_{-1}$ (si $Q=\infty$, $F(z)H(z)dz$ de développe de façon analogue en $z'=1/z$, au lieu de $z-z_Q$, pour $|z|\gg 0$). Comme :

$$(F(z)H(z))'dz=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(n+1)\alpha_{n+1}(z-z_Q)^n dz$$

on a $\mathrm{res}_Q((F(z)H(z))'dz)=0$ pour tout $Q\in\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$, d'où le résultat. $\square$

3.2. Enoncé du théorème de dualité. — On fixe $\mathcal{L}\in\overline{\mathbf{Q}}_p$ et $E_{\mathcal{L}}=\mathbf{Q}_p(\mathcal{L},\sqrt{p})$. Soit $U=(U_i)_{0\leq i\leq s}$ comme au §3.1 et définissons $O(k,\mathcal{L})_U$ comme le $E_{\mathcal{L}}$-espace vectoriel des fonctions $F_U:\Omega_U\to E_{\mathcal{L}}$ de la forme :

$$(13)\quad F_U(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}b_nz^n+\sum_{i=1}^{s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{i,n}}{(z-z_i)^n}+\sum_{i=1}^{s}\sum_{n=0}^{k-2}c_{i,n}z^n\log_{\mathcal{L}}(z-z_i)$$

avec $|b_n|r_0^n \to 0$ et $|b_{i,n}|r_i^{-n} \to 0$. C'est encore un Banach pour la norme :

$$(14) \qquad \|F_U\| = \max\big(\max_{n\geq 0}|b_n|r_0^n, \max_{1\leq i\leq s}\max_{n\geq 1}|b_{i,n}|r_i^{-n}, \max_{0\leq n\leq k-2}\max_{1\leq i\leq s}|c_{i,n}|\big)$$

et les restrictions $O(k,\mathcal{L})_{U'} \to O(k,\mathcal{L})_U$ sont aussi injectives et continues lorsque U' est plus fin que U. On pose $O(k,\mathcal{L}) \overset{\text{déf}}{=} \varprojlim O(k,\mathcal{L})_U$ muni de la topologie de la limite projective. Comme $O(k)$, $O(k,\mathcal{L})$ est un espace de Fréchet. On définit une action à gauche de G sur $O(k,\mathcal{L})$ par :

$$(15) \qquad \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\cdot F\right](z) = |ad-bc|^{-\frac{k-2}{2}}\frac{(bz+d)^{k-2}}{(ad-bc)^{k-2}}F\Big(\frac{az+c}{bz+d}\Big).$$

Son caractère central est encore $\varepsilon^{-(k-2)}$.

Lemme 3.2.1. — *L'application $G\times O(k,\mathcal{L}) \to O(k,\mathcal{L})$, $(g,F)\mapsto g\cdot F$ est continue.*

Démonstration. — Soit $g\in G$, montrons d'abord que $g : O(k,\mathcal{L}) \overset{\sim}{\to} O(k,\mathcal{L})$ est un automorphisme continu. Par la propriété universelle de la topologie limite projective, il suffit de montrer que les applications $\mathrm{pr}_{\Omega_U}\circ g : O(k,\mathcal{L}) \to O(k,\mathcal{L})_U$ sont continues où pr_{Ω_U} désigne la restriction à Ω_U. Il existe U_g tel que $\mathrm{pr}_{\Omega_U}\circ g$ se factorise par :

$$O(k,\mathcal{L}) \overset{\mathrm{pr}_{\Omega_{U_g}}}{\longrightarrow} O(k,\mathcal{L})_{U_g} \overset{\mathrm{pr}_{\Omega_U}\circ g}{\longrightarrow} O(k,\mathcal{L})_U.$$

Comme les projections sont continues, il suffit de montrer que la flèche de droite est continue et on peut se restreindre au sous-espace de $O(k,\mathcal{L})_{U_g}$ des fonctions rigides analytiques. La continuité est alors évidente en utilisant (10) et le fait que $|bz+d|^{k-2}$ est majoré sur Ω_U. Ensuite, les applications "orbites" $G\to O(k,\mathcal{L})$, $g\mapsto g\cdot F$ sont continues pour tout F. En effet, on est ramené à montrer la continuité en $1\in G$ de l'application $J\to O(k,\mathcal{L})_U$, $g\mapsto g\cdot F_U$ où $F_U\in O(k,\mathcal{L})_U$ et J est un sous-groupe ouvert compact assez petit, ce qui est une vérification facile laissée au lecteur. L'application $G\times O(k,\mathcal{L})\to O(k,\mathcal{L})$ est donc séparément continue ([**24**],§17). Comme $O(k,\mathcal{L})$ est un espace de Fréchet, il est tonnelé ([**24**],Prop.8.2) et le théorème de Banach-Steinhaus ([**24**],Prop.6.15) entraîne alors que l'application est globalement continue. □

On note $O(2-k)_U$ (resp. $O(2-k)$) le sous-$E_{\mathcal{L}}$-espace vectoriel fermé de $O(k,\mathcal{L})_U$ (resp. $O(k,\mathcal{L})$) des fonctions rigides analytiques. En tant qu'espaces vectoriels topologiques, ces espaces ne sont autres que $O(k)_U$ et $O(k)$ mais l'action de G sur $O(2-k)$ diffère (comparer (11) et (15)). Noter que le sous $E_{\mathcal{L}}$-espace vectoriel des $F(z)$ polynômiaux de degré $\leq k-2$ est aussi stable par G et fournit une injection (fermée) $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E_{\mathcal{L}}^2\otimes\varepsilon(\det)^{-(k-2)} \hookrightarrow O(k,\mathcal{L})$. Le lien entre $O(k,\mathcal{L})$ et $O(k)$ est le suivant :

Proposition 3.2.2. — *On a une suite exacte stricte d'espaces de Fréchet compatible à l'action de G :*

$$0 \to \underline{\mathrm{Sym}}^{k-2} E_{\mathfrak{L}}^2 \otimes \varepsilon(\det)^{-(k-2)} \to O(k,\mathfrak{L}) \xrightarrow{\sigma} O(k) \to 0$$

où $\sigma(F) = F^{(k-1)}$ (dérivée $(k-1)$-ième de F).

Démonstration. — L'exactitude à gauche et au centre est évidente. La continuité de σ et sa compatibilité aux actions de G sont des vérifications faciles ou classiques (voir par exemple [**22**],p.289). Par le théorème de l'image ouverte ([**24**],Prop.8.6), l'application σ est stricte dès qu'elle est surjective. Montrons sa surjectivité. Soit $U = (U_i)_{0\leq i\leq s}$ un recouvrement comme au §3.1 et $U' = (U'_i)_{0\leq i\leq s'}$ un recouvrement strictement plus fin que U, i.e. il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\Omega_U \subset \{z \in \mathbf{C}_p \mid |z| \leq r'_0 - \varepsilon\} \cup \bigcup_{1\leq i\leq s'} \{z \in \mathbf{C}_p \mid |z - z'_i| \geq r'_i + \varepsilon\}.$$

Soit $F_{U'} \in O(k)_{U'}$ qu'on intègre $k-1$ fois terme à terme en une fonction notée $\int^{(k-1)} F_{U'}$ (avec la détermination $\log_{\mathfrak{L}}$ du logarithme). Il n'est pas sûr que $\int^{(k-1)} F_{U'}$ converge sur $\Omega_{U'}$ à cause des dénominateurs $\frac{1}{n(n-1)\dots(n-k+2)}$ apparaissant dans l'intégration, mais $(\int^{(k-1)} F_{U'})|_{\Omega_U}$ converge (car $\frac{1}{n(n-1)\dots(n-k+2)}(\frac{r'_i}{r'_i+\varepsilon})^n \to 0$), i.e. on peut relever $F_{U'} \in O(k)_{U'}$ dans $O(k,\mathfrak{L})_U$. Un argument à la Mittag-Leffler utilisant le fait que $\mathrm{Ker}(O(k,\mathfrak{L})_U \to O(k)_U)$ est indépendant de U ($= \mathrm{Sym}^{k-2} E_{\mathfrak{L}}^2$ à torsion près) donne alors la surjectivité sur les limites projectives. $\square$

Dans la suite, nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème 3.2.3. — *Il existe un isomorphisme topologique compatible à G :*

$$O(k,\mathfrak{L}) \xrightarrow{\sim} \big(C(k,\mathfrak{L})/\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2} E_{\mathfrak{L}}^2\big)' = \Sigma(k,\mathfrak{L})'$$

qui s'insère dans un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \underline{\mathrm{Sym}}^{k-2} E_{\mathfrak{L}}^2 \otimes \varepsilon(\det)^{-(k-2)} & \to & O(k,\mathfrak{L}) & \xrightarrow{\sigma} & O(k) & \to & 0 \\
 & & \wr\downarrow & & \downarrow\wr & & \downarrow\wr & & \\
0 & \to & (\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2} E_{\mathfrak{L}}^2)' & \to & \Sigma(k,\mathfrak{L})' & \to & \Sigma(k)' & \to & 0
\end{array}$$

où la suite exacte du haut est celle de la proposition 3.2.2, celle du bas la duale de la suite exacte du théorème 2.1.2 et où l'isomorphisme de droite est la dualité de Morita (théorème 3.1.2).

3.3. Logarithmes et résidus. — Cette section contient quelques calculs de résidu avec la fonction logarithme et quelques lemmes combinatoires préliminaires qui seront utilisés aux §§3.4 et 3.5. Le premier lemme est laissé au lecteur.

Lemme 3.3.1. — *Soit n et m deux entiers compris entre 0 et $k-2$, on a :*

$$(-1)^{k-1}\mathrm{res}_\infty\big(z^n \log_{\mathfrak{L}}(1-\tfrac{z_i}{z})(z^m \log_{\mathfrak{L}}(z))^{(k-1)}dz\big) = \begin{cases} 0 \\ (-1)^{m+1}\frac{m!(k-2-m)!}{n+m-(k-2)} z_i^{n+m-(k-2)} \end{cases}$$

suivant respectivement les cas $\left\{\begin{array}{l} n+m\leq k-2 \\ n+m>k-2 \end{array}\right.$.

Lemme 3.3.2. — *(i) Soit N et M deux entiers positifs, on a :*

$$\sum_{i=0}^{N}\frac{(M+i)!}{i!}=\frac{(N+M+1)!}{N!(M+1)}.$$

(ii) Soit N et M deux entiers positifs avec $M\geq 1$, on a :

$$\sum_{i=0}^{N}\frac{i!}{(M+i)!}=\frac{1}{M-1}\Big(\frac{1}{(M-1)!}-\frac{(N+1)!}{(M+N)!}\Big).$$

(iii) Soit N et M deux entiers positifs avec $N\geq 1$, on a :

$$\sum_{i=1}^{N}(-1)^i\binom{N}{i}\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{j+M}=-\frac{(N-1)!M!}{(N+M)!}.$$

Démonstration. — (i) Posons $[M,i]=\frac{(M+i)!}{i!}$, alors $(M+1)[M,i]=(i+1)[M,i+1]-i[M,i]$, d'où :

$$\sum_{i=0}^{N}(M+1)[M,i]=\sum_{i=1}^{N+1}i[M,i]-\sum_{i=0}^{N}i[M,i]=(N+1)[M,N+1]=\frac{(N+M+1)!}{N!}.$$

(ii) se démontre de même en posant $]M,i[=\frac{i!}{(M+i)!}$ et en écrivant $(M-1)]M,i[=i]M,i-1[-(i+1)]M,i[$ pour $i\geq 1$.
(iii) En écrivant $\binom{N}{i}=\binom{N-1}{i-1}+\binom{N-1}{i}$, un calcul donne :

$$\sum_{i=1}^{N}(-1)^i\binom{N}{i}\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{j+M}=-\sum_{i=0}^{N-1}(-1)^i\binom{N-1}{i}\frac{1}{i+1+M}.$$

Quitte à changer de notations, il suffit donc de démontrer l'assertion suivante : soit N un entier ≥ 0 et M un entier ≥ 1, alors $\sum_{i=0}^{N}(-1)^i\binom{N}{i}\frac{1}{i+M}=\frac{N!(M-1)!}{(N+M)!}$. L'énoncé est trivialement vrai pour $N=0$. Supposons par récurrence qu'il est vrai pour tout $N'<N$ et tout M. On a pour tout $M\geq 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{N+1}(-1)^i\binom{N+1}{i}\frac{1}{i+M} &= \sum_{i=0}^{N}(-1)^i\binom{N}{i}\frac{1}{i+M}+\sum_{i=1}^{N+1}(-1)^i\binom{N}{i-1}\frac{1}{i+M}\\ &= \frac{N!(M-1)!}{(N+M)!}-\frac{N!M!}{(N+M+1)!}=\frac{(N+1)!(M-1)!}{(N+1+M)!}.\end{aligned}$$

□

Lemme 3.3.3. — *Soit n et m deux entiers compris entre 0 et $k-2$.*
(i) Si $n+m<k-2$:

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{(k-3-m-i)!}{(n-i)!}=\frac{(k-2-m)!}{n!(k-2-(n+m))}.$$

(ii) Si $n+m>k-2$:

$$\sum_{i=k-2-m}^{n}\frac{(-1)^{k-2-m-i}}{(n-i)!(i-(k-2-m))!}\sum_{j=0}^{k-3-i}\frac{1}{m-j}-\sum_{i=0}^{k-3-m}\frac{(k-3-m-i)!}{(n-i)!}=\frac{(k-2-m)!}{n!(n+m-(k-2))}.$$

Démonstration. — (i) La somme se récrit $\sum_{i=0}^{n}\frac{(k-3-(n+m)+i)!}{i!}$ et le résultat n'est autre que le (i) du lemme 3.3.2 avec $N=n$ et $M=k-3-(n+m)$.
(ii) La première somme du terme de gauche se récrit après réindexation :

$$\sum_{i=0}^{n+m-(k-2)}(-1)^i\frac{1}{i!(n+m-(k-2)-i)!}\sum_{j=i+1}^{m}\frac{1}{j}$$

c'est-à-dire :

$$-\frac{1}{(n+m-(k-2))!}\sum_{i=1}^{n+m-(k-2)}(-1)^i\binom{n+m-(k-2)}{i}\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{j}$$

en utilisant $\sum_{i=0}^{N}(-1)^i\binom{N}{i}=0$ avec $N=n+m-(k-2)\geq 1$. On obtient $(n+m-(k-2))^{-1}(n+m-(k-2))!^{-1}$ par le (iii) du lemme 3.3.2. La deuxième somme du terme de gauche se récrit $-\sum_{i=0}^{k-3-m}\frac{i!}{(n+m-(k-3)+i)!}$. En utilisant le (ii) du lemme 3.3.2 et en sommant le tout, on obtient le résultat. □

Corollaire 3.3.4. — *Soit $z_0\in\mathbf{Q}_p^\times$ et n et m deux entiers compris entre 0 et $k-2$, on a :*

$$\mathrm{res}_{z_0}\big((z^n\log_{\mathcal{L}}(z-z_0))^{(k-1)}z^m\log_{\mathcal{L}}(z)dz\big)=\begin{cases}(-1)^{m+1}\dfrac{m!(k-2-m)!}{k-2-(n+m)}\dfrac{1}{z_0{}^{k-2-(n+m)}}\\ (-1)^m n!m!\Big(\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{i}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}+\log_{\mathcal{L}}(z_0)\Big)\\ (-1)^m\dfrac{m!(k-2-m)!}{n+m-(k-2)}z_0{}^{n+m-(k-2)}\end{cases}$$

suivant respectivement les cas $\begin{cases}n+m<k-2\\ n+m=k-2\\ n+m>k-2\end{cases}.$

Démonstration. — Un calcul donne $(z^n\log_{\mathcal{L}}(z-z_0))^{(k-1)}=\sum_{i=0}^{n}\frac{c_i}{(z-z_0)^{k-1-i}}$ où $c_i=(-1)^{k-2-i}\frac{n!(k-2-i)!}{(n-i)!}z_0^{n-i}$ et $z^m\log_{\mathcal{L}}(z)=\sum_{i=0}^{k-2}d_i(z-z_0)^i+(z-z_0)^{k-1}(*)$ où :

$$d_i=\begin{cases}\binom{m}{i}z_0^{m-i}\big(\log_{\mathcal{L}}(z_0)+\sum_{j=0}^{i-1}\frac{1}{m-j}\big) & \text{si}\quad i\leq m\\ (-1)^{i-1-m}\frac{m!(i-1-m)!}{i!z_0^{i-m}} & \text{si}\quad i\geq m+1.\end{cases}$$

On a $\mathrm{res}_{z_0}\big((z^n\log_{\mathcal{L}}(z-z_0))^{(k-1)}z^m\log_{\mathcal{L}}(z)dz\big) = \sum_{i=0}^n c_i d_{k-2-i} = \Sigma_1 + \Sigma_2$ où :

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 &= \sum_{i=0}^{k-3-m} c_i d_{k-2-i} = (-1)^{m+1}\frac{n!m!}{z_0^{k-2-(n+m)}}\sum_{i=0}^{k-3-m}\frac{(k-3-m-i)!}{(n-i)!}\\
\Sigma_2 &= \sum_{i=k-2-m}^{n} c_i d_{k-2-i}\\
&= \frac{n!m!}{z_0^{k-2-(n+m)}}\sum_{i=k-2-m}^{n}\frac{(-1)^{k-2-i}}{(n-i)!(i-(k-2-m))!}\Big(\log_{\mathcal{L}}(z_o)+\sum_{j=0}^{k-3-i}\frac{1}{m-j}\Big)
\end{aligned}$$

avec $\Sigma_2 = 0$ si $m+n < k-2$. Si $n+m < k-2$, le résultat se déduit du (i) du lemme 3.3.3. Si $n+m > k-2$, le résultat se déduit de $\sum_{i=k-2-m}^n \frac{(-1)^{k-2-i}}{(n-i)!(i-(k-2-m))!} = 0$ et du (ii) du lemme 3.3.3. Si $n+m = k-2$, le calcul est immédiat et est laissé au lecteur. $\square$

3.4. Définition de l'accouplement. — Soit $U = (U_i)_{0\leq i\leq s}$ comme au §3.1, $F_U \in O(k,\mathcal{L})_U$ et $H \in C(k,\mathcal{L})_U$. On peut écrire :

$$\begin{aligned}
F_U &= F_{U,\mathrm{rig}} + \sum_{i=1}^{s}\sum_{n=0}^{k-2} c_{i,n} z^n \log_{\mathcal{L}}(z-z_i)\\
H &= (H-[H]_U) + [H]_U
\end{aligned}$$

où $F_{U,\mathrm{rig}} \in O(2-k)_U$, $c_{i,n} \in E_{\mathcal{L}}$ et $[H]_U \in C(k,\mathcal{L})_U$ est la “tronquée” de H définie en (7).

Définition 3.4.1. — *Avec les notations précédentes, on définit l'accouplement $E_{\mathcal{L}}$-linéaire à valeurs dans $E_{\mathcal{L}}$:*

$$\begin{aligned}
(16)\qquad \langle F_U, H\rangle_U \overset{\text{déf}}{=}\ & \langle F_U^{(k-1)}, H-[H]_U\rangle_{U,\mathrm{Mor}}\\
&+(-1)^{k-1}\langle F_{U,\mathrm{rig}}, [H]_U^{(k-1)}\rangle_{U,\mathrm{Mor}}\\
&+\sum_{i=1}^{s}\sum_{n=0}^{k-2} c_{i,n}\langle z^n\log_{\mathcal{L}}(z-z_i), [H]_U\rangle_U
\end{aligned}$$

où $\langle z^n\log_{\mathcal{L}}(z-z_i), [H]_U\rangle_U$ est défini par linéarité à partir de :

$$(17)\langle z^n\log_{\mathcal{L}}(z-z_i), [z^m\log_{\mathcal{L}}(z)]_U\rangle_U \overset{\text{déf}}{=} \begin{cases} 0\\ (-1)^{m+1}n!m!\big(\sum_{\iota=1}^m\frac{1}{\iota}-\sum_{\iota=1}^n\frac{1}{\iota}\big)\\ (-1)^{m+1}\frac{m!(k-2-m)!}{n+m-(k-2)}z_i^{n+m-(k-2)}\end{cases}$$

suivant respectivement les cas $\begin{cases} n+m<k-2\\ n+m=k-2\\ n+m>k-2\end{cases}$.

Notons que les dérivées $(k-1)$-ièmes dans (16) ne contiennent plus de logarithmes et donc (16) a bien un sens. Par ailleurs, on a par linéarité et le lemme 3.3.1 :

$$\begin{aligned} (18)\quad \langle z^n \log_{\mathcal{L}}(z-z_i), [H]_U\rangle_U &= \langle z^n \log_{\mathcal{L}}(z), [H]_U\rangle_U \\ &\quad +(-1)^{k-1}\mathrm{res}_\infty\big(z^n \log_{\mathcal{L}}(1-\tfrac{z_i}{z})H^{(k-1)}(z)dz\big). \end{aligned}$$

Lemme 3.4.2. — *Avec les notations précédentes, si $F_U = F_{U,\mathrm{rig}}$ alors :*

$$\langle F_U, H\rangle_U = (-1)^{k-1}\langle F_U, H^{(k-1)}\rangle_{U,\mathrm{Mor}}.$$

Démonstration. — C'est une conséquence de (16) et du lemme 3.1.3. □

Lemme 3.4.3. — *L'accouplement $\langle\ ,\ \rangle_U$ induit une application continue :*

$$O(k,\mathcal{L})_U \to C(k,\mathcal{L})'_U.$$

Démonstration. — De (12), on déduit aisément que $\langle\ ,\ \rangle_{U,\mathrm{Mor}}$ induit une application injective continue $O(k)_U \to C(k)'_U$ et que la norme induite :

$$\sup_{H\in C(k)_U\backslash\{0\}} \frac{|\langle F_U, H\rangle_{U,\mathrm{Mor}}|}{\|H\|_U}$$

sur $O(k)_U$ est équivalente à la norme initiale (10). Soit $F_U \in O(k,\mathcal{L})_U$, alors l'application $H \mapsto \langle F_U, H\rangle_U$ est continue ($H \in C(k,\mathcal{L})_U$). En effet, il suffit de le montrer en restriction à $C(k)_U$, auquel cas $\langle F_U, H\rangle_U = \langle F_U^{(k-1)}, H\rangle_{U,\mathrm{Mor}}$ par (16) et le résultat découle de ce qui précède. On a donc $O(k,\mathcal{L})_U \to C(k,\mathcal{L})'_U$. Montrons que cette application est continue. Là encore, il suffit de se restreindre à $O(2-k)_U \subset O(k,\mathcal{L})_U$. Soit $F_U \in O(2-k)_U$, en utilisant le lemme 3.4.2, le fait que la dérivée $(k-1)$-ième $C(k,\mathcal{L})_U \to C(k)_U$ est continue et ce qui précède, on a $c_{U,1}, c_{U,2} \in |E_{\mathcal{L}}^\times|$ tels que :

$$\begin{aligned} \sup_{H\in C(k,\mathcal{L})_U\backslash\{0\}} \frac{|\langle F_U, H\rangle_U|}{\|H\|_U} &= \sup_{H\in C(k,\mathcal{L})_U\backslash\{0\}} \frac{|\langle F_U, H^{(k-1)}\rangle_{U,\mathrm{Mor}}|}{\|H\|_U} \\ &\le c_{U,1} \sup_{H\in C(k,\mathcal{L})_U, H^{(k-1)}\neq 0} \frac{|\langle F_U, H^{(k-1)}\rangle_{U,\mathrm{Mor}}|}{\|H^{(k-1)}\|_U} \\ &\le c_{U,1} \sup_{H\in C(k)_U\backslash\{0\}} \frac{|\langle F_U, H\rangle_{U,\mathrm{Mor}}|}{\|H\|_U} \le c_{U,2}\|F_U\| \end{aligned}$$

ce qui veut dire la continuité de $O(2-k)_U \to C(k,\mathcal{L})'_U$. □

Lemme 3.4.4. — *Soit $U = (U_i)_{0\le i\le s}$ et $U' = (U'_i)_{0\le i\le s'}$ deux recouvrements de $\mathbf{Q}_p$ dans $\mathbf{C}_p$ comme au §3.1 avec U' plus fin que U, $F_{U'} \in O(k,\mathcal{L})_{U'}$ et $H \in C(k,\mathcal{L})_U \subset C(k,\mathcal{L})_{U'}$. Alors :*

$$\langle F_{U'}, H\rangle_{U'} = \langle F_{U'}|_{\Omega_U}, H\rangle_U.$$

Démonstration. — Par le lemme 3.4.2 et le fait que l'assertion est vraie avec l'accouplement de Morita $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{Mor}}$ (§3.1), on peut supposer par linéarité $F_{U'} = z^n \log_{\mathcal{L}}(z - z'_i)$ où $i \in \{1, \ldots, s'\}$ et $U'_i = \{z \in \mathbf{Q}_p \mid |z - z'_i| < r'_i\}$. Si $U_0 = \{z \in \mathbf{Q}_p \mid |z| > r_0\}$ et $U'_0 = \{z \in \mathbf{Q}_p \mid |z| > r'_0\}$ (avec $r_0 \leq r'_0$), définissons $[H]_U$ comme en (7) et $[H]_{U'}$ de façon similaire avec r'_0 au lieu de r_0. Comme on a d'après (16) et le §3.1 :

$$\begin{aligned}\langle z^n \log_{\mathcal{L}}(z - z'_i), H - [H]_U\rangle_{U'} &= \langle (z^n \log_{\mathcal{L}}(z - z'_i))^{(k-1)}, H - [H]_U\rangle_{U',\mathrm{Mor}}\\ &= \langle (z^n \log_{\mathcal{L}}(z - z'_i)|_{\Omega_U})^{(k-1)}, H - [H]_U\rangle_{U,\mathrm{Mor}}\\ &= \langle z^n \log_{\mathcal{L}}(z - z'_i)|_{\Omega_U}, H - [H]_U\rangle_U,\end{aligned}$$

on peut supposer $H = [H]_U \in C(k, \mathcal{L})_U$, c'est-à-dire $[H]_U = [z^m \log_{\mathcal{L}}(z)]_U$ par linéarité avec $0 \leq m \leq k-2$. Rappelons qu'on a $|z'_i| \leq r'_0$ par définition. Deux cas se présentent : $|z'_i| \leq r_0$ ou $|z'_i| > r_0$.

Premier cas : $|z'_i| \leq r_0$. On a :

$$\begin{aligned}\langle z^n \log_{\mathcal{L}}(z - z'_i), [H]_U\rangle_{U'} &= \langle (z^n \log_{\mathcal{L}}(z - z'_i))^{(k-1)}, [H]_U - [H]_{U'}\rangle_{U',\mathrm{Mor}}\\ &\quad + \langle z^n \log_{\mathcal{L}}(z - z'_i), [H]_{U'}\rangle_{U'}\\ &= \langle z^n \log_{\mathcal{L}}(z - z'_i), [H]_{U'}\rangle_{U'}\end{aligned}$$

car le premier terme est nul par un calcul de résidu. Donc $\langle z^n \log_{\mathcal{L}}(z - z'_i), [H]_U\rangle_{U'}$ est défini par les formules (17). Soit $j \in \{1, \ldots, s\}$ l'unique élément tel que $z'_i \in U_j$ et écrivons $U_j = \{z \in \mathbf{Q}_p \mid |z - z_j| < r_j\}$, alors :

$$z^n \log_{\mathcal{L}}(z - z'_i)|_{\Omega_U} = z^n \log_{\mathcal{L}}\left(1 - \frac{z'_i - z_j}{z - z_j}\right) + z^n \log_{\mathcal{L}}(z - z_j) \in O(k, \mathcal{L})_U$$

et on a :

$$\langle z^n \log_{\mathcal{L}}(z - z'_i)|_{\Omega_U}, [H]_U\rangle_U = \langle z^n \log_{\mathcal{L}}(z - z_j), [H]_U\rangle_U + X$$

où d'après (16), le §3.1 et l'hypothèse :

$$\begin{aligned}X &= \langle z^n \log_{\mathcal{L}}\left(1 - \frac{z'_i - z_j}{z - z_j}\right), [H]_U\rangle_U\\ &= (-1)^{k-1}\langle z^n \log_{\mathcal{L}}\left(1 - \frac{z'_i - z_j}{z - z_j}\right), [H]_U^{(k-1)}\rangle_{U,\mathrm{Mor}}\\ &= (-1)^{k-1}\mathrm{res}_\infty\Big(z^n \log_{\mathcal{L}}\left(1 - \frac{z'_i - z_j}{z - z_j}\right)(z^m \log_{\mathcal{L}}(z))^{(k-1)} dz\Big).\end{aligned}$$

Si $n + m < k-2$, on a $X = 0$ et $\langle z^n \log_{\mathcal{L}}(z - z_j), [H]_U\rangle_U = 0$. Si $n + m = k-2$, on a $X = 0$ et $\langle z^n \log_{\mathcal{L}}(z - z_j), [H]_U\rangle_U = (-1)^{m+1} n! m! \big(\sum_{\iota=1}^m \frac{1}{\iota} - \sum_{\iota=1}^n \frac{1}{\iota}\big)$. Si $n + m > k-2$, on a par (18) :

$$\langle z^n \log_{\mathcal{L}}(z - z_j), [H]_U\rangle_U = (-1)^{k-1}\mathrm{res}_\infty\big(z^n \log_{\mathcal{L}}(1 - \tfrac{z_j}{z})(z^m \log_{\mathcal{L}}(z))^{(k-1)} dz\big).$$

Comme :

$$\log_{\mathcal{L}}\left(1 - \frac{z'_i - z_j}{z - z_j}\right) + \log_{\mathcal{L}}\left(1 - \frac{z_j}{z}\right) = \log_{\mathcal{L}}\left(1 - \frac{z'_i}{z}\right), \tag{19}$$

on en déduit dans ce cas :

$$\langle z^n \log_{\mathcal{L}}(z - z_i')|_{\Omega_U}, [H]_U \rangle_U = (-1)^{k-1}\mathrm{res}_\infty\big(z^n \log_{\mathcal{L}}(1 - \tfrac{z_i'}{z})(z^m \log_{\mathcal{L}}(z))^{(k-1)}dz\big).$$

Dans les trois cas, on a bien $\langle z^n \log_{\mathcal{L}}(z-z_i'), [H]_U\rangle_{U'} = \langle z^n \log_{\mathcal{L}}(z-z_i')|_{\Omega_U}, [H]_U\rangle_U$.
Deuxième cas : $|z_i'| > r_0$ (donc $z_i' \neq 0$). On a cette fois :

$$\langle (z^n\log_{\mathcal{L}}(z-z_i'))^{(k-1)}, [H]_U - [H]_{U'}\rangle_{U',\mathrm{Mor}} = \mathrm{res}_{z_i'}\big((z^n\log_{\mathcal{L}}(z-z_i'))^{(k-1)}z^m\log_{\mathcal{L}}(z)dz\big)$$

et le corollaire 3.3.4 et la formule (17) donnent :

$$\langle z^n \log_{\mathcal{L}}(z - z_i'), [H]_U\rangle_{U'} = \begin{cases} (-1)^{m+1}\frac{m!(k-2-m)!}{k-2-(n+m)}\frac{1}{z_i'^{\,k-2-(n+m)}} \\ (-1)^m n!m!\log_{\mathcal{L}}(z_i') \\ 0 \end{cases}$$

suivant respectivement les cas $\begin{cases} n+m < k-2 \\ n+m = k-2 \\ n+m > k-2 \end{cases}$. On a par ailleurs :

$$z^n \log_{\mathcal{L}}(z - z_i')|_{\Omega_U} = z^n \log_{\mathcal{L}}(z_i') + z^n \log_{\mathcal{L}}(1 - \tfrac{z}{z_i'}) \in O(2-k)_U \subset O(k,\mathcal{L})_U$$

d'où par (16) :

$$\begin{aligned}\langle z^n \log_{\mathcal{L}}(z - z_i')|_{\Omega_U}, [H]_U\rangle_U &= (-1)^{k-1}\langle z^n \log_{\mathcal{L}}(z_i'), [H]_U^{(k-1)}\rangle_{U,\mathrm{Mor}} \\ &\quad +(-1)^{k-1}\langle z^n \log_{\mathcal{L}}(1 - \tfrac{z}{z_i'}), [H]_U^{(k-1)}\rangle_{U,\mathrm{Mor}} \\ &= (-1)^{k-1}\mathrm{res}_\infty\big(z^n \log_{\mathcal{L}}(z_i')(z^m \log_{\mathcal{L}}(z))^{(k-1)}dz\big) \\ &\quad +(-1)^{k-1}\mathrm{res}_\infty\big(z^n \log_{\mathcal{L}}(1-\tfrac{z}{z_i'})(z^m \log_{\mathcal{L}}(z))^{(k-1)}dz\big).\end{aligned}$$

Un calcul montre que : si $n+m > k-2$, les deux résidus sont nuls, si $n+m = k-2$, le deuxième est nul et le premier vaut $(-1)^m m!n!\log_{\mathcal{L}}(z_i')$, si $n+m < k-2$, le premier est nul et le deuxième vaut $(-1)^{m+1}\frac{m!(k-2-m)!}{k-2-(n+m)}\frac{1}{z_i'^{\,k-2-(n+m)}}$. Dans les trois cas, on retrouve bien la valeur de $\langle z^n \log_{\mathcal{L}}(z - z_i'), [H]_U\rangle_{U'}$. $\square$

Soit $(F, H) \in O(k,\mathcal{L}) \times C(k,\mathcal{L})$, alors $\langle F|_{\Omega_U}, H\rangle_U$ ne dépend pas de U tel que $H \in C(k,\mathcal{L})_U$ grâce au lemme 3.4.4 et définit un accouplement $E_{\mathcal{L}}$-linéaire :

$$\langle\ ,\ \rangle\ :\ O(k,\mathcal{L}) \times C(k,\mathcal{L}) \longrightarrow E_{\mathcal{L}}.$$

Lemme 3.4.5. — *(i) Si F est un polynôme de degré $\leq k-2$, alors :*

$$\langle F, H\rangle = (-1)^{k-1}\langle F, H^{(k-1)}\rangle_{\mathrm{Mor}} = (-1)^{k-1}\langle F, [H]_U^{(k-1)}\rangle_{\mathrm{Mor}}$$

pour tout U tel que $H \in C(k,\mathcal{L})_U$.
(ii) Si H est un polynôme de degré $\leq k-2$, alors $\langle F, H\rangle = 0$.

Démonstration. — (i) résulte du lemme 3.4.2 et de (16). (ii) résulte de (16) et du fait que $[H]_U = 0$ et $\langle F^{(k-1)}, H\rangle_{\mathrm{Mor}} = 0$ puisque $F^{(k-1)}H$ est dans ce cas une fonction rigide, donc de résidu total nul. $\square$

Corollaire 3.4.6. — *L'accouplement $\langle\ ,\ \rangle$ induit une application continue :*

$$O(k,\mathcal{L}) \to C(k,\mathcal{L})'$$

qui se factorise par le sous-espace $\big(C(k,\mathcal{L})/\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E_{\mathcal{L}}^2\big)'$ et s'insère dans un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E_{\mathcal{L}}^2 \otimes \varepsilon(\det)^{-(k-2)} & \to & O(k,\mathcal{L}) & \xrightarrow{\sigma} & O(k) & \to & 0 \\
 & & \wr\downarrow & & \downarrow & & \downarrow\wr & & \\
0 & \to & (\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E_{\mathcal{L}}^2)' & \to & \left(\frac{C(k,\mathcal{L})}{\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E_{\mathcal{L}}^2}\right)' & \to & \left(\frac{C(k)}{\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E_{\mathcal{L}}^2}\right)' & \to & 0
\end{array}$$

où l'isomorphisme de droite est la dualité de Morita (théorème 3.1.2).

Démonstration. — Par les lemmes 3.4.4 et 3.4.3, les accouplements $\langle\ ,\ \rangle_U$ induisent une famille compatible d'applications continues : $O(k,\mathcal{L})_U \to C(k,\mathcal{L})'_U$ qui induit, en composant avec les projections continues $O(k,\mathcal{L}) \to O(k,\mathcal{L})_U$, une famille compatible d'applications continues $O(k,\mathcal{L}) \to C(k,\mathcal{L})'_U$. On obtient donc que $\langle\ ,\ \rangle$ induit une application continue $O(k,\mathcal{L}) \to C(k,\mathcal{L})'$ puisque la topologie sur $C(k,\mathcal{L})'$ est celle de la limite projective d'après le lemme 2.3.1 et [**24**],Prop.16.10. Le reste résulte facilement de la définition (16) et du lemme 3.4.5. □

Corollaire 3.4.7. — *L'application continue $O(k,\mathcal{L}) \to \big(C(k,\mathcal{L})/\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E_{\mathcal{L}}^2\big)'$ est un isomorphisme topologique.*

Démonstration. — La bijectivité est une conséquence immédiate du diagramme commutatif du corollaire 3.4.6 puisque les deux autres flèches verticales sont des isomorphismes. Comme les deux espaces $O(k,\mathcal{L})$ et $\big(C(k,\mathcal{L})/\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E_{\mathcal{L}}^2\big)'$ sont des Fréchet, c'est un isomorphisme topologique par le théorème de l'image ouverte ([**24**],Prop.8.6). □

3.5. Invariance sous G de l'accouplement. — Soit $L(k,\mathcal{L}) \subset O(k,\mathcal{L})$ le sous-$E_{\mathcal{L}}$-espace vectoriel engendré par les polynômes en z de degré inférieur ou égal à $k-2$ et par les fonctions $z^n \log_{\mathcal{L}}(z-a)$ pour $0 \le n \le k-2$ et $a \in \mathbf{Q}_p$. Il est stable par l'action de G (15) et possède $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E_{\mathcal{L}}^2 \otimes \varepsilon(\det)^{-(k-2)}$ comme sous-espace strict invariant (celui des polynômes).

Lemme 3.5.1. — *Le sous-espace $L(k,\mathcal{L})$ est dense dans $O(k,\mathcal{L})$.*

Démonstration. — Il s'agit de montrer que $\overline{L(k,\mathcal{L})} = O(k,\mathcal{L})$ où $\overline{L(k,\mathcal{L})}$ est la fermeture de $L(k,\mathcal{L})$ dans $O(k,\mathcal{L})$. En vertu de la proposition 3.2.2, $\sigma(\overline{L(k,\mathcal{L})})$ est encore un sous-$E_{\mathcal{L}}$-espace vectoriel fermé stable par G dans $O(k)$. Comme il contient $\frac{1}{z} = \frac{1}{(k-2)!}\sigma(z^{k-2}\log_{\mathcal{L}}(z))$, on a $\sigma(\overline{L(k,\mathcal{L})}) = O(k)$ par ([**21**],p.897) (cela se déduit aussi par réflexivité du théorème 3.1.2 et du théorème 2.1.2). Comme $\overline{L(k,\mathcal{L})}$ contient aussi $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E_{\mathcal{L}}^2 \otimes \varepsilon(\det)^{-(k-2)}$ par construction, on déduit le résultat de la proposition 3.2.2. □

Pour $P(z)$ un polynôme de degré $\leq k-2$ à coefficients dans $E_{\mathfrak{L}}$ et $r \in |E_{\mathfrak{L}}^{\times}|$, notons $[P(z)\log_{\mathfrak{L}}(z)]_r \in C(k,\mathfrak{L})$ la fonction nulle si $|z| \leq r$ et valant $P(z)\log_{\mathfrak{L}}(z)$ si $|z| > r$. Nous aurons besoin des deux lemme suivants, dont le premier généralise (18) :

Lemme 3.5.2. — *Soit $z_0, z_1 \in \mathbf{Q}_p$ et $H \in C(k,\mathfrak{L})$ tels que $H(z) = 0$ dans un voisinage de z_0 et z_1. On a :*

$$\begin{aligned}\langle z^n \log_{\mathfrak{L}}(z-z_0), H\rangle &= \langle z^n \log_{\mathfrak{L}}(z-z_1), H\rangle \\ &\quad + (-1)^{k-1}\mathrm{res}_{\infty}\big(z^n \log_{\mathfrak{L}}(1-\tfrac{z_0-z_1}{z-z_1})H^{(k-1)}(z)dz\big).\end{aligned}$$

Démonstration. — Si $H \in C(k)$, la formule résulte de (16), du lemme 3.1.3 et de l'égalité (19) avec (z_0, z_1) au lieu de (z_i', z_j). On est donc ramené à $H = [z^m \log_{\mathfrak{L}}(z)]_r$ avec $|z_i| \leq r$ pour $i = 0, 1$. Si $n+m \leq k-2$, le résidu est nul et l'égalité vaut par (17). Si $n+m > k-2$, on voit en utilisant (19) et (18) que le résidu vaut exactement $\langle z^n \log_{\mathfrak{L}}(z-z_0), H\rangle - \langle z^n \log_{\mathfrak{L}}(z-z_1), H\rangle$. □

Lemme 3.5.3. — *Soit $r \in |E_{\mathfrak{L}}^{\times}|$, $h \in \mathbf{Q}_p$ et n et m deux entiers compris entre 0 et $k-2$ tels que $n+m > k-2$, on a :*

$$\begin{aligned}\langle (z+h)^n \log_{\mathfrak{L}}(z), [(z+h)^m \log_{\mathfrak{L}}(z)]_r\rangle &= h^{n+m-(k-2)}\Bigg((-1)^{m+1}\frac{m!(k-2-m)!}{n+m-(k-2)} \\ &\quad + (-1)^{k-2-n}\frac{n!(k-2-n)!}{n+m-(k-2)}\Bigg).\end{aligned}$$

Démonstration. — Le terme de gauche vaut d'après (17) :

$$\begin{aligned}&h^{n+m-(k-2)}\sum_{i=k-2-m}^{n}\binom{n}{i}\binom{m}{k-2-i}\langle z^i \log_{\mathfrak{L}}(z), [z^{k-2-i}\log_{\mathfrak{L}}(z)]_r\rangle \\ &= n!m!h^{n+m-(k-2)}\sum_{i=k-2-m}^{n}\frac{(-1)^{k-2-i}}{(n-i)!(m-(k-2)+i)!}\Big(\sum_{\iota=1}^{i}\frac{1}{\iota} - \sum_{\iota=1}^{k-2-i}\frac{1}{\iota}\Big) \\ &= n!m!h^{n+m-(k-2)}\big(\Sigma(n,m) + (-1)^{k-1}\Sigma(m,n)\big)\end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned}\Sigma(n,m) &= \sum_{i=k-2-m}^{n}\frac{(-1)^{k-2-i}}{(n-i)!(m-(k-2)+i)!}\sum_{\iota=1}^{i}\frac{1}{\iota} \\ &= \frac{(-1)^m}{(n+m-(k-2))!}\sum_{i=1}^{n+m-(k-2)}(-1)^i\binom{n+m-(k-2)}{i}\sum_{\iota=1}^{i}\frac{1}{\iota+k-2-m}\end{aligned}$$

(on a utilisé $\sum_{i=0}^{n+m-(k-2)}(-1)^i\binom{n+m-(k-2)}{i} = 0$) et où $\Sigma(m,n)$ est la même expression en inversant n et m. Or :

$$\Sigma(n,m) = (-1)^{m+1}\frac{(k-2-m)!}{n!(n+m-(k-2))}$$

par le (iii) du lemme 3.3.2 et idem pour $\Sigma(m,n)$ en inversant n et m, d'où le résultat. $\square$

Proposition 3.5.4. — *Soit $g \in G$, $F \in L(k,\mathcal{L})$ et $H \in C(k,\mathcal{L})$, alors :*

$$\langle g\cdot F, g\cdot H\rangle = \langle F, H\rangle.$$

Démonstration. — Si F est un polynôme, l'assertion résulte du lemme 3.4.5 et du §3.1. On suppose donc $F = z^n \log_{\mathcal{L}}(z-z_0)$ avec $n \in \{0,\dots,k-2\}$ et $z_0 \in \mathbf{Q}_p$. Si $H \in C(k)$, l'assertion résulte de (16) et du §3.1. On suppose donc $H = [z^m \log_{\mathcal{L}}(z)]_r$ avec $r \in |E_{\mathcal{L}}^\times|$ tel que $|z_0| \le r$. L'assertion est triviale pour g dans le centre de G. Par la décomposition de Bruhat $G = P_- \amalg P_- w P_-$ où $P_- \subset G$ est le Borel inférieur, il suffit de la montrer pour $g = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbf{Q}_p^\times$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h & 1\end{pmatrix}$ avec $h \in \mathbf{Q}_p$ et $g = w$.

Premier cas : $g = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$. On a $g\cdot F = |a|^{-\frac{k-2}{2}} a^{n-(k-2)}\big(z^n \log_{\mathcal{L}}(a) + z^n \log_{\mathcal{L}}(z - \frac{z_0}{a})\big)$ par (15) et $g\cdot H = \begin{cases} -|a|^{\frac{k-2}{2}}\frac{a^m}{2} z^m \log_{\mathcal{L}}(a) & \text{si} \quad |z| \le r/a \\ |a|^{\frac{k-2}{2}}\big(\frac{a^m}{2} z^m \log_{\mathcal{L}}(a) + a^m z^m \log(z)\big) & \text{si} \quad |z| > r/a\end{cases}$ par (2). Donc $\langle g\cdot F, g\cdot H\rangle = X+Y+Z$ où :

$$\begin{aligned}
X &= |a|^{-\frac{k-2}{2}} a^{n-(k-2)}\langle z^n \log_{\mathcal{L}}(a), g\cdot H\rangle\\
&= \tfrac{\log_{\mathcal{L}}(a)}{a^{k-2-(n+m)}}(-1)^{k-1}\mathrm{res}_\infty\big(z^n (z^m \log_{\mathcal{L}}(z))^{(k-1)} dz\big)\\
Y &= |a|^{-\frac{k-2}{2}} a^{n-(k-2)}\langle z^n \log_{\mathcal{L}}(z-\tfrac{z_0}{a}), g\cdot H - |a|^{\frac{k-2}{2}} a^m [z^m \log_{\mathcal{L}}(z)]_{r/a}\rangle\\
&= |a|^{-\frac{k-2}{2}} a^{n-(k-2)}\langle \big(z^n \log_{\mathcal{L}}(z-\tfrac{z_0}{a})\big)^{(k-1)}, g\cdot H - |a|^{\frac{k-2}{2}} a^m [z^m \log_{\mathcal{L}}(z)]_{r/a}\rangle_{\mathrm{Mor}}\\
&= \tfrac{\log_{\mathcal{L}}(a)}{a^{k-2-(n+m)}}\mathrm{res}_\infty\big((z^n \log_{\mathcal{L}}(z-\tfrac{z_0}{a}))^{(k-1)} z^m dz\big)\\
&= \tfrac{\log_{\mathcal{L}}(a)}{a^{k-2-(n+m)}}\mathrm{res}_\infty\big(z^m (z^n \log_{\mathcal{L}}(z))^{(k-1)} dz\big)\\
Z &= \tfrac{1}{a^{k-2-(n+m)}}\langle z^n \log_{\mathcal{L}}(z-\tfrac{z_0}{a}), [z^m \log_{\mathcal{L}}(z)]_{r/a}\rangle.
\end{aligned}$$

Or $(-1)^{k-1}\mathrm{res}_\infty\big(z^n (z^m \log_{\mathcal{L}}(z))^{(k-1)} dz\big) + \mathrm{res}_\infty\big(z^m (z^n \log_{\mathcal{L}}(z))^{(k-1)} dz\big) = 0$, d'où $X+Y=0$ et on vérifie avec (17) que $Z = \langle z^n \log_{\mathcal{L}}(z-z_0), [z^m \log_{\mathcal{L}}(z)]_r\rangle$.

Deuxième cas : $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h & 1\end{pmatrix}$. On a $(g\cdot F)(z) = F(z+h)$ et $(g\cdot H)(z) = H(z+h)$. Par le lemme 3.5.2, on a :

$$\begin{aligned}
\langle g\cdot F, g\cdot H\rangle &= \langle (z+h)^n \log_{\mathcal{L}}(z+h), g\cdot H\rangle\\
&\quad + (-1)^{k-1}\mathrm{res}_\infty\big((z+h)^n \log_{\mathcal{L}}(1-\tfrac{z_0}{z+h})(H(z+h))^{(k-1)} dz\big)\\
&= \langle (z+h)^n \log_{\mathcal{L}}(z+h), g\cdot H\rangle + (-1)^{k-1}\mathrm{res}_\infty\big(z^n \log_{\mathcal{L}}(1-\tfrac{z_0}{z}) H^{(k-1)}(z) dz\big)
\end{aligned}$$

et, par le lemme 3.5.2 encore, il suffit de montrer $\langle (z+h)^n \log_{\mathcal{L}}(z+h), g\cdot H\rangle = \langle z^n \log_{\mathcal{L}}(z), H\rangle$ i.e. on est ramené à $z_0 = 0$. Quitte à agrandir r, on peut supposer

$|h| \leq r$. On a alors par (16) et (18) :

$$\begin{array}{rcl} \langle g\cdot F, g\cdot H\rangle & = & \langle g\cdot F, g\cdot H - [(z+h)^m \log_{\mathcal{L}}(z)]_r\rangle + \langle g\cdot F, [(z+h)^m \log_{\mathcal{L}}(z)]_r\rangle \\ & = & \mathrm{res}_\infty\big(((z+h)^n \log_{\mathcal{L}}(z+h))^{(k-1)}(z+h)^m \log_{\mathcal{L}}(1+\frac{h}{z})dz\big) \\ & & +(-1)^{k-1}\mathrm{res}_\infty\big((z+h)^n \log_{\mathcal{L}}(1+\frac{h}{z})((z+h)^m \log_{\mathcal{L}}(z))^{(k-1)}dz\big) \\ & & +\langle (z+h)^n \log_{\mathcal{L}}(z), [(z+h)^m \log_{\mathcal{L}}(z)]_r\rangle. \end{array}$$

Si $n+m \leq k-2$, les deux résidus sont nuls et $\langle g\cdot F, g\cdot H\rangle = \langle F, H\rangle$ par (17). On suppose donc $n+m > k-2$. Le premier résidu vaut alors :

$$\begin{array}{rl} \mathrm{res}_\infty\big((z^n\log_{\mathcal{L}}(z))^{(k-1)}z^m\log_{\mathcal{L}}(1+\frac{h}{z-h})dz\big) \overset{(19)}{=} & -\mathrm{res}_\infty\big((z^n\log_{\mathcal{L}}(z))^{(k-1)}z^m\log_{\mathcal{L}}(1-\frac{h}{z})dz\big) \\ = & h^{n+m-(k-2)}(-1)^{k-1-n}\dfrac{n!(k-2-n)!}{n+m-(k-2)} \end{array}$$

et le deuxième vaut $(-1)^{k-1}\mathrm{res}_\infty\big(z^n \log_{\mathcal{L}}(1+\frac{h}{z-h})(z^m \log_{\mathcal{L}}(z-h))^{(k-1)}dz\big)$ i.e. :

$$\begin{array}{l} (-1)^k\mathrm{res}_\infty\big(z^n \log_{\mathcal{L}}(1-\frac{h}{z})(z^m \log_{\mathcal{L}}(z))^{(k-1)}dz\big) \\ +(-1)^k\mathrm{res}_\infty\big(z^n \log_{\mathcal{L}}(1-\frac{h}{z})(z^m \log_{\mathcal{L}}(1-\frac{h}{z}))^{(k-1)}dz\big) \\ = h^{n+m-(k-2)}(-1)^m\dfrac{m!(k-2-m)!}{n+m-(k-2)} + 0. \end{array}$$

Par le lemme 3.5.3, en additionnant le tout on trouve $\langle g\cdot F, g\cdot H\rangle = 0 = \langle F, H\rangle$.

Troisième cas : $g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Supposons d'abord $z_0 \neq 0$. Quitte à agrandir r, on peut supposer $|z_0^{-1}| > r^{-1}$. On a :

$$\begin{array}{rcl} g\cdot F & = & (-1)^{k-2}z^{k-2-n}\big(\log_{\mathcal{L}}(z_0) + \log_{\mathcal{L}}(z-z_0^{-1}) - \log_{\mathcal{L}}(z)\big) \\ g\cdot H & = & \left\{\begin{array}{ccc} 0 & \text{si} & |z| < r^{-1} \\ z^{k-2-m}\log_{\mathcal{L}}(z) & \text{si} & |z| \geq r^{-1}. \end{array}\right. \end{array}$$

On vérifie avec l'hypothèse sur $|z_0^{-1}|$ et (16) que :

$$\begin{array}{rcl} \langle g\cdot F, g\cdot H\rangle & = & \langle g\cdot F, [z^{k-2-m}\log_{\mathcal{L}}(z)]_{r^{-1}}\rangle \\ & = & -\log_{\mathcal{L}}(z_0)\mathrm{res}_\infty\big(z^{k-2-n}(z^{k-2-m}\log_{\mathcal{L}}(z))^{(k-1)}dz\big) \\ & & +(-1)^{k-2}\langle z^{k-2-n}\log_{\mathcal{L}}(z-z_0^{-1}), [z^{k-2-m}\log_{\mathcal{L}}(z)]_{r^{-1}}\rangle \\ & & -(-1)^{k-2}\langle z^{k-2-n}\log_{\mathcal{L}}(z), [z^{k-2-m}\log_{\mathcal{L}}(z)]_{r^{-1}}\rangle. \end{array}$$

Le terme avec un résidu est nul pour $n+m \neq k-2$ et vaut $(-1)^m n!m!\log_{\mathcal{L}}(z_0)$ si $n+m = k-2$. Pour le deuxième terme, soit $r' \in |E_{\mathcal{L}}^\times|$ tel que $|z_0^{-1}| \leq r'$. En écrivant $[z^{k-2-m}\log_{\mathcal{L}}(z)]_{r^{-1}} = ([z^{k-2-m}\log_{\mathcal{L}}(z)]_{r^{-1}} - [z^{k-2-m}\log_{\mathcal{L}}(z)]_{r'}) + [z^{k-2-m}\log_{\mathcal{L}}(z)]_{r'}$ et en utilisant d'une part le corollaire 3.3.4 (avec (16)) d'autre part la formule (17), on obtient :

$$(-1)^{k-2}\langle z^{k-2-n}\log_{\mathcal{L}}(z-z_0^{-1}), [z^{k-2-m}\log_{\mathcal{L}}(z)]_{r^{-1}}\rangle = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ -(-1)^m m!n!\log_{\mathcal{L}}(z_0) \\ (-1)^{m+1}\frac{(k-2-m)!m!}{n+m-(k-2)}z_0^{n+m-(k-2)} \end{array}\right.$$

suivant respectivement les cas $\begin{cases} n+m<k-2 \\ n+m=k-2 \\ n+m>k-2 \end{cases}$. Avec (17) pour le dernier terme, on voit en additionnant le tout qu'on obtient exactement $\langle F, H\rangle$ dans les trois cas. Reste $z_0 = 0$ que l'on laisse au lecteur. □

Corollaire 3.5.5. — *L'application $O(k,\mathcal{L}) \to C(k,\mathcal{L})'$ induite par $\langle\ ,\ \rangle$ est G-équivariante.*

Démonstration. — Cela résulte de la proposition 3.5.4, des lemmes 3.5.1 et 3.2.1 et de la continuité de l'application $O(k,\mathcal{L}) \to C(k,\mathcal{L})'$ (corollaire 3.4.6). □

De tout ce qui précède, on déduit finalement :

Corollaire 3.5.6. — *On a $O(k,\mathcal{L}) \xrightarrow{\sim} \Sigma(k,\mathcal{L})'$.*

Remarque 3.5.7. — De (16), on déduit facilement que l'isomorphisme du corollaire 3.5.6 induit une injection fermée compatible à G :

$$O(2-k) \hookrightarrow \big(\Sigma(k,\mathcal{L})/\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E_{\mathcal{L}}^2 \otimes \mathrm{St}\big)'.$$

Cette injection est un isomorphisme topologique (combiner [**33**],Th.15 avec le théorème 3.1.2).

4. Structures entières et complétions p-adiques

L'objectif de cette partie est de définir et d'étudier des complétions p-adiques naturelles $B(k,\mathcal{L})$ de $\Sigma(k,\mathcal{L})$ obtenues par dualité en utilisant le corollaire 3.5.6 de la partie précédente. L'idée de base est inspirée de [**33**]. Pour $k > 2$, $B(k,\mathcal{L})$ s'identifie aussi à une complétion p-adique de $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E_{\mathcal{L}}^2 \otimes \mathrm{St} \subset \Sigma(k,\mathcal{L})$.

4.1. Fonctions (log-)rigides bornées. — On munit Ω de l'action à gauche usuelle de G par $g\cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$ si $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right)$. Pour U recouvrement comme au §3.1, on pose $\Omega_U(g) \overset{\text{déf}}{=} \{{}^{\mathrm{t}}g\cdot z,\ z \in \Omega_U\}$ où ${}^{\mathrm{t}}g$ est le transposé de g dans G. C'est encore un affinoïde de Ω. On note $U(1) = (U(1)_i)_{0\leq i\leq s}$ le recouvrement particulier suivant de $\mathbf{Q}_p$ dans $\mathbf{C}_p$ (du type de ceux considérés précédemment) :

$$\begin{aligned} U(1)_0 &= \{z \in \mathbf{C}_p \mid |z| > 1\} \\ (U(1)_i)_{1\leq i\leq s} &= ((U_x)_{x\in\mathbf{F}_p^\times}, (V_y)_{y\in\mathbf{F}_p}) \\ U_x &= \{z \in \mathbf{C}_p \mid |z-[x]| < 1\} \\ V_y &= \{z \in \mathbf{C}_p \mid |z-p[y]| < 1/p\} \end{aligned}$$

($[\cdot]$ désigne le représentant de Teichmüller). En fait, on a une projection naturelle $r : \Omega \to |\mathcal{BT}|$ où $|\mathcal{BT}|$ désigne la réunion des sommets et des arêtes non orientées de l'arbre de Bruhat-Tits $\mathcal{BT}$ de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et $\Omega_{U(1)}$ est la réunion des images inverses par r de l'arête centrale et de ses deux sommets (voir [**33**]).

Soit U un recouvrement tel que :

$$\cup_{g\in G}\Omega_U(g)=\Omega \tag{20}$$

(par exemple $U(1)$) et posons pour $\mathcal{L}\in\overline{\mathbf{Q}_p}$:

$$O(k)^U \overset{\text{déf}}{=} \{F\in O(k)\mid \|(g\cdot F)|_{\Omega_U}\|\leq 1\ \forall\ g\in G\}$$
$$O(k,\mathcal{L})^U \overset{\text{déf}}{=} \{F\in O(k,\mathcal{L})\mid \|(g\cdot F)|_{\Omega_U}\|\leq 1\ \forall\ g\in G\}$$

où $O(k)$, $O(k,\mathcal{L})$ sont les $E_{\mathcal{L}}$-espaces vectoriels définis respectivement aux §§3.1 et 3.2 et où $\|\cdot\|$ est la norme définie respectivement en (10) et (14). Ce sont des sous-$\mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}}$-modules stables par G dans $O(k)$ et $O(k,\mathcal{L})$.

Les preuves des énoncés qui suivent ne sont données que pour $O(k,\mathcal{L})^U$, le cas $O(k)^U$ étant strictement analogue ou plus simple.

Lemme 4.1.1. — *Soit U et U' deux recouvrements tels que Ω_U et $\Omega_{U'}$ satisfont (20), alors $O(k,\mathcal{L})^U$ et $O(k,\mathcal{L})^{U'}$ (resp. $O(k)^U$ et $O(k)^{U'}$) sont commensurables dans $O(k,\mathcal{L})$ (resp. dans $O(k)$).*

Démonstration. — Il s'agit de montrer qu'il existe $\lambda_{U,U'}$ et $\lambda_{U',U}$ dans $E_{\mathcal{L}}^{\times}$ tels que $O(k,\mathcal{L})^{U'}\subseteq\lambda_{U',U}O(k,\mathcal{L})^U$ et $O(k,\mathcal{L})^U\subseteq\lambda_{U,U'}O(k,\mathcal{L})^{U'}$. On peut supposer U' plus fin que U par transitivité, i.e. $\Omega_U\subset\Omega_{U'}$. On a déjà clairement $O(k,\mathcal{L})^{U'}\subseteq\lambda_{U',U}O(k,\mathcal{L})^U$ pour un $\lambda_{U',U}$ convenable en utilisant la continuité de la restriction $O(k,\mathcal{L})_{U'}\to O(k,\mathcal{L})_U$. Soit $g_1,\ldots,g_n\in G$ tels que $\Omega_{U'}\subset\cup_{i=1}^n\Omega_U(g_i)$ (de tels g_i existent par (20)), $U''=(U_i'')_{1\leq i\leq s''}$ un recouvrement comme au §3.1 tel que $\cup_{i=1}^n\Omega_U(g_i)\subset\Omega_{U''}$ et $O(k,\mathcal{L})_U^{g_1,\ldots,g_n}$ le sous-$E_{\mathcal{L}}$-espace vectoriel des fonctions localement analytiques sur $\cup_{i=1}^n\Omega_U(g_i)$ engendré par les fonctions rigides analytiques $E_{\mathcal{L}}$-rationnelles sur $\cup_{i=1}^n\Omega_U(g_i)$ et par la restriction des $z^n\log_{\mathcal{L}}(z-z_i'')$ (où z_i'' est le centre de U_i''). Pour $F\in O(k,\mathcal{L})_U^{g_1,\ldots,g_n}$ et $i\in\{1,\ldots,n\}$, $(g_i\cdot F)|_{\Omega_U}\in O(k,\mathcal{L})_U$. On munit $O(k,\mathcal{L})_U^{g_1,\ldots,g_n}$ de la norme $\|F\|=\max_{1\leq i\leq n}\|(g_i\cdot F)|_{\Omega_U}\|$. Noter que, lorsque restreinte au sous-espace des fonctions rigides, cette norme est équivalente à la norme usuelle $\max_{z\in\cup_{i=1}^n\Omega_U(g_i)}\|F(z)\|=\max_{1\leq i\leq n}\max_{z\in\Omega_U(g_i)}\|F|_{\Omega_U(g_i)}\|$. Comme ce sous-espace est d'indice fini, on voit en particulier que l'application de restriction $O(k,\mathcal{L})_U^{g_1,\ldots,g_n}\to O(k,\mathcal{L})_{U'}$ est continue, donc il existe $c_{U,U'}\in|E_{\mathcal{L}}^{\times}|$ tel que pour tout $F\in O(k,\mathcal{L})_U^{g_1,\ldots,g_n}$:

$$\|F|_{\Omega_{U'}}\|\leq c_{U,U'}\max_{1\leq i\leq n}\|(g_i\cdot F)|_{\Omega_U}\|. \tag{21}$$

Maintenant, soit $F\in O(k,\mathcal{L})^U$ et $\lambda_{U,U'}\in E_{\mathcal{L}}^{\times}$ tel que $|\lambda_{U,U'}|=c_{U,U'}$, on a par définition de $O(k,\mathcal{L})^U$:

$$\forall\ g\in G,\ \forall\ i\in\{1,\ldots,n\},\ \|(g_i\cdot(g\cdot F))|_{\Omega_U}\|\leq 1$$

d'où, par (21) appliqué à $(g\cdot F)|_{\cup_{i=1}^n\Omega_U(g_i)}\in O(k,\mathcal{L})_U^{g_1,\ldots,g_n}$:

$$\forall\ g\in G,\ \|(g\cdot F)|_{\Omega_{U'}}\|\leq c_{U,U'}\max_{1\leq i\leq n}\|(g_i\cdot g\cdot F)|_{\Omega_U}\|\leq c_{U,U'}$$

et donc $O(k,\mathcal{L})^U \subset \lambda_{U,U'} O(k,\mathcal{L})^{U'}$. □

Corollaire 4.1.2. — *Avec les notations précédentes, le sous-$E_{\mathcal{L}}$-espace vectoriel $O(k,\mathcal{L})^U \otimes E_{\mathcal{L}}$ (resp. $O(k)^U \otimes E_{\mathcal{L}}$) de $O(k,\mathcal{L})$ (resp. de $O(k)$) est indépendant de U.*

Notons $O(k)^{\mathrm{b}} = O(k)^U \otimes E_{\mathcal{L}}$ et $O(k,\mathcal{L})^b = O(k,\mathcal{L})^U \otimes E_{\mathcal{L}}$ ("b" pour "borné"). Ce *ne* sont *pas* des sous-$E_{\mathcal{L}}$-espaces vectoriels fermés dans $O(k)$ ou $O(k,\mathcal{L})$.

Lemme 4.1.3. — *La dérivée $(k-1)$-ième $\sigma : O(k,\mathcal{L}) \to O(k)$ (voir proposition 3.2.2) induit une application $E_{\mathcal{L}}$-linéaire $O(k,\mathcal{L})^{\mathrm{b}} \to O(k)^{\mathrm{b}}$ qui est injective si $k > 2$ et s'insère dans une suite exacte $0 \to E_{\mathcal{L}} \to O(2,\mathcal{L})^{\mathrm{b}} \to O(2)^{\mathrm{b}} \to 0$ si $k = 2$.*

Démonstration. — L'application $O(k,\mathcal{L})^{\mathrm{b}} \to O(k)^{\mathrm{b}}$ résulte de la continuité de σ et de sa commutation à G. Si $k > 2$, l'injection vient du fait que :

$$\{F \in \underline{\mathrm{Sym}}^{k-2} E_{\mathcal{L}}^2 \otimes \varepsilon(\det)^{-(k-2)} \mid \|g\cdot F\| \leq 1 \ \forall\, g \in G\} = 0$$

car la représentation $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2} E_{\mathcal{L}}^2$ ne possède pas de $\mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}}$-réseau stable sous G. Si $k = 2$, la suite exacte sera démontrée au §4.5 (conséquence du (i) de la proposition 4.5.2 et de la proposition 4.5.3). □

Par le théorème 3.1.2 et le théorème 2.1.2, on a aussi une surjection continue $O(k) \twoheadrightarrow (\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2} E_{\mathcal{L}}^2 \otimes \mathrm{St})'$.

Théorème 4.1.4 ([33],[17]). — *Pour tout $k \geq 2$, la surjection ci-dessus induit une injection $O(k)^{\mathrm{b}} \hookrightarrow (\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2} E_{\mathcal{L}}^2 \otimes \mathrm{St})'$.*

Voir [**33**],Prop.19 et [**17**],Cor.5.3.

Jusqu'à présent, en dehors du cas $O(2,\mathcal{L})^{\mathrm{b}}$, rien n'empêche *a priori* $O(k,\mathcal{L})^{\mathrm{b}}$ et $O(k)^{\mathrm{b}}$ d'être nuls.

Théorème 4.1.5 ([33],[17]). — *Pour tout $k \geq 2$, $O(k)^{\mathrm{b}} \neq 0$.*

Voir [**33**],Th.17 et Cor.25 et [**17**],Th.2.1 et Th.3.3 (comme me l'a expliqué P. Schneider, ce théorème peut aussi se déduire de l'existence de formes modulaires rigides dans $O(k)$ pour des sous-groupes discrets *cocompacts* de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$, cf. e.g. le lemme 5.4.6).

En ce qui concerne $O(k,\mathcal{L})^{\mathrm{b}}$, nous conjecturons au §4.4 qu'il est toujours non nul.

4.2. Modules compacts et Banach p-adiques. — Nous examinons maintenant la structure topologique des $\mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}}$-modules $O(k,\mathcal{L})^U$ et $O(k)^U$.

Dans [**27**], est introduite la catégorie $\mathrm{Mod}^{\mathrm{fl}}_{\mathrm{comp}}(\mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}})$ des $\mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}}$-modules sans torsion linéairement topologiques séparés compacts, les morphismes étant les applications $\mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}}$-linéaires continues (un $\mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}}$-module topologique est dit linéairement topologique si 0 a un système fondamental de voisinages ouverts formés de sous-$\mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}}$-modules).

Proposition 4.2.1. — *Soit U tel que Ω_U vérifie (20), alors $O(k,\mathcal{L})^U$ (resp. $O(k)^U$) muni de la topologie induite par $O(k,\mathcal{L})$ (resp. $O(k)$) est un objet de* $\mathrm{Mod}^{\mathrm{fl}}_{\mathrm{comp}}(\mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}})$.

Démonstration. — Il est clair que $O(k,\mathcal{L})^U$ est sans torsion et que sa topologie est linéaire et séparée. Il reste à voir que $O(k,\mathcal{L})^U$ est compact. Il est fermé car intersection de fermés. Montrons qu'il est borné. Soit U' un recouvrement de $\mathbf{Q}_p$ dans $\mathbf{C}_p$ comme avant. Par le lemme 4.1.1, on a $c_{U,U'} \in |E_{\mathcal{L}}^{\times}|$ tel que $\|F|_{\Omega_{U'}}\| \le c_{U,U'}$ pour tout $F \in O(k,\mathcal{L})^U$. Comme la topologie de $O(k,\mathcal{L})$ est définie par la collection des normes $(\|F|_{\Omega_{U'}}\|)_{U'}$, on voit que $O(k,\mathcal{L})^U$ est borné. Par [**24**],Prop.15.3(iii) et la réflexivité de $O(k,\mathcal{L})$ (qui vient du (i) du théorème 2.1.2 et du corollaire 3.5.6), $O(k,\mathcal{L})^U$ est donc c-compact. Mais comme $\mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}}$ est compact, c'est un résultat classique que tout $\mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}}$-module c-compact et borné est compact. $\square$

Comme $O(k,\mathcal{L})^U$ et $O(k)^U$ sont stables par G, on a de plus une application continue : $G \times O(k,\mathcal{L})^U \to O(k,\mathcal{L})^U$ (resp. avec $O(k)^U$).

Soit M un objet de $\mathrm{Mod}^{\mathrm{fl}}_{\mathrm{comp}}(\mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}})$ et définissons, en suivant [**27**], le $E_{\mathcal{L}}$-espace de Banach $M^{\mathrm{d}} \overset{\mathrm{déf}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}}}(M, E_{\mathcal{L}})$ (il s'agit des applications continues $\mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}}$-linéaires) muni de la norme $\|f\| = \max_{m\in M}|f(m)|$. Dans [**27**], il est montré que le foncteur $M \mapsto M^{\mathrm{d}}$ induit une anti-équivalence de catégories entre $\mathrm{Mod}^{\mathrm{fl}}_{\mathrm{comp}}(\mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}})_{\mathbf{Q}}$ et la catégorie des $E_{\mathcal{L}}$-espaces de Banach (la catégorie $\mathrm{Mod}^{\mathrm{fl}}_{\mathrm{comp}}(\mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}})_{\mathbf{Q}}$ a par définition les mêmes objets que la catégorie $\mathrm{Mod}^{\mathrm{fl}}_{\mathrm{comp}}(\mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}})$ mais pour morphismes $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}^{\mathrm{fl}}_{\mathrm{comp}}(\mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}})}(M,N) \otimes E_{\mathcal{L}}$).

Lemme 4.2.2. — *Soit $f : M \to N$ un morphisme bijectif dans la catégorie $\mathrm{Mod}^{\mathrm{fl}}_{\mathrm{comp}}(\mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}})$, alors c'est un isomorphisme (i.e. f est un isomorphisme topologique de $\mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}}$-modules).*

Démonstration. — Avec les notations précédentes, f induit $f^{\mathrm{d}} : N^{\mathrm{d}} \to M^{\mathrm{d}}$. Par [**27**],Prop.1.3(iii), f^{d} est une injection fermée (i.e. N^{d} est fermé dans M^{d}). Mais par [**27**],Prop.1.3(i), $\mathrm{Im}(f^{\mathrm{d}}) \simeq N^{\mathrm{d}}$ est dense dans M^{d}. Donc f^{d} est un isomorphisme de Banach et on voit que $(f^{\mathrm{d}})^{-1}$ doit correspondre à $f^{-1} \otimes \lambda$ par l'anti-équivalence précédente pour un $\lambda \in E_{\mathcal{L}}$. Donc f^{-1} est continu, i.e. f est un isomorphisme topologique. $\square$

Corollaire 4.2.3. — *Soit U un recouvrement tel que Ω_U vérifie (20).*
(i) La topologie induite par $(\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E_{\mathcal{L}}^2 \otimes \mathrm{St})'$ sur $O(k)^U$ (voir théorème 4.1.4) est la même que la topologie de $O(k)^U$ (induite par $O(k)$).
(ii) Supposons $k > 2$ de sorte que $O(k,\mathcal{L})^U \hookrightarrow O(k)$ et $O(k,\mathcal{L})^U \hookrightarrow (\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E_{\mathcal{L}}^2 \otimes \mathrm{St})'$ par le lemme 4.1.3 et le théorème 4.1.4. Alors la topologie induite par $O(k)$ et $(\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E_{\mathcal{L}}^2 \otimes \mathrm{St})'$ sur $O(k,\mathcal{L})^U$ est la même que la topologie de $O(k,\mathcal{L})^U$ (induite par $O(k,\mathcal{L})$).

Démonstration. — Notons $O(k,\mathcal{L})^U_\iota$ le module $O(k,\mathcal{L})^U$ muni de la topologie induite par $O(k)$. Comme l'application $O(k,\mathcal{L}) \to O(k)$ est continue, comme l'image d'un compact par une application continue est un compact et comme $O(k)$ est séparé, $O(k,\mathcal{L})^U_\iota$ est encore un objet de $\mathrm{Mod}^{\mathrm{fl}}_{\mathrm{comp}}(\mathcal{O}_{E_\mathcal{L}})$ et l'identité : $O(k,\mathcal{L})^U \xrightarrow{\sim} O(k,\mathcal{L})^U_\iota$ est continue. On conclut avec le lemme 4.2.2. La preuve des autres cas est identique. □

On pose pour tout $k \geq 2$:

$$B(k) \stackrel{\text{déf}}{=} (O(k)^U)^{\mathrm{d}} \quad \text{et} \quad B(k,\mathcal{L}) \stackrel{\text{déf}}{=} (O(k,\mathcal{L})^U)^{\mathrm{d}}.$$

Il résulte du lemme 4.1.1 (et de la proposition 4.2.1) que $B(k)$ et $B(k,\mathcal{L})$ sont des Banach qui ne dépendent pas de U. Ils sont munis d'une action de G par automorphismes continus déduite de l'action sur $O(k,\mathcal{L})^U$ et $O(k)^U$. Par [**27**], on a des identifications G-équivariantes (non topologiques) $B(k,\mathcal{L})' \simeq O(k,\mathcal{L})^{\mathrm{b}}$ et $B(k)' \simeq O(k)^{\mathrm{b}}$.

4.3. Complétions de $\Sigma(k,\mathcal{L})$, $\Sigma(k)$ et $\mathrm{Sym}^{k-2}\otimes\mathrm{St}$.

— On montre que $B(k,\mathcal{L})$ (resp. $B(k)$) est une complétion p-adique de $\Sigma(k,\mathcal{L})$ (resp. $\Sigma(k)$) et que pour $k > 2$ (resp. $k \geq 2$) $B(k,\mathcal{L})$ (resp. $B(k)$) est aussi une complétion p-adique de $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E_{\mathcal{L}}^2 \otimes \mathrm{St}$.

Rappelons qu'on a des accouplements continus non dégénérés (voir §3.1 et §3.4) :

$$\begin{array}{rcccccc} \langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{Mor}} & : & O(k) & \times & \Sigma(k) & \to & E_{\mathcal{L}} \\ \langle\ ,\ \rangle & : & O(k,\mathcal{L}) & \times & \Sigma(k,\mathcal{L}) & \to & E_{\mathcal{L}} \end{array}$$

et des injections fermées (voir §2.1) $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E_{\mathcal{L}}^2 \otimes \mathrm{St} \hookrightarrow \Sigma(k) \hookrightarrow \Sigma(k,\mathcal{L})$.

Soit U un recouvrement comme au §3.1 tel que Ω_U satisfait (20). On pose :

$$\begin{aligned} \Theta(k)^U &\stackrel{\text{déf}}{=} \{H \in \Sigma(k) \mid \forall\, F \in O(k)^U,\ \langle F, H\rangle_{\mathrm{Mor}} \in \mathcal{O}_{E_\mathcal{L}}\} \\ \Theta(k,\mathcal{L})^U &\stackrel{\text{déf}}{=} \{H \in \Sigma(k,\mathcal{L}) \mid \forall\, F \in O(k,\mathcal{L})^U,\ \langle F, H\rangle \in \mathcal{O}_{E_\mathcal{L}}\}. \end{aligned}$$

Appelons $\mathcal{O}_E$-réseau, ou simplement réseau, d'une représentation localement analytique (sur un E-espace vectoriel localement convexe de type compact) tout sous-$\mathcal{O}_E$-module fermé générateur et ne contenant pas de E-droite. Tout $\mathcal{O}_E$-réseau est aussi ouvert (car un espace de type compact est réflexif donc tonnelé, cf. [**24**], §§15 et 16) et définit une norme sur l'espace sous-jacent $\|v\| = \inf_{v\in\lambda\Theta}|\lambda|$ si Θ est le réseau ($\lambda \in E$).

Proposition 4.3.1. — *(i) Le $\mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}}$-module $\Theta(k)^U$ est un $\mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}}$-réseau stable par G dans $\Sigma(k)$.*
(ii) Si $O(k,\mathcal{L})^U \neq 0$, le $\mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}}$-module $\Theta(k,\mathcal{L})^U$ est un $\mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}}$-réseau stable par G dans $\Sigma(k,\mathcal{L})$.

Démonstration. — (i) Le fait que $\Theta(k)^U$ est fermé et stable par G est clair. Il faut montrer que $\Theta(k)^U$ est générateur et ne contient pas de $E_{\mathcal{L}}$-droite. Par la proposition 4.2.1, $O(k)^U$ est en particulier un sous-$\mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}}$-module borné de $O(k)$, donc $\Theta(k)^U$ est générateur par le corollaire 3.5.6 et [**24**],Lem.13.1(iii). Soit $H \in \Theta(k)^U \setminus \{0\}$ tel que $E_{\mathcal{L}}\cdot H \subseteq \Theta(k)^U$, alors $\langle F,H\rangle = 0$ pour tout $F \in O(k)^U$, donc $\langle g\cdot F,H\rangle = 0,\ \forall g\in G,\ \forall F\in O(k)^U$ puisque $O(k)^U$ est stable par G, donc :

$$\langle F, g\cdot H\rangle = 0,\ \forall g\in G,\ \forall F\in O(k)^U$$

et par continuité, F annule la sous-représentation topologiquement engendrée par H dans $\Sigma(k)$. Par le (iv) du théorème 2.1.2, on voit que tout $F \in O(k)^U$ annule au moins la sous-représentation $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E_{\mathcal{L}}^2 \otimes \mathrm{St}$, donc l'image de $O(k)^U \subset O(k)$ dans $(\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E_{\mathcal{L}}^2 \otimes \mathrm{St})'$ est nulle. Par le théorème 4.1.4, on a nécessairement $O(k)^U = O(k)^{\mathrm{b}} = 0$ ce qui contredit le théorème 4.1.5. Donc $\Theta(k)^U$ ne contient pas de $E_{\mathcal{L}}$-droite. La preuve de (ii) lorsque $k > 2$ est strictement analogue en utilisant le lemme 4.1.3. Lorsque $k = 2$, il suffit de remarquer que l'image de $O(2,\mathcal{L})^U$ dans St' ne peut être nulle car elle engendre celle de $O(2)^{\mathrm{b}}$ par le lemme 4.1.3. □

Proposition 4.3.2. — *Si $\Sigma(k,\mathcal{L})$ contient un réseau Θ stable par G, alors $O(k,\mathcal{L})^U \neq 0$ et il existe $n\in\mathbf{N}$ tel que $p^n\Theta(k,\mathcal{L})^U \subseteq \Theta$.*

Démonstration. — Par le corollaire 3.4.7, la topologie du Fréchet $O(k,\mathcal{L}) \simeq \varprojlim_U (C(k,\mathcal{L})_U/\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E_{\mathcal{L}}^2)'$ est aussi définie par la collection des normes $(\|\cdot\|'_U)_U$ où (si $F\in O(k,\mathcal{L})$) :

$$\|F\|'_U \overset{\text{déf}}{=} \sup_{H\in C(k,\mathcal{L})_U\setminus\{0\}} \frac{|\langle F,H\rangle|}{\|H\|_U}.$$

En particulier, pour tout recouvrement U comme au §3.1 il existe un autre recouvrement U' et $c_{U,U'} \in |E_{\mathcal{L}}^{\times}|$ tels que $\|F|_{\Omega_U}\| \leq c_{U,U'}\|F\|'_{U'}$ pour tout $F \in O(k,\mathcal{L})$. Prenons U tel que Ω_U satisfait (20) et notons $\Sigma(k,\mathcal{L})_{U'}$ le Banach $C(k,\mathcal{L})_{U'}/\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E_{\mathcal{L}}^2$. Comme Θ est ouvert dans $\Sigma(k,\mathcal{L})$, $\Theta\cap\Sigma(k,\mathcal{L})_{U'}$ contient, à multiplication par un scalaire non nul près, la boule unité $\Sigma(k,\mathcal{L})^0_{U'}$ de $\Sigma(k,\mathcal{L})_{U'}$. Soit $F \in O(k,\mathcal{L})$ tel que $\langle F,H\rangle \in \mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}}$ pour tout $H\in\Theta$. En particulier

$\langle g\cdot F, H\rangle \in \mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}}$ pour tout $g\in G$ et tout $H\in \Theta\cap\Sigma(k,\mathcal{L})_{U'}$ d'où $\langle g\cdot F, H\rangle \in \mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}}$ pour tout $g\in G$ et tout $H\in\Sigma(k,\mathcal{L})^0_{U'}$ i.e. :

$$\sup_{H\in C(k,\mathcal{L})_{U'}\backslash\{0\}} \frac{|\langle g\cdot F, H\rangle|}{\|H\|_{U'}} \leq 1.$$

Par ce qui précède, on a donc $\|(g\cdot F)|_{\Omega_U}\| \leq c_{U,U'}$ pour tout $g\in G$ d'où $p^nF\in O(k,\mathcal{L})^U$ pour un n convenable (indépendant de F). On en déduit le résultat par dualité en utilisant [**24**],Cor.13.5 et le corollaire 3.5.6. □

Remarque 4.3.3. — L'énoncé 4.3.2 est bien sûr valable avec $\Sigma(k)$ et $\Theta(k)^U$ au lieu de $\Sigma(k,\mathcal{L})$ et $\Theta(k,\mathcal{L})^U$, à la différence près que l'on sait que $\Sigma(k)$ possède un réseau (proposition 4.3.1).

La classe de commensurabilité des réseaux $\Theta(k)^U$ et $\Theta(k,\mathcal{L})^U$ est donc "minimale".

On note $\Theta(k)^\wedge$ (resp. $\Theta(k,\mathcal{L})^\wedge$) le Banach p-adique obtenu en complétant $\Sigma(k)$ (resp. $\Sigma(k,\mathcal{L})$) pour la norme définie par le réseau $\Theta(k)^U$ (resp. $\Theta(k,\mathcal{L})^U$) pour un U quelconque comme avant. Il est muni d'une action de G tel que $G\times\Theta(k)^\wedge\to\Theta(k)^\wedge$ (resp. $G\times\Theta(k,\mathcal{L})^\wedge\to\Theta(k,\mathcal{L})^\wedge$) est continu.

Proposition 4.3.4. — *On a des isomorphismes topologiques compatibles à G : $B(k)\simeq\Theta(k)^\wedge$ et $B(k,\mathcal{L})\simeq\Theta(k,\mathcal{L})^\wedge$.*

Démonstration. — Notons que si $O(k,\mathcal{L})^{\mathrm{b}}=0$ alors $\Theta(k,\mathcal{L})^U=\Sigma(k,\mathcal{L})$ et $\Theta(k,\mathcal{L})^\wedge=0=B(k,\mathcal{L})$. On suppose donc $O(k,\mathcal{L})^{\mathrm{b}}\neq 0$. Par [**27**],Th.1.2, il suffit de montrer que le $\mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}}$-module $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}}}(\Theta(k,\mathcal{L})^U,\mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}})$ des morphismes $\mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}}$-linéaires muni de la topologie de la convergence simple s'identifie topologiquement à $O(k,\mathcal{L})^U$ vu dans $\Sigma(k,\mathcal{L})'$. Comme $\Theta(k,\mathcal{L})^U$ est ouvert dans $\Sigma(k,\mathcal{L})$ par la proposition 4.3.1, on a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}}}(\Theta(k,\mathcal{L})^U,\mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}})\subset\Sigma(k,\mathcal{L})'$ et donc :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}}}(\Theta(k,\mathcal{L})^U,\mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}}) = \{F\in\Sigma(k,\mathcal{L})' \mid \forall H\in\Theta(k,\mathcal{L})^U, \langle F,H\rangle\in\mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}}\}.$$

Par [**24**],Cor.13.5 et le fait que $O(k,\mathcal{L})^U$ est fermé dans $\Sigma(k,\mathcal{L})'$ (car compact), on en déduit $O(k,\mathcal{L})^U \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}}}(\Theta(k,\mathcal{L})^U,\mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}})$. Il reste à voir que les topologies sont bien les mêmes mais cela découle du lemme 4.2.2 et du fait que la topologie de $O(k,\mathcal{L})^U$ est plus fine que la topologie de la convergence simple. Le cas de $B(k)$ est complètement analogue. □

En particulier, on a des injections continues (G-équivariantes) $\Sigma(k)\hookrightarrow B(k)$ et $\Sigma(k,\mathcal{L})\hookrightarrow B(k,\mathcal{L})$ (si $B(k,\mathcal{L})\neq 0$).

Proposition 4.3.5. — *(i) Le Banach $B(k)$ est aussi le complété de $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2_{\mathcal{L}}\otimes\mathrm{St}$ par rapport au réseau $\Theta(k)^U\cap(\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2_{\mathcal{L}}\otimes\mathrm{St})$.*
(ii) Si $k>2$ et $O(k,\mathcal{L})^U\neq 0$, le Banach $B(k,\mathcal{L})$ est aussi le complété de $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2_{\mathcal{L}}\otimes\mathrm{St}$ par rapport au réseau $\Theta(k,\mathcal{L})^U\cap(\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2_{\mathcal{L}}\otimes\mathrm{St})$.

Démonstration. — On montre (ii) laissant (i) au lecteur. Posons $\widetilde{\Theta}(k,\mathcal{L})^U = \Theta(k,\mathcal{L})^U \cap (\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E_{\mathcal{L}}^2 \otimes \mathrm{St})$, par [**27**] il suffit de montrer que l'application naturelle $O(k,\mathcal{L})^U \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}}}(\widetilde{\Theta}(k,\mathcal{L})^U, \mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}})$ est un isomorphisme topologique. La preuve est alors la même que celle de la proposition 4.3.4 en utilisant le (ii) de la proposition 4.2.3 et le fait que :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}}}(\widetilde{\Theta}(k,\mathcal{L})^U, \mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}}) = \{F \in (\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E_{\mathcal{L}}^2 \otimes \mathrm{St})' \mid \forall H \in \widetilde{\Theta}(k,\mathcal{L})^U, \langle F, H\rangle \in \mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}}\}.$$

□

4.4. Deux conjectures. — Nous énonçons deux conjectures sur les Banach $B(k,\mathcal{L})$ (qui contiennent en particulier leur non-nullité) et explorons leurs conséquences.

Suivant [**29**], si B est un G-Banach (unitaire) on note B_{an} le sous-E-espace vectoriel de B des vecteurs localement analytiques, c'est-à-dire des vecteurs $v \in B$ tels que la fonction $G \to B$, $g \mapsto g\cdot v$ est localement analytique. L'espace B_{an} est muni de la topologie induite par celle de $C^{\mathrm{an}}(G,B)$ (applications localement analytiques de G vers B) et non celle de B (cf. [**29**],§7). Toute application continue G-équivariante d'une représentation localement analytique de G dans B se factorise par B_{an}. D'après le §4.3, on a donc une application continue $\Sigma(k,\mathcal{L}) \to B(k,\mathcal{L})_{\mathrm{an}}$. Au §4.5, on montre que cette application est un isomorphisme topologique si $k=2$. Il me semble naturel de conjecturer que ce résultat vaut pour tout $k>2$:

Conjecture 4.4.1. — *Pour tout $k>2$ et tout $\mathcal{L}$, l'application $\Sigma(k,\mathcal{L}) \to B(k,\mathcal{L})_{\mathrm{an}}$ est un isomorphisme topologique.*

Cette conjecture entraîne en particulier $0 \neq \Sigma(k,\mathcal{L}) \subset B(k,\mathcal{L})$, donc que $O(k,\mathcal{L})^U$ est non nul et que $\Theta(k,\mathcal{L})^U$ est un réseau de $\Sigma(k,\mathcal{L})$ (cf. §4.3).

Notons $B(k,\mathcal{L})^0$ un ouvert borné stable par G dans $B(k,\mathcal{L})$, par exemple le complété de $\Theta(k,\mathcal{L})^U$. L'action continue de G sur $B(k,\mathcal{L})^0$ induit une action lisse de G sur $B(k,\mathcal{L})^0 \otimes_{\mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}}} \overline{\mathbf{F}_p}$. Si la représentation $B(k,\mathcal{L})^0 \otimes_{\mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}}} \overline{\mathbf{F}_p}$ est de longueur finie, on note $\overline{B}(k,\mathcal{L})$ sa semi-simplifiée qui est alors indépendante du choix de $B(k,\mathcal{L})^0$. Rappelons qu'aux données $(k,\mathcal{L})$ on a par ailleurs associé dans l'exemple 1.3.5 une représentation semi-stable non-cristalline $V(k,\mathcal{L})$ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$ de dimension 2 dont on note $\overline{V}(k,\mathcal{L})$ la semi-simplifiée modulo l'idéal maximal. Soit ω le caractère cyclotomique ε modulo p, $\mathrm{nr}(x)$ le caractère non ramifié de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$ qui envoie le Frobenius arithmétique sur x, ω_2 le caractère fondamental de Serre de niveau 2 et, pour $r \in \{0,\dots,p-1\}$, $\mathrm{ind}(\omega_2^{r+1})$ l'unique représentation irréductible de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$ de dimension 2 sur $\overline{\mathbf{F}_p}$ dont le déterminant est ω^{r+1}.

Conjecture 4.4.2. — *Pour tout k et tout $\mathcal{L}$, la représentation $B(k,\mathcal{L})^0 \otimes_{\mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}}} \overline{\mathbf{F}_p}$ est de longueur finie. De plus, si $k>2$, on a :*

(i) Si $\overline{V}(k,\mathcal{L}) \simeq \mathrm{ind}(\omega_2^{r+1}) \otimes \eta$ *pour un* $r \in \{0,\ldots,p-1\}$ *et un caractère lisse* $\eta : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p) \to \overline{\mathbf{F}_p}^{\times}$*, alors* $\overline{B}(k,\mathcal{L}) \simeq \big[\big(\mathrm{ind}_{K\mathbf{Q}_p^\times}^G \mathrm{Sym}^r \overline{\mathbf{F}}_p^2\big)/(T)\big] \otimes (\eta \circ \det)$.

(ii) Si $\overline{V}(k,\mathcal{L}) \simeq \begin{pmatrix} \mathrm{nr}(\lambda^{-1})\omega^{r+1} & 0 \\ 0 & \mathrm{nr}(\lambda) \end{pmatrix} \otimes \eta$ *pour un* $r \in \{0,\ldots,p-1\}$*, un* $\lambda \in \overline{\mathbf{F}_p}^{\times}$ *et un caractère lisse* $\eta : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p) \to \overline{\mathbf{F}_p}^{\times}$*, alors :*

$$\begin{aligned}\overline{B}(k,\mathcal{L}) \;\simeq\; & \big[\big(\mathrm{ind}_{K\mathbf{Q}_p^\times}^G \mathrm{Sym}^r \overline{\mathbf{F}}_p^2\big)/(T-\lambda)\big]^{\mathrm{ss}} \otimes (\eta \circ \det) \\ & \oplus \big[\big(\mathrm{ind}_{K\mathbf{Q}_p^\times}^G \mathrm{Sym}^{[p-3-r]} \overline{\mathbf{F}}_p^2\big)/(T-\lambda^{-1})\big]^{\mathrm{ss}} \otimes (\omega^{r+1}\eta \circ \det)\end{aligned}$$

où $[p-3-r]$ *est l'unique entier dans* $\{0,\cdots,p-2\}$ *congru à* $p-3-r$ *modulo* $p-1$.

On renvoie à [**6**] ou [**7**] pour des détails sur les notations utilisées dans l'énoncé 4.4.2.

Remarque 4.4.3. — Pour $k=2$, la conjecture 4.4.2 n'est pas tout-à-fait satisfaite car $\overline{V}(2,\mathcal{L}) \simeq \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\overline{B}(2,\mathcal{L}) \simeq \big[\big(\mathrm{ind}_{K\mathbf{Q}_p^\times}^G 1\big)/(T-1)\big]^{\mathrm{ss}}$ (cf. §4.5).

Proposition 4.4.4. — *Supposons vraies les conjectures 4.4.1 et 4.4.2.*
(i) Pour tout k *et tout* $\mathcal{L}$*,* $B(k,\mathcal{L}) \neq 0$.
(ii) Pour tout k *et tout* $\mathcal{L}$*,* $B(k,\mathcal{L})$ *est admissible.*
(iii) Pour tout $k>2$ *et tout* $\mathcal{L}$*,* $B(k,\mathcal{L})$ *est topologiquement irréductible.*
(iv) Pour tout k*,* k' *et* $\mathcal{L}$*,* $\mathcal{L}'$*, on a* $B(k,\mathcal{L}) \xrightarrow{\sim} B(k',\mathcal{L}')$ *(isomorphisme topologique* $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$*-équivariant) si et seulement si* $(k,\mathcal{L}) = (k',\mathcal{L}')$.
(v) Pour tout k *et tout* $\mathcal{L}$*, tous les réseaux stables par* G *dans* $\Sigma(k,\mathcal{L})$ *sont commensurables entre eux, et donc au réseau* $\Theta(k,\mathcal{L})^U$.

Démonstration. — (i) est trivial. (ii) se démontre comme dans la preuve du (ii) du théorème 1.3.3 (en utilisant la conjecture 4.4.2). Pour (iii), soit $B \subsetneq B(k,\mathcal{L})$ un sous-espace vectoriel fermé non-nul stable par G. Comme $B(k,\mathcal{L})$ est admissible, par [**29**],Th.7.1 ses vecteurs localement analytiques sont denses et forment en particulier un sous-espace fermé invariant non nul de $\Sigma(k,\mathcal{L})$ (en utilisant la conjecture 4.4.1). Or, par le lemme 2.4.2, tout sous-espace fermé invariant non nul de $\Sigma(k,\mathcal{L})$ contient $\mathrm{Sym}^{k-2}E_{\mathcal{L}}^2 \otimes \mathrm{St}$ donc est dense dans $B(k,\mathcal{L})$ par le (ii) de la proposition 4.3.5. Donc $B = B(k,\mathcal{L})$ et $B(k,\mathcal{L})$ est topologiquement irréductible. (iv) se déduit immédiatement de la conjecture 4.4.1 et du lemme 2.4.1. Démontrons (v). Soit $\Theta \subset \Sigma(k,\mathcal{L})$ un réseau stable par G et $\Sigma(k,\mathcal{L})^\wedge$ le complété de $\Sigma(k,\mathcal{L})$ par rapport à Θ. Quitte à prendre un réseau homothétique, on peut supposer $\Theta(k,\mathcal{L})^U \subseteq \Theta$ par la proposition 4.3.2 et on a une application continue $B(k,\mathcal{L}) \to \Sigma(k,\mathcal{L})^\wedge$. Cette application est injective : pour $k>2$, cela découle de (iii) ci-dessus et pour $k=2$, cela découle du §4.5 et du fait que si le noyau est non nul, alors il contient au moins la représentation St, donc son intersection avec $\Sigma(2,\mathcal{L})$ est non nulle ce qui est impossible puisque $\Sigma(2,\mathcal{L}) \hookrightarrow \Sigma(2,\mathcal{L})^\wedge$. Par ailleurs, on a une injection $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}}}(\Theta, \mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}}) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}}}(\Theta(k,\mathcal{L})^U, \mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}})$ (applications $\mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}}$-linéaires) où, par (ii) et le lemme 4.6.4, ces deux modules sont de type fini sur l'algèbre d'Iwasawa $\mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}}[[K]]$ de K (cf. §4.6). Je dis que le conoyau de cette injection est de torsion. Sinon, l'injection $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}}}(\Theta, \mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}}) \otimes E_{\mathcal{L}} \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}}}(\Theta(k,\mathcal{L})^U, \mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}}) \otimes E_{\mathcal{L}}$ aurait un conoyau non nul et le même argument que dans la preuve de [**27**],Cor.3.6 donnerait que l'application $B(k,\mathcal{L}) \to \Sigma(k,\mathcal{L})^\wedge$ n'est pas injective. Comme les modules sont de type fini, on a donc $n \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}}}(\Theta(k,\mathcal{L})^U, \mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}})$, $\pi_{E_{\mathcal{L}}}^n f$ s'étend en un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}}}(\Theta, \mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}})$ (où $\pi_{E_{\mathcal{L}}}$ est une uniformisante de $E_{\mathcal{L}}$). Soit $y \in \Theta$ et $n_y \in \mathbf{Z}$ le plus petit entier tel que $x \stackrel{\text{déf}}{=} \pi_{E_{\mathcal{L}}}^{n_y} y \in \frac{1}{\pi_{E_{\mathcal{L}}}}\Theta(k,\mathcal{L})^U$. Par [**24**],Cor.9.6, il existe $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}}}(\Theta(k,\mathcal{L})^U, \mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}})$ tel que $f(x) = 1$. Puisque $\pi_{E_{\mathcal{L}}}^n f$ s'étend à Θ, on a :

$$\pi_{E_{\mathcal{L}}}^n = \pi_{E_{\mathcal{L}}}^n f(x) = (\pi_{E_{\mathcal{L}}}^n f)(\pi_{E_{\mathcal{L}}}^{n_y} y) = \pi_{E_{\mathcal{L}}}^{n_y}(\pi_{E_{\mathcal{L}}}^n f)(y) \in \pi_{E_{\mathcal{L}}}^{n_y}\mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}}$$

d'où $n_y \leq n$. On a donc $\pi_{E_{\mathcal{L}}}^{n+1}\Theta \subseteq \Theta(k,\mathcal{L})^U$ ce qui achève la preuve. □

4.5. Le cas $k = 2$. — On étudie complètement $B(2)$ et $B(2,\mathcal{L})$ et on démontre que la proposition 4.4.4 est vraie inconditionnellement pour $k = 2$. Les preuves étant faciles, certains détails sont parfois laissés au lecteur.

On note $\mathbf{1}$ la représentation triviale d'un groupe quelconque. Avec les notations du §2.1, soit $\sigma(2,\mathcal{L})^0$ un $\mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}}$-réseau stable par P dans $\sigma(2,\mathcal{L})$. On note $\mathbf{ind}_P^G\sigma(2,\mathcal{L})$ (resp. $\mathbf{ind}_P^G\mathbf{1}$) le Banach des fonctions continues $f : G \to \sigma(2,\mathcal{L})$ (resp. $f : G \to E_{\mathcal{L}}$) telles que $f(bg) = \sigma(2,\mathcal{L})\big(f(g)\big)$ (resp. $f(bg) = f(g)$) muni de la norme $\|f\| \stackrel{\text{déf}}{=} \max_{g\in K}\|f(g)\|$ où $\|\ \|$ est la norme sur $\sigma(2,\mathcal{L})$ (resp. $E_{\mathcal{L}}$) relative au réseau $\sigma(2,\mathcal{L})^0$ (resp. $\mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}}$, c'est-à-dire la valeur absolue p-adique). Comme $\sigma(2,\mathcal{L})^0$ (resp. $\mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}}$) est stable par P, on voit que $\mathbf{ind}_P^G\sigma(2,\mathcal{L})$ et $\mathbf{ind}_P^G\mathbf{1}$ sont des G-Banach unitaires pour l'action usuelle de G par translation à droite. Notons $\mathbf{St}$ le G-Banach unitaire $\mathbf{ind}_P^G\mathbf{1}/\mathbf{1}$ muni de la topologie quotient.

Lemme 4.5.1. — *(i)* $\mathbf{St}$ *est topologiquement irréductible.*
(ii) On a une suite exacte stricte de G-Banach unitaires : $0 \to \mathbf{1} \to \mathbf{ind}_P^G\mathbf{1} \to \mathbf{St} \to 0$.
(iii) On a une suite exacte stricte de G-Banach unitaires : $0 \to \mathbf{ind}_P^G\mathbf{1} \to \mathbf{ind}_P^G\sigma(2,\mathcal{L}) \xrightarrow{\mathbf{s}} \mathbf{ind}_P^G\mathbf{1} \to 0$.

Démonstration. — (i) résulte du fait que la représentation de G sur les fonctions localement constantes $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p) \to \mathbf{F}_E$ modulo les constantes est algébriquement irréductible ([**1**]) et du fait que tout sous-espace fermé de $\mathbf{St}$ est complet. (ii) est évident et (iii) se démontre comme le lemme 2.1.1 en utilisant les décompositions d'Iwasawa et de Bruhat. Les détails sont laissés au lecteur. □

De manière analogue au §2.1, on pose :

$$\mathbf{\Sigma}(2,\mathcal{L}) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{s}^{-1}(\mathbf{1})/\mathbf{1}$$

(où $\mathbf{s}$ est la surjection du lemme 4.5.1) qu'on munit des norme et topologie quotients des norme et topologie induites par $\mathbf{ind}_P^G\sigma(2,\mathcal{L})$. On a des inclusions G-équivariantes continues $\Sigma(2,\mathcal{L}) \hookrightarrow \boldsymbol{\Sigma}(2,\mathcal{L})$ et on note $\boldsymbol{\Sigma}(2,\mathcal{L})_{\mathrm{an}}$ comme au §4.4.

Proposition 4.5.2. — *(i) On a une suite exacte stricte de G-Banach unitaires admissibles :* $0 \to \mathbf{St} \to \boldsymbol{\Sigma}(2,\mathcal{L}) \to \mathbf{1} \to 0$.
(ii) La boule unité $\boldsymbol{\Sigma}(2,\mathcal{L})^0$ *de* $\boldsymbol{\Sigma}(2,\mathcal{L})$ *est un* $\mathcal{O}_{E_\mathcal{L}}[G]$*-module topologiquement de type fini.*
(iii) L'inclusion $\Sigma(2,\mathcal{L}) \hookrightarrow \boldsymbol{\Sigma}(2,\mathcal{L})$ *induit un isomorphisme topologique compatible à G :* $\Sigma(2,\mathcal{L}) \simeq \boldsymbol{\Sigma}(2,\mathcal{L})_{\mathrm{an}}$.

Démonstration. — (i) résulte de la définition de $\boldsymbol{\Sigma}(2,\mathcal{L})$, du lemme 4.5.1 et du fait que $\mathbf{St}$ et $\mathbf{1}$ sont admissibles (pour $\mathbf{St}$, utiliser le lemme 4.6.3 et [**1**]). (ii) Munissons $\mathbf{St}$ de la norme induite par celle de $\boldsymbol{\Sigma}(2,\mathcal{L})$ via (i) et notons $\mathbf{St}^0$ la boule unité correspondante, stable par G. Par (i), il existe $\lambda \in E_\mathcal{L}^\times$ et une suite exacte de $\mathcal{O}_{E_\mathcal{L}}[G]$-modules : $0 \to \mathbf{St}^0 \to \boldsymbol{\Sigma}(2,\mathcal{L})^0 \to \lambda\mathcal{O}_{E_\mathcal{L}} \to 0$. Il suffit donc de montrer que $\mathbf{St}^0$ est topologiquement de type fini sur $\mathcal{O}_{E_\mathcal{L}}[G]$, ce qui résulte aisément du fait que $\mathbf{St}^0 \otimes \mathbf{F}_{E_\mathcal{L}}$ est de type fini sur $\mathbf{F}_{E_\mathcal{L}}[G]$ (car algébriquement irréductible). (iii) Par [**29**],Th.7.1, on a une suite exacte stricte de représentations localement analytiques $0 \to \mathbf{1} \to \mathbf{s}^{-1}(\mathbf{1})_{\mathrm{an}} \to \boldsymbol{\Sigma}(2,\mathcal{L})_{\mathrm{an}} \to 0$, donc il suffit de montrer $\mathbf{s}^{-1}(\mathbf{1})_{\mathrm{an}} \simeq s^{-1}(1)$ (voir §2.1 pour $s^{-1}(1)$). Il est clair qu'on a une injection continue $s^{-1}(1) \hookrightarrow \mathbf{s}^{-1}(\mathbf{1})_{\mathrm{an}}$. Soit $F \in \mathbf{s}^{-1}(\mathbf{1})_{\mathrm{an}}$, par définition l'application $g \mapsto g \cdot F$ s'écrit dans une carte locale au voisinage de $1 \in G$: $g \cdot F = \sum_{\underline{\alpha}} c_g^{\underline{\alpha}} F_{\underline{\alpha}}$ où les $F_{\underline{\alpha}} \in \mathbf{s}^{-1}(\mathbf{1})$. Pour tout $g_0 \in G$, on a $(g \cdot F)(g_0) = F(g_0 g) = \sum_{\underline{\alpha}} c_g^{\underline{\alpha}} F_{\underline{\alpha}}(g_0)$ donc F est analytique au voisinage de g_0, donc c'est une fonction sur G partout localement analytique i.e. $F \in s^{-1}(1)$. Le fait que la bijection $s^{-1}(1) \xrightarrow{\sim} \mathbf{s}^{-1}(\mathbf{1})_{\mathrm{an}}$ est un homéomorphisme résulte de [**29**],Prop.6.4. □

Proposition 4.5.3. — *On a des isomorphismes topologiques compatibles à G :* $B(2) \simeq \mathbf{St}$ *et* $B(2,\mathcal{L}) \simeq \boldsymbol{\Sigma}(2,\mathcal{L})$.

Démonstration. — Nous faisons le cas $\boldsymbol{\Sigma}(2,\mathcal{L})$, l'autre étant similaire. Soit U un recouvrement de $\mathbf{Q}_p$ dans $\mathbf{C}_p$ comme au §4.1 tel que Ω_U satisfait (20) et tel que $C(2,\mathcal{L})_U$ (voir §2.3) contient des éléments $H_1,\dots,H_n$ dont l'image dans $\boldsymbol{\Sigma}(2,\mathcal{L})$ engendre topologiquement $\boldsymbol{\Sigma}(2,\mathcal{L})^0$ sur $\mathcal{O}_{E_\mathcal{L}}[G]$ (il est facile de voir par le (ii) de la proposition 4.5.2 qu'un tel U existe et que $n = 2$ suffit). Par [**27**] et le §4.2, il suffit de montrer que la boule unité $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{E_\mathcal{L}}}(\boldsymbol{\Sigma}(2,\mathcal{L})^0, \mathcal{O}_{E_\mathcal{L}})$ du Banach dual $\boldsymbol{\Sigma}(2,\mathcal{L})' \subset \Sigma(2,\mathcal{L})' \simeq O(2,\mathcal{L})$ est commensurable à $O(2,\mathcal{L})^U$. On voit qu'on a :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{E_\mathcal{L}}}(\boldsymbol{\Sigma}(2,\mathcal{L})^0, \mathcal{O}_{E_\mathcal{L}}) = \{F \in O(2,\mathcal{L}) \mid \forall\, i,\ \forall\, g \in G,\ \langle F, g \cdot H_i\rangle \in \mathcal{O}_{E_\mathcal{L}}\}.$$

Soit $F \in O(2,\mathcal{L})^U$, alors $\|g \cdot F|_{\Omega_U}\| \leq 1$ pour tout $g \in G$, d'où :

$$\sup_{H \in C(2,\mathcal{L})_U \setminus \{0\}} \frac{|\langle g \cdot F, H\rangle|}{\|H\|_U} \leq c_U$$

pour un $c_U \in |E_{\mathcal{L}}^{\times}|$ par le lemme 3.4.3, d'où $|\langle F, g\cdot H_i\rangle| \leq c_U\|H_i\|_U$ pour tout i et tout g par la proposition 3.5.4. On voit qu'il existe $\lambda_U \in E_{\mathcal{L}}^{\times}$ convenable tel que $|\langle \lambda_U F, g\cdot H_i\rangle| \leq 1$ pour tout i et tout g, d'où $\lambda_U F \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}}}(\mathbf{\Sigma}(2,\mathcal{L})^0, \mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}})$ i.e. :

$$O(2,\mathcal{L})^U \subset \lambda_U^{-1}\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}}}(\mathbf{\Sigma}(2,\mathcal{L})^0, \mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}}).$$

Réciproquement, $\Theta \overset{\text{déf}}{=} \mathbf{\Sigma}(2,\mathcal{L})^0 \cap \Sigma(2,\mathcal{L})$ est un réseau de $\Sigma(2,\mathcal{L})$ stable par G et contient dont $\lambda_U\Theta(2,\mathcal{L})^U$ pour un $\lambda_U \in E_{\mathcal{L}}^{\times}$ convenable par la proposition 4.3.2. Donc $\lambda_U\Theta(2,\mathcal{L})^U \subset \mathbf{\Sigma}(2,\mathcal{L})^0$ et puisque $\Sigma(2,\mathcal{L})$ est dense dans $\mathbf{\Sigma}(2,\mathcal{L})$, on en déduit une injection :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}}}(\mathbf{\Sigma}(2,\mathcal{L})^0, \mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}}) \hookrightarrow \lambda_U^{-1}\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}}}(\Theta(2,\mathcal{L})^U, \mathcal{O}_{E_{\mathcal{L}}}) = \lambda_U^{-1}O(2,\mathcal{L})^U$$

d'où le résultat. □

En combinant les propositions 4.5.2 et 4.5.3, on obtient par la même preuve que pour la proposition 4.4.4 :

Corollaire 4.5.4. — *(i) Le G-Banach unitaire $B(2,\mathcal{L})$ est admissible et de longueur* 2.
(ii) On a un isomorphisme topologique $\Sigma(2,\mathcal{L}) \xrightarrow{\sim} B(2,\mathcal{L})_{\mathrm{an}}$.
(iii) Si $B(2,\mathcal{L}) \xrightarrow{\sim} B(2,\mathcal{L}')$ *est un isomorphisme linéaire continu G-équivariant, alors* $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$.
(iv) Tous les réseaux stables par G dans $\Sigma(2,\mathcal{L})$ *sont commensurables à* $\Theta(2,\mathcal{L})^U$.

4.6. Admissibilité et non-admissibilité. — Soit $E \subset \overline{\mathbf{Q}_p}$ une extension finie contenant $\sqrt{p}$. Dans cette partie, on montre en utilisant [**33**] et [**17**] que $B(k)$ n'est pas admissible pour $k > 2$ et que c'est le complété de $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2 \otimes \mathrm{St}$ par rapport à un quelconque réseau (de $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2 \otimes \mathrm{St}$) *de type fini* sur $\mathcal{O}_E[G]$ (cf. le (i) de la proposition 4.3.5).

Soit $\mathrm{c-ind}_{I\mathbf{Q}_p^{\times}}^G 1$ le E-espace vectoriel des fonctions sur G à support compact modulo $\mathbf{Q}_p^{\times}$ invariantes à gauche sous $I\mathbf{Q}_p^{\times}$ muni de l'action de G par translation à droite. C'est aussi l'espace vectoriel des fonctions $H : \mathcal{BT} \to E$ à support compact (en identifiant $I\mathbf{Q}_p^{\times}\backslash G$ à l'arbre $\mathcal{BT}$). Son dual algébrique est l'espace $\mathrm{ind}_{I\mathbf{Q}_p^{\times}}^G 1 = \{F : \mathcal{BT} \to E\}$ des fonctions à support quelconque. Si a est une arête (orientée) de $\mathcal{BT}$, notons $\overline{a}$ l'arête conjuguée, $\mathrm{o}(a)$ le sommet origine et $\mathrm{t}(a)$ le sommet terminal. Si $F : \mathcal{BT} \to E$ est une fonction, notons W_pF et U_pF les fonctions $\mathcal{BT} \to E$ définies par :

$$\begin{aligned}(W_pF)(a) &= F(\overline{a})\\ (U_pF)(a) &= \sum_{\substack{\mathrm{o}(a')=\mathrm{t}(a)\\ a'\neq\overline{a}}} F(a').\end{aligned}$$

Il est bien connu qu'on a des isomorphismes G-équivariants :

$$\begin{array}{rcl}\big(\mathrm{c\!-\!ind}_{I\mathbf{Q}_p^\times}^G 1\big)/(W_p+1,U_p-1) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{St}\\ \{F\in \mathrm{ind}_{I\mathbf{Q}_p^\times}^G 1 \ \mid \ W_pF=-F, U_pF=F\} & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{St}'\end{array}$$

d'où on déduit une surjection :

$$\mathrm{c\!-\!ind}_{I\mathbf{Q}_p^\times}^G \underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2 \simeq \underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2\otimes \mathrm{c\!-\!ind}_{I\mathbf{Q}_p^\times}^G 1 \twoheadrightarrow \underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2\otimes \mathrm{St}$$

et une injection :

$$\begin{array}{rcl}(\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2\otimes \mathrm{St})' & \hookrightarrow & (\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2)'\otimes \mathrm{ind}_{I\mathbf{Q}_p^\times}^G 1 \simeq \mathrm{ind}_{I\mathbf{Q}_p^\times}^G (\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2)'\\ & & \simeq \{F:\mathcal{BT}\to (\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2)'\}.\end{array}$$

Soit $\Theta(k)$ l'image du réseau $\mathrm{c\!-\!ind}_{I\mathbf{Q}_p^\times}^G \underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}\mathcal{O}_E^2$ par la surjection : c'est un sous-$\mathcal{O}_E[G]$-module de type fini générateur de $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2\otimes \mathrm{St}$.

Proposition 4.6.1. — *Pour tout k et tout U comme au §4.3, le réseau $\Theta(k)^U\cap (\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2\otimes \mathrm{St})$ est commensurable au $\mathcal{O}_E[G]$-module de type fini $\Theta(k)$. En particulier $\Theta(k)$ est un réseau (i.e. ne contient pas de E-droite).*

Démonstration. — Soit $O(k)^0 \overset{\text{déf}}{=} (\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2\otimes \mathrm{St})'\cap \mathrm{ind}_{I\mathbf{Q}_p^\times}^G (\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}\mathcal{O}_E^2)'$: c'est un sous-$\mathcal{O}_E$-module de $(\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2\otimes\mathrm{St})'$. Par [**33**],Th.17 pour k pair et [**17**],Th.4.1 pour k impair, $O(k)^0$ est commensurable à l'image de $O(k)^{U(1)}$ dans $(\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2\otimes \mathrm{St})'$ (cf. §4.1 pour $U(1)$), donc à l'image de $O(k)^U$ par le lemme 4.1.1. En considérant les $H\in\Theta(k)$ image des fonctions de $\mathrm{c\!-\!ind}_{I\mathbf{Q}_p^\times}^G \underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}\mathcal{O}_E^2$ à support sur une seule arête (i.e. une seule classe $I\mathbf{Q}_p^\times g$), on voit que :

$$O(k)^0=\{F\in(\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2\otimes\mathrm{St})' \ \mid \ \forall\ H\in\Theta(k),\ \langle F,H\rangle\in\mathcal{O}_E\}$$

où $\langle\ ,\ \rangle$ est l'accouplement entre $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2\otimes \mathrm{St}$ et son dual. Par bidualité ([**24**],Cor.13.5, $\Theta(k)$ est fermé dans $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2\otimes\mathrm{St}$), on en déduit :

$$\Theta(k)=\{H\in \underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2\otimes\mathrm{St} \mid \forall\ F\in O(k)^0,\ \langle F,H\rangle\in\mathcal{O}_E\}.$$

Or le membre de droite est un réseau commensurable à $\Theta(k)^U\cap(\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2\otimes\mathrm{St})$ par ce qui précède et la définition de $\Theta(k)^U$ (§4.3), d'où le résultat. □

Soit B un G-Banach unitaire, $\|\ \|$ une norme G-invariante sur B et B^0 la boule unité correspondante, stable par G.

Définition 4.6.2 ([27],§3). — *On dit que B est admissible si pour tout sous-groupe ouvert compact $H\subset G$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E}\big((B/B^0)^H, E/\mathcal{O}_E\big)$ est un $\mathcal{O}_E$-module de type fini.*

C'est indépendant du choix de la norme ([**27**], on utilise e.g. le lemme 4.6.4 ci-dessous dû à Schneider et Teitelbaum).

Lemme 4.6.3. — *Soit B un G-Banach unitaire. Alors B est admissible si et seulement si* $\dim_{\mathbf{F}_E}(B^0 \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathbf{F}_E)^{I(1)} < +\infty$.

Démonstration. — Par [**27**] (plus précisément le commentaire après le lemme 3.4), il suffit de montrer que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E}\big((B/B^0)^{I(1)}, E/\mathcal{O}_E\big)$ est un $\mathcal{O}_E$-module de type fini. Soit $\pi_E \in \mathfrak{m}_E$ une uniformisante de E, de la suite exacte :

$$0 \longrightarrow (B^0 \otimes \mathbf{F}_E)^{I(1)} \longrightarrow (B^0 \otimes E/\mathcal{O}_E)^{I(1)} \xrightarrow{\times \pi_E} (B^0 \otimes E/\mathcal{O}_E)^{I(1)}$$

on déduit une suite exacte (puisque $E/\mathcal{O}_E$ est un $\mathcal{O}_E$-module injectif) :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E}\big((B^0 \otimes E/\mathcal{O}_E)^{I(1)}, E/\mathcal{O}_E\big) \xrightarrow{\times \pi_E} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E}\big((B^0 \otimes E/\mathcal{O}_E)^{I(1)}, E/\mathcal{O}_E\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{F}_E}\big((B^0 \otimes \mathbf{F}_E)^{I(1)}, \mathbf{F}_E\big) \longrightarrow 0.$$

Donc :

$$\dim_{\mathbf{F}_E}(B^0 \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathbf{F}_E)^{I(1)} < +\infty \Leftrightarrow \dim_{\mathbf{F}_E} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E}\big((B^0 \otimes E/\mathcal{O}_E)^{I(1)}, E/\mathcal{O}_E\big) \otimes \mathbf{F}_E < +\infty.$$

Comme $\cap_n \pi_E^n \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E}\big((B^0 \otimes E/\mathcal{O}_E)^{I(1)}, E/\mathcal{O}_E\big) = 0$, on voit facilement que c'est équivalent à avoir $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E}\big((B \otimes E/\mathcal{O}_E)^{I(1)}, E/\mathcal{O}_E\big)$ de type fini sur $\mathcal{O}_E$. $\square$

Pour tout sous-groupe ouvert compact $H \subset G$, soit $\mathcal{O}_E[[H]] = \varprojlim \mathcal{O}_E[H/J]$, la limite étant prise sur les sous-groupes ouverts distingués J dans H. Muni de la topologie profinie, $\mathcal{O}_E[[H]]$ est naturellement un objet de $\mathrm{Mod}^{\mathrm{fl}}_{\mathrm{comp}}(\mathcal{O}_E)$ ([**27**] ou §4.2). Soit $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E}(B^0, \mathcal{O}_E)$ la boule unité du Banach dual de B, l'action de G sur B induit sur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E}(B^0, \mathcal{O}_E)$ une structure naturelle de $\mathcal{O}_E[[H]]$-module pour tout H ([**27**],§2).

Lemme 4.6.4 ([27],Lem.3.4). — *Soit B un G-Banach unitaire. Alors B est admissible si et seulement si* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E}(B^0, \mathcal{O}_E)$ *est un $\mathcal{O}_E[[K]]$-module de type fini.*

C'est aussi équivalent à avoir $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E}(B^0, \mathcal{O}_E)$ de type fini sur $\mathcal{O}_E[[H]]$ pour un H comme ci-dessus.

Proposition 4.6.5. — *Le G-Banach unitaire $B(k)$ n'est pas admissible si $k > 2$.*

Démonstration. — Fixons U comme avant, par le lemme 4.6.4, il suffit de montrer que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E}(\Theta(k)^U, \mathcal{O}_E) \simeq O(k)^U$ n'est pas un $\mathcal{O}_E[[K]]$-module de type fini ou, ce qui revient au même par commensurabilité et le fait que $\mathcal{O}_E[[K]]$ est noethérien, que les $\mathcal{O}_E[[K]]$-module notés respectivement $\Gamma(\mathcal{H}^0, \omega^{k/2})$ dans [**33**] pour k pair et $H^0(\widehat{\mathfrak{X}}, \mathcal{O}_{\widehat{\mathfrak{X}}}(k))$ dans [**17**] pour k impair ne sont pas de type fini. Il suffit de voir que leur tensorisé par $\mathbf{F}_E$ n'est pas un $\mathbf{F}_E[[K]]$-module de type fini. Mais par [**33**],Prop.29 pour k pair > 2 et [**17**],Th.3.3 pour k impair, ces $\mathbf{F}_E[[K]]$-modules ont au moins un sous-quotient isomorphe à $\mathrm{ind}_{K\mathbf{Q}_p^\times}^G \underline{\mathrm{Sym}^r \mathbf{F}_E^2}$ (à torsion près par un caractère) pour un $r \in \{0, \ldots, p-1\}$ (avec des notations évidentes : il s'agit des fonctions à support quelconque). On laisse au lecteur le soin de vérifier qu'une telle représentation n'est pas de type fini sur $\mathbf{F}_E[[K]]$. $\square$

5. Lien avec la théorie globale et résultats principaux

On utilise la théorie globale pour trouver des valeurs de $\mathcal{L}$ telles que $B(k,\mathcal{L}) \neq 0$.

5.1. Histoires de 1-cocycles. — Pour E une extension quelconque de $\mathbf{Q}_p$, faisons agir $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$ à gauche sur $\mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \simeq \oplus_{0\leq i\leq k-2} E\cdot T^i$ par $(g\cdot P)(T) = (bT+d)^{k-2}P(\frac{aT+c}{bT+d})$ si $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et $P \in \mathrm{Sym}^{k-2}E^2$.

Soit $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$ un sous-groupe discret et ${}^{\mathrm{t}}\Gamma \overset{\text{déf}}{=} \{{}^{\mathrm{t}}\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ le sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$ des transposés de Γ. Fixons $\mathcal{L} \in \overline{\mathbf{Q}_p}$ et $E_{\mathcal{L}} = \mathbf{Q}_p(\mathcal{L},\sqrt{p}) \subset \overline{\mathbf{Q}_p}$. La suite exacte courte $0 \to \underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E_{\mathcal{L}}^2 \otimes \varepsilon(\det)^{-(k-2)} \to O(k,\mathcal{L}) \xrightarrow{\sigma} O(k) \to 0$ de la proposition 3.2.2 donne lieu à un homomorphisme (extrait de la suite exacte longue de cohomologie du groupe discret ${}^{\mathrm{t}}\Gamma$) :

$$\delta_{\mathcal{L}} : H^0({}^{\mathrm{t}}\Gamma, O(k)) \to H^1({}^{\mathrm{t}}\Gamma, \mathrm{Sym}^{k-2}E_{\mathcal{L}}^2).$$

Le but de ce paragraphe est le calcul de $\delta_{\mathcal{L}}$ (proposition 5.1.5).

Soit F une fonction rigide analytique $E_{\mathcal{L}}$-rationelle sur Ω (qu'on peut voir comme un élément de $F \in O(2)$). Rappelons (voir e.g. [**4**]) qu'une *intégrale de Coleman* de F relativement à la détermination $\log_{\mathcal{L}}$ du logarithme p-adique est une primitive $\tilde{F}$ de F dans $O(2,\mathcal{L})$ (définie à addition d'une constante près). Si Q_1 et Q_2 sont deux points de Ω, $\tilde{F}(Q_2) - \tilde{F}(Q_1)$ ne dépend donc pas de la primitive choisie et se note $\int_{Q_1}^{Q_2} F(z)dz$.

Lemme 5.1.1. — *Soit $F \in H^0({}^{\mathrm{t}}\Gamma, O(k)) = O(k)^{{}^{\mathrm{t}}\Gamma}$ et $Q \in \Omega$, la fonction :*

$$\begin{aligned} c_{\mathcal{L},Q}(F) : \Gamma &\to \mathrm{Sym}^{k-2}\mathbf{C}_p^2 \\ \gamma &\mapsto \int_Q^{\gamma\cdot Q} F(z)(1+zT)^{k-2}dz = \sum_{i=0}^{k-2}\Big(\int_Q^{\gamma\cdot Q} z^i F(z)dz\Big)\binom{k-2}{i}T^i \end{aligned}$$

ne dépend de Q qu'à un cobord près et définit un 1-cocycle dans $H^1(\Gamma, \mathrm{Sym}^{k-2}\mathbf{C}_p^2)$ noté $c_{\mathcal{L}}(F)$.

Démonstration. — La preuve est classique et formelle, voir e.g. [**31**],§8.2. □

On note $c_{\mathcal{L}}$ l'application $O(k)^{{}^{\mathrm{t}}\Gamma} \to H^1(\Gamma, \mathrm{Sym}^{k-2}\mathbf{C}_p^2)$, $F \mapsto c_{\mathcal{L}}(F)$.

Lemme 5.1.2. — *L'isomorphisme $\mathbf{C}_p$-linéaire :*

$$\begin{aligned} \lambda_k : \mathrm{Sym}^{k-2}\mathbf{C}_p^2 &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Sym}^{k-2}\mathbf{C}_p^2 \\ T^i &\longmapsto (-1)^i T^{k-2-i},\ 0\leq i\leq k-2 \end{aligned}$$

vérifie $\lambda_k(g\cdot P) = {}^{\mathrm{t}}g^{-1}\cdot\lambda_k(P)$ où $P(T) \in \mathrm{Sym}^{k-2}\mathbf{C}_p^2$ et $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$.

La preuve du lemme 5.1.2 est laissée au lecteur. On en déduit :

Corollaire 5.1.3. — *On a un isomorphisme $\mathbf{C}_p$-linéaire :*

$$\begin{array}{rcl}\Psi_k : H^1(\Gamma, \mathrm{Sym}^{k-2}\mathbf{C}_p^2) & \xrightarrow{\sim} & H^1({}^{\mathrm{t}}\Gamma, \mathrm{Sym}^{k-2}\mathbf{C}_p^2) \\ \big(\gamma \mapsto c(\gamma)\big) & \mapsto & \big({}^{\mathrm{t}}\gamma \mapsto \lambda_k(c(\gamma^{-1}))\big).\end{array}$$

Continuons avec un lemme calculatoire élémentaire :

Lemme 5.1.4. — *Soit $F \in O(k, \mathcal{L})$ et $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$, alors pour tout $z \in \Omega$, on a l'égalité suivante dans $\mathrm{Sym}^{k-2}\mathbf{C}_p^2$:*

$$\sum_{i=0}^{k-2} F^{(i)}(g\cdot z)\frac{(T-g\cdot z)^i}{i!} = {}^{\mathrm{t}}g^{-1}\cdot\left(\sum_{i=0}^{k-2}({}^{\mathrm{t}}g\cdot F)^{(i)}(z)\frac{(T-z)^i}{i!}\right) \tag{22}$$

où "(i)" en exposant signifie "dérivée i-ième".

Démonstration. — Si $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on vérifie que :

$$(T-g\cdot z)^i = \frac{1}{(cz+d)^i}\,{}^{\mathrm{t}}g^{-1}\cdot\big((cT+d)^{k-2-i}(T-z)^i\big)$$

donc :

$$\sum_{i=0}^{k-2} F^{(i)}(g\cdot z)\frac{(T-g\cdot z)^i}{i!} = {}^{\mathrm{t}}g^{-1}\cdot\left(\sum_{i=0}^{k-2}\frac{F^{(i)}(g\cdot z)}{(cz+d)^i}(cT+d)^{k-2-i}\frac{(T-z)^i}{i!}\right).$$

En écrivant $(cT+d)^{k-2-i} = \sum_{j=0}^{k-2-i}(cz+d)^j c^{k-2-i-j}\binom{k-2-i}{j}(T-z)^{k-2-i-j}$, une réindexation donne :

$$\sum_{i=0}^{k-2}F^{(i)}(g\cdot z)\frac{(T-g\cdot z)^i}{i!} = {}^{\mathrm{t}}g^{-1}\cdot\left(\sum_{i=0}^{k-2}\Big(\sum_{j=0}^{i}F^{(j)}(g\cdot z)(cz+d)^{k-2-i-j}c^{i-j}A_{i,j}\Big)\frac{(T-z)^i}{i!}\right)$$

où $A_{i,j} = \frac{i!(k-2-j)!}{j!(k-2-i)!(i-j)!}$. Or, une récurrence sur i donne précisément :

$$({}^{\mathrm{t}}g\cdot F)^{(i)}(z) = \sum_{j=0}^{i}F^{(j)}(g\cdot z)(cz+d)^{k-2-i-j}c^{i-j}A_{i,j}$$

pour $0 \leq i \leq k-2$ d'où le résultat. □

Proposition 5.1.5. — *On a :*

$$\delta_{\mathcal{L}} = \frac{-1}{(k-2)!}\Psi_k \circ c_{\mathcal{L}}.$$

Démonstration. — Soit $F \in H^0({}^{\mathrm{t}}\Gamma, O(k)) = O(k)^{{}^{\mathrm{t}}\Gamma}$ et $\tilde{F} \in O(k,\mathcal{L})$ tel que $\sigma(\tilde{F}) = F$ (cf. proposition 3.2.2) i.e. $\tilde{F}^{(k-1)} = F$. Notons $\delta_{\mathcal{L},\tilde{F}}(F)$ la fonction :

$$\begin{array}{rcl} {}^{\mathrm{t}}\Gamma & \to & \mathrm{Sym}^{k-2}E_{\mathcal{L}}^2 \subset \mathrm{Sym}^{k-2}\mathbf{C}_p^2 \\ {}^{\mathrm{t}}\gamma & \mapsto & {}^{\mathrm{t}}\gamma \cdot \tilde{F} - \tilde{F}. \end{array}$$

Soit $Q \in \Omega$ et $\gamma \in \Gamma$, il suffit de montrer :

$$\delta_{\mathcal{L},\tilde{F}}(F)({}^{\mathrm{t}}\gamma) + \frac{1}{(k-2)!}\lambda_k\big(c_{\mathcal{L},Q}(F)(\gamma^{-1})\big) = {}^{\mathrm{t}}\gamma \cdot P_{\tilde{F},Q} - P_{\tilde{F},Q} \tag{23}$$

où $c_{\mathcal{L},Q}(F)$ est la fonction du lemme 5.1.1 et $P_{\tilde{F},Q} = \sum_{i=0}^{k-2} \tilde{F}^{(i)}(z_Q)\frac{(T-z_Q)^i}{i!} \in \mathrm{Sym}^{k-2}\mathbf{C}_p^2$. Si $P(T)$ est un polynôme de degré $\leq k-2$, on a l'égalité bien connue $P(T) = \sum_{i=0}^{k-2} P^{(i)}(z_Q)\frac{(T-z_Q)^i}{i!}$. Comme ${}^{\mathrm{t}}\gamma^{-1} \cdot \tilde{F} - \tilde{F}$ est un tel polynôme, on obtient :

$$\begin{aligned} \delta_{\mathcal{L},\tilde{F}}(F)({}^{\mathrm{t}}\gamma) &= -{}^{\mathrm{t}}\gamma \cdot \big({}^{\mathrm{t}}\gamma^{-1}\cdot\tilde{F} - \tilde{F}\big) \\ &= -{}^{\mathrm{t}}\gamma \cdot \left(\sum_{i=0}^{k-2}({}^{\mathrm{t}}\gamma^{-1}\cdot\tilde{F})^{(i)}(z_Q)\frac{(T-z_Q)^i}{i!} - \sum_{i=0}^{k-2}\tilde{F}^{(i)}(z_Q)\frac{(T-z_Q)^i}{i!}\right) \\ &\overset{(22)}{=} {}^{\mathrm{t}}\gamma \cdot \left(\sum_{i=0}^{k-2}\tilde{F}^{(i)}(z_Q)\frac{(T-z_Q)^i}{i!}\right) - \sum_{i=0}^{k-2}\tilde{F}^{(i)}(\gamma^{-1}\cdot z_Q)\frac{(T-\gamma^{-1}\cdot z_Q)^i}{i!}. \end{aligned} \tag{24}$$

Comme $(k-2)!\sum_{i=0}^{k-2}\tilde{F}^{(i)}(z)\frac{(T-z)^i}{i!}$ est une primitive (en z) de $F(z)(T-z)^{k-2} = \lambda_k\big(F(z)(1+zT)^{k-2}\big)$, on a (cf. le lemme 5.1.1) :

$$\frac{1}{(k-2)!}\lambda_k\big(c_{\mathcal{L},Q}(F)(\gamma^{-1})\big) = \sum_{i=0}^{k-2}\tilde{F}^{(i)}(\gamma^{-1}\cdot z_Q)\frac{(T-\gamma^{-1}\cdot z_Q)^i}{i!} - \sum_{i=0}^{k-2}\tilde{F}^{(i)}(z_Q)\frac{(T-z_Q)^i}{i!}. \tag{25}$$

En additionnant (24) et (25) on obtient (23). $\square$

Puisque λ_k est défini sur $\mathbf{Q}_p$, la proposition 5.1.5 montre que $c_{\mathcal{L}}$ est en fait à valeurs dans $H^1(\Gamma, \mathrm{Sym}^{k-2}E_{\mathcal{L}}^2)$.

5.2. 1-cocycles et invariant $\mathcal{L}$. — On garde les notations du paragraphe précédent. On exprime $\delta_{\mathcal{L}}$ comme combinaison linéaire, dépendant de $\mathcal{L}$, des 1-cocycles de Coleman et de Schneider ([**32**]), dont on rappelle la définition.

Soit $c_{\mathrm{col}} \overset{\text{déf}}{=} c_0$ le 1-cocycle du lemme 5.1.1 correspondant à la valeur $\mathcal{L} = 0$ (détermination "d'Iwasawa" du logarithme). On a $c_{\mathrm{col}}(F) \in H^1(\Gamma, \mathrm{Sym}^{k-2}E_{\mathcal{L}}^2)$ pour tout $F \in O(k)^{{}^{\mathrm{t}}\Gamma}$.

Soit $r : \Omega \to |\mathcal{BT}|$ la flèche $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$-équivariante de réduction sur les sommets et les arêtes non-orientées de l'arbre $\mathcal{BT}$ (voir e.g. [**33**] pour une définition explicite de r). Soit $F(z)$ une fonction rigide analytique sur Ω, $a = [s, s']$ une arête orientée de $\mathcal{BT}$ allant du sommet s vers le sommet adjacent s' et choisissons un isomorphisme analytique :

$$r^{-1}(a) \simeq \{t \in \mathbf{C}_p \mid 1/p < |t| < 1\}$$

de telle sorte que s' soit "l'image" des $t \in \mathbf{C}_p \setminus \mathbf{Q}_p$ tels que $|t| = 1/p$ (inverser s et s' revient à remplacer t par, e.g., p/t). On a $F(z)|_{r^{-1}(a)} = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n t^n$ et on définit :

$$\mathrm{res}_a\big(F(z)dz\big) = a_{-1}.$$

C'est indépendant de l'isomorphisme analytique choisi préservant l'orientation.

Si s est un sommet de $\mathcal{BT}$ et $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$, on note $[s, g\cdot s]$ l'ensemble des arêtes orientées permettant de joindre s à $g \cdot s$.

Lemme 5.2.1. — *Soit $F \in O(k)^{{}^\mathrm{t}\Gamma}$ et s un sommet de $\mathcal{BT}$, la fonction :*

$$\begin{aligned} c_{\mathrm{sch},s}(F) : \Gamma &\rightarrow \mathrm{Sym}^{k-2}E_{\mathcal{L}}^2 \\ \gamma &\mapsto \sum_{a\in[s,\gamma\cdot s]} \mathrm{res}_a\big(F(z)(1+zT)^{k-2}dz\big) \\ &\qquad = \sum_{i=0}^{k-2}\Big(\sum_{a\in[s,\gamma\cdot s]} \mathrm{res}_a\big(z^iF(z)dz\big)\Big)\binom{k-2}{i}T^i \end{aligned}$$

ne dépend de s qu'à un cobord près et définit un 1*-cocycle dans $H^1(\Gamma, \mathrm{Sym}^{k-2}E_{\mathcal{L}}^2)$ noté $c_{\mathrm{sch}}(F)$.*

Démonstration. — La preuve est une conséquence du lemme 5.1.1 et de l'égalité (26) dans la preuve de la proposition qui suit, mais peut bien sûr se vérifier directement. □

On note c_{sch} l'application $O(k)^{{}^\mathrm{t}\Gamma} \to H^1(\Gamma, \mathrm{Sym}^{k-2}E_{\mathcal{L}}^2)$, $F \mapsto c_{\mathrm{sch}}(F)$.

Proposition 5.2.2. — *On a :*

$$c_{\mathcal{L}} = c_{\mathrm{col}} + \mathcal{L}c_{\mathrm{sch}}.$$

Démonstration. — Soit $F \in O(k)^{{}^\mathrm{t}\Gamma}$ et $Q \in \Omega$ tel que $r(Q)$ est un sommet s_Q de $\mathcal{BT}$. Il suffit de montrer pour tout $\gamma \in \Gamma$:

$$c_{\mathcal{L},Q}(F)(\gamma) - c_{0,Q}(F)(\gamma) = \mathcal{L}c_{\mathrm{sch},s_Q}(F)(\gamma). \tag{26}$$

Vu les énoncés des lemmes 5.1.1 et 5.2.1, il suffit de montrer que si F est une fonction rigide analytique ($E_{\mathcal{L}}$-rationnelle) sur Ω, $\tilde{F}_{\mathcal{L}}$ (resp. $\tilde{F}_0$) une primitive de F dans $O(2, \mathcal{L})$ (resp. $O(2, 0)$) et si $Q_1, Q_2 \in \Omega$ sont tels que $s_{Q_i} \overset{\text{déf}}{=} r(Q_i)$, $i \in \{1, 2\}$, sont deux sommets adjacents, on a :

$$\big(\tilde{F}_{\mathcal{L}}(z_{Q_2}) - \tilde{F}_{\mathcal{L}}(z_{Q_1})\big) - \big(\tilde{F}_0(z_{Q_2}) - \tilde{F}_0(z_{Q_1})\big) = \mathcal{L}\mathrm{res}_{[s_{Q_1},s_{Q_2}]}\big(F(z)dz\big).$$

Soit $g \in G$ tel que $z_{Q_1} = g \cdot z_1$, $z_{Q_2} = g \cdot z_2$ où $|z_1| = 1$ et $|z_2| = 1/p$, quitte à faire le changement de variable $z \to g \cdot z$, il suffit de montrer :

$$\big(\tilde{F}_{\mathcal{L}}(z_2) - \tilde{F}_{\mathcal{L}}(z_1)\big) - \big(\tilde{F}_0(z_2) - \tilde{F}_0(z_1)\big) = \mathcal{L}\mathrm{res}_{a(1)}\big(F(z)dz\big) \tag{27}$$

où $a(1)$ est l'arête "centrale" $[z_1, z_2]$. En écrivant $F(z)|_{r^{-1}(a(1))} = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n z^n$, le membre de gauche de (27) vaut :

$$\begin{aligned} a_{-1}\Big(\big(\log_{\mathcal{L}}(z_2) - \log_0(z_2)\big) - \big(\log_{\mathcal{L}}(z_1) - \log_0(z_1)\big)\Big) &= a_{-1}\big(\mathcal{L}\mathrm{val}(z_2) - \mathcal{L}\mathrm{val}(z_1)\big) \\ &= a_{-1}(\mathcal{L} - 0) \\ &= \mathcal{L}\mathrm{res}_{a(1)}\big(F(z)dz\big). \end{aligned}$$

□

Remarque 5.2.3. — Dans [**30**],§4 se trouve une variante de la proposition 5.2.2.

En rassemblant les propositions 5.1.5 et 5.2.2, on obtient le résultat suivant :

Corollaire 5.2.4. — *On a :*

$$\delta_{\mathcal{L}} = \frac{-1}{(k-2)!}\Psi_k \circ \big(c_{\mathrm{col}} + \mathcal{L}c_{\mathrm{sch}}\big).$$

5.3. Formes modulaires et invariant $\mathcal{L}$. — On fixe un plongement $\overline{\mathbf{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbf{Q}_p}$, un entier $N \geq 1$ premier à p et une extension finie E de $\mathbf{Q}_p$ dans $\overline{\mathbf{Q}_p}$ contenant l'extension quadratique non ramifiée de $\mathbf{Q}_p(\sqrt{p})$, ainsi que toutes les valeurs propres des opérateurs de Hecke T_ℓ pour ℓ premier à pN agissant sur les formes modulaires paraboliques de poids k sur $\Gamma_0(pN)$. On note $S_k(\Gamma_0(pN))$ le E-espace vectoriel de ces formes dont le développement de Fourier est à coefficients dans E.

Soit $f \in S_k(\Gamma_0(pN))$ (non nulle) telle que $T_\ell(f) = a_\ell f$ pour $(\ell, pN) = 1$ avec $a_\ell \in E$. D'après [**13**],Th.6.1, il existe une unique représentation (absolument) irréductible :

$$\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \to \mathrm{GL}_2(E)$$

non ramifiée en dehors de pN et telle que, si $\ell \nmid pN$:

$$\begin{cases} \mathrm{tr}\rho(\mathrm{Frob}_\ell) &= a_\ell \\ \det\rho(\mathrm{Frob}_\ell) &= \ell^{k-1} \end{cases}$$

où Frob_ℓ est un Frobenius arithmétique en ℓ. On note $\rho_p \stackrel{\text{déf}}{=} \rho_f|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)}$.

Théorème 5.3.1 ([23]). — *Avec les notations précédentes, supposons f nouvelle en p. Alors il existe un unique $\mathcal{L} \in E$ tel que, à torsion près par un caractère quadratique non ramifié :*

$$\rho_p \simeq V(k, \mathcal{L}).$$

Rappelons que $V(k,\mathcal{L})$ est défini au §1.3. On note $\mathcal{L}_{\mathrm{FM}}(f) \overset{\text{déf}}{=} -\mathcal{L}$ avec $\mathcal{L}$ comme dans le théorème 5.3.1.

Supposons maintenant N de la forme $N = N^-N^+$ où $(N^-, N^+) = 1$, N^- est le produit d'un nombre impair de nombres premiers distincts et N^+ est arbitraire (premier à pN^-). Soit B l'algèbre de quaternions sur $\mathbf{Q}$ ramifié à l'infini et aux places divisant N^- (ici B n'est pas un Banach !) et choisissons un isomorphisme $\iota : B \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_p \xrightarrow{\sim} \mathrm{M}_2(\mathbf{Q}_p)$ (matrices 2×2 à coefficients dans $\mathbf{Q}_p$, deux tels isomorphismes sont conjugués par une matrice dans G). Soit $R \subset B$ un $\mathbf{Z}[1/p]$-*ordre d'Eichler de niveau* N^+ (cf. [**3**],§1.1 ou [**34**],§III.5.A) et $R_1^\times$ les unités de R de norme réduite 1. On pose :

$$\Gamma \overset{\text{déf}}{=} \iota(R_1^\times) \subset \mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p).$$

C'est un sous-groupe discret cocompact de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$.

Rappelons qu'une forme modulaire rigide E-rationnelle de poids k et niveau Γ est une fonction rigide analytique E-rationnelle F sur Ω telle que :

$$F(\gamma \cdot z) = (cz+d)^k F(z) \ \forall \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$$

c'est-à-dire, vu nos conventions, un élément de $O(k)^{{}^{\mathrm{t}}\Gamma}$. On note $S_k(\Gamma)$ le E-espace vectoriel $O(k)^{{}^{\mathrm{t}}\Gamma}$ des formes rigides analytiques E-rationnelles de poids k et niveau Γ. Pour ℓ premier, $\ell \nmid pN$, les opérateurs de Hecke T_ℓ, définis de la manière usuelle à partir de l'action des doubles classes $\Gamma\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \ell \end{smallmatrix}\right)\Gamma$, agissent sur $S_k(\Gamma)$.

Notons $S_k(\Gamma_0(pN))^{pN^- -\mathrm{nouv}}$ le sous-E-espace vectoriel de $S_k(\Gamma_0(Np))$ des formes nouvelles en pN^-. Le théorème suivant est une conséquence de la correspondance de Jacquet-Langlands et du théorème d'uniformisation des courbes de Shimura de Čerednik-Drinfel'd :

Théorème 5.3.2 (cf. [18],§5). — *Il existe un isomorphisme E-linéaire compatible aux opérateurs T_ℓ, $\ell \nmid pN$:*

$$S_k(\Gamma) \simeq S_k(\Gamma_0(pN))^{pN^- -\mathrm{nouv}}.$$

En particulier $S_k(\Gamma) = 0$ si k est impair. Soit $f \in S_k(\Gamma_0(pN))^{pN^- -\mathrm{nouv}}$ vecteur propre des T_ℓ pour $\ell \nmid pN$ et soit $F \in S_k(\Gamma)$ la forme rigide correspondant à f par le théorème 5.3.2 (déterminée à multiplication par un élément de $E^\times$ près).

Théorème 5.3.3 ([32],§1). — *Avec les notations précédentes, il existe un unique $\mathcal{L} \in E$ tel que :*

$$c_{\mathrm{col}}(F) = \mathcal{L} c_{\mathrm{sch}}(F).$$

Rappelons que $c_{\mathrm{col}}(F)$ et $c_{\mathrm{sch}}(F)$ sont définis au §5.2. On note $\mathcal{L}_{\mathrm{T}}(f) \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{L}$ avec $\mathcal{L}$ comme dans le théorème 5.3.3. Il est le même pour toutes les formes propres f "provenant" d'une même forme propre nouvelle dans $S_k(\Gamma_0(pN^-N^{+'}))$

où ${N^+}' \mid N^+$. A priori, $\mathcal{L}_{\mathrm{T}}(f)$ pourrait dépendre de la décomposition $N = N^-N^+$, i.e. du choix de N^- vérifiant les conditions précédentes, mais on a le résultat suivant :

Théorème 5.3.4 ([18],§6). — *Soit $f \in S_k(\Gamma_0(pN))^{pN^- -\mathrm{nouv}}$, alors :*

$$\mathcal{L}_{FM}(f) = \mathcal{L}_T(f).$$

Si $F \in S_k(\Gamma)$ est vecteur propre des T_ℓ pour $\ell \nmid pN$ et si $f \in S_k(\Gamma_0(pN))^{pN^- -\mathrm{nouv}}$ correspond à F par le théorème 5.3.2, on note indifféremment $\mathcal{L}(F) = \mathcal{L}(f)$ la valeur commune de $\mathcal{L}_{FM}(f) = \mathcal{L}_T(f)$.

5.4. Les résultats principaux. — On conserve les notations du §5.3. On étend tacitement les scalaires de $E_{\mathcal{L}}$ à E si $\mathcal{L} \in E$.

Lemme 5.4.1. — *Soit $\mathcal{L} \in E$.*
(i) Si $k > 2$ (resp. $k = 2$), la surjection $\sigma : O(k, \mathcal{L}) \twoheadrightarrow O(k)$ (proposition 3.2.2) induit une injection $O(k, \mathcal{L})^{{}^t\Gamma} \hookrightarrow O(k)^{{}^t\Gamma}$ (resp. $O(2, \mathcal{L})^{{}^t\Gamma}/E \hookrightarrow O(2)^{{}^t\Gamma}$).
(ii) Le sous-espace de $O(k)^{{}^t\Gamma}$ image de $O(k, \mathcal{L})^{{}^t\Gamma}$ est stable sous l'action des opérateurs de Hecke T_ℓ pour $\ell \nmid pN$.

Démonstration. — (i) résulte de $(\mathrm{Sym}^{k-2}E^2)^{{}^t\Gamma} = 0$ pour $k > 2$ car il est bien connu qu'il n'y a pas de formes modulaires rigides de poids négatif non nulles (voir e.g. [**17**],Th.4.1.(2)). (ii) résulte du fait que l'action des opérateurs de Hecke passe par l'action du groupe G (tordue par $\varepsilon(\det)^{\frac{k-2}{2}}$ ici, cf.(11)) et que la surjection $\sigma : O(k, \mathcal{L}) \twoheadrightarrow O(k)$ est G-équivariante. □

Théorème 5.4.2. — *Supposons $k > 2$.*
(i) Soit $\mathcal{L} \in E$ et $F \in O(k)^{{}^t\Gamma}$ vecteur propre des T_ℓ pour $\ell \nmid pN$, alors $F \in O(k, \mathcal{L})^{{}^t\Gamma}$ si et seulement si $\mathcal{L}(F) = -\mathcal{L}$.
(ii) On a $O(k, \mathcal{L})^{{}^t\Gamma} = 0$ sauf pour un ensemble fini de $\mathcal{L}$ (contenu dans E).
(iii) Les injections $O(k, \mathcal{L})^{{}^t\Gamma} \hookrightarrow O(k)^{{}^t\Gamma}$ induisent des isomorphismes :

$$\oplus_{\mathcal{L} \in E} O(k, \mathcal{L})^{{}^t\Gamma} \simeq O(k)^{{}^t\Gamma} \simeq S_k(\Gamma_0(pN))^{pN^- -\mathrm{nouv}}.$$

Démonstration. — (i) Par le (i) du lemme 5.4.1 et la proposition 3.2.2, on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow O(k, \mathcal{L})^{{}^t\Gamma} \longrightarrow O(k)^{{}^t\Gamma} \xrightarrow{\delta_{\mathcal{L}}} H^1({}^t\Gamma, \mathrm{Sym}^{k-2}E^2)$$

où d'après le corollaire 5.2.4 et le théorème 5.3.3 :

$$\begin{aligned} \delta_{\mathcal{L}}(F) &= -\frac{1}{(k-2)!}\big(\Psi_k(c_{\mathrm{col}}(F)) + \mathcal{L}\Psi_k(c_{\mathrm{sch}}(F))\big) \\ &= -\frac{1}{(k-2)!}(\mathcal{L}(F) + \mathcal{L})\Psi_k(c_{\mathrm{sch}}(F)). \end{aligned}$$

Mais c_{sch} : $O(k)^{{}^{\mathrm{t}}\Gamma} \to H^1(\Gamma, \mathrm{Sym}^{k-2}E^2)$ est un isomorphisme (cf. par exemple [**32**],Th.1 ou [**30**],Th.3.9), donc :

$$F \in O(k, \mathfrak{L})^{{}^{\mathrm{t}}\Gamma} \Leftrightarrow \delta_{\mathfrak{L}}(F) = 0 \Leftrightarrow (\mathfrak{L}(F) + \mathfrak{L})\Psi_k(c_{\mathrm{sch}}(F)) = 0 \Leftrightarrow \mathfrak{L}(F) + \mathfrak{L} = 0.$$

(ii) résulte de (i), du théorème 5.3.2 et du fait que $S_k(\Gamma_0(pN))^{pN^- - \mathrm{nouv}}$ est de dimension finie. (iii) Les opérateurs T_ℓ pour $\ell \nmid pN$ se diagonalisent sur une base de formes (propres) de $S_k(\Gamma_0(pN))^{pN^- - \mathrm{nouv}}$, donc aussi de $O(k)^{{}^{\mathrm{t}}\Gamma} = S_k(\Gamma)$ par le théorème 5.3.2. Par le (ii) du lemme 5.4.1 et le (i), une base du sous-espace $O(k, \mathfrak{L})^{{}^{\mathrm{t}}\Gamma}$ est donnée par les formes propres de la base précédente dont l'invariant est $\mathfrak{L}$. On en déduit la décomposition (iii). □

Remarque 5.4.3. — Lorsque $k = 2$, on a un énoncé analogue au théorème 5.4.2 en remplaçant $O(k, \mathfrak{L})^{{}^{\mathrm{t}}\Gamma}$ par $O(2, \mathfrak{L})^{{}^{\mathrm{t}}\Gamma}/E$.

Remarque 5.4.4. — Comme $H^1({}^{\mathrm{t}}\Gamma, O(k)) = 0$ pour tout $k \geq 2$ (voir par exemple [**17**],Cor.2.2), on a en fait pour $k > 2$ une suite exacte :

$$0 \to O(k, \mathfrak{L})^{{}^{\mathrm{t}}\Gamma} \to O(k)^{{}^{\mathrm{t}}\Gamma} \to H^1({}^{t}\Gamma, \mathrm{Sym}^{k-2}E^2) \to H^1({}^{t}\Gamma, O(k, \mathfrak{L})) \to 0.$$

Comme $O(k)^{{}^{\mathrm{t}}\Gamma}$ et $H^1({}^{t}\Gamma, \mathrm{Sym}^{k-2}E^2)$ ont même dimension sur E (cela résulte du fait que c_{sch} est un isomorphisme, voir preuve précédente), on en déduit que $O(k, \mathfrak{L})^{{}^{\mathrm{t}}\Gamma}$ et $H^1({}^{t}\Gamma, O(k, \mathfrak{L}))$ ont aussi même dimension. De plus, en utilisant les résultats de [**18**],§6 et ce qui précède, on peut montrer que la surjection dans la suite exacte ci-dessus induit des isomorphismes (même pour $k = 2$) :

$$H^1({}^{t}\Gamma, \mathrm{Sym}^{k-2}E^2) \simeq \oplus_{\mathfrak{L} \in E} H^1({}^{t}\Gamma, O(k, \mathfrak{L})).$$

Lemme 5.4.5. — *Soit B un E-espace vectoriel de Banach et H un groupe compact agissant sur B de sorte que $H \times B \to B$ est continu. Alors, quitte à remplacer la norme de B par une norme équivalente, la boule unité de B est stable par H.*

Démonstration. — Comme H est compact, son image dans $\mathrm{Hom}_E(B, B)$ (applications E-linéaires continues) muni de la norme $\|f\| \overset{\text{déf}}{=} \sup_{v \in B \setminus \{0\}} \frac{\|f(v)\|}{\|v\|}$ est bornée. Donc il existe $c \in |E^\times|$ tel que $\|h \cdot v\| \leq c\|v\|$ pour tout $h \in H$, $v \in B$ et aussi, puisque H est un groupe, $c^{-1}\|v\| \leq \|h \cdot v\|$. Si B^0 est la boule unité de B, on a donc $\lambda \in E^\times$ tel que $\lambda^{-1}B^0 \subset h(B^0) \subset \lambda B^0$ pour tout $h \in H$, d'où $\lambda^{-1}B^0 \subset \cap_{h \in H} h(B^0) \subset \lambda B^0$. On voit que $\cap_{h \in H} h(B^0)$ peut être utilisé comme nouvelle boule unité stable par H. □

Lemme 5.4.6. — *Pour tout $k \geq 2$ et tout $\mathfrak{L}$, on a $(O(k)^{\mathrm{b}})^{{}^{t}\Gamma} = O(k)^{{}^{t}\Gamma}$ et $(O(k, \mathfrak{L})^{\mathrm{b}})^{{}^{t}\Gamma} = O(k, \mathfrak{L})^{{}^{t}\Gamma}$.*

Démonstration. — On donne la preuve pour $O(k, \mathfrak{L})$, l'autre cas étant similaire. Il suffit de montrer $O(k, \mathfrak{L})^{{}^{t}\Gamma} \subset (O(k, \mathfrak{L})^{\mathrm{b}})^{{}^{t}\Gamma}$, l'autre inclusion étant triviale. Rappelons que I est le sous-groupe d'Iwahori de G et que $U(1)$ désigne le recouvrement particulier de $\mathbf{Q}_p$ dans $\mathbf{C}_p$ défini au §4.1. On vérifie que I préserve

$\Omega_{U(1)}$ et définit par (15) une action sur le Banach $O(k,\mathcal{L})_{U(1)}$ (§3.2) tel que $I\times O(k,\mathcal{L})_{U(1)}\to O(k,\mathcal{L})_{U(1)}$ est continu. Par le lemme 5.4.5, quitte à changer la norme de $O(k,\mathcal{L})_{U(1)}$ par une norme équivalente, on peut supposer que I préserve la boule unité de $O(k,\mathcal{L})_{U(1)}$. Par ailleurs, le groupe Γ étant cocompact, l'ensemble $I\mathbf{Q}_p^\times\backslash G/{}^t\Gamma$ est fini, représenté par les classes de $g_1,\dots,g_s\in G$. Soit $F\in O(k,\mathcal{L})^{{}^t\Gamma}$ et $\lambda\in E^\times$ tel que $\|(g_i\cdot\lambda F)|_{\Omega_{U(1)}}\|\le 1$ pour $1\le i\le s$. Tout $g\in G$ s'écrit $g=hg_i{}^t\gamma$ pour un $h\in I\mathbf{Q}_p^\times$, un $i\in\{1,\dots,s\}$ et un $\gamma\in\Gamma$. On a $\|(g_i\cdot\lambda F)|_{\Omega_{U(1)}}\|\le 1$ d'où $\|(g_i{}^t\gamma\cdot\lambda F)|_{\Omega_{U(1)}}\|\le 1$ puisque ${}^t\gamma\cdot F=F$ d'où $\|(hg_i{}^t\gamma\cdot\lambda F)|_{\Omega_{U(1)}}\|\le 1$ puisque I préserve la boule unité d'où $\|(g\cdot\lambda F)|_{\Omega_{U(1)}}\|\le 1$ pour tout $g\in G$ d'où $F\in O(k,\mathcal{L})^{\mathrm{b}}$. □

Le cas $k=2$ étant déjà fait (§4.5), on suppose $k>2$ et on pose :

$$\mathbf{\Lambda}(k)\overset{\text{déf}}{=}\{-\mathcal{L}(f),\ f \text{ forme propre nouvelle dans } S_k(\Gamma_0(pN)) \text{ pour } N \text{ de la forme } N^-N^+ \text{ comme au §5.3}\}\subset\overline{\mathbf{Q}_p}.$$

Théorème 5.4.7. — *Supposons $k>2$.*
(i) Pour $\mathcal{L}\in\mathbf{\Lambda}(k)$, on a $O(k,\mathcal{L})^{\mathrm{b}}\neq 0$, de sorte que $B(k,\mathcal{L})\neq 0$ et que la représentation $\Sigma(k,\mathcal{L})$ possède un réseau stable par G.
(ii) Soit $\mathcal{L}\in\overline{\mathbf{Q}_p}$ et $\mathcal{L}'\in\mathbf{\Lambda}(k)$, si $B(k,\mathcal{L})\xrightarrow{\sim}B(k,\mathcal{L}')$ est un isomorphisme E-linéaire continu G-équivariant (où E est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ contenant $E_{\mathcal{L}}$ et $E_{\mathcal{L}'}$), alors $\mathcal{L}=\mathcal{L}'$.

Démonstration. — (i) Via le théorème 5.3.2, cela se déduit du (i) du théorème 5.4.2, du lemme 5.4.6 et des résultats du §4. (ii) Par hypothèse et le (i) du théorème 5.4.2 (quitte à agrandir E), il existe un sous-groupe de congruence $\Gamma\subset\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et $F\in O(k,\mathcal{L}')^{{}^t\Gamma}$ correspondant par le théorème 5.3.2 à une forme f propre et nouvelle dans $S_k(\Gamma_0(pN))$ pour un N convenable. Si un isomorphisme comme dans l'énoncé existe, alors par dualité on a un isomorphisme E-linéaire G-équivariant $\psi: O(k,\mathcal{L}')^{\mathrm{b}}\xrightarrow{\sim}O(k,\mathcal{L})^{\mathrm{b}}$ (cf. fin du §4.2), d'où, puisque l'action des opérateurs de Hecke passe par l'action de G, une forme propre $\psi(F)\in O(k,\mathcal{L})^{{}^t\Gamma}$ ayant mêmes valeurs propres que F sur les T_ℓ pour $\ell\nmid pN$. Par la théorie d'Atkin-Lehner dans $S_k(\Gamma_0(pN))$, la forme propre correspondant à $\psi(F)$ par le théorème 5.3.2 doit être proportionnelle à f, donc on a en particulier $\mathcal{L}(\psi(F))=\mathcal{L}(F)$ ce qui entraîne $\mathcal{L}=\mathcal{L}'$ par le (i) du théorème 5.4.2. □

Remarque 5.4.8. — Pour $k>2$ et $\mathcal{L}\in\mathbf{\Lambda}(k)$, les réseaux de $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E_{\mathcal{L}}^2\otimes\mathrm{St}$ induits par les boules unités des $B(k,\mathcal{L})$, à savoir les réseaux $\Theta(k,\mathcal{L})^U\cap(\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E_{\mathcal{L}}^2\otimes\mathrm{St})$ du §4.3, *ne* sont *pas* commensurables entre eux quand $\mathcal{L}$ varie dans $\mathbf{\Lambda}(k)$ (utiliser le (ii) de la proposition 4.3.5 et le théorème ci-dessus). En utilisant le théorème 5.4.2 et des arguments similaires à ceux de la preuve précédente, on voit même qu'ils ne vérifient aucune inclusion à commensurabilité près les uns dans les autres !

Remarque 5.4.9. — Il est problable que les Banach $B(k,-\mathcal{L}(f))$, vus (pour $k > 2$) comme complétions de $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2 \otimes \mathrm{St}$, se réalisent dans la complétion p-adique du H^1 Betti des (pro-)courbes modulaires associée au réseau de la cohomologie entière (complétion considérée dans [**14**] par exemple) : voir [**8**].

Références

[1] Barthel L., Livné R., *Modular representations of* GL_2 *of a local field : the ordinary, unramified case*, J. of Number Theory 55, 1995, 1-27.

[2] Barthel L., Livné R., *Irreducible modular representations of* GL_2 *of a local field*, Duke Math. J. 75, 1994, 261-292.

[3] Bertolini M., Darmon H., Iovita A., Spiess M., *Teitelbaum's exceptional zero conjecture in the anticyclotomic setting*, Amer. J. Math. 124, 2002, 411-449.

[4] Breuil C., *Intégration p-adique*, Séminaire Bourbaki 860, Astérisque 266, 2000, 319-350.

[5] Breuil C., *p-adic Hodge theory, deformations and local Langlands*, cours au C.R.M. de Barcelone, juillet 2001, disponible à l'adresse **http ://www.math.u-psud.fr/~breuil/**.

[6] Breuil C., *Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de* $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ *I*, à paraître à Comp. Math.

[7] Breuil C., *Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de* $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ *II*, J. Institut Math. Jussieu 2, 2003, 23-58.

[8] Breuil C., *Série spéciale p-adique et cohomologie étale complétée*, prépublication I.H.É.S., 2003, disponible à l'adresse http ://www.ihes.fr/~breuil/publications.html.

[9] Breuil C., Mézard A., *Multiplicités modulaires et représentations de* $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ *et de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ *en* $\ell = p$, Duke Math. J. 115, 2002, 205-310.

[10] Coleman R., *A p-adic Shimura isomorphism and p-adic periods of modular forms*, Contemporary Mathematics 165, 1994, 21-51.

[11] Colmez P., Fontaine J.-M., *Construction des représentations p-adiques semi-stables*, Inv. Math. 140, 2000, 1-43.

[12] Deligne P., *Formes modulaires et représentations de* GL_2, Modular functions of one variable II, Lecture Notes 349, 1973, 55-105.

[13] Deligne P., Serre J.-P., *Formes modulaires de poids 1*, Ann. Scient. E.N.S. 7, 1974, 507-530.

[14] Emerton M., *On the interpolation of systems of eigenvalues attached to automorphic Hecke eigenforms*, prépublication 2003.

[15] Féaux de Lacroix C. T., *Einige Resultate über die topologischen Darstellungen p-adischer Liegruppen auf unendlich dimensionalen Vektorräumen über einem p-adischen Körper*, Schriftenreihe Math. Univ. Münster, 3. Serie, Heft 23, 1999, 1-111.

[16] Fontaine J.-M., *Représentations ℓ-adiques potentiellement semi-stables*, Astérisque 223, Soc. Math. de France, 1994, 321-347.

[17] Grosse-Klönne E., *Integral structures in automorphic line bundles on the p-adic upper half plane*, à paraître à Math. Annalen.

[18] Iovita A., Spiess M., *Derivatives of p-adic L-functions, Heegner cycles and monodromy modules attached to modular forms*, Inv. Math. 154, 2003, 333-384.

[19] Mazur B., *On monodromy invariants occurring in global arithmetic, and Fontaine's theory*, Contemporary Mathematics 165, 1994, 1-20.

[20] Mazur B., Tate J., Teitelbaum J., *On p-adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer*, Inv. Math. 84, 1986, 1-48.

[21] Morita Y., *A p-adic theory of hyperfunctions I*, Publ. R.I.M.S. 17, 1981, 1-24.

[22] Morita Y., *Analytic representations of* SL_2 *over a* $\mathfrak{p}$*-adic number field II*, Prog. Math. 46, Birkhaüser, 1984, 282-297.

[23] Saito T., *Modular forms and p-adic Hodge theory*, Inv. Math. 129, 1997, 607-620.

[24] Schneider P., *Nonarchimedean Functional Analysis*, Springer-Verlag, 2001.

[25] Schneider P., Teitelbaum J., *Locally analytic distributions and p-adic representation theory, with applications to* GL_2, J. Amer. Math. Soc. 15, 2002, 443-468.

[26] Schneider P., Teitelbaum J., $U(\mathfrak{g})$*-finite locally analytic representations*, Representation Theory 5, 2001, 111-128.

[27] Schneider P., Teitelbaum J., *Banach space representations and Iwasawa theory*, Israel J. Math. 127, 2002, 359-380.

[28] Schneider P., Teitelbaum J., *p-adic boundary values*, Astérisque 278, Soc. Math. de France, 2002, 51-125.

[29] Schneider P., Teitelbaum J., *Algebras of p-adic distributions and admissible representations*, Inv. Math. 153, 2003, 145-196.

[30] de Shalit E., *Eichler cohomology and periods of modular forms on p-adic Schottky groups*, J. reine angew. Math. 400, 1989, 3-31.

[31] Shimura G., *Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions*, Princeton University Press, Mathematical Society of Japan.

[32] Teitelbaum J., *Values of p-adic L-functions and a p-adic Poisson kernel*, Inv. math. 101, 1990, 395-410.

[33] Teitelbaum J., *Modular representations of* PGL_2 *and automorphic forms for Shimura curves*, Inv. math. 113, 1993, 561-580.

[34] Vignéras M.-F., *Arithmétique des algèbres de quaternions*, Lecture Notes in Math. 800, Springer, 1980.

C. Breuil, C.N.R.S. & I.H.E.S., Le Bois-Marie, 35 route de Chartres, 91440 Bures-sur-Yvette, France • *E-mail :* breuil@ihes.fr