VERS LE SOCLE LOCALEMENT ANALYTIQUE POUR GL_n II

par

Christophe Breuil

Résumé. — On conjecture que certaines représentations localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques irréductibles de $\mathrm{GL}_n(L)$ pour $[L:\mathbb{Q}_p]<\infty$ apparaissent en sous-objet dans des espaces Hecke-isotypiques de formes automorphes p-adiques. Lorsque $L=\mathbb{Q}_p$, on démontre quelques résultats partiels dans la direction de cette conjecture en utilisant des résultats récents sur les variétés de Hecke et une nouvelle formule d'adjonction pour le foncteur localement analytique de Jacquet-Emerton.

Table des matières

Je remercie pour leur soutien le CNRS, l'université Paris-Sud et le projet ThéHopaD ANR-2011-BS01-005. Je remercie L. Berger, Y. Ding, A. Minguez et B. Schraen pour des discussions ou pour leurs réponses à mes questions. Je remercie également F. Herzig pour des échanges toujours fructueux et pour m'avoir signalé la référence [**17**]. Je suis particulièrement reconnaissant à J. Bergdall pour m'avoir informé dans [**3**] de ses travaux en cours que l'on utilise ici. Enfin, j'exprime ma profonde gratitude à G. Chenevier pour toutes ses patientes et pertinentes explications.

1. Introduction

Dans cet article, qui fait suite à [**6**], on énonce une conjecture sur certains constituants du socle localement analytique (pour l'action de $\mathrm{GL}_n(L)$, $[L:\mathbb{Q}_p]<\infty$) de sous-espaces Hecke-isotypiques de l'espace des formes automorphes p-adiques sur un groupe unitaire compact à l'infini (Conjecture 5.3, Conjecture 6.1). Puis on démontre des résultats partiels en direction de cette conjecture (Théorème 9.3, Théorème 9.10) en utilisant d'une part divers résultats récents sur les variétés de Hecke associées aux groupes unitaires considérés ([**22**], [**10**], [**2**], [**3**], cf. Théorème 9.9 et Théorème 9.7), d'autre part une nouvelle formule d'adjonction pour le foncteur de Jacquet-Emerton (Théorème 4.3).

Expliquons brièvement les conjectures et résultats de cet article lorsque le corps de base est $\mathbb{Q}$ et les représentations galoisiennes locales cristallines (en fait, pour des raisons techniques, certains résultats ne sont valables qu'avec un corps de base totalement réel différent de $\mathbb{Q}$, nous oublions cela dans la suite de cette introduction).

Soit $n\geq 2$, F une extension quadratique imaginaire de $\mathbb{Q}$ où p est totalement décomposé, E une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ et $\rho:\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)\rightarrow \mathrm{GL}_n(E)$ une représentation continue, absolument irréductible et presque partout non ramifiée. Soit G un groupe unitaire sur $\mathbb{Q}$ associé à $F/\mathbb{Q}$ compact à l'infini et isomorphe à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ en p. Si U^p est un sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\infty,p})$, on définit l'espace $\widehat{S}(U^p,E)$ des fonctions continues $f : G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\infty})/U^p \rightarrow E$ que l'on munit de l'action à gauche continue de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ par translation à droite et de l'action usuelle des opérateurs de Hecke aux places non ramifiées en dehors de p et décomposées dans F (ces deux actions commutent). On note $\widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an}}\subseteq \widehat{S}(U^p,E)$ la sous-$\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$-représentation des vecteurs localement analytiques, qui contient la sous-$\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$-représentation $\widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{alg}}$ des vecteurs localement algébriques, i.e. des formes automorphes “classiques”. On note $\widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho]\subseteq \widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an}}$ la sous-$\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$-représentation “$\rho$-isotypique” de $\widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an}}$ où $\mathfrak{m}_\rho$ est l'idéal maximal associé à ρ (de corps résiduel E) dans l'algèbre de Hecke.

On suppose dans la suite $\widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho]$ non nul et ρ cristalline générique en p (i.e. les valeurs propres $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ du Frobenius sur $D_{\mathrm{cris}}(\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)})$ sont distinctes de ratio différent de p) avec des poids de Hodge-Tate $h_1<\cdots<h_n$ distincts. Dans [**6**, § 1] ou le § 6 (voir aussi [**6**, § 6] ou [**7**, § 5.2]), on a associé à $\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$ une liste finie de constituants localement analytiques irréductibles de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ sur E notés $C(w^{\mathrm{alg}},w)$ qui dépendent de deux permutations $w^{\mathrm{alg}},w\in\mathcal{S}_n$. On peut alternativement décrire cette liste comme suit : à chaque permutation w sur l'ensemble $\{\varphi_1,\cdots,\varphi_n\}$, i.e. à chaque raffinement au sens de [**1**, § 2.4], est associée une permutation naturelle $w^{\mathrm{alg}}(w)$ sur les poids de Hodge-Tate $\{h_1,\cdots,h_n\}$, cf. [**1**, § 2.4.1]. La liste est alors :

$$\{C(w^{\mathrm{alg}},w),\ (w^{\mathrm{alg}},w)\in\mathcal{S}_n\times\mathcal{S}_n, w^{\mathrm{alg}}\leq w^{\mathrm{alg}}(w)\}\tag{1}$$

où $\leq$ est l'ordre de Bruhat sur $\mathcal{S}_n$. Noter que w est un raffinement "non critique" au sens de [**1**, Def.2.4.5] si et seulement si $w^{\mathrm{alg}}(w) = 1$ et qu'en général il y a des entrelacements entre les $C(w^{\mathrm{alg}}, w)$, par exemple les $C(1, w)$ sont tous isomorphes. On conjecture que, parmi tous les constituants $C(w^{\mathrm{alg}}, w)$, seuls ceux de la liste (1) apparaissent (à torsion près par une puissance du caractère cyclotomique ε) dans le socle de $\widehat{S}(U^p, E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho]$:

Conjecture 1.1 **(Conj. 5.3, Conj. 6.1)**. — *Soit* $(w^{\mathrm{alg}}, w) \in \mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_n$, *on a :*

$$C(w^{\mathrm{alg}}, w)(\varepsilon^{n-1}) \hookrightarrow \widehat{S}(U^p, E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho] \iff w^{\mathrm{alg}} \leq w^{\mathrm{alg}}(w).$$

Notons que la conjecture ne dit rien sur d'éventuels autres constituants dans le socle de $\widehat{S}(U^p, E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho]$ qui ne seraient pas de la forme $C(w^{\mathrm{alg}}, w)(\varepsilon^{n-1})$. Le théorème ci-dessous résume les résultats très partiels de cet article dans la direction de la Conjecture 1.1 :

Théorème 1.2 **(Th. 9.3, Th. 9.10)**. — *(i) Soit* $(w^{\mathrm{alg}}, w) \in \mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_n$ *et supposons* $n \leq 3$ *ou* $\lg(w^{\mathrm{alg}}(w)) \leq 2$, *alors* $C(w^{\mathrm{alg}}, w)(\varepsilon^{n-1}) \hookrightarrow \widehat{S}(U^p, E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho]$ *implique* $w^{\mathrm{alg}} \leq w^{\mathrm{alg}}(w)$.
(ii) Supposons $\widehat{S}(U^p, E)^{\mathrm{alg}}[\mathfrak{m}_\rho] \neq 0$ *(i.e.* ρ *automorphe) et ou bien* $n \leq 3$, *ou bien* G *quasi-déployé en toute place finie,* U_v *maximal hyperspécial en toute place inerte,* U_v *maximal très spécial en toute place ramifiée (*[**1**, § 6.8.1]*). Soit* $w \in \mathcal{S}_n$ *tel que* $w^{\mathrm{alg}}(w) \neq 1$ *et supposons de plus que, pour tout* $i \in \{1, \cdots, n\}$, *la valeur propre* $\varphi_{w^{-1}(1)} \cdots \varphi_{w^{-1}(i)}$ *du Frobenius sur* $\wedge_E^i D_{\mathrm{cris}}(\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)})$ *a multiplicité* 1. *Alors il existe* $w^{\mathrm{alg}} \in \mathcal{S}_n \backslash \{1\}$ *tel que* $C(w^{\mathrm{alg}}, w)(\varepsilon^{n-1}) \hookrightarrow \widehat{S}(U^p, E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho]$.

Par $\lg(w^{\mathrm{alg}}(w))$, on entend la longueur dans le groupe de Coxeter $\mathcal{S}_n$. En particulier, si $\lg(w^{\mathrm{alg}}(w)) \leq 1$ pour tout $w \in \mathcal{S}_n$, alors la Conjecture 1.1 est vraie sous les conditions du (ii) du Théorème 1.2. Pour les cas $n \geq 4$, le (ii) du Théorème 1.2 n'est en fait vraiment démontré ici qu'avec un corps totalement réel F^+ au lieu de $\mathbb{Q}$, cf. Théorème 9.10.

La stratégie de la preuve consiste à utiliser la variété de Hecke associée à G et U^p ([**1**], [**15**], etc.). Le (i) est une conséquence assez directe de l'existence d'une triangulation globale sur cette variété de Hecke ([**22**]) et de considérations simples sur l'ordre de Bruhat, cf. Proposition 9.2. Le (ii) est plus subtil. Dans un premier temps, on combine un théorème de Chenevier ([**10**], cf. Théorème 9.9) avec un théorème récent de Bergdall ([**3**], [**4**]) dont on redonne une preuve légèrement différente (Théorème 9.7) pour en déduire l'existence d'un "point compagnon" de représentation galoisienne associée ρ sur la variété de Hecke (ces théorèmes requièrent les restrictions techniques en (ii) sur G, U^p et le Frobenius, vraisemblablement inutiles). On en profite au passage pour énoncer une conjecture décrivant précisément tous les points sur cette variété de Hecke de représentation galoisienne associée ρ (Conjecture 6.6), conjecture qui est en fait impliquée par la Conjecture 1.1 ci-dessus (Corollaire 8.2, Proposition

8.4). Via [**23**], le point compagnon précédent s'interprète comme un certain caractère du tore $T(\mathbb{Q}_p)$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ dans le socle du foncteur de Jacquet-Emerton de $\widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho]$ (Proposition 7.2). On conclut avec une loi d'adjonction pour le foncteur de Jacquet-Emerton (Théorème 4.3, Corollaire 4.6) qui permet de passer d'un caractère de $T(\mathbb{Q}_p)$ comme ci-dessus à une "vraie" représentation de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ dans le socle de $\widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho]$, ce qui donne le (ii) du Théorème 1.2. Notons que cette loi d'adjonction fait intervenir non pas une série principale localement analytique de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$, mais une représentation localement analytique de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ dont les constituants irréductibles sont les mêmes qu'une telle série principale mais "dans l'ordre inverse". L'existence d'une telle représentation est basée sur les résultats d'Orlik et Strauch ([**25**]). La preuve de la loi d'adjonction du Théorème 4.3 consiste dès lors à reprendre les preuves de [**13**] et [**14**] à la lumière des constructions de [**25**]. Noter que ce théorème est démontré dans un cadre plus général, i.e. pour un sous-groupe parabolique au lieu du Borel. Par ailleurs, l'auteur s'attend à ce que la Conjecture 1.1 soit valable pour des groupes de cohomologie complétés plus généraux (i.e. provenant d'autres groupes algébriques isomorphes à GL_n aux places divisant p, cf. par exemple le (ii) de la Remarque 5.5).

Terminons l'introduction avec les principales notations. Si L est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ et si $x\in\overline{\mathbb{Q}_p}$, on note $|x|_L=q^{-e\,\mathrm{val}(x)}$ où $q=p^f$ est le cardinal du corps résiduel de L, $e=[L:\mathbb{Q}_p]/f$ et où la valuation val est normalisé par $\mathrm{val}(p)=1$. En particulier $|x|_L\in q^{\mathbb{Z}}$ si $x\in L$, et $\mathrm{val}(\varpi_L)=1/e$, $|\varpi_L|_L=q^{-1}$ si ϖ_L est une uniformisante de L. On note $W(\overline{L}/L)$ le groupe de Weil de L et $\mathrm{rec}: W(\overline{L}/L)^{\mathrm{ab}}\xrightarrow{\sim} L^\times$ l'application de réciprocité de la théorie du corps de classes local normalisée de sorte que les Frobenius *géométriques* s'envoient sur les uniformisantes. On désigne par ε le caractère cyclotomique p-adique et on rappelle que sa restriction à $W(\overline{L}/L)$ vérifie $\varepsilon\circ\mathrm{rec}^{-1}(x)=|x|_L\mathrm{Norm}_{L/\mathbb{Q}_p}(x)$. Afin de suivre les conventions de nombreuses références, par exemple [**1**] ou [**22**], on convient (avec réticence) que le poids de Hodge-Tate de ε est -1.

Irréductible pour une représentation continue π d'un groupe topologique G veut toujours dire topologiquement irréductible, c'est-à-dire ne possédant pas de sous-espace non nul fermé et stable sous l'action du groupe. Les induites paraboliques sont toutes "droites", i.e. *non* normalisées. Si G est un groupe p-adique L-analytique et V un E-espace vectoriel topologique localement convexe, on note $C^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(G,V)$ le E-espace vectoriel topologique localement convexe des fonctions localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques de G à valeurs dans V ([**28**, § 2]). On renvoie le lecteur à [**28**] et [**29**] pour les définitions et propriétés des représentations localement ($\mathbb{Q}_p$-)analytiques de G sur des E-espaces vectoriels topologiques localement convexes séparés de type compact. Si Π est une représentation linéaire continue de G sur un E-espace de Banach, on note $\Pi^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}\subseteq\Pi$ la sous-G-représentation formée des vecteurs localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques ([**30**, § 7]). Si $L=\mathbb{Q}_p$, on note simplement Π^{an}. Si T est un tore algébrique, on note $X(T)\stackrel{\text{déf}}{=}\mathrm{Hom}_{\mathrm{gr}}(T,\mathbb{G}_{\mathrm{m}})$ son groupe des caractères (algébriques).

Si K est un corps de nombres, on note $\mathbb{A}_K$ les adèles de K, $\mathbb{A}_K^\infty$ les adèles finis et $\mathbb{A}_K^{\infty,p}$ les adèles finis en dehors des places divisant p. Si v est une place finie de K, on note K_v le complété de K en v. Si une E-algèbre commutative A agit linéairement sur un E-espace vectoriel V et si $\psi : A \to E$ est un morphisme de E-algèbres de noyau I (un idéal de A), on note $V[I] = V[\psi] \stackrel{\text{déf}}{=} \{v \in V,\ av = \psi(a)v\ \forall\ a \in A\}$ et $V\{I\} = V\{\psi\} \stackrel{\text{déf}}{=} \{v \in V,\ \exists\ n \in \mathbb{Z}_{>0},\ (a - \psi(a))^n v = 0\ \forall\ a \in A\}$. S'il y a une ambiguité sur l'algèbre A considérée, on note $V\{A = \psi\}$ au lieu de $V\{\psi\}$.

2. Rappels sur les $G(L)$-représentations $\mathcal{F}_P^G(M, \pi_P)$

On rappelle brièvement la définition des représentations $\mathcal{F}_P^G(M, \pi_P)$ ([**25**], cf. aussi [**6**, § 2]).

On fixe L, E deux extensions finies de $\mathbb{Q}_p$ et on suppose que $|\mathcal{S}| = [L : \mathbb{Q}_p]$ où $\mathcal{S} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}(L, E)$. On fixe un groupe algébrique réductif connexe déployé G sur L. Si G a des facteurs de types différents de A, on suppose de plus $p > 3$ comme [**25**] (à partir du § 5, G n'a pas de tels facteurs, et il n'y a donc pas de restriction sur p). On fixe un tore maximal déployé $T \subset G$ et un sous-groupe de Borel $B = TN \subset G$ contenant T où N est le radical unipotent. On fixe aussi un sous-groupe parabolique $P \subset G$ contenant B, et on note $\overline{P}$ le parabolique opposé, $L_P = L_{\overline{P}}$ le sous-groupe de Levi de P et $\overline{P}$, et N_P, $N_{\overline{P}}$ leur radical unipotent respectif (on a donc $P = L_P N_P$, $T \subseteq L_P$ et de même avec $\overline{P}$). On note $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{b}$, $\overline{\mathfrak{b}}$, $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{n}$, $\overline{\mathfrak{n}}$, $\mathfrak{p}$, $\overline{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{l}_P$, $\mathfrak{n}_P$ et $\mathfrak{n}_{\overline{P}}$ les $\mathbb{Q}_p$-algèbres de Lie respectives des groupes p-adiques L-analytiques $G(L)$, $B(L)$, $\overline{B}(L)$, $T(L)$, $N(L)$, $\overline{N}(L)$, $P(L)$, $\overline{P}(L)$, $L_P(L)$, $N_P(L)$ et $N_{\overline{P}}(L)$. Ce sont naturellement des L-espaces vectoriels et pour chaque plongement $\sigma : L \hookrightarrow E$, on définit les E-algèbre de Lie $\mathfrak{g}_\sigma \stackrel{\text{déf}}{=} \mathfrak{g} \otimes_{L,\sigma} E$ et de même $\mathfrak{b}_\sigma$, $\overline{\mathfrak{b}}_\sigma$, $\mathfrak{t}_\sigma$, $\mathfrak{n}_\sigma$, $\overline{\mathfrak{n}}_\sigma$, $\mathfrak{p}_\sigma$, $\overline{\mathfrak{p}}_\sigma$, $\mathfrak{l}_{P,\sigma}$, $\mathfrak{n}_{P,\sigma}$ et $\mathfrak{n}_{\overline{P}\sigma}$. De l'isomorphisme :

$$L \otimes_{\mathbb{Q}_p} E \xrightarrow{\sim} \prod_{\sigma \in \mathcal{S}} E,\ x \otimes y \longmapsto (\sigma(x)y)_{\sigma \in \mathcal{S}} \tag{2}$$

on déduit $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E \cong \prod_{\sigma \in \mathcal{S}} \mathfrak{g}_\sigma$, $\mathfrak{b} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E \cong \prod_{\sigma \in \mathcal{S}} \mathfrak{b}_\sigma$, etc. et de même avec les algèbres enveloppantes $U(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E) \cong \otimes_{\sigma \in \mathcal{S}} U(\mathfrak{g}_\sigma)$, $U(\mathfrak{b} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E) \cong \otimes_{\sigma \in \mathcal{S}} U(\mathfrak{b}_\sigma)$, ...

L'action induite de $U(\mathfrak{l}_P \otimes_{\mathbb{Q}_p} E)$ sur les représentations algébriques irréductibles de $(\mathrm{Res}_{L/\mathbb{Q}_p} L_P) \times_{\mathbb{Q}_p} E$ sur E donne des $U(\mathfrak{l}_P \otimes_{\mathbb{Q}_p} E)$-modules simples (de dimension finie sur E) que l'on appelle *algébriques*. Suivant [**25**, § 2], on définit la catégorie $\mathcal{O}_{\mathrm{alg}}^{\mathfrak{p}}$ comme la sous-catégorie pleine de la catégorie des représentations E-linéaires de $\mathfrak{g}$ (ou de manière équivalente de $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$) sur des E-espaces vectoriels formée des représentations M telles que :
(i) M est de type fini comme $U(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E)$-module;
(ii) $M|_{U(\mathfrak{l}_P \otimes_{\mathbb{Q}_p} E)}$ est une somme directe de $U(\mathfrak{l}_P \otimes_{\mathbb{Q}_p} E)$-modules simples algébriques;
(iii) pour tout $m \in M$, le sous-E-espace vectoriel $U(\mathfrak{n}_P \otimes_{\mathbb{Q}_p} E)m \subseteq M$ est de dimension

finie sur E.
La catégorie $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}_{\rm alg}$ est artinienne et stable par sous-objet et quotient. Si Q est un sous-groupe parabolique de G contenant P, la catégorie $\mathcal{O}^{\mathfrak{q}}_{\rm alg}$ est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}_{\rm alg}$. En particulier toutes les catégories $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}_{\rm alg}$ sont des sous-catégories pleines de $\mathcal{O}^{\mathfrak{b}}_{\rm alg}$. Pour tout objet M de $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}_{\rm alg}$, il existe un unique sous-groupe parabolique $Q \subseteq G$ contenant P tel que M est dans $\mathcal{O}^{\mathfrak{q}}_{\rm alg}$ et n'est pas dans une sous-catégorie pleine de $\mathcal{O}^{\mathfrak{q}}_{\rm alg}$ pour un sous-groupe parabolique contenant strictement Q : on dit que Q est le sous-groupe parabolique *maximal* de M. Si M est un objet simple de $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}_{\rm alg}$, on a $M \cong \otimes_{\sigma\in\mathcal{S}} M_\sigma$ où M_σ est un objet simple de la catégorie $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}_\sigma}_{\rm alg}$ définie comme $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}_{\rm alg}$ en remplaçant $\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ par $\mathfrak{g}_\sigma$ et $\mathfrak{p}\otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ par $\mathfrak{p}_\sigma$.

Soit maintenant M un objet de $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}_{\rm alg}$ et choisissons un sous-E-espace vectoriel W de M de dimension finie stable par $U(\mathfrak{p}\otimes_{\mathbb{Q}_p} E)$ et qui engendre M sous l'action de $U(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p} E)$. On a donc une suite exacte courte de $U(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p} E)$-modules :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\phi) \longrightarrow U(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p} E)\otimes_{U(\mathfrak{p}\otimes_{\mathbb{Q}_p} E)} W \xrightarrow{\phi} M \longrightarrow 0. \tag{3}$$

On munit W de la restriction à $P(L) \subset ((\mathrm{Res}_{L/\mathbb{Q}_p} P)\times_{\mathbb{Q}_p} E)(E)$ de l'unique action algébrique de $(\mathrm{Res}_{L/\mathbb{Q}_p} P)\times_{\mathbb{Q}_p} E$ sur W relevant celle de $\mathfrak{p}\otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ ([**25**, Lem.3.2]). Soit π_P une représentation lisse admissible de longueur finie de $L_P(L)$ sur E que l'on voit comme représentation de $P(L)$ via $P(L) \twoheadrightarrow L_P(L)$, on définit l'induite parabolique localement $\mathbb{Q}_p$-analytique :

$$\begin{aligned}(4)\quad & \big(\mathrm{Ind}_{P(L)}^{G(L)} W'\otimes_E \pi_P\big)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}} \overset{\text{déf}}{=} \\ & \quad \big\{f \in C^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(G(L), W'\otimes_E \pi_P),\ f(pg) = p(f(g))\ \forall\, p\in P(L)\ \ \forall\, g\in G(L)\big\}\end{aligned}$$

où $W' \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}_E(W,E)$ est muni de l'action $(p(h))(w) \overset{\text{déf}}{=} h(p^{-1}w)$ et où $W'\otimes_E\pi_P$ est muni de la topologie localement convexe limite inductive $\varinjlim(W'\otimes_E \pi_P^K)$ pour K parcourant les sous-groupes ouverts compacts de $L_P(L)$ (cf. [**25**, § 4.4]). On munit $\big(\mathrm{Ind}_{P(L)}^{G(L)} W'\otimes_E \pi_P\big)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}$ de l'action à gauche de $G(L)$ par endomorphismes E-linéaires continus donnée par $(g\cdot f)(h) \overset{\text{déf}}{=} f(hg)$ $(g\in G(L))$.

On munit par ailleurs $C^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(G(L), W'\otimes_E \pi_P)$ d'une action à gauche de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ par endomorphismes E-linéaires continus donnée par (pour $\mathfrak{x}\in\mathfrak{g}$) :

$$(\mathfrak{x}\cdot f)(g) \overset{\text{déf}}{=} \frac{d}{dt} f\big(\exp(-t\mathfrak{x})g\big)|_{t=0} \in W'\otimes_E \pi_P \tag{5}$$

(attention, cette action-là ne préserve pas $\big(\mathrm{Ind}_{P(L)}^{G(L)} W'\otimes_E \pi_P\big)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}$). Cette action en induit une de $\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ et de $U(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p} E)$ sur $C^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(G(L), W'\otimes_E \pi_P)$ que l'on note encore $f\mapsto \mathfrak{x}\cdot f$. Un élément $\mathfrak{x}\otimes w$ de $U(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p} E)\otimes_E W$ donne donc une application E-linéaire continue :

$$\begin{array}{llcl}\mathfrak{x}\otimes w\ :\ & C^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(G(L), W'\otimes_E \pi_P) & \longrightarrow & C^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(G(L), \pi_P) \\ & f & \longmapsto & (\mathfrak{x}\otimes w)\cdot f \overset{\text{déf}}{=} \big(g\mapsto (\mathfrak{x}\cdot f)(g)(w)\big).\end{array} \tag{6}$$

Lorsque $f \in \big(\mathrm{Ind}_{P(L)}^{G(L)} W' \otimes_E \pi_P\big)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}} \subset C^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(G(L), W' \otimes_E \pi_P)$ et $\mathfrak{d} \in U(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E) \otimes_E W$, la fonction $\mathfrak{d} \cdot f \in C^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(G(L), \pi_P)$ ne dépend que de l'image de $\mathfrak{d}$ dans $U(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E) \otimes_{U(\mathfrak{p}\otimes_{\mathbb{Q}_p} E)} W$ (cf. [**6**, Lem.2.1]) ce qui permet de définir avec [**25**] la représentation localement $\mathbb{Q}_p$-analytique admissible de $G(L)$:

$$(7)\quad \big(\mathrm{Ind}_{P(L)}^{G(L)} W' \otimes_E \pi_P\big)^{\mathrm{Ker}(\phi)} \overset{\text{déf}}{=} \Big\{f \in \big(\mathrm{Ind}_{P(L)}^{G(L)} W' \otimes_E \pi_P\big)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}, \mathfrak{d} \cdot f = 0 \ \forall\ \mathfrak{d} \in \mathrm{Ker}(\phi)\Big\}$$

(cf. (3) pour $\mathrm{Ker}(\phi)$).

Remarque 2.1. — Notons que l'on obtient la même représentation à gauche dans (7) si l'on remplace à droite "pour tout $\mathfrak{d} \in \mathrm{Ker}(\phi)$" par "pour tout $\mathfrak{d}$ dans un système générateur de $\mathrm{Ker}(\phi)$ comme $U(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E)$-module".

Le théorème suivant résume les résultats principaux de [**25**] (avec un petit supplément dans [**6**, § 9]) :

Théorème 2.2. — *(i) La représentation localement $\mathbb{Q}_p$-analytique $\big(\mathrm{Ind}_{P(L)}^{G(L)} W' \otimes_E \pi_P\big)^{\mathrm{Ker}(\phi)}$ de $G(L)$ est indépendante du choix de W.*
(ii) La construction $(M, \pi_P) \mapsto \mathcal{F}_P^G(M, \pi_P) \overset{\text{déf}}{=} \big(\mathrm{Ind}_{P(L)}^{G(L)} W' \otimes_E \pi_P\big)^{\mathrm{Ker}(\phi)}$ est fonctorielle et exacte en les deux arguments.
(iii) Si $Q \supseteq P$ est un sous-groupe parabolique tel que $M \in \mathcal{O}_{\mathrm{alg}}^{\mathfrak{q}}$, on a $\mathcal{F}_P^G(M, \pi_P) \cong \mathcal{F}_Q^G\big(M, \mathrm{Ind}_{P(L)\cap L_Q(L)}^{L_Q(L)} \pi_P\big)$ où $\mathrm{Ind}_{P(L)\cap L_Q(L)}^{L_Q(L)} \pi_P$ est l'induite parabolique lisse.
(iv) Si M est simple, P est maximal pour M et π_P est irréductible, la représentation $\mathcal{F}_P^G(M, \pi_P)$ de $G(L)$ est irréductible, non nulle si et seulement si M et π_P sont non nuls.

En particulier, on déduit de (iii) et (iv) que $\mathcal{F}_P^G(M, \pi_P)$ est irréductible si et seulement si M et l'induite $\mathrm{Ind}_{P(L)\cap L_Q(L)}^{L_Q(L)} \pi_P$ le sont où Q est le sous-groupe parabolique maximal de M.

3. Les $(\mathfrak{g}, \overline{P}(L))$-représentations $\mathcal{F}_P^G(M, \pi_P)^{\mathbb{Q}_p\text{-alg}}$

En utilisant des résultats de [**14**], on définit un sous-E-espace vectoriel $\mathcal{F}_P^G(M, \pi_P)^{\mathbb{Q}_p\text{-alg}}$ de $\mathcal{F}_P^G(M, \pi_P)$ (analogue aux "vecteurs localement polynomiaux") stable par $U(\mathfrak{g})$ et $\overline{P}(L)$.

Soit $\mathfrak{x} \mapsto \dot{\mathfrak{x}}$ (suivant la notation de [**28**, § 2]) l'unique anti-involution sur $U(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E)$ et $U(\mathfrak{n}_{\overline{P}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E)$ induite par la multiplication par -1 sur $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ et $\mathfrak{n}_{\overline{P}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$. Si M

est un objet de $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}_{\mathrm{alg}}$, on munit $\mathrm{Hom}_E(M,E)$ de la structure de $U(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)$-module à gauche :

$$(\mathfrak{x}\cdot f)(m)\overset{\text{déf}}{=}f(\dot{\mathfrak{x}}m)\qquad \mathfrak{x}\in U(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E),\ m\in M. \tag{8}$$

On note $\mathrm{Hom}_E(M,E)^{\mathfrak{n}_{\overline{P}}^{\infty}}$ (cf. [**14**, § 5]) le sous-$U(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)$-module de $\mathrm{Hom}_E(M,E)$ des éléments annulés par une puissance finie de $\mathfrak{n}_{\overline{P}}$. Une preuve analogue à celle de [**19**, § 3.2] montre que $\mathrm{Hom}_E(M,E)^{\mathfrak{n}_{\overline{P}}^{\infty}}$ est alors un objet de la catégorie $\mathcal{O}^{\overline{\mathfrak{p}}}_{\mathrm{alg}}$.

Soit W un $U(\mathfrak{p}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)$-module de dimension finie sur E. Si $\mathfrak{x}\otimes w\in U(\mathfrak{n}_{\overline{P}})\otimes_{\mathbb{Q}_p}W$, on définit un morphisme de $U(\mathfrak{n}_{\overline{P}}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)$-modules à gauche :

$$\begin{array}{rccc}\mathfrak{x}\otimes w\ :\ & \mathrm{Hom}_E(U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{p})}W,E)^{\mathfrak{n}_{\overline{P}}^{\infty}} & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(U(\mathfrak{n}_{\overline{P}}),E)^{\mathfrak{n}_{\overline{P}}^{\infty}}\\ & f & \longmapsto & (\mathfrak{x}\otimes w)\cdot f\overset{\text{déf}}{=}\big(\mathfrak{y}\longmapsto f(\mathfrak{y}\mathfrak{x}\otimes w)\big)\end{array} \tag{9}$$

où $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(U(\mathfrak{n}_{\overline{P}}),E)^{\mathfrak{n}_{\overline{P}}^{\infty}}$ est comme ci-dessus le sous-$U(\mathfrak{n}_{\overline{P}}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)$-module de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(U(\mathfrak{n}_{\overline{P}}),E)$ (avec l'action à gauche (8) de $U(\mathfrak{n}_{\overline{P}})$) des éléments annulés par une puissance de $\mathfrak{n}_{\overline{P}}$. On en déduit par linéarité un morphisme de $U(\mathfrak{n}_{\overline{P}}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)$-modules à gauche $\mathfrak{d}:\mathrm{Hom}_E(U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{p})}W,E)^{\mathfrak{n}_{\overline{P}}^{\infty}}\to\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(U(\mathfrak{n}_{\overline{P}}),E)^{\mathfrak{n}_{\overline{P}}^{\infty}}$ pour tout $\mathfrak{d}\in U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{p})}W\cong U(\mathfrak{n}_{\overline{P}})\otimes_{\mathbb{Q}_p}W$.

On note $C^{\mathbb{Q}_p\text{-pol}}(N_{\overline{P}}(L),W')$ (resp. $C^{\mathbb{Q}_p\text{-pol}}(N_{\overline{P}}(L),E)$) le E-espace vectoriel des fonctions polynomiales sur les $\mathbb{Q}_p$-points du groupe algébrique $\mathrm{Res}_{L/\mathbb{Q}_p}N_{\overline{P}}$ à valeurs dans W' (resp. E). Le groupe $N_{\overline{P}}(L)$ agit sur $C^{\mathbb{Q}_p\text{-pol}}(N_{\overline{P}}(L),W')$ et $C^{\mathbb{Q}_p\text{-pol}}(N_{\overline{P}}(L),E)$ par translation à droite sur les fonctions. Cette action à gauche en induit une de $U(\mathfrak{n}_{\overline{P}})$ qui lui est équivalente puisqu'il s'agit de fonctions polynomiales. Par ailleurs, si $\mathfrak{x}\otimes w\in U(\mathfrak{n}_{\overline{P}})\otimes_{\mathbb{Q}_p}W$, on définit de manière analogue à (6) une application E-linéaire et $N_{\overline{P}}(L)$-équivariante :

$$\begin{array}{rccc}\mathfrak{x}\otimes w\ :\ & C^{\mathbb{Q}_p\text{-pol}}(N_{\overline{P}}(L),W') & \longrightarrow & C^{\mathbb{Q}_p\text{-pol}}(N_{\overline{P}}(L),E)\\ & f & \longmapsto & (\mathfrak{x}\otimes w)\cdot f=\big(g\mapsto(\mathfrak{x}\cdot f)(g)(w)\big)\end{array} \tag{10}$$

où $(\mathfrak{x}\cdot f)(g)\in W'$ est défini comme en (5). On en déduit par linéarité une application E-linéaire $N_{\overline{P}}(L)$-équivariante $\mathfrak{d}:C^{\mathbb{Q}_p\text{-pol}}(N_{\overline{P}}(L),W')\to C^{\mathbb{Q}_p\text{-pol}}(N_{\overline{P}}(L),E)$ pour tout $\mathfrak{d}\in U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{p})}W$.

Lemme 3.1. — *Il existe des isomorphismes canoniques de $U(\mathfrak{n}_{\overline{P}}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)$-modules à gauche $\mathrm{Hom}_E(U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{p})}W,E)^{\mathfrak{n}_{\overline{P}}^{\infty}}\xrightarrow{\sim}C^{\mathbb{Q}_p\text{-pol}}(N_{\overline{P}}(L),W')$ et $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(U(\mathfrak{n}_{\overline{P}}),E)^{\mathfrak{n}_{\overline{P}}^{\infty}}\xrightarrow{\sim}C^{\mathbb{Q}_p\text{-pol}}(N_{\overline{P}}(L),E)$ tels que, pour tout $\mathfrak{d}\in U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{p})}W\cong U(\mathfrak{n}_{\overline{P}})\otimes_{\mathbb{Q}_p}W$, on a un diagramme commutatif de $U(\mathfrak{n}_{\overline{P}}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)$-modules à gauche :*

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Hom}_E(U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{p})}W,E)^{\mathfrak{n}_{\overline{P}}^{\infty}} & \xrightarrow{\sim} & C^{\mathbb{Q}_p\text{-pol}}(N_{\overline{P}}(L),W')\\ \mathfrak{d}\cdot\downarrow & & \downarrow\mathfrak{d}\cdot\\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(U(\mathfrak{n}_{\overline{P}}),E)^{\mathfrak{n}_{\overline{P}}^{\infty}} & \xrightarrow{\sim} & C^{\mathbb{Q}_p\text{-pol}}(N_{\overline{P}}(L),E).\end{array} \tag{11}$$

Démonstration. — On a un isomorphisme de $U(\mathfrak{g})$-modules à gauche :

$$\mathrm{Hom}_E(U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{p})}W,E)^{\mathfrak{n}_{\overline{P}}^{\infty}}\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{p})}(U(\mathfrak{g}),W')^{\mathfrak{n}_{\overline{P}}^{\infty}}$$

qui envoie f sur la fonction $\mathfrak{x} \in U(\mathfrak{g}) \mapsto (w \mapsto f(\dot{\mathfrak{x}} \otimes w)) \in W'$ où $\mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{p})}(U(\mathfrak{g}), W')^{\mathfrak{n}_{\overline{P}}^{\infty}}$ est muni de la structure de $U(\mathfrak{g})$-module par translation à droite sur les fonctions (i.e. la multiplication à droite sur $U(\mathfrak{g})$). L'isomorphisme du haut dans (11) est alors (l'inverse de) celui de [**14**, (2.5.7)] où $f \in \mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{p})}(U(\mathfrak{g}), W')^{\mathfrak{n}_{\overline{P}}^{\infty}} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(U(\mathfrak{n}_{\overline{P}}), W')^{\mathfrak{n}_{\overline{P}}^{\infty}}$ est envoyé sur l'unique polynôme $P_f \in C^{\mathbb{Q}_p\text{-pol}}(N_{\overline{P}}(L), W')$ tel que $f(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x}(P_f)(1)$ pour tout $\mathfrak{x} \in U(\mathfrak{n}_{\overline{P}})$ (pour l'action à gauche ci-dessus de $U(\mathfrak{n}_{\overline{P}})$ sur $C^{\mathbb{Q}_p\text{-pol}}(N_{\overline{P}}(L), W')$). L'isomorphisme du bas est analogue en remplaçant $U(\mathfrak{g})$ par $U(\mathfrak{n}_{\overline{P}})$. Pour tout $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in U(\mathfrak{n}_{\overline{P}})$ et $Q \in C^{\mathbb{Q}_p\text{-pol}}(N_{\overline{P}}(L), E)$ on a l'égalité $(\dot{\mathfrak{y}}\mathfrak{x})(Q)(1) = \mathfrak{x}(\mathfrak{y} \cdot Q)(1)$ où $\mathfrak{y} \cdot Q \in C^{\mathbb{Q}_p\text{-pol}}(N_{\overline{P}}(L), E)$ est défini comme en (10) avec $W' = E$ (i.e. sans w) et Q au lieu de f. La commutation est alors formelle à partir des diverses définitions en appliquant cette égalité aux polynômes $Q(\cdot) = P_f(\cdot)(w)$ pour P_f comme ci-dessus et $w \in W$. $\square$

En particulier, la structure de $U(\mathfrak{n}_{\overline{P}})$-module à gauche de $C^{\mathbb{Q}_p\text{-pol}}(N_{\overline{P}}(L), W')$ s'étend à $U(\mathfrak{g})$ par l'isomorphisme du haut dans (11) (voir [**14**, § 2.5]).

On fixe jusqu'à la fin de cette section une représentation lisse admissible de longueur finie π_P de $L_P(L)$ sur E et on note $C_c^{\infty}(N_{\overline{P}}(L), \pi_P)$ le E-espace vectoriel des fonctions localement constantes sur $N_{\overline{P}}(L)$ à support compact à valeurs dans (l'espace sous-jacent à) π_P. On dispose d'une injection canonique :

$$C^{\mathbb{Q}_p\text{-pol}}(N_{\overline{P}}(L), W') \otimes_E C_c^{\infty}(N_{\overline{P}}(L), \pi_P) \hookrightarrow \big(\mathrm{Ind}_{P(L)}^{G(L)} W' \otimes_E \pi_P\big)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}} \tag{12}$$

qui consiste à envoyer $f_1 \otimes f_2$ sur l'unique fonction $f \in \big(\mathrm{Ind}_{P(L)}^{G(L)} W' \otimes_E \pi_P\big)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}$ à support dans $P(L)N_{\overline{P}}(L)$ telle que $f|_{N_{\overline{P}}(L)} = f_1 f_2$. En particulier, f est à support dans $P(L)N_{\overline{P}}(L)$ et sa restriction à $N_{\overline{P}}(L)$ est à support compact. On munit $C^{\mathbb{Q}_p\text{-pol}}(N_{\overline{P}}(L), W')$ et $C_c^{\infty}(N_{\overline{P}}(L), \pi_P)$ de l'action à gauche de $\overline{P}(L)$ (qui prolonge l'action de $N_{\overline{P}}(L)$ par translation à droite) définie comme suit :

$$\big((m\overline{n}) \cdot f_i\big)(\overline{n}') \overset{\text{déf}}{=} m\big(f_i(m^{-1}\overline{n}' m\overline{n})\big) \quad i \in \{1, 2\} \tag{13}$$

pour $m \in L_P(L)$, $\overline{n}, \overline{n}' \in N_{\overline{P}}(L)$. Notons que, via le Lemme 3.1, cette action à gauche de $\overline{P}(L)$ sur $C^{\mathbb{Q}_p\text{-pol}}(N_{\overline{P}}(L), W')$ induit l'action à gauche ci-dessus de $U(\overline{\mathfrak{p}}) \subseteq U(\mathfrak{g})$, et lui est même équivalente puisque $C^{\mathbb{Q}_p\text{-pol}}(N_{\overline{P}}(L), W') \cong \mathrm{Hom}_E(U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} W, E)^{\mathfrak{n}_{\overline{P}}^{\infty}}$ est un objet de $\mathcal{O}_{\mathrm{alg}}^{\overline{\mathfrak{p}}}$ (cf. [**25**, Lem.3.2]). On munit $C^{\mathbb{Q}_p\text{-pol}}(N_{\overline{P}}(L), W') \otimes_E C_c^{\infty}(N_{\overline{P}}(L), \pi_P)$ d'une part de l'action à gauche produit tensoriel de $\overline{P}(L)$, d'autre part de l'action à gauche de $U(\mathfrak{g})$ donnée par $\mathfrak{d} \otimes \mathrm{Id}$ si $\mathfrak{d} \in U(\mathfrak{g})$.

Lemme 3.2. — *(i) L'injection (12) commute aux actions de $\overline{P}(L)$ et de $U(\mathfrak{g})$.*
(ii) Pour tout $\mathfrak{d} \in U(\mathfrak{n}_{\overline{P}}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} W$, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} C^{\mathbb{Q}_p\text{-pol}}(N_{\overline{P}}(L), W') \otimes_E C_c^{\infty}(N_{\overline{P}}(L), \pi_P) & \hookrightarrow & \big(\mathrm{Ind}_{P(L)}^{G(L)} W' \otimes_E \pi_P\big)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}} \\ \mathfrak{d} \cdot \otimes \mathrm{Id} \downarrow & & \downarrow \mathrm{res} \circ \mathfrak{d} \cdot \\ C^{\mathbb{Q}_p\text{-pol}}(N_{\overline{P}}(L), E) \otimes_E C_c^{\infty}(N_{\overline{P}}(L), \pi_P) & \hookrightarrow & C^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(N_{\overline{P}}(L), \pi_P) \end{array}$$

où le morphisme vertical de droite est l'application $\mathfrak{d}\cdot$ en (6) composée avec la restriction $C^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(G(L),\pi_P)\to C^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(N_{\overline{P}}(L),\pi_P)$ et l'injection horizontale du bas est le produit des fonctions.

Démonstration. — Le (ii) résulte directement des définitions et est laissé au lecteur. La commutation à $\overline{P}(L)$ en (i) est un calcul évident. Enfin, la commutation à l'action à gauche de $U(\mathfrak{g})$ en (i) (via l'isomorphisme du haut en (11)) découle de [**14**, Lem.2.5.19] et de [**14**, Cor.2.3.4]. $\square$

En combinant l'injection (12) avec l'isomorphisme du haut dans (11), on obtient une injection qui commute aux actions à gauche de $\overline{P}(L)$ et $U(\mathfrak{g})$:

$$(14)\quad \mathrm{Hom}_E\big(U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{p})}W,E\big)^{\mathfrak{n}_{\overline{P}}^{\infty}}\otimes_E C_c^{\infty}(N_{\overline{P}}(L),\pi_P)\hookrightarrow\big(\mathrm{Ind}_{P(L)}^{G(L)}W'\otimes_E\pi_P\big)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}.$$

On fixe un objet M de $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}_{\mathrm{alg}}$ et W désigne maintenant comme au § 2 un sous-$U(\mathfrak{p}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)$-module de dimension finie qui engendre M sur $U(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)$. On note $\phi: U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{p})}W\twoheadrightarrow M$ comme en (3).

Lemme 3.3. — *Un élément $f\in\mathrm{Hom}_E(U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{p})}W,E)^{\mathfrak{n}_{\overline{P}}^{\infty}}$ est dans le sous-$U(\mathfrak{g})$-module $\mathrm{Hom}_E(M,E)^{\mathfrak{n}_{\overline{P}}^{\infty}}$ si et seulement si $\mathfrak{d}\cdot f=0$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(U(\mathfrak{n}_{\overline{P}}),E)^{\mathfrak{n}_{\overline{P}}^{\infty}}$ pour tout $\mathfrak{d}\in\mathrm{Ker}(\phi)$.*

Démonstration. — On a $f\in\mathrm{Hom}_E(M,E)^{\mathfrak{n}_{\overline{P}}^{\infty}}$ si et seulement si $f|_{\mathrm{Ker}(\phi)}=0$ si et seulement si $f|_{U(\mathfrak{n}_{\overline{P}})\mathfrak{d}}=0$ pour tout $\mathfrak{d}\in\mathrm{Ker}(\phi)\subseteq U(\mathfrak{n}_{\overline{P}})\otimes_{\mathbb{Q}_p}W$. Or la définition de $\mathfrak{d}\cdot f$ en (9) montre que $f|_{U(\mathfrak{n}_{\overline{P}})\mathfrak{d}}=0$ est équivalent à $\mathfrak{d}\cdot f=0$. $\square$

Proposition 3.4. — *(i) La restriction de l'injection (14) à $\mathrm{Hom}_E(M,E)^{\mathfrak{n}_{\overline{P}}^{\infty}}\otimes_E C_c^{\infty}(N_{\overline{P}}(L),\pi_P)$ a son image dans $\mathcal{F}_P^G(M,\pi_P)\subseteq(\mathrm{Ind}_{P(L)}^{G(L)}W'\otimes_E\pi_P)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}$.*
(ii) L'injection $(\mathfrak{g},\overline{P}(L))$-équivariante induite par (14) et (i) :

$$(15)\qquad \mathrm{Hom}_E(M,E)^{\mathfrak{n}_{\overline{P}}^{\infty}}\otimes_E C_c^{\infty}(N_{\overline{P}}(L),\pi_P)\hookrightarrow\mathcal{F}_P^G(M,\pi_P)$$

est indépendante du choix de W et est fonctorielle en M.

Démonstration. — (i) Soit $f\in(\mathrm{Ind}_{P(L)}^{G(L)}W'\otimes_E\pi_P)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}$ l'image d'un élément de $\mathrm{Hom}_E(M,E)^{\mathfrak{n}_{\overline{P}}^{\infty}}\otimes_E C_c^{\infty}(N_{\overline{P}}(L),\pi_P)$. Par le Lemme 3.1, le (ii) du Lemme 3.2 et le Lemme 3.3, on a $(\mathfrak{d}\cdot f)|_{N_{\overline{P}}(L)}=0$ dans $C^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(N_{\overline{P}}(L),\pi_P)$ pour tout $\mathfrak{d}\in\mathrm{Ker}(\phi)$. Il faut en déduire $\mathfrak{d}\cdot f=0\ \forall\ \mathfrak{d}\in\mathrm{Ker}(\phi)$ (noter que, $\mathfrak{d}\cdot f$ n'étant plus une fonction dans $(\mathrm{Ind}_{P(L)}^{G(L)}W'\otimes_E\pi_P)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}$, ceci n'est pas immédiat). Soit $V\subseteq\mathrm{Ker}(\phi)$ un sous-$U(\mathfrak{p}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)$-module de dimension finie générateur sur $U(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)$, de sorte que l'on a :

$$\psi: U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{p})}V\twoheadrightarrow\mathrm{Ker}(\phi)\hookrightarrow U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{p})}W.$$

L'application ψ induit un morphisme continu $G(L)$-équivariant :

$$(\mathrm{Ind}_{P(L)}^{G(L)} W' \otimes_E \pi_P)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}} \longrightarrow (\mathrm{Ind}_{P(L)}^{G(L)} V' \otimes_E \pi_P)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}$$

et on note h l'image de f dans $(\mathrm{Ind}_{P(L)}^{G(L)} V' \otimes_E \pi_P)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}$. Par [**6**, Lem.3.1] appliqué à $M = U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{p})}W$, on a pour tout $v \in V$: $\psi(1\otimes v)\cdot f = h(\cdot)(v)$ dans $C^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(G(L), \pi_P)$ pour tout $g \in G(L)$. En procédant comme dans la preuve de [**6**, Prop.3.2], on voit que $(\psi(1\otimes v)\cdot f)|_{N_{\overline{P}}(L)} = 0$ implique $h(\cdot)(v) = 0$, et donc $\psi(1\otimes v)\cdot f = 0$. Comme les $\psi(1\otimes v)$ engendrent $\mathrm{Ker}(\phi)$ sur $U(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p} E)$, on en déduit le résultat par la Remarque 2.1.

(ii) Il est d'abord clair que $\mathrm{Hom}_E(M, E)^{\mathfrak{n}_{\overline{P}}^{\infty}} \otimes_E C_c^\infty(N_{\overline{P}}(L), \pi_P)$ est un sous-espace de $\mathrm{Hom}_E\big(U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{p})} W, E\big)^{\mathfrak{n}_{\overline{P}}^{\infty}} \otimes_E C_c^\infty(N_{\overline{P}}(L), \pi_P)$ stable par $\overline{P}(L)$ et $U(\mathfrak{g})$. On démontre l'indépendance du choix de W, laissant la fonctorialité (formelle) au lecteur. Soit $W_1, W_2 \subseteq M$ deux sous-$U(\mathfrak{p}\otimes_{\mathbb{Q}_p} E)$-modules de dimension finie qui engendrent M sur $U(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p} E)$ et $W \stackrel{\text{déf}}{=} W_1 + W_2 \subseteq M$, de sorte que l'on a deux diagrammes commutatifs dans $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}_{\mathrm{alg}}$:

$$\begin{array}{ccc} U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{p})} W_1 & \twoheadrightarrow & M \\ \downarrow & & \| \\ U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{p})} W & \twoheadrightarrow & M \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{p})} W_2 & \twoheadrightarrow & M \\ \downarrow & & \| \\ U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{p})} W & \twoheadrightarrow & M. \end{array}$$

Par fonctorialité de $\mathcal{F}_P^G(\cdot, \pi_P)$ et une chasse au diagramme facile, il suffit de montrer que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_E(M, E)^{\mathfrak{n}_{\overline{P}}^{\infty}} \otimes_E C_c^\infty(N_{\overline{P}}(L), \pi_P) & \hookrightarrow & (\mathrm{Ind}_{P(L)}^{G(L)} W_i \otimes_E \pi_P)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}} \\ \| & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_E(M, E)^{\mathfrak{n}_{\overline{P}}^{\infty}} \otimes_E C_c^\infty(N_{\overline{P}}(L), \pi_P) & \hookrightarrow & (\mathrm{Ind}_{P(L)}^{G(L)} W \otimes_E \pi_P)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}} \end{array}$$

commute pour $i = 1, 2$. Ceci est clair par fonctorialité de $\mathrm{Hom}_E(\cdot, E)^{\mathfrak{n}_{\overline{P}}^{\infty}}$ et par la commutation (évidente) pour $i = 1, 2$ de :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_E(U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{p})} W_i, E)^{\mathfrak{n}_{\overline{P}}^{\infty}} \otimes_E C_c^\infty(N_{\overline{P}}(L), \pi_P) & \hookrightarrow & (\mathrm{Ind}_{P(L)}^{G(L)} W_i \otimes_E \pi_P)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_E(U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{p})} W, E)^{\mathfrak{n}_{\overline{P}}^{\infty}} \otimes_E C_c^\infty(N_{\overline{P}}(L), \pi_P) & \hookrightarrow & (\mathrm{Ind}_{P(L)}^{G(L)} W \otimes_E \pi_P)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}. \end{array}$$

$\square$

On pose :

$$\mathcal{F}_P^G(M, \pi_P)^{\mathbb{Q}_p\text{-alg}} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{F}_P^G(M, \pi_P) \cap \big(C^{\mathbb{Q}_p\text{-pol}}(N_{\overline{P}}(L), W') \otimes_E C_c^\infty(N_{\overline{P}}(L), \pi_P)\big) \tag{16}$$

l'intersection ayant lieu dans $(\mathrm{Ind}_{P(L)}^{G(L)} W' \otimes_E \pi_P)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}$ via l'injection (12). C'est un sous-espace vectoriel fermé de $(\mathrm{Ind}_{P(L)}^{G(L)} W' \otimes_E \pi_P)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}$ stable par $\overline{P}(L)$ et $U(\mathfrak{g})$.

Exemple 3.5. — On voit que $\mathcal{F}_P^G(U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{p})}W,\pi_P)^{\mathbb{Q}_p\text{-alg}} = C^{\mathbb{Q}_p\text{-pol}}(N_{\overline{P}}(L),W')\otimes_E C_c^\infty(N_{\overline{P}}(L),\pi_P)$ est l'espace vectoriel des fonctions localement polynomiales à support compact de $(\mathrm{Res}_{L/\mathbb{Q}_p}N_{\overline{P}})(\mathbb{Q}_p) = N_{\overline{P}}(L)$ dans $W'\otimes_E\pi_P$. Cet espace est noté $C_c^{\mathrm{lp}}\big((\mathrm{Res}_{L/\mathbb{Q}_p}N_{\overline{P}})(\mathbb{Q}_p),W'\otimes_E\pi_P\big)$ dans [**14**, Def.2.5.21].

Proposition 3.6. — *L'injection (15) induit un isomorphisme $(\mathfrak{g},\overline{P}(L))$-équivariant:*

$$\mathrm{Hom}_E(M,E)^{\mathfrak{n}_{\overline{P}}^\infty}\otimes_E C_c^\infty(N_{\overline{P}}(L),\pi_P)\xrightarrow{\sim}\mathcal{F}_P^G(M,\pi_P)^{\mathbb{Q}_p\text{-alg}}.$$

En particulier la $(\mathfrak{g},\overline{P}(L))$-représentation $\mathcal{F}_P^G(M,\pi_P)^{\mathbb{Q}_p\text{-alg}}$ ne dépend pas du choix de W comme ci-dessus et est fonctorielle en M.

Démonstration. — On a une injection $(\mathfrak{g},\overline{P}(L))$-équivariante via l'isomorphisme du haut en (11) :

$$\mathrm{Hom}_E(M,E)^{\mathfrak{n}_{\overline{P}}^\infty}\otimes_E C_c^\infty(N_{\overline{P}}(L),\pi_P)\hookrightarrow C^{\mathbb{Q}_p\text{-pol}}(N_{\overline{P}}(L),W')\otimes_E C_c^\infty(N_{\overline{P}}(L),\pi_P)$$

et par le (i) de la Proposition 3.4 et (16), on en déduit une injection $(\mathfrak{g},\overline{P}(L))$-équivariante :

$$\mathrm{Hom}_E(M,E)^{\mathfrak{n}_{\overline{P}}^\infty}\otimes_E C_c^\infty(N_{\overline{P}}(L),\pi_P)\hookrightarrow\mathcal{F}_P^G(M,\pi_P)^{\mathbb{Q}_p\text{-alg}}.$$

Montrons la surjectivité. Si un élément de $C^{\mathbb{Q}_p\text{-pol}}(N_{\overline{P}}(L),W')\otimes_E C_c^\infty(N_{\overline{P}}(L),\pi_P)$ est aussi dans $\mathcal{F}_P^G(M,\pi_P)$, alors le (ii) du Lemme 3.2 montre que $\mathfrak{d}\cdot\otimes\mathrm{Id}$ l'annule pour tout $\mathfrak{d}\in\mathrm{Ker}(\phi)$. Le Lemme 3.1 avec le Lemme 3.3 (en tensorisant $\mathrm{Hom}_E(U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{p})}W,E)^{\mathfrak{n}_{\overline{P}}^\infty}$ et $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(U(\mathfrak{n}_{\overline{P}}),E)^{\mathfrak{n}_{\overline{P}}^\infty}$ par $C_c^\infty(N_{\overline{P}}(L),\pi_P)$) impliquent alors que cet élément provient de $\mathrm{Hom}_E(M,E)^{\mathfrak{n}_{\overline{P}}^\infty}\otimes_E C_c^\infty(N_{\overline{P}}(L),\pi_P)$. La fonctorialité de $\mathcal{F}_P^G(M,\pi_P)^{\mathbb{Q}_p\text{-alg}}$ vient du (ii) de la Proposition 3.4. $\square$

4. Un théorème d'adjonction pour le foncteur de Jacquet-Emerton

On montre un résultat d'adjonction pour les représentations localement algébriques de $L_P(L)$ apparaissant dans le foncteur localement analytique de Jacquet-Emerton.

On conserve les notations du § 2. Soit Z_{L_P} le centre du Levi L_P et fixons un sous-groupe ouvert compact $N_{\overline{P}}^0$ de $N_{\overline{P}}(L)$. Posons suivant [**13**, § 3.3] :

$$L_P(L)^+\overset{\text{déf}}{=}\{g\in L_P(L),\ gN_{\overline{P}}^0g^{-1}\subseteq N_{\overline{P}}^0\}.\tag{17}$$

C'est un sous-monoïde générateur du groupe $L_P(L)$ contenant un sous-groupe ouvert compact de $L_P(L)$ ainsi que $Z_G(L)$ où Z_G est le centre de G. Si Π est une représentation localement $\mathbb{Q}_p$-analytique de $P(L)$ sur un E-espace vectoriel topologique localement convexe séparé de type compact, son sous-espace $\Pi^{N_{\overline{P}}^0}$ des invariants sous $N^0_{\overline{P}}$ est naturellement muni d'une action de Hecke du monoïde $L_P(L)^+$ par endomorphismes continus définie comme suit :

$$\pi_g v \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n\in N^0_{\overline{P}}/gN^0_{\overline{P}}g^{-1}} (ng)v, \quad v \in \Pi^{N^0_{\overline{P}}},\ g \in L_P(L)^+. \tag{18}$$

Notons que cette action de $L_P(L)^+$ est celle de [**13**, § 3.4] mais sans la torsion par le caractère module $\delta_{\overline{P}(L)}$ associé au parabolique $\overline{P}(L)$.

Définition 4.1 ([**14**]). — *Une représentation localement $\mathbb{Q}_p$-analytique admissible Π de $G(L)$ sur E est très fortement admissible s'il existe une injection continue E-linéaire $G(L)$-équivariante $\Pi \hookrightarrow B$ où B est une représentation continue admissible de $G(L)$ sur un E-espace de Banach p-adique (*[**30**]*).*

En particulier, si Π est contenue dans les vecteurs localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques d'une représentation continue admissible unitaire B de $G(L)$ sur E (ce qui sera le cas en pratique dans les applications), alors *a fortiori* Π est très fortement admissible.

La proposition qui suit est une conséquence de [**14**, Cor.4.3.3] et des résultats du § 3.

Proposition 4.2. — *Soit M un objet de $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}_{\mathrm{alg}}$, $\phi : U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{p})} W \twoheadrightarrow M$ une surjection dans $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}_{\mathrm{alg}}$ comme en (3) et π_P une représentation lisse admissible de longueur finie de $L_P(L)$ sur E. Soit Π une représentation localement $\mathbb{Q}_p$-analytique de $G(L)$ sur E très fortement admissible, on a un isomorphisme naturel :*

$$\mathrm{Hom}_{G(L)}\big(\mathcal{F}^G_P(M,\pi_P),\Pi\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g},\overline{P}(L))}\big(\mathrm{Hom}_E(M,E)^{\mathfrak{n}^\infty_{\overline{P}}} \otimes_E C^\infty_c(N_{\overline{P}}(L),\pi_P),\Pi\big).$$

Démonstration. — Nous allons utiliser des notations et résultats de [**14**] qui sont énoncés dans *loc. cit.* avec $(\mathrm{Ind}^{G(L)}_{P(L)} U)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}$ où U est une représentation localement analytique de $L_P(L)$ (alors que W', et donc $W'\otimes\pi_P$, ne sont en général que des représentations de $P(L)$), mais tout ce que l'on utilise ici reste valable pour $U = W'\otimes_E \pi_P$. Posons donc $U \stackrel{\text{déf}}{=} W'\otimes_E\pi_P$ et $X \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{F}^G_P(M,\pi_P) \subseteq (\mathrm{Ind}^{G(L)}_{P(L)} U)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}$. Comme $\mathrm{Ker}(\phi) \subseteq U(\mathfrak{n}_{\overline{P}})\otimes_{\mathbb{Q}_p} W$, on vérifie facilement à partir de sa définition en (7) que la représentation X est une sous-$G(L)$-représentation fermée *locale* de $(\mathrm{Ind}^{G(L)}_{P(L)} U)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}$ au sens de [**14**, Def.2.4.1]. De plus, la Proposition 3.6 montre via (16) et l'Exemple 3.5 que l'on a :

$$X^{\mathrm{lp}}(N_{\overline{P}}(L)) = \mathrm{Hom}_E(M,E)^{\mathfrak{n}^\infty_{\overline{P}}} \otimes_E C^\infty_c(N_{\overline{P}}(L),\pi_P)$$

où $X^{\mathrm{lp}}(N_{\overline{P}}(L))$ est défini en [**14**, Def.2.7.5]. Plus généralement, la même preuve montre que, pour tout ouvert Ω de $N_{\overline{P}}(L)$, on a $X^{\mathrm{lp}}(\Omega) = \mathrm{Hom}_E(M,E)^{\mathfrak{n}^\infty_{\overline{P}}} \otimes_E C^\infty_c(\Omega,\pi_P)$, d'où on déduit en passant à la limite inductive sur les ouverts Ω de 1 dans $N_{\overline{P}}(L)$:

$$\begin{aligned}(19)\qquad \varinjlim_{\Omega} X^{\mathrm{lp}}(\Omega) &= \varinjlim_{\Omega}\Big(\mathrm{Hom}_E(M,E)^{\mathfrak{n}^{\infty}_{\overline{P}}}\otimes_E C^{\infty}_c(\Omega,\pi_P)\Big)\\ &= \mathrm{Hom}_E(M,E)^{\mathfrak{n}^{\infty}_{\overline{P}}}\otimes_E \varinjlim_{\Omega}(C^{\infty}_c(\Omega,\pi_P))\\ &\cong \mathrm{Hom}_E(M,E)^{\mathfrak{n}^{\infty}_{\overline{P}}}\otimes_E \pi_P.\end{aligned}$$

Considérons le sous-espace fermé $(X_e)^{\mathrm{pol}}$ de $C^{\mathbb{Q}_p\text{-pol}}(N_{\overline{P}}(L),W'\otimes_E\pi_P)\cong C^{\mathbb{Q}_p\text{-pol}}(N_{\overline{P}}(L),W')\otimes_E\pi_P$ défini dans [**14**, Def.2.7.1]. Par [**14**, Lem.2.7.8] et l'isomorphisme dans la preuve de [**14**, Lem.2.7.9], on a pour Ω comme ci-dessus :

$$(20)\qquad (X_e)^{\mathrm{pol}}\otimes_E C^{\infty}_c(\Omega,E)\xrightarrow{\sim} X^{\mathrm{lp}}(\Omega).$$

En passant à la limite inductive sur Ω dans (20) et en utilisant $\varinjlim_{\Omega} C^{\infty}_c(\Omega,E)=E$ et (19), on déduit un isomorphisme ($\mathfrak{g}$-équivariant) :

$$(21)\qquad (X_e)^{\mathrm{pol}}\cong \mathrm{Hom}_E(M,E)^{\mathfrak{n}^{\infty}_{\overline{P}}}\otimes_E\pi_P.$$

Par [**14**, Prop.2.7.16], la $G(L)$-représentation X est "polynomialement engendrée" au sens de [**14**, Def.2.7.15]. Notons que la $\mathbb{Q}_p$-algèbre de Lie du centre $Z_{L_P}(L)$ n'agit pas nécessairement par un caractère sur U (comme demandé dans [**14**, Prop.2.7.16]), mais on a une décomposition finie $U=\oplus_\lambda(W_\lambda\otimes_E\pi_P)$ où cette $\mathbb{Q}_p$-algèbre de Lie agit sur $W_\lambda\otimes_E\pi_P$ par la restriction du poids λ et cela suffit pour que la preuve de [**14**, Prop.2.6.4] (qui est l'endroit dans la preuve de [**14**, Prop.2.7.16] où cette hypothèse est utilisée) soit encore valable. Comme $\mathrm{Hom}_E(M,E)^{\mathfrak{n}^{\infty}_{\overline{P}}}\subseteq C^{\mathbb{Q}_p\text{-pol}}(N_{\overline{P}}(L),W')$ (Lemme 3.1) est un $U(\mathfrak{g})$-module de type fini (car un objet de $\mathcal{O}^{\overline{\mathfrak{p}}}_{\mathrm{alg}}$, cf. début du § 3), on déduit de (21) que X est "polynomialement engendrée en degré borné" au sens de [**14**, Def.2.7.15]. Par [**14**, Cor.4.3.3], on a donc un isomorphisme naturel :

$$\mathrm{Hom}_{G(L)}(X,\Pi)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g},\overline{P}(L))}\big(X^{\mathrm{lp}}(N_{\overline{P}}(L)),\Pi\big)$$

d'où le résultat. $\square$

Rappelons que la catégorie $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}_{\mathrm{alg}}$ est munie d'une dualité, i.e. d'un foncteur involutif exact et contravariant $M\mapsto M^{\vee}$ (cf. [**19**, § 3.2] et [**19**, Prop.9.3]). Lorsque M est irréductible, alors $M^{\vee}\cong M$ (cf. [**19**, Th.3.3]). En particulier $M^{\vee}$ a les mêmes constituants que M mais "dans l'ordre inverse".

Théorème 4.3. — *Soit W une représentation algébrique de dimension finie de $\mathfrak{l}_P$ sur E, que l'on voit comme $U(\mathfrak{p})$-module via $\mathfrak{p}\twoheadrightarrow\mathfrak{l}_P$, et π_P une représentation lisse admissible de longueur finie de $L_P(L)$ sur E. Soit Π une représentation localement $\mathbb{Q}_p$-analytique de $G(L)$ sur E très fortement admissible. On a un isomorphisme naturel :*

$$(22)\quad \mathrm{Hom}_{G(L)}\Big(\mathcal{F}^G_P\big((U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{p})}W)^{\vee},\pi_P\big),\Pi\Big)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_{L_P(L)^+}\big(W'\otimes_E\pi_P,\Pi^{N^0_P}\big).$$

Démonstration. — Puisque W est semi-simple (L_P étant réductif), il suffit de démonter le résultat pour W irréductible. Par la Proposition 4.2 appliquée à $M = (U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} W)^\vee$, on a :

$$(23) \quad \mathrm{Hom}_{G(L)}\big(\mathcal{F}_P^G\big((U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} W)^\vee, \pi_P\big), \Pi\big) \xrightarrow{\sim} \\ \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g}, \overline{P}(L))}\big(\mathrm{Hom}_E\big((U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} W)^\vee, E\big)^{\mathfrak{n}_{\overline{P}}^\infty} \otimes_E C_c^\infty(N_{\overline{P}}(L), \pi_P), \Pi\big).$$

Soit τ l'anti-involution sur $U(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E)$ qui envoie le sous-espace $(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E)_\alpha$ de $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ où α est une racine quelconque de $(\mathrm{Res}_{L/\mathbb{Q}_p} G) \times_{\mathbb{Q}_p} E$ vers le sous-espace $(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E)_{-\alpha}$ et qui est l'identité sur $\mathfrak{t} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$, cf. par exemple [**19**, § 0.5]. L'anti-involution τ échange $\mathfrak{n}_P \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ et $\mathfrak{n}_{\overline{P}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ et préserve $\mathfrak{l}_P \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$. Notons $\widetilde{W}$ le $U(\mathfrak{l}_P \otimes_{\mathbb{Q}_p} E)$-module à gauche dont l'espace sous-jacent est celui de W mais où $\mathfrak{x} \in U(\mathfrak{l}_P \otimes_{\mathbb{Q}_p} E)$ agit par $\tau(\mathfrak{x})$ (cf. le début du § 3 pour $\tau(\mathfrak{x})$). Un calcul facile à partir de la définition du dual dans [**19**, § 3.2] montre que l'on a un isomorphisme dans $\mathcal{O}_{\mathrm{alg}}^{\overline{\mathfrak{p}}}$:

$$\mathrm{Hom}_E\big((U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} W)^\vee, E\big)^{\mathfrak{n}_{\overline{P}}^\infty} \cong U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\overline{\mathfrak{p}})} \widetilde{W}$$

où $\widetilde{W}$ est vu comme $U(\overline{\mathfrak{p}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E)$-module via $U(\overline{\mathfrak{p}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E) \twoheadrightarrow U(\mathfrak{l}_P \otimes_{\mathbb{Q}_p} E)$. Mais le $U(\mathfrak{l}_P \otimes_{\mathbb{Q}_p} E)$-module $\widetilde{W}$ est en fait isomorphe au $U(\mathfrak{l}_P \otimes_{\mathbb{Q}_p} E)$-module $W' = \mathrm{Hom}_E(W, E)$ précédent, car les deux sont des $U(\mathfrak{l}_P \otimes_{\mathbb{Q}_p} E)$-modules à gauche irréductibles avec le même plus haut poids. On a donc des isomorphismes $(\mathfrak{g}, \overline{P}(L))$-équivariants :

$$(24) \quad \mathrm{Hom}_E\big((U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} W)^\vee, E\big)^{\mathfrak{n}_{\overline{P}}^\infty} \otimes_E C_c^\infty(N_{\overline{P}}(L), \pi_P) \cong \\ \big(U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\overline{\mathfrak{p}})} W'\big) \otimes_E C_c^\infty(N_{\overline{P}}(L), \pi_P) \cong \\ U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\overline{\mathfrak{p}})} C_c^\infty\big(N_{\overline{P}}(L), W' \otimes_E \pi_P\big)$$

où l'action de $\overline{P}(L)$ sur $C_c^\infty(N_{\overline{P}}(L), W' \otimes_E \pi_P)$ se fait comme en (13). Maintenant, par [**13**, Th.3.5.6] (et sa preuve), on a un isomorphisme naturel :

$$(25) \quad \mathrm{Hom}_{\overline{P}(L)}\big(C_c^\infty(N_{\overline{P}}(L), W' \otimes_E \pi_P), \Pi\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{L_P(L)^+}\big(W' \otimes_E \pi_P, \Pi^{N_{\overline{P}}^0}\big).$$

Comme Π est aussi un $U(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E)$-module, on a par ailleurs de manière évidente :

$$(26) \quad \mathrm{Hom}_{\overline{P}(L)}\big(C_c^\infty(N_{\overline{P}}(L), W' \otimes_E \pi_P), \Pi\big) = \\ \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g}, \overline{P}(L))}\big(U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\overline{\mathfrak{p}})} C_c^\infty(N_{\overline{P}}(L), W' \otimes_E \pi_P), \Pi\big).$$

Quand on met (23), (24), (26) et (25) ensemble, on a le résultat. □

Remarque 4.4. — (i) Si $J_{\overline{P}(L)}$ désigne le foncteur de Jacquet-Emerton relativement au parabolique $\overline{P}$ ([**13**, Def.3.4.5]), on a :

$$\mathrm{Hom}_{L_P(L)}\big(W' \otimes_E \pi_P, J_{\overline{P}(L)}(\Pi)\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{L_P(L)^+}\big(W' \otimes_E \pi_P, \Pi^{N_{\overline{P}}^0}\big)$$

(voir par exemple la preuve de [**13**, Th.3.5.6]), de sorte que l'isomorphisme (22) se récrit :

$$\mathrm{Hom}_{G(L)}\Big(\mathcal{F}_P^G\big((U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{p})}W)^\vee,\pi_P\big),\Pi\Big)\cong \mathrm{Hom}_{L_P(L)}\big(W'\otimes_E\pi_P, J_{\overline{P}(L)}(\Pi)\big).$$

(ii) Si $\sigma : L\hookrightarrow E$ est un plongement, on a un résultat analogue au Théorème 4.3 avec Π une représentation σ-localement analytique très fortement admissible de $G(L)$ sur E (où L est vu comme sous-corps de E via σ) et $W=W_\sigma$ une représentation algébrique de dimension finie de $\mathfrak{l}_{P,\sigma}$ sur E en remplaçant les catégories $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}_{\mathrm{alg}}$, $\mathcal{O}^{\overline{\mathfrak{p}}}_{\mathrm{alg}}$ par les catégories $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}_\sigma}_{\mathrm{alg}}$, $\mathcal{O}^{\overline{\mathfrak{p}}_\sigma}_{\mathrm{alg}}$. Noter que, dans ce cadre, le cas particulier $G=\mathrm{GL}_2$, $P=B$ et W_σ non dominant est déjà connu (voir [**12**]).

Comme les constituants de $\mathcal{F}_P^G((U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{p})}W)^\vee,\pi_P)$ et de $\mathcal{F}_P^G(U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{p})}W,\pi_P)=\big(\mathrm{Ind}_{P(L)}^{G(L)}W'\otimes_E\pi_P\big)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}$ sont les mêmes par le Théorème 2.2, on en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 4.5. — *Soit W, π_P et Π comme dans le Théorème 4.3. Si l'on a $\mathrm{Hom}_{L_P(L)^+}\big(W'\otimes_E\pi_P,\Pi^{N_P^0}\big)\neq 0$ alors l'un des constituants irréductibles de $\big(\mathrm{Ind}_{P(L)}^{G(L)}W'\otimes_E\pi_P\big)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}$ apparaît en sous-objet de Π.*

Bien entendu, ce constituant n'est pas forcément en sous-objet dans la représentation $\big(\mathrm{Ind}_{P(L)}^{G(L)}W'\otimes_E\pi_P\big)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}$ elle-même. Plus précisément le Théorème 4.3 implique l'existence en sous-objet de Π d'un quotient (éventuellement réductible) de $\mathcal{F}_P^G((U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{p})}W)^\vee,\pi_P)$.

Lorsque $P=B$, $W=\lambda\in X((\mathrm{Res}_{L/\mathbb{Q}_p}T)\times_{\mathbb{Q}_p}E)$ est un poids et $\pi_P=\pi_B$ est un caractère lisse de $T(L)$ sur $E^\times$, on obtient le cas particulier ci-dessous plus explicite du Corollaire 4.5 à partir de la liste des constituants de $U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{b})}\lambda$, où l'on renvoie à [**19**, § 1.8] pour $w\cdot\lambda$ (voir aussi le début du § 6), à [**19**, § 5.1] pour la relation d'ordre partielle "strong linkage" $\mu\uparrow\lambda$ sur les poids et où l'on note $\chi_\lambda : T(L)\to E^\times$ le caractère $\mathbb{Q}_p$-algébrique associé à λ.

Corollaire 4.6. — *Si $P=B$, $W=\lambda$ et $\pi_P=\pi_B$ est tel que $\mathrm{Ind}_{B(L)}^{G(L)}\pi_B$ est irréductible (induite lisse), alors $\mathrm{Hom}_{T(L)^+}\big(\chi_\lambda^{-1}\pi_B,\Pi^{\overline{N}^0}\big)\neq 0$ implique que Π contient en sous-objet une représentation $\mathcal{F}_B^G(w\cdot\lambda,\pi_B)$ où w est un élément du groupe de Weyl de $(\mathrm{Res}_{L/\mathbb{Q}_p}G)\times_{\mathbb{Q}_p}E$ tel que $w\cdot\lambda\uparrow\lambda$.*

Remarque 4.7. — Les résultats de [**13**], [**14**] et [**26**] suggèrent que le Corollaire 4.5 au moins devrait rester vrai en remplaçant les représentations localement $\mathbb{Q}_p$-algébriques $W'\otimes_E\pi_P$ par des représentations localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques (admissibles de longueur finie) de $L_P(L)$.

5. Formes automorphes p-adiques et socle localement analytique

On énonce une conjecture sur le socle localement $\mathbb{Q}_p$-analytique des composantes Hecke-isotypiques "classiques" des espaces de formes automorphes p-adiques pour un groupe unitaire compact aux places infinies et déployé aux places divisant p.

On fixe une fois pour toutes des plongements $\iota_\infty : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ et $\iota_p : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$. On fixe une extension finie totalement réelle F^+ de $\mathbb{Q}$ et une extension quadratique totalement imaginaire F de F^+. On note c l'unique élément non trivial de $\mathrm{Gal}(F/F^+)$. On suppose que les places de F^+ divisant p sont toutes décomposées dans F.

On fixe un groupe algébrique réductif connexe G/F^+ qui est un groupe unitaire associé à F/F^+ (voir par exemple [**1**, § 6.2.1]). On a donc un isomorphisme $\iota_G : G \times_{F^+} F \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_n/F$ et on suppose $n \geq 2$. On suppose de plus que G est *défini*, i.e. G est isomorphe au groupe unitaire compact $U_n(\mathbb{R})$ en chaque place infinie de F^+. En particulier $G(F^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})$, $G(F^+)\backslash G(\mathbb{A}_{F^+})$ et $G(F^+)\backslash G(\mathbb{A}_{F^+}^\infty)$ sont compacts (ce dernier étant même profini). Si W_∞ est une représentation algébrique irréductible de $G(F^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}) = (\mathrm{Res}_{F^+/\mathbb{Q}} G)(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{C}$, alors $W_\infty|_{(\mathrm{Res}_{F^+/\mathbb{Q}} G)(\mathbb{Q})}$ est définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ via le plongement ι_∞, et en étendant les scalaires de $\overline{\mathbb{Q}}$ à $\overline{\mathbb{Q}_p}$ via ι_p, on en déduit une représentation algébrique W_p de $(\mathrm{Res}_{F^+/\mathbb{Q}} G)(\mathbb{Q}_p) = G(F^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p)$ sur $\overline{\mathbb{Q}_p}$.

On fixe un sous-groupe ouvert compact U^p de $G(\mathbb{A}_{F^+}^{\infty,p})$ de la forme $U^p = \prod_{v \nmid p} U_v$ où U_v est un sous-groupe ouvert compact de $G(F_v^+)$. Pour E une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$ on considère le E-espace vectoriel :

$$\widehat{S}(U^p, E) \overset{\text{déf}}{=} \{f : G(F^+)\backslash G(\mathbb{A}_{F^+}^\infty)/U^p \to E,\ f \text{ continue}\}.$$

Muni de la norme sup (rappelons que $G(F^+)\backslash G(\mathbb{A}_{F^+}^\infty)/U^p$ est profini, comme $G(F^+)\backslash G(\mathbb{A}_{F^+}^\infty)$, donc compact), c'est un espace de Banach p-adique. Muni de l'action de $G(F^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p)$ par translation à droite sur les fonctions, c'est une représentation continue admissible (au sens de [**30**]) de $G(F^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p)$. On note $\widehat{S}(U^p, E)^{\mathbb{Q}_p\text{-alg}}$ sa sous-$(\mathrm{Res}_{F^+/\mathbb{Q}} G)(\mathbb{Q}_p)$-représentation localement algébrique maximale ([**27**]), c'est-à-dire le sous-E-espace vectoriel des vecteurs v pour lesquels il existe un sous-groupe ouvert compact U_p de $(\mathrm{Res}_{F^+/\mathbb{Q}} G)(\mathbb{Q}_p) = G(F^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p)$ tel que la U_p-représentation engendrée par v dans $\widehat{S}(U^p, E)|_{U_p}$ est la restriction à U_p d'une somme directe de représentations algébriques de $(\mathrm{Res}_{F^+/\mathbb{Q}} G)(\mathbb{Q}_p)$ sur E.

Rappelons que les représentations automorphes de $G(\mathbb{A}_{F^+})$ sont les constituants irréductibles du $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions $f : G(F^+)\backslash G(\mathbb{A}_{F^+}) \longrightarrow \mathbb{C}$ qui sont (i) $\mathcal{C}^\infty$ en restriction à $G(F^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})$, (ii) localement constantes en restriction à $G(\mathbb{A}_{F^+}^\infty)$, (iii) $G(F^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})$-finies, où l'action à gauche de $G(\mathbb{A}_{F^+})$ est la translation à droite sur les fonctions. Une représentation automorphe π se factorise sous la forme $\pi_\infty \otimes_{\mathbb{C}} \pi_f$ où $\pi_\infty = W_\infty$ est une représentation algébrique irréductible de $(\mathrm{Res}_{F^+/\mathbb{Q}} G)(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{C}$ et où $\pi_f \cong \mathrm{Hom}_{G(F^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})}(W_\infty, \pi) \cong \otimes'_v \pi_v$ est une représentation lisse irréductible de $G(\mathbb{A}_{F^+}^\infty)$ dont on peut montrer qu'elle est définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ via ι_∞ (voir par exemple [**1**, §

6.2.3]). On note $\pi_p \overset{\text{déf}}{=} \otimes_{v|p}\pi_v$ (une représentation lisse irréductible de $G(F^+\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_p)$ sur $\overline{\mathbb{Q}}$), π_f^p la représentation lisse irréductible de $G(\mathbb{A}_{F^+}^{\infty,p})$ sur $\overline{\mathbb{Q}}$ telle que $\pi_f \cong \pi_f^p \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}} \pi_p$ et $m(\pi) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ la multiplicité de la représentation automorphe π dans l'espace de fonctions $f : G(F^+)\backslash G(\mathbb{A}_{F^+}) \longrightarrow \mathbb{C}$ précédent.

La proposition suivante (bien connue) est une conséquence de [**15**, Prop.3.2.4].

Proposition 5.1. — *On a un isomorphisme compatible à l'action de $G(F^+\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_p)$:*

$$\widehat{S}(U^p,E)^{\mathbb{Q}_p\text{-alg}} \otimes_E \overline{\mathbb{Q}_p} \cong \bigoplus_{\pi} \Big((\pi_f^p)^{U^p} \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}} \big(\pi_p \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}} W_p\big)\Big)^{\oplus\, m(\pi)}$$

où la somme directe est sur les représentations automorphes $\pi = \pi_\infty \otimes_{\mathbb{C}} \pi_f$ de $G(\mathbb{A}_{F^+})$ et où, à chaque $\pi_\infty = W_\infty$, on associe comme ci-dessus la $\overline{\mathbb{Q}_p}$-représentation algébrique W_p.

Soit v une place finie de F^+ qui se décompose dans F et w et w^c les deux places finies de F au-dessus de v. L'automorphisme c de F induit $F_w \xrightarrow{\sim} F_{w^c}$. Les isomorphismes $F_v^+ \xrightarrow{\sim} F_w$, $F_v^+ \xrightarrow{\sim} F_{w^c}$ et ι_G induisent des isomorphismes $\iota_{G,w} : G(F_v^+) \xrightarrow{\sim} G(F_w) \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_n(F_w)$ et $\iota_{G,w^c} : G(F_v^+) \xrightarrow{\sim} G(F_{w^c}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_n(F_{w^c})$ tels que $c \circ \iota_{G,w}$ est conjugué dans $\mathrm{GL}_n(F_{w^c})$ à $\tau^{-1} \circ \iota_{G,w^c}$ où τ est la transposition dans GL_n. On dit que U^p est ramifié en la place v (décomposée) si U_v n'est pas un sous-groupe ouvert compact maximal de $G(F_v^+) \cong \mathrm{GL}_n(F_v^+)$ et on note $\Sigma(U^p)$ l'ensemble (fini) des places v décomposées en lesquelles U^p est ramifié. Soit $\mathbb{T}(U^p) = E[T_w^{(j)}]$ l'algèbre polynomiale (commutative) sur E engendrée par des variables formelles $T_w^{(j)}$ pour $j \in \{1, \cdots, n\}$ et w une place de F au-dessus d'une place finie v de F^+ décomposée dans F qui ne divise pas p et n'est pas dans $\Sigma(U^p)$. Comme les fonctions de $\widehat{S}(U^p,E)$ sont fixées par U^p (pour l'action de U^p par translation à droite), l'algèbre $\mathbb{T}(U^p)$ agit sur $\widehat{S}(U^p,E)$ en faisant agir $T_w^{(j)}$ par la double classe :

$$\left[U_v\ \iota_{G,w}^{-1}\begin{pmatrix} \mathbf{1}_{n-j} & 0 \\ 0 & \varpi_w \mathbf{1}_j \end{pmatrix} U_v\right]$$

où ϖ_w est une uniformisante quelconque de F_w. Cette action préserve les sous-espaces $\widehat{S}(U^p,E)^{\mathbb{Q}_p\text{-alg}}$ et $\widehat{S}(U^p,E)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}$ et commute avec celle de $G(F^+\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_p)$. De plus l'action de $T_{w^c}^{(j)}$ coïncide avec celle de $(T_w^{(n)})^{-1}T_w^{(n-j)}$.

Si $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \to \mathrm{GL}_n(E)$ est une représentation continue et si U^p est tel que ρ est non ramifiée en les places de F au-dessus des places de F^+ décomposées qui ne divisent pas p et ne sont pas dans $\Sigma(U^p)$, on associe à ρ (et U^p) l'idéal maximal $\mathfrak{m}_\rho$ de $\mathbb{T}(U^p)$ de corps résiduel E engendré par les éléments $\big((-1)^j \mathrm{Norm}(w)^{j(j-1)/2} T_w^{(j)} - a_w^{(j)}\big)_{j,w}$ pour $j \in \{1, \ldots, n\}$ et w place de F au-dessus d'une place de F^+ décomposée dans F qui ne divise pas p et n'est pas dans $\Sigma(U^p)$. Ici, $\mathrm{Norm}(w)$ est le cardinal du corps résiduel de F_w et $X^n + a_w^{(1)}X^{n-1} + \cdots + a_w^{(n-1)}X + a_w^{(n)} \in E[X]$ le polynôme caractéristique de $\rho(\mathrm{Frob}_w)$ où Frob_w est un Frobenius géométrique en w. Lorsque l'on utilisera

$\mathfrak{m}_\rho \subset \mathbb{T}(U^p)$ dans la suite, il sera sous-entendu que ρ est non ramifiée en les places de F au-dessus des places de F^+ décomposées qui ne sont pas dans $\Sigma(U^p)$.

Faisons un court interlude purement local. Soit L une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ et $\rho_L : \mathrm{Gal}(\overline{L}/L) \to \mathrm{GL}_n(E)$ une représentation continue potentiellement semi-stable. On choisit une extension finie galoisienne L' de L telle que $\rho_L|_{\mathrm{Gal}(\overline{L}/L')}$ est semi-stable. On associe à ρ_L son $(\varphi, N, \mathrm{Gal}(L'/L))$-module (on oublie la filtration de Hodge pour l'instant) :

$$\underline{D} \overset{\text{déf}}{=} \big(\varphi, N, \mathrm{Gal}(L'/L), (B_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \rho_L)^{\mathrm{Gal}(\overline{L}/L')}\big) \tag{27}$$

où $D \overset{\text{déf}}{=} (B_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \rho_L)^{\mathrm{Gal}(\overline{L}/L')}$ est un $L'_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$-module libre de rang n, $L'_0 \subseteq L'$ étant la sous-extension maximale non ramifiée dans L'.

Définition 5.2. — *On dit que ρ_L est potentiellement semi-stable générique si :*
(i) $\underline{D}$ vérifie les hypothèses 5.1 et 5.2 de [**6**, § 5] *pour toute extension finie de E, ou de manière équivalente pour une extension finie E suffisamment grande;*
(ii) pour tout $\sigma \in \mathcal{S} = \mathrm{Hom}(L, E)$ les poids de Hodge-Tate de ρ_L sont distincts.

Notons que la condition (i) dans la Définition 5.2 est indépendante du choix de L' comme ci-dessus. Si l'on note $\underline{h} \overset{\text{déf}}{=} (h_{i,\sigma})_{\substack{i\in\{1,\cdots,n\}\\ \sigma\in\mathcal{S}}}$ avec $h_{1,\sigma} < h_{2,\sigma} < \cdots < h_{n,\sigma}$ les poids de Hodge-Tate de ρ_L (avec la convention en introduction), alors la filtration de Hodge $\underline{\mathrm{Fil}}^{\cdot} \overset{\text{déf}}{=} (\mathrm{Fil}^i D_{L'})_{i\in\mathbb{Z}}$ induite sur $D_{L'} \overset{\text{déf}}{=} L' \otimes_{L'_0} D$ par $(B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \rho_L)^{\mathrm{Gal}(\overline{L}/L')}$ est une filtration de Hodge sur $\underline{D}$ de poids de Hodge-Tate $\underline{h}$ au sens de [**6**, Déf.6.1]. On renvoie à [**6**, § 6] pour la définition de l'ensemble $\mathcal{W}$ et des représentations localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques admissibles irréductibles $(C(w^{\mathrm{alg}}, w))_{(w^{\mathrm{alg}},w)\in\mathcal{W}}$ de $\mathrm{GL}_n(L)$ sur E (quitte à agrandir éventuellement E), et à [**6**, § 7] pour la définition du sous-ensemble $\mathcal{W}(\underline{\mathrm{Fil}}^{\cdot})$ de $\mathcal{W}$ associé à la filtration $\underline{\mathrm{Fil}}^{\cdot}$ (voir aussi le § 6 pour le cas $L = \mathbb{Q}_p$ et $\rho_{\mathbb{Q}_p}$ cristabelline). Rappelons que les représentations $C(w^{\mathrm{alg}}, w)$ ne sont pas toutes distinctes deux à deux, cf. [**6**, Lem.6.2], mais cela n'aura pas d'importance pour la formulation de la Conjecture 5.3 ci-dessous.

Fixons maintenant $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \to \mathrm{GL}_n(E)$ une représentation continue telle que :
(i) ρ est absolument irréductible;
(ii) ρ est presque partout non ramifiée;
(iii) ρ est potentiellement semi-stable générique aux places divisant p;
(iv) il existe U^p tel que le sous-espace propre $\widehat{S}(U^p, E)[\mathfrak{m}_\rho]$ est non nul.
Notons que la condition (iv) et la remarque ci-dessus sur l'action de $T^{(j)}_{w^c}$ dans $\widehat{S}(U^p, E)$ impliquent que l'on a $\rho^c \cong \rho^\vee \otimes \varepsilon^{1-n}$ où $\rho^c(g) \overset{\text{déf}}{=} \rho(cgc)$ si $g \in \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$. Notons également que (iv) est équivalent à $\widehat{S}(U^p, E)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}[\mathfrak{m}_\rho] = \widehat{S}(U^p, E)[\mathfrak{m}_\rho]^{\mathbb{Q}_p\text{-an}} \neq 0$ par [**29**, Th.7.1].

Si $\widetilde{v}$ est une place de F au-dessus de p, on note $\rho_{\widetilde{v}}$ la restriction de ρ à $\mathrm{Gal}(\overline{F}_{\widetilde{v}}/F_{\widetilde{v}})$ et $\mathcal{W}_{\widetilde{v}}$, $\mathcal{W}_{\widetilde{v}}(\underline{\mathrm{Fil}}^{\cdot}_{\widetilde{v}})$, $C(w^{\mathrm{alg}}_{\widetilde{v}}, w_{\widetilde{v}})$ les données définies ci-dessus avec $\rho_L = \rho_{\widetilde{v}}$ (donc

$C(w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}, w_{\widetilde{v}})$ est une représentation localement $\mathbb{Q}_p$-analytique irréductible de $\mathrm{GL}_n(F_{\widetilde{v}})$ sur E). Rappelons que si C_1 et C_2 sont deux E-espaces vectoriels topologiques séparés localement convexes de type compact, alors leur produit tensoriel topologique est défini sans ambiguité (i.e. les topologies produit tensoriel inductive et projective coïncident) et son complété $C_1\widehat{\otimes}_E C_2$ est encore un E-espace vectoriel topologique séparé localement convexe de type compact (cf. [**16**, Prop.1.1.31] et [**16**, Prop.1.1.32(i)]). Si $\eta : F_{\widetilde{v}}^{\times} \to E^{\times}$ est un caractère localement $\mathbb{Q}_p$-analytique, on écrit $C(w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}, w_{\widetilde{v}})(\eta)$ pour $C(w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}, w_{\widetilde{v}}) \otimes_E \eta \circ \det$. On voit le caractère cyclotomique ε comme caractère de $F_{\widetilde{v}}^{\times}$ via rec^{-1}.

Conjecture 5.3. — *Soit ρ et U^p satisfaisant (i) à (iv) ci-dessus. Pour chaque $v|p$ dans F^+, choisissons une place $\widetilde{v}$ au-dessus de v dans F et rappelons que ι_G induit $G(F^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\sim} \prod_{v|p} \mathrm{GL}_n(F_{\widetilde{v}})$. Soit $\big((w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}, w_{\widetilde{v}})\big)_{v|p} \in \prod_{v|p} \mathcal{W}_{\widetilde{v}}$, on a :*

$$\mathrm{Hom}_{G(F^+\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_p)}\Big(\widehat{\otimes}_{v|p} C(w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}, w_{\widetilde{v}})(\varepsilon^{n-1}), \widehat{S}(U^p, E)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}[\mathfrak{m}_\rho]\Big) \neq 0 \iff (w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}, w_{\widetilde{v}}) \in \mathcal{W}_{\widetilde{v}}(\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}_{\widetilde{v}}) \ \forall\ v|p.$$

Au moins lorsque tous les complétés $F_v^+ = F_{\widetilde{v}}$ pour $v|p$ sont une même extension L de $\mathbb{Q}_p$, il résulte du (iv) du Théorème 2.2 appliqué à $\prod_{v|p} \mathrm{GL}_n/L$ que les $G(F^+\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_p)$-représentations localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques $\widehat{\otimes}_{v|p} C(w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}, w_{\widetilde{v}})$ sont irréductibles. C'est bien sûr vrai sans cette restriction sur F^+, mais cela demanderait d'étendre légèrement le cadre du Théorème 2.2 de façon à traiter $G_1(L_1)\times G_2(L_2)$ avec G_i déployé sur L_i (ou plus généralement $G(\mathbb{Q}_p)$ avec G quasi-déployé sur $\mathbb{Q}_p$). Dans les sections suivantes nous nous contenterons du cas $F_v^+ = L = \mathbb{Q}_p$ pour tout $v|p$.

La Conjecture 5.3 ne dépend pas du choix des $\widetilde{v}$.

Proposition 5.4. — *Supposons la Conjecture 5.3 vraie pour un choix de places $\widetilde{v}$ au-dessus de chaque place v divisant p, alors elle est vraie pour tout autre choix.*

Démonstration. — Soit $\widetilde{v}$ une place de F au-dessus de p, il suffit de montrer que la liste des $\mathrm{GL}_n(F_{\widetilde{v}})$-représentations :

$$\Big\{C(w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}, w_{\widetilde{v}})(\varepsilon^{n-1}), (w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}, w_{\widetilde{v}}) \in \mathcal{W}_{\widetilde{v}}(\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}_{\widetilde{v}})\Big\}$$

est la même que la liste des $\mathrm{GL}_n(F_{\widetilde{v}})$-représentations $\{C(w_{\widetilde{v}^c}^{\mathrm{alg}}, w_{\widetilde{v}^c})(\varepsilon^{n-1}), (w_{\widetilde{v}^c}^{\mathrm{alg}}, w_{\widetilde{v}^c}) \in \mathcal{W}_{\widetilde{v}^c}(\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}_{\widetilde{v}^c})\}$ où l'on fait agir $\mathrm{GL}_n(F_{\widetilde{v}})$ par $c\circ\tau^{-1}$, ou encore, comme $\rho_{\widetilde{v}^c} \cong \rho_{\widetilde{v}}^{\vee} \otimes \varepsilon^{1-n}$, est la même que la liste $\{C'(w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}, w_{\widetilde{v}}), (w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}, w_{\widetilde{v}}) \in \mathcal{W}_{\widetilde{v}}(\underline{\mathrm{Fil}'}^{\bullet}_{\widetilde{v}})\}$ associée à $\rho_{\widetilde{v}}^{\vee}$ où l'on fait agir $\mathrm{GL}_n(F_{\widetilde{v}})$ par la transposée inverse τ^{-1}. Revenant à une représentation purement locale ρ_L et notant $C(w^{\mathrm{alg}}, w)^{\star}$ la représentation de $\mathrm{GL}_n(L)$ sur le même espace que celui de $C(w^{\mathrm{alg}}, w)$ mais où $g \in \mathrm{GL}_n(L)$ agit par $\tau(g)^{-1}$ ainsi que $\mathcal{W}(\underline{\mathrm{Fil}'}^{\bullet})$, $C'(w^{\mathrm{alg}}, w)$ les données pour la représentation duale $\rho_L^{\vee}$, on voit qu'il suffit de montrer :

$$\big\{C'(w^{\mathrm{alg}}, w), (w^{\mathrm{alg}}, w) \in \mathcal{W}(\underline{\mathrm{Fil}'}^{\bullet})\big\} = \big\{C(w^{\mathrm{alg}}, w)^{\star}(\varepsilon^{1-n}), (w^{\mathrm{alg}}, w) \in \mathcal{W}(\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet})\big\}. \tag{28}$$

On reprend maintenant sans commentaire plusieurs notations et définitions de [**6**, § 6] auquel on renvoie le lecteur. Si $j \in \{1, \cdots, \sum_{s=1}^{r} \ell_s\}$, il existe $k \in \{1, \cdots, r\}$ et $\ell \in \{1, \cdots, \ell_k\}$ uniques tels que $j = (\sum_{s=1}^{k-1} \ell_s) + \ell$ et on note $k(j) \stackrel{\text{déf}}{=} k$, $\ell(j) \stackrel{\text{déf}}{=} \ell$. Soit w_0 la permutation de $\{1, \cdots, \sum_{s=1}^{r} \ell_s\}$ envoyant 1 sur $\sum_{s=1}^{r} \ell_s$, 2 sur $(\sum_{s=1}^{r} \ell_s) - 1$, ..., $\sum_{s=1}^{r} \ell_s$ sur 1. Si w est une permutation admissible de $\{1, \cdots, \sum_{s=1}^{r} \ell_s\}$, il existe une unique permutation admissible $[w_0 w]$ de $\{1, \cdots, \sum_{s=1}^{r} \ell_s\}$ telle que :

$$\pi\big([w_0 w]^{-1}(i)\big) = \pi\big((w_0 w)^{-1}(i)\big)|\det|_L^{-\ell_{k((w_0 w)^{-1}(i))} + 2\ell((w_0 w)^{-1}(i)) - 1}$$

(rappelons que $\pi(j) = \pi_{k(j)}|\det|_L^{\ell_{k(j)} - \ell(j)}$). Soit w_0^{alg} l'élément de longueur maximale pour l'ordre de Bruhat dans le groupe de Weyl de $(\mathrm{Res}_{L/\mathbb{Q}_p} \mathrm{GL}_n) \times_{\mathbb{Q}_p} E$. On vérifie d'abord facilement que $P_w \subseteq P(w^{\mathrm{alg}})$ si et seulement si $P_{[w_0 w]} \subseteq P(w_0^{\mathrm{alg}} w^{\mathrm{alg}} w_0^{\mathrm{alg}})$. En utilisant (i) que $\pi^\star$ ($= \pi$ avec action de $\tau(g)^{-1}$) est isomorphe à la contragrédiente de π lorsque π est une $\mathrm{GL}_n(L)$-représentation lisse et irréductible, (ii) des propriétés standards de la duale d'une représentation algébrique, de la correspondance de Langlands locale et du foncteur de Fontaine $\rho_L \mapsto \underline{D}$ (cf. (27)), et (iii) le fait que $C(w^{\mathrm{alg}}, w)$ est le socle d'une induite parabolique localement $\mathbb{Q}_p$-analytique explicite (cf. [**6**, § 6]), on obtient :

$$C(w^{\mathrm{alg}}, w)^\star(\varepsilon^{1-n}) \cong C'(w_0^{\mathrm{alg}} w^{\mathrm{alg}} w_0^{\mathrm{alg}}, [w_0 w]).$$

Mais un calcul de la filtration de Hodge $\underline{\mathrm{Fil}'^{\bullet}}$ sur le dual de $\underline{D}$ donne que $\underline{\mathrm{Fil}^{\bullet}} \in \widehat{w}^{-1}\overline{B_H w^{\mathrm{alg}} w_0^{\mathrm{alg}} B_H / B_H}$ (cf. [**6**, (21)]) si et seulement si :

$$\underline{\mathrm{Fil}'^{\bullet}} \in \widehat{[w_0 w]}^{-1}\overline{B_H(w_0^{\mathrm{alg}} w^{\mathrm{alg}} w_0^{\mathrm{alg}}) w_0^{\mathrm{alg}} B_H / B_H}$$

d'où on déduit (28). $\square$

Notons que, si la Conjecture 5.3 prédit un *certain nombre* de constituants à multiplicité près dans le socle de la $G(F^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p)$-représentation localement $\mathbb{Q}_p$-analytique $\widehat{S}(U^p, E)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}[\mathfrak{m}_\rho]$, l'auteur ne prétend pas qu'elle donne la liste exhaustive de ces constituants (à multiplicité près). Il n'est pas du tout impossible que le socle contienne d'autres constituants en général.

Remarque 5.5. — (i) Soit $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \to \mathrm{GL}_n(E)$ vérifiant les conditions (i), (ii) et (iii) ci-dessus. Alors une conséquence de la Conjecture 5.3 est que $\widehat{S}(U^p, E)[\mathfrak{m}_\rho] \neq 0$ si et seulement si $\widehat{S}(U^p, E)^{\mathbb{Q}_p\text{-alg}}[\mathfrak{m}_\rho] \neq 0$. Une implication est triviale, et l'autre vient du fait que, si $\widehat{S}(U^p, E)[\mathfrak{m}_\rho]$ est non nul, alors l'espace $\widehat{S}(U^p, E)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}[\mathfrak{m}_\rho]$ par la Conjecture 5.3 contient toujours le constituant localement algébrique $\otimes_{v|p} C(1, \mathrm{Id})(\varepsilon^{n-1})$. Avec la Proposition 5.1, on voit donc que la Conjecture 5.3 implique que ρ est automorphe si $\widehat{S}(U^p, E)[\mathfrak{m}_\rho] \neq 0$.
(ii) Si l'on considère des groupes unitaires G qui ne sont plus compacts aux places infinies, i.e. tels que les variétés de Shimura $X(U^p U_p)$ associées ont une dimension $d > 0$, et si ρ est une représentation vérifiant (i), (ii) et (iii) ci-dessus telle que

$\widehat{H}^d(U^p,E)[\mathfrak{m}_\rho]\neq 0$ où :

$$\widehat{H}^d(U^p,E)\overset{\text{déf}}{=}E\otimes_{\mathcal{O}_E}\varprojlim_n\Big(\varinjlim_{U_p}H^d_{ét}\big(X(U^pU_p)_{\overline{\mathbb{Q}}},\mathcal{O}_E\big)/(p^n)\Big)$$

(avec des notations évidentes) il semble naturel de conjecturer encore l'analogue de l'énoncé 5.3 en remplaçant $\widehat{S}(U^p,E)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}$ par $\widehat{H}^d(U^p,E)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}$. Ceci est conforté par les résultats récents de Y. Ding pour une courbe de Shimura unitaire ([**12**]).
(iii) La Conjecture 5.3 est compatible avec la conjecture [**8**, Conj.4.2.2] au sens suivant. Les cas où les deux énoncés peuvent s'appliquer sont ceux où $F_v^+=\mathbb{Q}_p$ pour tout $v|p$ et ρ vérifie (i), (ii), (iii)' et (iv) avec (i), (ii), (iv) comme ci-dessus et :
(iii)'ρ est potentiellement cristalline générique et trigonalisable aux places divisant p. Dans ces cas $\mathcal{W}_{\widetilde{v}}$ s'identifie à $\mathcal{S}_n\times\mathcal{S}_n$ pour tout $\widetilde{v}$, et par [**6**, Th.8.9] et [**6**, Lem.8.8] (et sa preuve) la conjecture [**8**, Conj.4.2.2] implique alors que l'on a pour $(w_{\widetilde{v}})_{v|p}\in\prod_{v|p}\mathcal{S}_n$:

$$\mathrm{Hom}_{G(F^+\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_p)}\Big(\widehat{\otimes}_{v|p}C(w_{\widetilde{v}},w_{\widetilde{v}})(\varepsilon^{n-1}),\widehat{S}(U^p,E)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}[\mathfrak{m}_\rho]\Big)\neq 0\iff (w_{\widetilde{v}},w_{\widetilde{v}})\in\mathcal{W}_{\widetilde{v}}(\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}_{\widetilde{v}})\ \forall\ v|p.$$

Autrement dit [**8**, Conj.4.2.2] ne donne qu'une partie des constituants de la Conjecture 5.3 : ceux tels que $w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}=w_{\widetilde{v}}$, c'est-à-dire ceux qui sont sous-objets (des vecteurs localement analytiques) de séries principales continues *unitaires*.

6. Le cas cristabellin

On précise la Conjecture 5.3 dans le cas cristabellin et lorsque $F_v^+=\mathbb{Q}_p$ pour $v|p$, puis on énonce une conjecture similaire (dans ce cas) sur le socle du foncteur localement analytique de Jacquet-Emerton.

On conserve les notations du § 5 et on fixe désormais une fois pour toutes un choix de place $\widetilde{v}$ de F au-dessus de chaque $v|p$. On suppose $F_v^+=\mathbb{Q}_p$ pour tout $v|p$ et on identifie $G(F_v^+)$ (resp. $G(F^+\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_p)$) à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ (resp. à $\mathrm{GL}_n(F^+\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_p)=\prod_{v|p}\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$) via $\iota_{G,\widetilde{v}}$ (resp. $\prod_{v|p}\iota_{G,\widetilde{v}}$). On note $\widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{alg}}$ au lieu de $\widehat{S}(U^p,E)^{\mathbb{Q}_p\text{-alg}}$. On note $B_{/\mathbb{Q}_p}$ (resp. $\overline{B}_{/\mathbb{Q}_p}$, resp. $N_{/\mathbb{Q}_p}$, resp. $\overline{N}_{/\mathbb{Q}_p}$) le sous-groupe de $\mathrm{GL}_{n/\mathbb{Q}_p}$ des matrices triangulaires inférieures (resp. triangulaires supérieures, resp. unipotentes inférieures, resp. unipotentes supérieures) et $T_{/\mathbb{Q}_p}$ le tore des matrices diagonales. Si $\mu\overset{\text{déf}}{=}(\mu_1,\cdots,\mu_n)\in\mathbb{Z}^n$, on note $\chi_\mu\in X(T)$ le caractère algébrique $T\to\mathbb{G}_m,\mathrm{diag}(x_1,\cdots,x_n)\mapsto x_1^{\mu_1}\cdots x_n^{\mu_n}$, que l'on voit aussi comme caractère de $T(\mathbb{Q}_p)$. Si $w\in\mathcal{S}_n$, on note $w(\mu)\overset{\text{déf}}{=}(\mu_{w^{-1}(1)},\cdots,\mu_{w^{-1}(n)})$ et $w\cdot\mu\overset{\text{déf}}{=}w(\mu+\rho)-\rho\in\mathbb{Z}^n$ (resp. $w\bar{\cdot}\mu\overset{\text{déf}}{=}w(\mu+\overline{\rho})-\overline{\rho}\in\mathbb{Z}^n$) où $\rho\overset{\text{déf}}{=}(0,1,\cdots,n-1)$ (resp. $\overline{\rho}\overset{\text{déf}}{=}(n-1,n-2,\cdots,0)$). On vérifie que $w\bar{\cdot}\mu=-(w\cdot(-\mu))$. On note w_0 l'élément maximal de $\mathcal{S}_n$ pour l'ordre de Bruhat. Si $\alpha \in E^\times$, on note $\mathrm{nr}(\alpha)$ le caractère non ramifié de $\mathbb{Q}_p^\times$ dans $E^\times$ tel que $\mathrm{nr}(\alpha)(p) = \alpha$.

On fixe $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \to \mathrm{GL}_n(E)$ continue telle que :
(i) ρ est absolument irréductible;
(ii) ρ est presque partout non ramifiée;
(iii) ρ est cristabelline générique aux places divisant p;
(iv) il existe U^p tel que le sous-espace propre $\widehat{S}(U^p, E)[\mathfrak{m}_\rho]$ est non nul.

Nous allons d'abord expliciter la Conjecture 5.3 dans ce cas. Rappelons que (iii) signifie que $\rho_{\widetilde{v}}$ pour $v|p$ devient cristalline sur une extension finie abélienne $F'_{\widetilde{v}}$ de $F_{\widetilde{v}} = \mathbb{Q}_p$ que l'on peut choisir totalement ramifiée ([**5**, 2.4.2]), que ses poids de Hodge-Tate sont distincts, on les note $h_{1,\widetilde{v}} < h_{2,\widetilde{v}} < \cdots < h_{n,\widetilde{v}}$, et que le E-espace vectoriel $D_{\widetilde{v}} \overset{\text{déf}}{=} (B_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \rho_{\widetilde{v}})^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F'_{\widetilde{v}})}$ admet une base $(e_{i,\widetilde{v}})_{i\in\{1,\cdots,n\}}$ de vecteurs propres pour le Frobenius φ de valeurs propres $\varphi_{i,\widetilde{v}} \in E^\times$ telle que $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ agit sur $e_{i,\widetilde{v}}$ par un caractère $\theta_{i,\widetilde{v}} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(F'_{\widetilde{v}}/\mathbb{Q}_p) \to E^\times$ vérifiant $\pi_{i,\widetilde{v}}\pi_{j,\widetilde{v}}^{-1} \neq 1, |\cdot|_{\mathbb{Q}_p}$ pour tout $i \neq j$ où :

$$\pi_{i,\widetilde{v}} \overset{\text{déf}}{=} (\theta_{i,\widetilde{v}}|_{W(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)} \circ \mathrm{rec}^{-1}) \cdot \mathrm{nr}(\varphi_{i,\widetilde{v}}) : \mathbb{Q}_p^\times \longrightarrow E^\times. \tag{29}$$

On pose $\lambda_{\widetilde{v}} \overset{\text{déf}}{=} (\lambda_{1,\widetilde{v}}, \cdots, \lambda_{n,\widetilde{v}}) \in \mathbb{Z}^n$ où $\lambda_{i,\widetilde{v}} \overset{\text{déf}}{=} -h_{i,\widetilde{v}} - (n-i)$ et pour $w_{\widetilde{v}} \in \mathcal{S}_n$:

$$\pi_{B,w_{\widetilde{v}}} \overset{\text{déf}}{=} \pi_{w_{\widetilde{v}}^{-1}(1),\widetilde{v}}|\cdot|_{\mathbb{Q}_p}^{-(n-1)} \otimes \pi_{w_{\widetilde{v}}^{-1}(2),\widetilde{v}}|\cdot|_{\mathbb{Q}_p}^{-(n-2)} \otimes \cdots \otimes \pi_{w_{\widetilde{v}}^{-1}(n),\widetilde{v}}. \tag{30}$$

Rappelons qu'alors pour $(w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}, w_{\widetilde{v}}) \in \mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_n$ (voir § 2 et la fin du § 4 pour le terme de droite) :

$$C(w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}, w_{\widetilde{v}}) = \mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)} \big(\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)} \chi_{w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}\cdot\lambda_{\widetilde{v}}} \pi_{B,w_{\widetilde{v}}}\big)^{\mathrm{an}} \cong \mathcal{F}_B^G\big(L(w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}\cdot(-\lambda_{\widetilde{v}})), \pi_{B,w_{\widetilde{v}}}\big)$$

où $L(w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}\cdot(-\lambda_{\widetilde{v}}))$ est l'unique quotient simple non nul de $U(\mathfrak{gl}_n) \otimes_{U(\mathfrak{b})} w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}\cdot(-\lambda_{\widetilde{v}})$ en voyant $w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}\cdot(-\lambda_{\widetilde{v}})$ comme caractère de $U(\mathfrak{b})$ via $U(\mathfrak{b}) \twoheadrightarrow U(\mathfrak{t})$ (voir [**6**, § 6] en faisant attention aux changements de notations, voir aussi [**7**, § 5.1]). On a donc :

$$\widehat{\otimes}_{v|p} C(w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}, w_{\widetilde{v}}) = \mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_n(F^+\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_p)} \Big(\mathrm{Ind}_{B(F^+\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_n(F^+\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_p)} \prod_{v|p} \big(\chi_{w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}\cdot\lambda_{\widetilde{v}}} \pi_{B,w_{\widetilde{v}}}\big)\Big)^{\mathrm{an}}.$$

On voit $(e_{i,\widetilde{v}})_{i\in\{1,\cdots,n\}}$ comme la base canonique associée à $\mathrm{GL}_n(E)$, i.e. $e_{i,\widetilde{v}}$ correspond au vecteur colonne :

$$\begin{pmatrix} \left.\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}\right\} i-1 \\ 1 \\ \left.\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}\right\} n-i \end{pmatrix},$$

et rappelons que $\mathrm{GL}_n(E)/\overline{B}(E)$ classifie les drapeaux dans $Ee_{1,\widetilde{v}} \oplus \cdots \oplus Ee_{n,\widetilde{v}}$ en envoyant $g\overline{B}(E)$ vers le drapeau :

$$\big(Eg(e_{1,\widetilde{v}}), Eg(e_{1,\widetilde{v}}) \oplus Eg(e_{2,\widetilde{v}}), \cdots, Eg(e_{1,\widetilde{v}}) \oplus \cdots \oplus Eg(e_{n,\widetilde{v}})\big).$$

Pour chaque $w_{\widetilde{v}} \in \mathcal{S}_n$, on note $w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}(w_{\widetilde{v}})$ l'unique élément de $\mathcal{S}_n$ tel que :

$$\underline{\mathrm{Fil}}_{\widetilde{v}}^{\cdot} \in \big(w_{\widetilde{v}}^{-1}\overline{B}(E)w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}(w_{\widetilde{v}})w_0\overline{B}(E)\big)/\overline{B}(E) \subset \mathrm{GL}_n(E)/\overline{B}(E) \tag{31}$$

où l'on voit $\mathcal{S}_n$ comme sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(E)$ de la manière habituelle. La Conjecture 5.3 s'explicite alors comme suit.

Conjecture 6.1. — *Soit ρ et U^p vérifiant (i) à (iv). Si $\big((w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}, w_{\widetilde{v}})\big)_{v|p} \in \prod_{v|p}(\mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_n)$, on a :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_n(F^+\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_p)}\Big(\widehat{\otimes}_{v|p}C(w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}, w_{\widetilde{v}})(\varepsilon^{n-1}), \widehat{S}(U^p, E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho]\Big) \neq 0 \tag{32}$$

si et seulement si $w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}} \leq w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}(w_{\widetilde{v}})$ pour tout $v|p$.

Il semble raisonnable dans ce cas cristabellin de conjecturer l'énoncé suivant, un peu plus fort.

Conjecture 6.2. — *Soit ρ et U^p vérifiant (i) à (iv). Si C est un sous-quotient irréductible d'une série principale localement analytique de $\mathrm{GL}_n(F^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p)$ sur E, on a :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_n(F^+\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_p)}\big(C, \widehat{S}(U^p, E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho]\big) \neq 0$$

si et seulement si :

$$C \cong \widehat{\otimes}_{v|p}C(w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}, w_{\widetilde{v}})(\varepsilon^{n-1})$$

pour $\big((w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}, w_{\widetilde{v}})\big)_{v|p} \in \prod_{v|p}(\mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_n)$ tel que $w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}} \leq w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}(w_{\widetilde{v}})$ pour tout $v|p$.

Autrement dit la Conjecture 6.1 devrait donner la liste complète (à multiplicité près) des constituants du socle de $\widehat{S}(U^p, E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho]$ qui sont des sous-quotients de séries principales.

Remarque 6.3. — Lorsque les $\rho_{\widetilde{v}}$ pour $v|p$ sont plus généralement triangulines potentiellement semi-stables (génériques), j'ignore s'il est raisonnable de conjecturer l'énoncé analogue à 6.2, i.e. j'ignore si l'on peut s'attendre à ce que les sous-quotients irréductibles de séries principales localement analytiques en socle de $\widehat{S}(U^p, E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho]$ soient *tous* de la forme $\widehat{\otimes}_{v|p}C(w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}, w_{\widetilde{v}})(\varepsilon^{n-1})$ pour $((w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}, w_{\widetilde{v}}))_{v|p} \in \prod_{v|p}\mathcal{W}_{\widetilde{v}}(\underline{\mathrm{Fil}}_{\widetilde{v}}^{\cdot})$ (cf. Conjecture 5.3). Noter que, dans ce cas, les séries principales $\big(\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)}\chi_{w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}\cdot\lambda_{\widetilde{v}}}\pi_{B,w_{\widetilde{v}}}\big)^{\mathrm{an}}$ peuvent avoir plus de constituants irréductibles que dans le cas cristabellin, et leur structure ne se ramène pas "juste" à celle des modules de Verma (cf. par exemple [**24**]). La présence de ces constituants "en plus" est la raison principale pour laquelle je préfère, par prudence, en rester dans ce cas à la Conjecture 5.3.

On énonce maintenant deux conjectures sur le socle du foncteur de Jacquet-Emerton qui peuvent être vues comme des analogues des Conjectures 6.1 et 6.2. On étudiera les relations entre les deux ensembles de conjectures au § 8.

On a besoin de quelques préliminaires. Soit $\Sigma_p \subseteq \{v|p\}$ un sous-ensemble non vide et $\overline{\Sigma}_p \stackrel{\text{déf}}{=} \{v|p\}\backslash\Sigma_p$. On note $\widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an},\overline{\Sigma}_p\text{-alg}} \subseteq \widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an}}$ le sous-E-espace vectoriel des vecteurs v pour lesquels il existe un sous-groupe ouvert compact $U_{\overline{\Sigma}_p}$ de $\prod_{v\in\overline{\Sigma}_p}\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ tel que la $U_{\overline{\Sigma}_p}$-représentation engendrée par v dans $\widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an}}|_{U_{\overline{\Sigma}_p}}$ est la restriction à $U_{\overline{\Sigma}_p}$ d'une somme directe de représentations algébriques de $\prod_{v\in\overline{\Sigma}_p}\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ sur E. C'est encore une représentation localement analytique de $G(F^+\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_p)$ sur E dans $\widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an}}$ stable par $\mathbb{T}(U^p)$. On définit $T(\mathbb{Q}_p)^+$ comme en (17) pour le sous-groupe ouvert compact $\overline{N}(\mathbb{Z}_p)$ de $\overline{N}(\mathbb{Q}_p)$ et l'action de Hecke de $T(F^+\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_p)^+ \stackrel{\text{déf}}{=} \prod_{v|p}T(\mathbb{Q}_p)^+$ sur $(\widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an},\overline{\Sigma}_p\text{-alg}})^{\prod_{v|p}\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}$ comme en (18).

Pour $v|p$ et $(w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}},w_{\widetilde{v}})\in\mathcal{S}_n\times\mathcal{S}_n$, on pose :

$$\eta(w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}},w_{\widetilde{v}}) \stackrel{\text{déf}}{=} \chi_{w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}\cdot\lambda_{\widetilde{v}}}\pi_{B,w_{\widetilde{v}}}\varepsilon^{n-1}\circ\det. \tag{33}$$

Explicitement on a $(\mathrm{diag}(x_1,\cdots,x_n)\in T(F_v^+)=T(\mathbb{Q}_p))$:

$$\begin{aligned}\eta(w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}},w_{\widetilde{v}})\big(\mathrm{diag}(x_1,\cdots,x_n)\big) = \Big(&x_1^{-h_{(w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}})^{-1}(1),\widetilde{v}}}\pi_{w_{\widetilde{v}}^{-1}(1),\widetilde{v}}(x_1)\\ &x_2^{-h_{(w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}})^{-1}(2),\widetilde{v}}}\pi_{w_{\widetilde{v}}^{-1}(2),\widetilde{v}}(x_2)\cdots x_n^{-h_{(w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}})^{-1}(n),\widetilde{v}}}\pi_{w_{\widetilde{v}}^{-1}(n),\widetilde{v}}(x_n)\Big)\\ &\cdot\big(\varepsilon(x_2)\cdots\varepsilon^{n-1}(x_n)\big)\end{aligned} \tag{34}$$

et $C(w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}},w_{\widetilde{v}})(\varepsilon^{n-1}) = \mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)}\big(\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)}\eta(w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}},w_{\widetilde{v}})\big)^{\mathrm{an}}$. On note $D_{\mathrm{rig}}(\rho_{\widetilde{v}})$ le (φ,Γ)-module associé à $\rho_{\widetilde{v}}$ sur l'anneau de Robba $\mathcal{R}_E$ à coefficients dans E. Signalons le lemme suivant, qui sera utile plus tard.

Lemme 6.4. — *Le (φ,Γ)-module $D_{\mathrm{rig}}(\rho_{\widetilde{v}})$ a $n!$ triangulations données par les paramètres ordonnés vus comme caractères (localement algébriques) de $T(\mathbb{Q}_p)$ à valeurs dans $E^\times$:*

$$\mathrm{diag}(x_1,\cdots,x_n) \longmapsto \eta\big(w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}(w_{\widetilde{v}}),w_{\widetilde{v}}\big)\big(\mathrm{diag}(x_1,\cdots,x_n)\big)\big(\varepsilon(x_2)\cdots\varepsilon^{n-1}(x_n)\big)^{-1}$$

pour $w_{\widetilde{v}}\in\mathcal{S}_n$.

Démonstration. — Cela se déduit de [**1**, Prop.2.4.1] et de la définition de $w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}(w_{\widetilde{v}})$ en (31) en procédant comme au début de la preuve de [**7**, Prop.6.1.1] ou de [**6**, Prop.7.4]. □

Les deux conjectures susmentionnées sont les suivantes (la deuxième impliquant trivialement la première).

Conjecture 6.5. — *Soit ρ et U^p vérifiant (i) à (iv) et soit $\Sigma_p \subseteq \{v|p\}$. Si $\big((w^{\mathrm{alg}}_{\widetilde{v}}, w_{\widetilde{v}})\big)_{v|p} \in \prod_{v|p}(\mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_n)$, on a :*

$$\mathrm{Hom}_{T(F^+\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_p)^+}\Big(\prod_{v|p}\eta(w^{\mathrm{alg}}_{\widetilde{v}}, w_{\widetilde{v}}), \widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an},\overline{\Sigma}_p\text{-alg}}[\mathfrak{m}_\rho]^{\prod_{v|p}\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}\Big) \neq 0 \tag{35}$$

si et seulement si $w^{\mathrm{alg}}_{\widetilde{v}} \leq w^{\mathrm{alg}}_{\widetilde{v}}(w_{\widetilde{v}})$ pour tout $v \in \Sigma_p$ et $w^{\mathrm{alg}}_{\widetilde{v}} = 1$ pour tout $v \in \overline{\Sigma}_p$.

Conjecture 6.6. — *Soit ρ et U^p vérifiant (i) à (iv) et soit $\Sigma_p \subseteq \{v|p\}$. Si η est un caractère localement analytique de $T(F^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p)$ sur E, on a :*

$$\mathrm{Hom}_{T(F^+\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_p)^+}\Big(\eta, \widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an},\overline{\Sigma}_p\text{-alg}}[\mathfrak{m}_\rho]^{\prod_{v|p}\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}\Big) \neq 0$$

si et seulement si :

$$\eta = \prod_{v|p}\eta(w^{\mathrm{alg}}_{\widetilde{v}}, w_{\widetilde{v}}) \tag{36}$$

pour $\big((w^{\mathrm{alg}}_{\widetilde{v}}, w_{\widetilde{v}})\big)_{v|p} \in \prod_{v|p}(\mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_n)$ tel que $w^{\mathrm{alg}}_{\widetilde{v}} \leq w^{\mathrm{alg}}_{\widetilde{v}}(w_{\widetilde{v}})$ si $v \in \Sigma_p$ et $w^{\mathrm{alg}}_{\widetilde{v}} = 1$ si $v \in \overline{\Sigma}_p$.

Remarque 6.7. — (i) Rappelons que notre convention sur l'action de Hecke (18) n'est pas tout à fait celle de [**13**, § 3.4] puisque nous *ne* tordons *pas* par le caractère module $\delta_{\overline{B}(F^+\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_p)} = \prod_{v|p}\delta_{\overline{B}(\mathbb{Q}_p)}$ de $T(F^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p)$. Autrement dit, on a $\mathrm{Hom}_{T(F^+\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_p)^+}\big(\eta, \widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an},\overline{\Sigma}_p\text{-alg}}[\mathfrak{m}_\rho]^{\prod_{v|p}\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}\big) \neq 0$ avec notre convention si et seulement si $\mathrm{Hom}_{T(F^+\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_p)^+}\big(\eta\delta_{\overline{B}(F^+\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_p)}, \widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an},\overline{\Sigma}_p\text{-alg}}[\mathfrak{m}_\rho]^{\prod_{v|p}\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}\big) \neq 0$ avec la convention de [**13**, § 3.4].
(ii) Si $\Sigma_p = \emptyset$, alors les Conjectures 6.5 et 6.6 sont encore valables, mais ne concernent alors que les vecteurs localement $\mathbb{Q}_p$-algébriques $\widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{alg}}$ et sont équivalentes à $\widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{alg}}[\mathfrak{m}_\rho] \neq 0$, i.e. ρ est automorphe (cf. le (i) de la Remarque 5.5). En effet, si $\widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{alg}}[\mathfrak{m}_\rho] \neq 0$, alors leurs énoncés découlent de la Proposition 5.1, de propriétés maintenant classiques de compatibilité local-global et du fait que le foncteur de Jacquet-Emerton est dans ce cas le foncteur de Jacquet usuel ([**13**, Prop.4.3.6]).
(iii) On peut également énoncer les Conjectures 6.1 et 6.2 pour un sous-ensemble $\Sigma_p \subseteq \{v|p\}$ quelconque en remplaçant $\widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an}}$ par $\widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an},\overline{\Sigma}_p\text{-alg}}$ comme ci-dessus, mais on obtient un énoncé moins fort que pour $\Sigma_p = \{v|p\}$ (voir le début de la preuve du (i) de la Proposition 8.4). Noter que ce ne serait pas le cas *a priori* des Conjectures 6.5 et 6.6 car "$\overline{\Sigma}_p$-alg" concerne l'action de $\mathrm{GL}_n(F^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p)$ (pas de $T(F^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p)^+$).

7. Rappels sur les variétés de Hecke

On donne quelques rappels autour des variétés de Hecke que l'on utilisera. Les preuves étant des variantes indolores de preuves connues (cf. [**1**], [**11**], [**23**], [**18**], ...), on se contente principalement d'énoncer les résultats.

On conserve les notations du § 6. En particulier, E est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$, F^+ est tel que $F^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p \cong \prod_{v|p} \mathbb{Q}_p$ et au-dessus de chaque $v|p$ on fixe une place $\widetilde{v}$ de F. Si $\mathcal{X}$ est un espace rigide analytique sur E (au sens de Tate), on note :

$$\mathcal{X}(\overline{\mathbb{Q}_p}) \stackrel{\text{déf}}{=} \varinjlim_{E \subseteq E' \subset \overline{\mathbb{Q}_p}} \mathcal{X}(E').$$

Si $\mathcal{X}$ est réduit, un sous-ensemble $Z \subseteq \mathcal{X}(\overline{\mathbb{Q}_p})$ est dit Zariski-dense si $\mathcal{X}$ est le seul fermé analytique de $\mathcal{X}$ dont les $\overline{\mathbb{Q}_p}$-points contiennent Z.

Si $\Sigma_p \subseteq \{v|p\}$ est un sous-ensemble quelconque, on note $F^+_{\Sigma_p} \stackrel{\text{déf}}{=} \prod_{v\in\Sigma_p} F^+_v = \prod_{v\in\Sigma_p} \mathbb{Q}_p$, $\mathcal{O}_{F^+_{\Sigma_p}} \stackrel{\text{déf}}{=} \prod_{v\in\Sigma_p} \mathbb{Z}_p$, $\overline{N}^0_{\Sigma_p} \stackrel{\text{déf}}{=} \prod_{v\in\Sigma_p} \overline{N}(\mathbb{Z}_p)$, $T^0_{\Sigma_p} \stackrel{\text{déf}}{=} \prod_{v\in\Sigma_p} T(\mathbb{Z}_p)$, $T(F^+_{\Sigma_p})^+ \stackrel{\text{déf}}{=} \prod_{v\in\Sigma_p} T(\mathbb{Q}_p)^+$ et $J_{\overline{B}(F^+_{\Sigma_p})}$ le foncteur de Jacquet-Emerton relativement à $\overline{B}(F^+_{\Sigma_p}) = \prod_{v\in\Sigma_p} \overline{B}(\mathbb{Q}_p)$ (cf. [**13**, Th.3.5.6] et la Remarque 4.4). On note aussi $\overline{\Sigma}_p \stackrel{\text{déf}}{=} \{v|p\}\backslash\Sigma_p$. Si $\Sigma_p = \emptyset$, on convient que tous les groupes ci-dessus sont triviaux et que $J_{\overline{B}(F^+_{\Sigma_p})}$ est le foncteur identité.

On considère un triplet $(U^p, \Sigma_p, \eta^0_{\overline{\Sigma}_p})$ comme suit : $U^p = \prod_{v\nmid p} U_v$ est un sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbb{A}^{\infty,p}_{F^+})$, $\Sigma_p \subseteq \{v|p\}$ est un sous-ensemble non vide et $\eta^0_{\overline{\Sigma}_p} : T^0_{\overline{\Sigma}_p} \to E^\times$ est un caractère *localement algébrique*. On étend $\eta^0_{\overline{\Sigma}_p}$ à $T(F^+_{\overline{\Sigma}_p})$ en envoyant les puissances de p vers 1. On dispose de la représentation localement analytique de $\mathrm{GL}_n(F^+_{\Sigma_p})$ sur E :

$$J_{\overline{B}(F^+_{\Sigma_p})}\big(\widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an},\overline{\Sigma}_p\text{-alg}}\big)[\eta^0_{\overline{\Sigma}_p}] \quad \stackrel{\text{déf}}{=} \quad \mathrm{Hom}_{T^0_{\overline{\Sigma}_p}}\left(\eta^0_{\overline{\Sigma}_p}, J_{\overline{B}(F^+_{\Sigma_p})}\big(\widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an},\overline{\Sigma}_p\text{-alg}}\big)\right) \tag{37}$$

(attention, on considère les morphismes seulement $T^0_{\overline{\Sigma}_p}$-équivariants, pas nécessairement $T(F^+_{\overline{\Sigma}_p})$-équivariants) ainsi que de sa sous-représentation localement algébrique $J_{\overline{B}(F^+_{\Sigma_p})}\big(\widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{alg}}\big)[\eta^0_{\overline{\Sigma}_p}]$.

On considère la E-algèbre commutative :

$$\mathcal{H} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbb{T}(U^p) \times E\left[T(F^+_{\overline{\Sigma}_p})/T^0_{\overline{\Sigma}_p}\right]$$

et on note $\mathcal{H}(A) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}_{E\text{-alg}}(\mathcal{H}, A)$ pour toute E-algèbre A. Comme on a étendu $\eta^0_{\overline{\Sigma}_p}$ à $T(F^+_{\overline{\Sigma}_p})$, la E-algèbre $\mathcal{H}$ agit naturellement sur la représentation (37) et cette action commute à celle de $\mathrm{GL}_n(F^+_{\Sigma_p})$ et respecte la sous-représentation

$J_{\overline{B}(F^+_{\overline{\Sigma}_p})}\big(\widehat{S}(U^p,E)^{\rm alg}\big)[\eta^0_{\overline{\Sigma}_p}]$. Si $\psi=(\psi(U^p),\psi_{\overline{\Sigma}_p})$ est un système de valeurs propres de $\mathcal{H}$ sur (37), on a :

$$(38)\quad J_{\overline{B}(F^+_{\overline{\Sigma}_p})}\big(\widehat{S}(U^p,E)^{{\rm an},\overline{\Sigma}_p\text{-alg}}\big)[\eta^0_{\overline{\Sigma}_p}][\psi]=$$
$$\mathrm{Hom}_{T(F^+_{\overline{\Sigma}_p})}\Big(\eta^0_{\overline{\Sigma}_p}\psi_{\overline{\Sigma}_p},J_{\overline{B}(F^+_{\overline{\Sigma}_p})}\big(\widehat{S}(U^p,E)^{{\rm an},\overline{\Sigma}_p\text{-alg}}\big)\Big)[\psi(U^p)]=$$
$$\mathrm{Hom}_{T(F^+_{\overline{\Sigma}_p})^+}\Big(\eta^0_{\overline{\Sigma}_p}\psi_{\overline{\Sigma}_p},\big(\widehat{S}(U^p,E)^{{\rm an},\overline{\Sigma}_p\text{-alg}}\big)^{\overline{N}^0_{\overline{\Sigma}_p}}\Big)[\psi(U^p)]$$

(voir la Remarque 4.4 pour la deuxième égalité) et de même avec $\widehat{S}(U^p,E)^{\rm alg}$.

On associe à un tel triplet $(U^p,\Sigma_p,\eta^0_{\overline{\Sigma}_p})$ un ensemble de “points classiques” $\mathcal{Z}$ comme suit. On note $\mathcal{T}$ la variété rigide analytique en groupes sur E paramétrant les caractères localement analytiques (ou, de manière équivalente, p-adiques continus) de $T(F^+_{\Sigma_p})$, i.e. $\mathcal{T}=\mathrm{Hom}_{\rm gr}(T(F^+_{\Sigma_p}),\mathbb{G}^{\rm rig}_{{\rm m}\,/E})$. On définit $\mathcal{Z}\subseteq\mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}_p})\times\mathcal{T}(\overline{\mathbb{Q}_p})$ comme le sous-ensemble des (ψ,η_{Σ_p}) tels qu'il existe une extension finie E' de E dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$ telle que :
(i) ψ est un système de valeurs propres de $\mathcal{H}$ sur $J_{\overline{B}(F^+_{\overline{\Sigma}_p})}\big(\widehat{S}(U^p,E')^{\rm alg}\big)[\eta^0_{\overline{\Sigma}_p}]$;
(ii) $\eta_{\Sigma_p}:T(F^+_{\Sigma_p})\to E'^{\times}$ est un caractère (nécessairement localement algébrique) vérifiant $\mathrm{Hom}_{T(F^+_{\Sigma_p})^+}\Big(\eta_{\Sigma_p},J_{\overline{B}(F^+_{\overline{\Sigma}_p})}\big(\widehat{S}(U^p,E')^{\rm alg}\big)[\eta^0_{\overline{\Sigma}_p}][\psi]^{\overline{N}^0_{\Sigma_p}}\Big)\neq 0$.

Remarque 7.1. — Les points classiques (ψ,η_{Σ_p}) ci-dessus correspondent aux points classiques $(\psi,\eta_{\Sigma_p}\prod_{v\in\Sigma_p}\delta_{\overline{B}(\mathbb{Q}_p)})$ si l'on tord l'action de Hecke (18) par le caractère module $\prod_{v\in\Sigma_p}\delta_{\overline{B}(\mathbb{Q}_p)}$, cf. le (i) de la Remarque 6.7 et comparer par exemple avec [**31**, § 4.1].

On note $\mathcal{W}\overset{\text{déf}}{=}\mathrm{Hom}_{\rm gr}(T^0_{\Sigma_p},\mathbb{G}^{\rm rig}_{{\rm m}\,/E})$ la variété rigide analytique en groupes sur E paramétrant les caractères localement analytiques de $T^0_{\Sigma_p}$. On a $\mathcal{T}\cong\mathcal{W}\times(\mathbb{G}^{\rm rig}_{{\rm m}\,/E})^{n|\Sigma_p|}$ et une projection canonique $\mathrm{pr}:\mathcal{T}\to\mathcal{W}$.

À un triplet $(U^p,\Sigma_p,\eta^0_{\overline{\Sigma}_p})$ comme ci-dessus, on peut associer suivant [**11**] et [**15**] (voir aussi [**9**], [**1**], [**23**], [**18**], ...) un quadruplet $(\mathcal{E},\Psi,\nu,Z)$ où :
(i) $\mathcal{E}$ est une variété rigide analytique sur E réduite et équidimensionelle de dimension $\dim(\mathcal{W})=n|\Sigma_p|$;
(ii) $\Psi:\mathcal{H}\to\mathcal{O}(\mathcal{E})$ est un morphisme d'anneaux;
(iii) $\nu:\mathcal{E}\to\mathcal{T}$ est un morphisme rigide analytique sur E qui est fini;
(iv) $Z\subset\mathcal{E}(\overline{\mathbb{Q}_p})$ est un sous-ensemble Zariski-dense et d'accumulation au sens de [**1**, § 3.3.1];
ces données vérifiant les propriétés suivantes (parmi d'autres) :
(v) l'application canonique d'évaluation :

$$\mathcal{E}(\overline{\mathbb{Q}_p})\longrightarrow\mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}_p})\times\mathcal{T}(\overline{\mathbb{Q}_p}),\ x\longmapsto(x\circ\Psi,\nu(x))$$

est injective et induit une bijection $Z \xrightarrow{\sim} \mathcal{Z}$ où $\mathcal{Z}$ est l'ensemble de "points classiques" ci-dessus associé à $(U^p, T^0_{\overline{\Sigma}_p}, \eta^0_{\overline{\Sigma}_p})$;
(vi) un élément (ψ, η_{Σ_p}) de $\mathcal{H}(E') \times \mathcal{T}(E')$ où E' est une extension finie de E dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$ est un point de $\mathcal{E}(E')$ si et seulement si :

$$\mathrm{Hom}_{T(F^+_{\Sigma_p})^+}\Big(\eta_{\Sigma_p}, J_{\overline{B}(F^+_{\overline{\Sigma}_p})}\big(\widehat{S}(U^p, E')^{\mathrm{an}, \overline{\Sigma}_p\text{-alg}}\big)[\eta^0_{\overline{\Sigma}_p}][\psi]^{\overline{N}^0_{\Sigma_p}}\Big) \neq 0; \tag{39}$$

(vii) soit $\kappa \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{pr} \circ \nu : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{W}$, il existe un recouvrement admissible de $\mathcal{E}$ par des ouverts affinoïdes Ω tels que $\kappa(\Omega)$ est un ouvert affinoïde de $\mathcal{W}$, $\kappa|_\Omega : \Omega \to \kappa(\Omega)$ est fini, et surjectif en restriction à chaque composante irréductible de Ω;
(viii) pour tout $x = (\psi, \eta_{\Sigma_p}) \in \mathcal{E}(E')$ tel que $\eta_{\Sigma_p} : T(F^+_{\Sigma_p}) \to E'^\times$ est localement algébrique, il existe une base de voisinages affinoïdes Ω de x dans $\mathcal{E}$ tels que $Z \cap \Omega(\overline{\mathbb{Q}_p})$ est Zariski-dense dans Ω.

De plus, si $\emptyset \neq \Sigma'_p \subseteq \Sigma_p$, si $(U^p, \Sigma'_p, \eta^0_{\overline{\Sigma}'_p})$, $(U^p, \Sigma_p, \eta^0_{\overline{\Sigma}_p})$ sont deux triplets tels que $\eta^0_{\overline{\Sigma}'_p}|_{T^0_{\overline{\Sigma}_p}} = \eta^0_{\overline{\Sigma}_p}$ et si $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}$ sont les variétés de Hecke sur E associées respectivement à $(U^p, \Sigma'_p, \eta^0_{\overline{\Sigma}'_p})$ et $(U^p, \Sigma_p, \eta^0_{\overline{\Sigma}_p})$, alors $\mathcal{E}'$ est une sous-variété rigide analytique fermée de $\mathcal{E}$.

Par ailleurs, à tout point $x \in \mathcal{E}(E')$ est associée une représentation continue absolument semi-simple $\rho_x : \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \to \mathrm{GL}_n(E')$ (cf. [**1**, § 7.5.2]). Si ρ_x est absolument irréductible, il existe de plus un ouvert affinoïde $\Omega \subseteq \mathcal{E}$ contenant x et une représentation continue :

$$\rho_\Omega : \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}(\Omega)) \tag{40}$$

telle que chaque spécialisation de ρ_Ω en $y \in \Omega$ redonne la représentation ρ_y avec de plus ρ_y absolument irréductible (cf. [**1**, § 7.8.2] et [**2**, Lem.5.5]). Si, de plus, il existe un tel voisinage affinoïde Ω de x tel que $Z \cap \Omega(\overline{\mathbb{Q}_p})$ est Zariski-dense (par exemple si le caractère η_{Σ_p} associé à x est localement algébrique par la propriété (viii) ci-dessus), alors $\rho_x : \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \to \mathrm{GL}_n(E')$ est trianguline potentiellement semi-stable en $\widetilde{v}$ au-dessus de $\overline{\Sigma}_p$ et trianguline en $\widetilde{v}$ au-dessus de Σ_p telle que, pour tout $v|p$, $D_{\mathrm{rig}}(\rho_{x,\widetilde{v}})$ admet une triangulation de la forme :

$$\mathrm{diag}(x_1, \cdots, x_n) \longmapsto (\chi_{\widetilde{v}}\eta_{\widetilde{v}})(\mathrm{diag}(x_1, \cdots, x_n))\big(\varepsilon(x_2)\cdots\varepsilon^{n-1}(x_n)\big)^{-1} \tag{41}$$

où $x \circ \Psi = (\psi(U^p), \psi_{\overline{\Sigma}_p}) \in \mathcal{H}(E')$, les $\eta_{\widetilde{v}}$ sont définis par $\eta^0_{\overline{\Sigma}_p}\psi_{\overline{\Sigma}_p} = \prod_{v \in \overline{\Sigma}_p} \eta_{\widetilde{v}}$ (si $v \in \overline{\Sigma}_p$), $\nu(x) = \prod_{v \in \Sigma_p} \eta_{\widetilde{v}}$ (si $v \in \Sigma_p$), et où $\chi_{\widetilde{v}}$ est un caractère *algébrique* de $T(\mathbb{Q}_p)$ qui est "génériquement" trivial. Si x est dans Z et est suffisamment générique, cela découle de théorèmes maintenant classiques sur les représentations galoisiennes associées aux représentations automorphes (et on a alors $\chi_{\widetilde{v}} = 1$). En général, cela se déduit alors de [**22**, Th.6.3.13] appliqué à $M = D_{\mathrm{rig}}(\rho_\Omega|_{\mathrm{Gal}(\overline{F}_{\widetilde{v}}/F_{\widetilde{v}})})$ (cf. le début de la preuve de la Proposition 9.2 ci-dessous) et de [**11**, § 3.15].

Terminons cette section en rappelant une autre description utile des espaces (39). Soit $\overline{I}_{\Sigma_p} \subset \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_{F^+_{\Sigma_p}})$ le sous-groupe d'Iwahori des matrices triangulaires *supérieures* modulo p et $\eta_{\Sigma_p} : T(F^+_{\Sigma_p}) \to E'^{\times}$ un caractère localement analytique que l'on voit aussi par inflation comme caractère de $\overline{B}(F^+_{\Sigma_p})$ (E' est une extension finie de E comme avant). On note :

$$(\mathrm{Ind}\,\eta_{\Sigma_p})^{\mathrm{an}} \overset{\text{déf}}{=} \Big(\mathrm{Ind}_{\overline{B}(F^+_{\Sigma_p})}^{\overline{B}(F^+_{\Sigma_p})\overline{I}_{\Sigma_p}}\ \eta_{\Sigma_p}\Big)^{\mathrm{an}}$$

le E'-espace vectoriel des fonctions localement analytiques $f : \overline{B}(F^+_{\Sigma_p})\overline{I}_{\Sigma_p} \to E'$ telles que $f(\overline{b}\overline{i}) = \eta_{\Sigma_p}(\overline{b})f(\overline{i})$ où $(\overline{b}, \overline{i}) \in \overline{B}(F^+_{\Sigma_p}) \times \overline{I}_{\Sigma_p}$. On munit $(\mathrm{Ind}\,\eta_{\Sigma_p})^{\mathrm{an}}$ de l'action à gauche de $\overline{I}_{\Sigma_p}$ par translation à droite : $(\overline{i}'f)(\overline{b}\overline{i}) \overset{\text{déf}}{=} f(\overline{b}\overline{i}\overline{i}')$. En remarquant que $\overline{I}_{\Sigma_p}T(F^+_{\Sigma_p})^+ \subset \overline{B}(F^+_{\Sigma_p})\overline{I}_{\Sigma_p}$, cette action s'étend naturellement en une action (par translation à droite) du sous-monoïde M_{Σ_p} de $\mathrm{GL}_n(F^+_{\Sigma_p})$ engendré par $\overline{I}_{\Sigma_p}$ et $T(F^+_{\Sigma_p})^+$. Si $\eta_{\Sigma_p} : T(F^+_{\Sigma_p}) \to E'^{\times}$ est un caractère localement algébrique, on définit de manière similaire $(\mathrm{Ind}\,\eta_{\Sigma_p})^{\mathrm{alg}} \overset{\text{déf}}{=} \Big(\mathrm{Ind}_{\overline{B}(F^+_{\Sigma_p})}^{\overline{B}(F^+_{\Sigma_p})\overline{I}_{\Sigma_p}}\ \eta_{\Sigma_p}\Big)^{\mathrm{alg}}$ avec une action de M_{Σ_p} en remplaçant fonctions localement analytiques par fonctions localement polynomiales. Enfin, on définit des espaces analogues avec $\overline{\Sigma}_p$ au lieu de Σ_p (non triviaux seulement si $\overline{\Sigma}_p \neq \emptyset$).

Soit $\eta_{\Sigma_p} : T(F^+_{\Sigma_p}) \to E'^{\times}$ localement analytique et $\eta_{\overline{\Sigma}_p} : T(F^+_{\overline{\Sigma}_p}) \to E'^{\times}$ localement algébrique, on note :

$$S\big(U^p\overline{I}_{\Sigma_p}\overline{I}_{\overline{\Sigma}_p}, (\mathrm{Ind}\,\eta_{\Sigma_p})^{\mathrm{an}} \otimes_{E'} (\mathrm{Ind}\,\eta_{\overline{\Sigma}_p})^{\mathrm{alg}}\big) \tag{42}$$

le E'-espace vectoriel des fonctions :

$$f : G(F^+)\backslash G(\mathbb{A}^{\infty}_{F^+})/U^p \to (\mathrm{Ind}\,\eta_{\Sigma_p})^{\mathrm{an}} \otimes_{E'} (\mathrm{Ind}\,\eta_{\overline{\Sigma}_p})^{\mathrm{alg}}$$

telles que $f(g\overline{i}_{\Sigma_p}\overline{i}_{\overline{\Sigma}_p}) = (\overline{i}_{\Sigma_p}^{-1} \times \overline{i}_{\overline{\Sigma}_p}^{-1})(f(g))$ si $g \in G(\mathbb{A}^{\infty}_{F^+})$ et $(\overline{i}_{\Sigma_p}, \overline{i}_{\overline{\Sigma}_p}) \in \overline{I}_{\Sigma_p} \times \overline{I}_{\overline{\Sigma}_p}$. Il est muni de l'action usuelle de $\mathbb{T}(U^p)$, $T(F^+_{\Sigma_p})^+$ et $T(F^+_{\overline{\Sigma}_p})^+$ par doubles classes : par exemple $t_{\Sigma_p} \in T(F^+_{\Sigma_p})^+$ agit en envoyant f sur $(g \mapsto \sum_i m_{\Sigma_p,i}(f(gm_{\Sigma_p,i})))$ où $\overline{I}_{\Sigma_p}t_{\Sigma_p}\overline{I}_{\Sigma_p} = \amalg_i m_{\Sigma_p,i}\overline{I}_{\Sigma_p}$ dans M_{Σ_p}. Notons que l'action de $T(F^+_{\Sigma_p})^+$ (resp. $T(F^+_{\overline{\Sigma}_p})^+$) est triviale en restriction à $T^0_{\Sigma_p}$ (resp. $T^0_{\overline{\Sigma}_p}$) et (42) est donc en particulier muni d'une action de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}^+ \overset{\text{déf}}{=} \mathbb{T}(U^p) \times E\Big[T(F^+_{\overline{\Sigma}_p})^+/T^0_{\overline{\Sigma}_p}\Big] \subset \mathcal{H}$.

Proposition 7.2. — *Soit* $(\psi,\eta_{\Sigma_p})=(\psi(U^p),\psi_{\overline{\Sigma}_p},\eta_{\Sigma_p})\in\mathcal{H}(E')\times\mathcal{T}(E')$ *et* $\eta_{\overline{\Sigma}_p}\stackrel{\text{déf}}{=}\eta^0_{\overline{\Sigma}_p}\psi_{\overline{\Sigma}_p}$*, on a :*

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_{T(F^+_{\Sigma_p})^+}\Big(\eta_{\Sigma_p},J_{\overline{B}(F^+_{\overline{\Sigma}_p})}\big(\widehat{S}(U^p,E')^{\mathrm{an},\overline{\Sigma}_p\text{-alg}}\big)[\eta^0_{\overline{\Sigma}_p}][\psi]^{\overline{N}^0_{\Sigma_p}}\Big)=\\&\qquad\mathrm{Hom}_{T(F^+\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_p)^+}\Big(\eta_{\Sigma_p}\eta_{\overline{\Sigma}_p},\widehat{S}(U^p,E')^{\mathrm{an},\overline{\Sigma}_p\text{-alg}}[\psi(U^p)]^{\prod_{v|p}\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}\Big)=\\&\qquad S\Big(U^p\overline{I}_{\Sigma_p}\overline{I}_{\overline{\Sigma}_p},(\mathrm{Ind}\,\eta_{\Sigma_p}^{-1})^{\mathrm{an}}\otimes_{E'}(\mathrm{Ind}\,\eta^{0\ -1}_{\overline{\Sigma}_p})^{\mathrm{alg}}\Big)^{T(F^+_{\overline{\Sigma}_p})^+}[\psi|_{\mathcal{H}^+}]=\\&\qquad\qquad S\Big(U^p\overline{I}_{\Sigma_p}\overline{I}_{\overline{\Sigma}_p},(\mathrm{Ind}\,\eta_{\Sigma_p}^{-1})^{\mathrm{an}}\otimes_{E'}(\mathrm{Ind}\,\eta_{\overline{\Sigma}_p}^{-1})^{\mathrm{alg}}\Big)^{T(F^+\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_p)^+}[\psi(U^p)].\end{aligned}$$

Démonstration. — La première égalité découle de (38) et les deux suivantes de [**23**, Prop.3.10.3]. □

8. Socle localement analytique et socle de Jacquet-Emerton

On fait le point sur les relations entre les Conjectures 6.1, 6.2 et les Conjectures 6.5, 6.6.

On conserve les notations du § 6 et du § 7. On commence par une proposition sur les caractères de $T(F^+\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_p)$ apparaissant dans $\widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an},\overline{\Sigma}_p\text{-alg}}[\mathfrak{m}_\rho]^{\prod_{v|p}\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}$.

Proposition 8.1. — *Soit* ρ *et* U^p *vérifiant (i) à (iv) du § 6,* $\Sigma_p\subseteq\{v|p\}$ *non vide et* $\eta:T(F^+\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_p)\to E^\times$ *un caractère localement analytique tel que :*

$$\mathrm{Hom}_{T(F^+\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_p)^+}\Big(\eta,\widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an},\overline{\Sigma}_p\text{-alg}}[\mathfrak{m}_\rho]^{\prod_{v|p}\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}\Big)\neq 0.$$

(i) Le caractère η *est de la forme (36) pour* $((w^{\mathrm{alg}}_{\tilde{v}},w_{\tilde{v}}))_{v|p}\in\prod_{v|p}(\mathcal{S}_n\times\mathcal{S}_n)$ *tel que* $w^{\mathrm{alg}}_{\tilde{v}}=1$ *si* $v\in\overline{\Sigma}_p$*.*
(ii) On a :

$$\mathrm{Hom}_{T(F^+\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_p)^+}\Big(\prod_{v|p}\eta(w^{\mathrm{alg}\prime}_{\tilde{v}},w_{\tilde{v}}),\widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an},\overline{\Sigma}_p\text{-alg}}[\mathfrak{m}_\rho]^{\prod_{v|p}\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}\Big)\neq 0$$

pour tout $(w^{\mathrm{alg}\prime}_{\tilde{v}})_{v|p}\in\prod_{v|p}\mathcal{S}_n$ *tel que* $w^{\mathrm{alg}\prime}_{\tilde{v}}\leq w^{\mathrm{alg}}_{\tilde{v}}\ \forall\ v|p$*.*

Démonstration. — (i) La preuve est basée sur un argument que m'a signalé Bergdall (cf. [**3**]). Montrons d'abord que si $\mathrm{Hom}_{T(F^+\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_p)^+}\big(\eta,\widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho]^{\prod_{v|p}\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}\big)\neq 0$ (sans "$\overline{\Sigma}_p$-alg") alors η est de la forme (36) pour $((w^{\mathrm{alg}}_{\tilde{v}},w_{\tilde{v}}))_{v|p}\in\prod_{v|p}(\mathcal{S}_n\times\mathcal{S}_n)$. On utilise la variété de Hecke $\mathcal{E}$ du § 7 associée à U^p et $\Sigma_p\stackrel{\text{déf}}{=}\{v|p\}$ (il n'y a donc pas de $\eta^0_{\overline{\Sigma}_p}$). Soit $\psi_\rho:\mathbb{T}(U^p)\twoheadrightarrow\mathbb{T}(U^p)/\mathfrak{m}_\rho=E$, alors par la propriété (vi) du § 7 on a $(\psi_\rho,\eta)\in\mathcal{E}(E)$. On écrit $\eta=\prod_{v|p}\eta_{\tilde{v}}$, par [**1**, Lem.7.5.12] il existe pour tout

$v|p$ une permutation $w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}} \in \mathcal{S}_n$ et un caractère lisse $\pi_{\widetilde{v}} : T(F_v^+) \to E^\times$ tels que $\eta_{\widetilde{v}} = (\chi_{w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}\cdot\lambda_{\widetilde{v}}}\pi_{\widetilde{v}})\varepsilon^{n-1}\circ\det$. On a vu au § 7 (cf. (41)) que la représentation locale $\rho_{\widetilde{v}}$ est alors telle que $D_{\mathrm{rig}}(\rho_{\widetilde{v}})$ admet une triangulation donnée par les paramètres ordonnés vus comme caractères de $T(F_v^+) = T(\mathbb{Q}_p)$:

$$\mathrm{diag}(x_1,\cdots,x_n) \longmapsto (\chi_{\widetilde{v}}\eta_{\widetilde{v}})(\mathrm{diag}(x_1,\cdots,x_n))\big(\varepsilon(x_2)\cdots\varepsilon^{n-1}(x_n)\big)^{-1} = (\chi_{\widetilde{v}}\chi_{w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}\cdot\lambda_{\widetilde{v}}}\pi_{\widetilde{v}}\varepsilon^{n-1}\circ\det)(\mathrm{diag}(x_1,\cdots,x_n))\big(\varepsilon(x_2)\cdots\varepsilon^{n-1}(x_n)\big)^{-1}$$

où $\chi_{\widetilde{v}}$ est un caractère algébrique de $T(\mathbb{Q}_p)$. Par le Lemme 6.4 et (33), on déduit qu'il existe $w_{\widetilde{v}} \in \mathcal{S}_n$ tel que $\pi_{B,w_{\widetilde{v}}}\pi_{\widetilde{v}}^{-1}$ est algébrique, et donc trivial puisque c'est un caractère lisse.

Soit maintenant η comme dans l'énoncé, donc en particulier de la forme (36) par ce que l'on vient de montrer, $\eta_{\Sigma_p} \overset{\text{déf}}{=} \prod_{v\in\Sigma_p}\eta(w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}, w_{\widetilde{v}})$ et $\eta_{\overline{\Sigma}_p} \overset{\text{déf}}{=} \prod_{v\in\overline{\Sigma}_p}\eta(w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}, w_{\widetilde{v}})$. On a par hypothèse :

$$\mathrm{Hom}_{\prod_{v\in\Sigma_p}T(\mathbb{Q}_p)^+}\Big(\eta_{\Sigma_p}, \mathrm{Hom}_{\prod_{v\in\overline{\Sigma}_p}T(\mathbb{Q}_p)^+}\big(\eta_{\overline{\Sigma}_p}, \widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an},\overline{\Sigma}_p\text{-alg}}[\mathfrak{m}_\rho]^{\prod_{v\in\overline{\Sigma}_p}\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}\big)^{\prod_{v\in\Sigma_p}\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}\Big) \neq 0$$

et donc *a fortiori* $\mathrm{Hom}_{\prod_{v\in\overline{\Sigma}_p}T(\mathbb{Q}_p)^+}\big(\eta_{\overline{\Sigma}_p}, \widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an},\overline{\Sigma}_p\text{-alg}}[\mathfrak{m}_\rho]^{\prod_{v\in\overline{\Sigma}_p}\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}\big) \neq 0$. Comme on est dans $\widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an},\overline{\Sigma}_p\text{-alg}}$, la "partie algébrique" de $\eta_{\overline{\Sigma}_p}$, où de manière équivalente de $\eta_{\overline{\Sigma}_p}|_{T^0_{\overline{\Sigma}_p}}$, c'est-à-dire $\prod_{v\in\overline{\Sigma}_p}\chi_{w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}\cdot\lambda_{\widetilde{v}}}$ (à torsion près), doit correspondre uniquement à des poids dominants (rappelons que l'action de $T^0_{\overline{\Sigma}_p}$ sur $\big(\widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an},\overline{\Sigma}_p\text{-alg}}\big)^{\prod_{v\in\overline{\Sigma}_p}\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}$ est directement induite par son action sur $\widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an},\overline{\Sigma}_p\text{-alg}}$). Autrement dit on a $w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}} = 1$ si $v \in \overline{\Sigma}_p$.

(ii) Soit $\eta_{\Sigma_p} \overset{\text{déf}}{=} \prod_{v\in\Sigma_p}\eta(w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}, w_{\widetilde{v}})$, $\eta'_{\Sigma_p} \overset{\text{déf}}{=} \prod_{v\in\Sigma_p}\eta(w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}\prime}, w_{\widetilde{v}})$ et $\eta_{\overline{\Sigma}_p} \overset{\text{déf}}{=} \prod_{v\in\overline{\Sigma}_p}\eta(1, w_{\widetilde{v}})$. Par la Proposition 7.2, il suffit de montrer que l'espace propre généralisé :

$$S\Big(U^p\overline{I}_{\Sigma_p}\overline{I}_{\overline{\Sigma}_p}, (\mathrm{Ind}\,\eta_{\Sigma_p}'^{-1})^{\mathrm{an}}\otimes_E(\mathrm{Ind}\,\eta_{\overline{\Sigma}_p}^{-1})^{\mathrm{alg}}\Big)\{\mathfrak{m}_\rho, T(F^+\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_p)^+ = 1\}$$

est non nul pour $(w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}\prime})_{v|p}$ comme dans l'énoncé. Comme $w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}\prime} \leq w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}$, par [**19**, Rem.5.1], [**19**, Cor.5.2] et le (ii) du Théorème 2.2 appliqués au groupe réductif $\prod_{v\in\Sigma_p}\mathrm{GL}_n$, on a un morphisme $\mathrm{GL}_n(F^+_{\Sigma_p})$-équivariant *surjectif*:

$$\Big(\mathrm{Ind}_{\overline{B}(F^+_{\Sigma_p})}^{\mathrm{GL}_n(F^+_{\Sigma_p})}\eta'^{-1}_{\Sigma_p}\Big)^{\mathrm{an}} \twoheadrightarrow \Big(\mathrm{Ind}_{\overline{B}(F^+_{\Sigma_p})}^{\mathrm{GL}_n(F^+_{\Sigma_p})}\eta^{-1}_{\Sigma_p}\Big)^{\mathrm{an}}.$$

Par [**20**, Lem.28] (et le fait que si $\oplus_w f_w : \oplus_w I'_w \to \oplus_w I_w$ est surjectif alors chaque $f_w : I'_w \to I_w$ l'est), on en déduit en particulier un morphisme M_{Σ_p}-équivariant surjectif $(\mathrm{Ind}\,\eta'^{-1}_{\Sigma_p})^{\mathrm{an}} \twoheadrightarrow (\mathrm{Ind}\,\eta^{-1}_{\Sigma_p})^{\mathrm{an}}$, d'où un morphisme encore surjectif :

$$S\Big(U^p\overline{I}_{\Sigma_p}\overline{I}_{\overline{\Sigma}_p}, (\mathrm{Ind}\,\eta'^{-1}_{\Sigma_p})^{\mathrm{an}} \otimes_E (\mathrm{Ind}\,\eta_{\overline{\Sigma}_p}^{-1})^{\mathrm{alg}}\Big) \twoheadrightarrow \\ S\Big(U^p\overline{I}_{\Sigma_p}\overline{I}_{\overline{\Sigma}_p}, (\mathrm{Ind}\,\eta^{-1}_{\Sigma_p})^{\mathrm{an}} \otimes_E (\mathrm{Ind}\,\eta_{\overline{\Sigma}_p}^{-1})^{\mathrm{alg}}\Big)$$

par exactitude des foncteurs $\cdot \otimes_E (\mathrm{Ind}\,\eta_{\overline{\Sigma}_p}^{-1})^{\mathrm{alg}}$ et $S\big(U^p\overline{I}_{\Sigma_p}\overline{I}_{\overline{\Sigma}_p}, \cdot\big)$ (pour ce dernier, c'est un résultat classique). L'algèbre $T(F^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p)^+$ contenant des opérateurs dont l'action sur les espaces ci-dessus est compacte, on en déduit aussi une surjection sur les espaces propres généralisés obtenus en appliquant $\{\mathfrak{m}_\rho, T(F^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p)^+ = 1\}$. Comme par hypothèse l'espace propre généralisé pour η_{Σ_p} est non nul, il en est de même pour η'_{Σ_p}. □

Corollaire 8.2. — *Les Conjectures 6.5 et 6.6 sont équivalentes.*

Démonstration. — Il est clair que la Conjecture 6.6 implique la Conjecture 6.5. La réciproque découle du (i) de la Proposition 8.1. □

Remarque 8.3. — (i) En particulier, pour montrer le sens $\Leftarrow$ dans la Conjecture 6.6 il suffit de montrer (35) pour le caractère $\prod_{v\in\Sigma_p}\eta(w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}(w_{\widetilde{v}}), w_{\widetilde{v}})\prod_{v\in\overline{\Sigma}_p}\eta(1, w_{\widetilde{v}})$.
(ii) On ne dispose pas d'un analogue du (ii) de la Proposition 8.1 lorsque l'on remplace T par G et $\eta(w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}'}, w_{\widetilde{v}})$ par $C(w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}'}, w_{\widetilde{v}})(\varepsilon^{n-1})$ même si tous les caractères $\eta(w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}'}, w_{\widetilde{v}})$ sont bien là pour $w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}'} \leq w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}$. Mais en utilisant le Théorème 4.3 et en étudiant la structure des représentations $\mathcal{F}_P^G\big((U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{p})}W)^\vee, \pi_P\big)$ (qui devrait exactement refléter la structure du module de Verma $U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{p})}W$ pour π_P suffisamment générique), on devrait pouvoir montrer que les constituants $C(w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}'}, w_{\widetilde{v}})(\varepsilon^{n-1})$ qui ne sont pas en sous-objet de $\widehat{S}(U^p, E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho]$ apparaissent alors forcément en sous-quotient.

Proposition 8.4. — *(i) La Conjecture 6.1 implique la Conjecture 6.5.*
(ii) Si la Conjecture 6.5 est vraie, alors la condition $w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}} \leq w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}(w_{\widetilde{v}})$ est nécessaire dans l'énoncé 6.1.
(iii) Supposons $\lg(w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}(w_{\widetilde{v}})) \leq 1$ pour tout $v|p$, alors la Conjecture 6.5 implique la Conjecture 6.1.

Démonstration. — (i) Comme $C(w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}, w_{\widetilde{v}})$ est une représentation localement algébrique de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ si et seulement si $w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}} = 1$, la Conjecture 6.1 implique que l'on a :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_n(F^+\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_p)}\Big(\widehat{\otimes}_{v|p}C(w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}, w_{\widetilde{v}})(\varepsilon^{n-1}), \widehat{S}(U^p, E)^{\mathrm{an},\overline{\Sigma}_p\text{-}\mathrm{alg}}[\mathfrak{m}_\rho]\Big) \neq 0 \tag{43}$$

si et seulement si $w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}} \leq w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}(w_{\widetilde{v}})$ pour tout $v \in \Sigma_p$ et $w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}} = 1$ pour tout $v \in \overline{\Sigma}_p$. Par [**6**, Cor.3.4] on obtient la non nullité (35) pour tous les caractères $\prod_{v|p}\eta(w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}, w_{\widetilde{v}})$ de la Conjecture 6.5. Supposons maintenant que l'on a (35) pour $((w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}, w_{\widetilde{v}}))_{v|p} \in$

$\prod_{v|p}(\mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_n)$ tel que $w_{\widetilde{v}_0}^{\rm alg} \nleq w_{\widetilde{v}_0}^{\rm alg}(w_{\widetilde{v}_0})$ pour un $v_0 \in \Sigma_p$ ou $w_{\widetilde{v}_0}^{\rm alg} \neq 1$ pour un $v_0 \in \overline{\Sigma}_p$. Par le Corollaire 4.6 appliqué à la représentation très fortement admissible $\Pi = \widehat{S}(U^p, E)^{{\rm an},\overline{\Sigma}_p\text{-}{\rm alg}}$ et à $\chi_\lambda^{-1}\pi_B = \prod_{v|p}\eta(w_{\widetilde{v}}^{\rm alg}, w_{\widetilde{v}})$ (en remarquant que $\chi_{w_{\widetilde{v}}^{\rm alg}\cdot\lambda_{\widetilde{v}}} = \chi^{-1}_{w_{\widetilde{v}}^{\rm alg}\cdot(-\lambda_{\widetilde{v}})}$, cf. (33)) et par [**19**, Cor.5.2], on a (32) pour un uplet $((w_{\widetilde{v}}^{\rm alg\prime}, w_{\widetilde{v}}))_{v|p} \in \prod_{v|p}(\mathcal{S}_n\times\mathcal{S}_n)$ tel que $w_{\widetilde{v}}^{\rm alg} \leq w_{\widetilde{v}}^{\rm alg\prime}$ pour tout $v|p$. En particulier, on a $w_{\widetilde{v}_0}^{\rm alg\prime} \nleq w_{\widetilde{v}_0}^{\rm alg}(w_{\widetilde{v}_0})$ (sinon, on en déduirait $w_{\widetilde{v}_0}^{\rm alg} \leq w_{\widetilde{v}_0}^{\rm alg\prime} \leq w_{\widetilde{v}_0}^{\rm alg}(w_{\widetilde{v}_0})$) ou $w_{\widetilde{v}_0}^{\rm alg\prime} \neq 1$. Mais ceci contredit l'énoncé 6.1.

(ii) Cela découle de [**6**, Cor.3.4] comme au début du (i).

(iii) Vu l'hypothèse, il suffit de montrer que pour *tout* sous-ensemble $\Sigma_p \subseteq \{v|p\}$ on a :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_n(F^+\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_p)}\Big(\big(\widehat{\otimes}_{v\in\Sigma_p}C(w_{\widetilde{v}}^{\rm alg}(w_{\widetilde{v}}), w_{\widetilde{v}})(\varepsilon^{n-1})\big)\otimes_E \big(\otimes_{v\in\overline{\Sigma}_p}C(1, w_{\widetilde{v}})(\varepsilon^{n-1})\big), \widehat{S}(U^p, E)^{{\rm an},\overline{\Sigma}_p\text{-}{\rm alg}}[\mathfrak{m}_\rho]\Big) \neq 0.$$

On peut supposer $\Sigma_p \neq \emptyset$ (cf. le (ii) de la Remarque 6.7 si $\Sigma_p = \emptyset$). Mais cela résulte encore du Corollaire 4.6 appliqué à $\Pi = \widehat{S}(U^p, E)^{{\rm an},\overline{\Sigma}_p\text{-}{\rm alg}}$ et $\chi_\lambda^{-1}\pi_B = \prod_{v\in\Sigma_p}\eta(w_{\widetilde{v}}^{\rm alg}(w_{\widetilde{v}}), w_{\widetilde{v}})\prod_{v\in\overline{\Sigma}_p}\eta(1, w_{\widetilde{v}})$ et de [**19**, Cor.5.2] combinés avec la condition nécessaire en (ii). □

Remarque 8.5. — (i) Si Π est une représentation localement analytique de $\mathrm{GL}_n(F^+\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_p)$ sur E très fortement admissible au sens de la Définition 4.1 et si $((w_{\widetilde{v}}^{\rm alg}, w_{\widetilde{v}}))_{v|p} \in \prod_{v|p}(\mathcal{S}_n\times\mathcal{S}_n)$ est tel que :

$$\mathrm{Hom}_{T(F^+\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_p)^+}\Big(\prod_{v|p}\eta(w_{\widetilde{v}}^{\rm alg}, w_{\widetilde{v}}), \Pi^{\prod_{v|p}\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}\Big) \neq 0,$$

rappelons qu'il n'est pas vrai en général que $\otimes_{v|p}C(w_{\widetilde{v}}^{\rm alg}, w_{\widetilde{v}})(\varepsilon^{n-1})$ est dans le socle de Π (voir la fin du § 4 ou le (ii) de la Remarque 8.3). Ainsi la théorie des représentations seule ne permet pas de déduire l'énoncé 6.1 de l'énoncé 6.5, sauf si l'on dispose d'hypothèses supplémentaires fortes comme dans le (iii) de la Proposition 8.4.

(ii) Il devrait être par contre vrai que la Conjecture 6.1 implique la Conjecture 6.2 (et donc que les deux conjectures sont équivalentes). Il faudrait pour cela une description des sous-quotients irréductibles d'une série principale localement analytique *arbitraire* analogue à celle fournie par le Théorème 2.2 (dans le cas où le caractère induisant du tore est localement algébrique). Une telle description ne semble pas écrite pour l'instant malgré les résultats partiels de [**26**].

Pour résumer, on a donc le schéma d'implications :

$$\text{Conjecture 6.2} \Longrightarrow \text{Conjecture 6.1} \Longrightarrow \text{Conjecture 6.5} \Longleftrightarrow \text{Conjecture 6.6}$$

avec une réciproque “très partielle” Conjecture 6.5 $\dashrightarrow$ Conjecture 6.1.

9. Quelques résultats

On montre quelques cas partiels de la Conjecture 6.1 via la Conjecture 6.5.

On conserve les notations des §§ 6, 7 et 8. On rappelle que $\mathcal{S}_n$ est muni de l'ordre de Bruhat et on munit $X(T) \cong \mathbb{Z}^n$ de la relation d'ordre partielle $\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_n) \leq \mu' = (\mu'_1, \cdots, \mu'_n)$ si et seulement si $\sum_{j=1}^{i} \mu_j \leq \sum_{j=1}^{i} \mu'_j$ pour $i \in \{1, \cdots, n-1\}$ et $\sum_{j=1}^{n} \mu_j = \sum_{j=1}^{n} \mu'_j$. On rappelle aussi qu'un poids *anti*-dominant de $X(T)$ (par rapport à $\overline{B}$) est un uplet $(\mu_1, \cdots, \mu_n) \in \mathbb{Z}^n$ tel que $\mu_i \leq \mu_{i+1}$ pour $1 \leq i \leq n-1$.

Théorème 9.1 **([17])**. — *Soit $w, w' \in \mathcal{S}_n$, on a $w \leq w'$ si et seulement si $w(\mu) \leq w'(\mu)$ pour tout $\mu \in X(T)$ anti-dominant (voir § 6 pour $w(\mu)$).*

Attention que la direction $w(\mu) \leq w'(\mu)\ \forall\ \mu$ anti-dominant $\Rightarrow w \leq w'$ n'est valable que parce que l'on travaille avec GL_n (mais la réciproque est vraie pour tout groupe réductif déployé).

On fixe $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \to \mathrm{GL}_n(E)$ continue satisfaisant les points (i), (ii), (iii) du § 6 et on suppose que ρ provient d'une représentation automorphe de $G(\mathbb{A}_{F^+})$, i.e. il existe un sous-groupe ouvert compact $U^p = \prod_{v\nmid p} U_v$ de $G(\mathbb{A}_{F^+}^{\infty,p})$ tel que $\widehat{S}(U^p, E)^{\mathrm{alg}}[\mathfrak{m}_\rho] \neq 0$. On fixe un tel sous-groupe ouvert compact et on considère les triplets :

$$(U^p, \Sigma_p, \eta^0_{(w_{\widetilde{v}})_{\overline{\Sigma}_p}})$$

où $\Sigma_p \subseteq \{v|p\}$ est non vide, $(w_{\widetilde{v}})_{\overline{\Sigma}_p} \in \prod_{\overline{\Sigma}_p} \mathcal{S}_n$ et $\eta^0_{(w_{\widetilde{v}})_{\overline{\Sigma}_p}} \overset{\text{déf}}{=} \big(\prod_{v\in\overline{\Sigma}_p} \eta(1, w_{\widetilde{v}})\big)|_{T^0_{\overline{\Sigma}_p}}$ ($= \eta^0_{\overline{\Sigma}_p}$ avec la notation du § 7), ainsi que les variétés de Hecke $\mathcal{E}$ associées à $(U^p, \Sigma_p, \eta^0_{(w_{\widetilde{v}})_{\overline{\Sigma}_p}})$ au § 7. On étend $\eta^0_{(w_{\widetilde{v}})_{\overline{\Sigma}_p}}$ à $T(F^+_{\overline{\Sigma}_p})$ comme au § 7 et on pose $\eta_{(w_{\widetilde{v}})_{\overline{\Sigma}_p}} \overset{\text{déf}}{=} \prod_{v\in\overline{\Sigma}_p} \eta(1, w_{\widetilde{v}})$ et :

$$\psi_{(w_{\widetilde{v}})_{\overline{\Sigma}_p}} \overset{\text{déf}}{=} (\eta^0_{(w_{\widetilde{v}})_{\overline{\Sigma}_p}})^{-1}\eta_{(w_{\widetilde{v}})_{\overline{\Sigma}_p}} : T(F^+_{\overline{\Sigma}_p})/T^0_{\overline{\Sigma}_p} \longrightarrow E^\times.$$

On a donc en particulier :

$$J_{\overline{B}(F^+_{\overline{\Sigma}_p})}\big(\widehat{S}(U^p, E)^{\mathrm{alg}}\big)[\eta^0_{(w_{\widetilde{v}})_{\overline{\Sigma}_p}}][\psi_{(w_{\widetilde{v}})_{\overline{\Sigma}_p}}] = \mathrm{Hom}_{T(F^+_{\overline{\Sigma}_p})}\Big(\eta_{(w_{\widetilde{v}})_{\overline{\Sigma}_p}}, J_{\overline{B}(F^+_{\overline{\Sigma}_p})}\big(\widehat{S}(U^p, E)^{\mathrm{alg}}\big)\Big) \neq 0$$

et on note :

$$\psi_{\rho,(w_{\widetilde{v}})_{\overline{\Sigma}_p}} \overset{\text{déf}}{=} \Big(\mathbb{T}(U^p) \twoheadrightarrow \mathbb{T}(U^p)/\mathfrak{m}_\rho = E, \psi_{(w_{\widetilde{v}})_{\overline{\Sigma}_p}}\Big) \in \mathcal{H}(E).$$

Si $(\psi_{\rho,(w_{\widetilde{v}})_{\overline{\Sigma}_p}}, \eta_{\Sigma_p}) \in \mathcal{E}(\overline{\mathbb{Q}_p})$, on sait par la Proposition 8.1 que η_{Σ_p} est de la forme :

$$\eta_{\Sigma_p} = \prod_{v\in\Sigma_p} \eta(w^{\mathrm{alg}}_{\widetilde{v}}, w_{\widetilde{v}}) \tag{44}$$

pour $((w^{\mathrm{alg}}_{\widetilde{v}}, w_{\widetilde{v}}))_{\Sigma_p} \in \prod_{v\in\Sigma_p}(\mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_n)$ et par la Conjecture 6.6 les η_{Σ_p} possibles devraient être exactement tous ceux de la forme (44) avec $w^{\mathrm{alg}}_{\widetilde{v}} \leq w^{\mathrm{alg}}_{\widetilde{v}}(w_{\widetilde{v}})$. Notons que l'on dispose au moins de tous les points classiques :

$$\Big(\psi_{\rho,(w_{\widetilde{v}})_{\overline{\Sigma}_p}}, \prod_{v\in\Sigma_p}\eta(1,w_{\widetilde{v}})\Big)\in\mathcal{E}(E) \tag{45}$$

pour $(w_{\widetilde{v}})_{\Sigma_p}$ parcourant $\prod_{v\in\Sigma_p}\mathcal{S}_n$.

Pour $v|p$, on note $h_{\widetilde{v}}\overset{\text{déf}}{=}(h_{1,\widetilde{v}},\cdots,h_{n,\widetilde{v}})$ vu comme poids anti-dominant. La proposition suivante, un corollaire du résultat principal de [**22**], n'est pas vraiment nouvelle (voir par exemple [**3**]) mais on en donne une "ré-interprétation".

Proposition 9.2. — *Soit* $(\psi_{\rho,(w_{\widetilde{v}})_{\overline{\Sigma}_p}},\eta_{\Sigma_p})\in\mathcal{E}(\overline{\mathbb{Q}_p})$ *avec* η_{Σ_p} *comme en (44). Pour tout* $v\in\Sigma_p$*, on a :*

$$w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}(h_{\widetilde{v}})\leq w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}(w_{\widetilde{v}})(h_{\widetilde{v}}). \tag{46}$$

En particulier, si $n\leq 3$ *ou si* $\lg(w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}(w_{\widetilde{v}}))\leq 2$*, on a* $w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}\leq w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}(w_{\widetilde{v}})$.

Démonstration. — Soit $x\overset{\text{déf}}{=}(\psi_{\rho,(w_{\widetilde{v}})_{\overline{\Sigma}_p}},\eta_{\Sigma_p})$ et ρ_Ω comme en (40) pour un affinoïde Ω contenant x. Soit $v\in\Sigma_p$, $\rho_{\Omega,\widetilde{v}}\overset{\text{déf}}{=}\rho_\Omega|_{\mathrm{Gal}(\overline{F}_{\widetilde{v}}/F_{\widetilde{v}})}$ et $\mathcal{T}_v\overset{\text{déf}}{=}\mathrm{Hom}_{\mathrm{gr}}(T(F_v^+),\mathbb{G}_{\mathrm{m}/E}^{\mathrm{rig}})\cong\mathrm{Hom}_{\mathrm{gr}}(T(\mathbb{Q}_p),\mathbb{G}_{\mathrm{m}/E}^{\mathrm{rig}})$. La projection $\mathcal{T}\to\mathcal{T}_v$ composée à droite avec $\nu|_\Omega$ (cf. § 7) donne un élément dans $\mathcal{T}_v(\Omega)$:

$$\mathrm{diag}(x_1,\cdots,x_n)\longmapsto\eta_{1,\widetilde{v}}(x_1)\cdots\eta_{n,\widetilde{v}}(x_n)\in\mathcal{O}(\Omega)^\times$$

où les $\eta_{i,\widetilde{v}}:\mathbb{Q}_p^\times\to\mathcal{O}(\Omega)^\times$ sont des caractères continus. On note $\delta_{i,\widetilde{v}}\overset{\text{déf}}{=}\eta_{i,\widetilde{v}}\varepsilon^{-i+1}$. Quitte à remplacer Ω par une de ses composantes irréductibles contenant x, il résulte de (41) appliqué aux points classiques suffisamment génériques de $Z\cap\Omega(\overline{\mathbb{Q}_p})$ (Zariski-denses par la propriété (viii) du § 7) que le (φ,Γ)-module $D_{\mathrm{rig}}(\rho_{\Omega,\widetilde{v}})$ ([**22**, Th.2.2.17]) sur l'anneau de Robba $\mathcal{R}_\Omega$ à coefficients dans $\mathcal{O}(\Omega)$ (cf. [**21**] ou [**2**, § 1.2]) est un *"densely pointwise strictly trianguline* (φ,Γ)*-module" relativement aux paramètres ordonnés* $\delta_{1,\widetilde{v}},\cdots,\delta_{n,\widetilde{v}}$ au sens de [**22**, Def.6.3.2]. Soit $m\in\{1,\cdots,n\}$ et choisissons une numérotation $I_1,I_2,\cdots,I_{\binom{n}{m}}$ sur les parties à m éléments de $\{1,\cdots,n\}$ telle que $\sum_{i\in I_j}i\leq\sum_{i\in I_{j+1}}i$ (on a donc toujours $I_1=\{1,\cdots,m\}$ et $I_{\binom{n}{m}}=\{n-m+1,\cdots,n\}$). Soit $\delta_{I_j,\widetilde{v}}\overset{\text{déf}}{=}\prod_{i\in I_j}\delta_{i,\widetilde{v}}:\mathbb{Q}_p^\times\to\mathcal{O}(\Omega)^\times$, en utilisant encore la propriété (viii) du § 7, on voit que les points classiques $y\in Z\cap\Omega(\overline{\mathbb{Q}_p})$ tels que $D_{\mathrm{rig}}(\wedge_{E(y)}^m\rho_{y,\widetilde{v}})$ est *strictement triangulin de paramètres ordonnés les spécialisations* $\delta_{I_1,\widetilde{v},y},\cdots,\delta_{I_{\binom{n}{m}},\widetilde{v},y}$ au sens de [**22**, Def.6.3.1] ($E(y)$ est le corps résiduel de $\mathcal{E}$ en y) sont encore Zariski-denses dans Ω. En particulier $D_{\mathrm{rig}}(\wedge_{\mathcal{O}(\Omega)}^m\rho_{\Omega,\widetilde{v}})$ est aussi un "densely pointwise strictly trianguline (φ,Γ)-module" relativement aux paramètres ordonnés $\delta_{I_1,\widetilde{v}},\cdots,\delta_{I_{\binom{n}{m}},\widetilde{v}}$. On peut donc appliquer [**22**, Cor.6.3.10(2')] à $D_{\mathrm{rig}}(\wedge_{\mathcal{O}(\Omega)}^m\rho_{\Omega,\widetilde{v}})$ et en déduire avec [**22**, Cor.6.2.9] comme dans [**22**, Ex.6.3.14] et en utilisant le Lemme 6.4 que la spécialisation de $\delta_{I_1,\widetilde{v}}$

au point x est de la forme :

$$z \in \mathbb{Q}_p^\times \longmapsto z^M z^{-\sum_{i=1}^m h_{(w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}(w_{\widetilde{v}}))^{-1}(i),\widetilde{v}}} \prod_{i=1}^m \pi_{w_{\widetilde{v}}^{-1}(i),\widetilde{v}}(z)$$

pour un entier $M \geq 0$. Or par (44) et (34) cette spécialisation est $z \longmapsto z^{\sum_{i=1}^m -h_{(w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}})^{-1}(i),\widetilde{v}}} \prod_{i=1}^m \pi_{w_{\widetilde{v}}^{-1}(i),\widetilde{v}}(z)$. On en déduit :

$$M - \sum_{i=1}^m h_{(w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}(w_{\widetilde{v}}))^{-1}(i),\widetilde{v}} = -\sum_{i=1}^m h_{(w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}})^{-1}(i),\widetilde{v}}$$

qui implique (46) puisque $M \geq 0$.
En général, il ne suffit pas d'avoir l'inégalité $w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}(h_{\widetilde{v}}) \leq w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}(w_{\widetilde{v}})(h_{\widetilde{v}})$ pour en déduire $w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}} \leq w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}(w_{\widetilde{v}})$ (il faudrait avoir cette inégalité pour *tout* poids anti-dominant comme dans le Théorème 9.1), mais cela suffit, en utilisant que $h_{i,\widetilde{v}} < h_{i+1,\widetilde{v}}$ pour tout i, lorsque $n \leq 3$ ou lorsque $\lg(w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}(w_{\widetilde{v}})) \leq 2$ (on laisse cet exercice facile au lecteur). $\square$

Théorème 9.3. — *Si l'on a :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_n(F^+\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_p)}\Big(\widehat{\otimes}_{v|p} C(w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}, w_{\widetilde{v}})(\varepsilon^{n-1}), \widehat{S}(U^p,E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho]\Big) \neq 0$$

alors $w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}(h_{\widetilde{v}}) \leq w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}(w_{\widetilde{v}})(h_{\widetilde{v}})$ *pour tout* $v|p$. *Si de plus* $n \leq 3$ *ou* $\lg(w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}(w_{\widetilde{v}})) \leq 2$, *alors* $w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}} \leq w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}(w_{\widetilde{v}})$.

Démonstration. — Cela découle de [**6**, Cor.3.4], de la propriété (vi) du § 7 pour $\Sigma_p = \{v|p\}$ et de la Proposition 9.2 (pour $\Sigma_p = \{v|p\}$). $\square$

Remarque 9.4. — (i) On peut déduire $w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}} \leq w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}(w_{\widetilde{v}})$ dans quelques autres cas, par exemple lorsque $w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}(w_{\widetilde{v}})$ est un produit de réflexions simples qui commutent toutes entre elles, ou lorsque $w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}(w_{\widetilde{v}})$ a une expression réduite ne faisant pas intervenir plus de deux réflexions simples, ou encore lorsque $w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}(w_{\widetilde{v}}) = w_0$ (cette liste n'est pas exhaustive).
(ii) L'inégalité $w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}(h_{\widetilde{v}}) \leq w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}(w_{\widetilde{v}})(h_{\widetilde{v}})$ donne une condition sur $w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}, w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}(w_{\widetilde{v}})$ qui, en général, dépend des valeurs des poids de Hodge-Tate $h_{\widetilde{v}}$, ce qui ne semble pas naturel. Cette condition ne devrait donc pas être optimale, et il apparaît plus naturel de conjecturer la condition plus "intrinsèque" (et plus forte) $w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}} \leq w_{\widetilde{v}}^{\mathrm{alg}}(w_{\widetilde{v}})$ (cf. Théorème 9.1).

Si $x = (\psi, \eta_{\Sigma_p}) = (\psi(U^p), \psi_{\overline{\Sigma}_p}, \eta_{\Sigma_p}) \in \mathcal{E}(E')$, on note $\delta^{\mathrm{an}}(x) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ la dimension (finie) du sous-espace propre *généralisé* :

$$S\Big(U^p \overline{I}_{\Sigma_p} \overline{I}_{\overline{\Sigma}_p}, (\mathrm{Ind}\, \eta_{\Sigma_p}^{-1})^{\mathrm{an}} \otimes_{E'} (\mathrm{Ind}\, \eta^{0\ -1}_{(w_{\widetilde{v}})_{\overline{\Sigma}_p}})^{\mathrm{alg}}\Big)\{\mathcal{H}^+ = \psi, T(F_{\Sigma_p}^+)^+ = 1\}$$

de $S\big(U^p\overline{I}_{\Sigma_p}\overline{I}_{\overline{\Sigma}_p},(\mathrm{Ind}\,\eta_{\Sigma_p}^{-1})^{\mathrm{an}}\otimes_{E'}(\mathrm{Ind}\,\eta^{0}_{(w_{\widetilde{v}})_{\overline{\Sigma}_p}}{}^{-1})^{\mathrm{alg}}\big)$ pour la valeur propre $(\psi,1)$ (cf. Proposition 7.2) et de même $\delta^{\mathrm{alg}}(x)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ celle du sous-espace propre généralisé :

$$S\big(U^p\overline{I}_{\Sigma_p}\overline{I}_{\overline{\Sigma}_p},(\mathrm{Ind}\,\eta_{\Sigma_p}^{-1})^{\mathrm{alg}}\otimes_{E'}(\mathrm{Ind}(\eta^{0}_{(w_{\widetilde{v}})_{\overline{\Sigma}_p}}{}^{-1})^{\mathrm{alg}}\big)\{\mathcal{H}^+=\psi,T(F_{\Sigma_p}^+)^+=1\}$$

de $S\big(U^p\overline{I}_{\Sigma_p}\overline{I}_{\overline{\Sigma}_p},(\mathrm{Ind}\,\eta_{\Sigma_p}^{-1})^{\mathrm{alg}}\otimes_{E'}(\mathrm{Ind}\,\eta^{0}_{(w_{\widetilde{v}})_{\overline{\Sigma}_p}}{}^{-1})^{\mathrm{alg}}\big)$. On a bien sûr $\delta^{\mathrm{alg}}(x)\leq\delta^{\mathrm{an}}(x)$ et $\delta^{\mathrm{alg}}(x)>0$ si x est l'un des points classiques (45).

Proposition 9.5. — *Soit $(w_{\widetilde{v}})_{v|p}\in\prod_{v|p}\mathcal{S}_n$, v_0 une place de F^+ divisant p, $\Sigma_p=\{v_0\}$, x_{cl} le point classique $\big(\psi_{\rho,(w_{\widetilde{v}})_{\overline{\{v_0\}}}},\eta(1,w_{\widetilde{v}_0})\big)\in\mathcal{E}(E)$ et supposons :*

$$\delta^{\mathrm{alg}}(x_{\mathrm{cl}})<\delta^{\mathrm{an}}(x_{\mathrm{cl}}).$$

Alors il existe $w_{\widetilde{v}_0}^{\mathrm{alg}}\in\mathcal{S}_n\backslash\{1\}$ tel que :

$$\big(\psi_{\rho,(w_{\widetilde{v}})_{\overline{\{v_0\}}}},\eta(w_{\widetilde{v}_0}^{\mathrm{alg}\prime},w_{\widetilde{v}_0})\big)\in\mathcal{E}(E)$$

pour tout $w_{\widetilde{v}_0}^{\mathrm{alg}\prime}\leq w_{\widetilde{v}_0}^{\mathrm{alg}}$.

Démonstration. — Par la Proposition 7.2 et le (ii) de la Proposition 8.1, il suffit de montrer qu'il existe une réflexion simple $s_\alpha\in\mathcal{S}_n$ telle que :

$$S\Big(U^p\overline{I}_{\{v_0\}}\overline{I}_{\overline{\{v_0\}}},\big(\mathrm{Ind}\,\eta(s_\alpha,w_{\widetilde{v}_0})^{-1}\big)^{\mathrm{an}}\otimes_E\big(\mathrm{Ind}\,\eta^{0}_{(w_{\widetilde{v}})_{\overline{\{v_0\}}}}{}^{-1}\big)^{\mathrm{alg}}\Big)^{T(F_{v_0}^+)^+}[\psi_{\rho,(w_{\widetilde{v}})_{\overline{\{v_0\}}}}|_{\mathcal{H}^+}]\neq 0$$

c'est-à-dire :

$$S\Big(U^p\overline{I}_{\{v_0\}}\overline{I}_{\overline{\{v_0\}}},\big(\mathrm{Ind}\,\eta(s_\alpha,w_{\widetilde{v}_0})^{-1}\big)^{\mathrm{an}}\otimes_E\big(\mathrm{Ind}\,\eta^{0}_{(w_{\widetilde{v}})_{\overline{\{v_0\}}}}{}^{-1}\big)^{\mathrm{alg}}\Big)\{\mathcal{H}^+=\psi_{\rho,(w_{\widetilde{v}})_{\overline{\{v_0\}}}},\ T(F_{v_0}^+)^+=1\}\neq 0. \tag{47}$$

Or on a une suite exacte courte $M_{\{v_0\}}$-équivariante par [**20**, Th.26] :

$$0\to\big(\mathrm{Ind}\,\eta(1,w_{\widetilde{v}_0})^{-1}\big)^{\mathrm{alg}}\to\big(\mathrm{Ind}\,\eta(1,w_{\widetilde{v}_0})^{-1}\big)^{\mathrm{an}}\to\oplus_\alpha\big(\mathrm{Ind}\,\eta(s_\alpha,w_{\widetilde{v}_0})^{-1}\big)^{\mathrm{an}}$$

où la somme de droite est sur les réflexions simples de $\mathcal{S}_n$. En tensorisant par $\big(\mathrm{Ind}\,\eta^{0}_{(w_{\widetilde{v}})_{\overline{\{v_0\}}}}{}^{-1}\big)^{\mathrm{alg}}$, on en déduit par exactitude du foncteur $S\big(U^p\overline{I}_{\{v_0\}}\overline{I}_{\overline{\{v_0\}}},\cdot\big)$ une suite exacte courte $\mathcal{H}^+\times T(F_{v_0}^+)^+$-équivariante sur les espaces correspondants de forme automorphes de niveau $U^p\overline{I}_{\{v_0\}}\overline{I}_{\overline{\{v_0\}}}$, d'où une suite exacte sur les espaces propres généralisés associés à la valeur propre $(\psi_{\rho,(w_{\widetilde{v}})_{\overline{\{v_0\}}}},1)$. Or l'injection de gauche est stricte puisque $\delta^{\mathrm{alg}}(x_{\mathrm{cl}})<\delta^{\mathrm{an}}(x_{\mathrm{cl}})$, on en déduit donc qu'il existe au moins une réflexion s_α telle que (47) est vrai. □

Dans le lemme suivant, on adopte librement les notations et la terminologie (standard) de [**1**, § 2]. On prendra garde dans ce qui suit à ne pas confondre le ε des nombres duaux $E[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ et le ε du caractère cyclotomique p-adique.

Lemme 9.6. — *Soit D un (φ,Γ)-module (libre de rang fini) sur l'anneau de Robba $\mathcal{R}_{E[\varepsilon]/(\varepsilon^2)}$. On suppose que $\overline{D} \overset{\text{déf}}{=} D/\varepsilon D$ est cristabellin avec des poids de Sen tous distincts. Soit $\iota : \mathcal{R}_{E[\varepsilon]/(\varepsilon^2)} \hookrightarrow D$ une injection de (φ,Γ)-modules sur $\mathcal{R}_{E[\varepsilon]/(\varepsilon^2)}$ (où $\mathcal{R}_{E[\varepsilon]/(\varepsilon^2)}$ à gauche désigne le (φ,Γ)-module trivial), $\overline{D}' \subseteq \overline{D}$ l'image de $\mathcal{R}_{E[\varepsilon]/(\varepsilon^2)}$ par la composée :*

$$\mathcal{R}_{E[\varepsilon]/(\varepsilon^2)} \overset{\iota}{\hookrightarrow} D \twoheadrightarrow \overline{D}$$

(un sous-(φ,Γ)-module trivial de $\overline{D}$ libre de rang 1 sur $\mathcal{R}_E$) et h le poids de Sen de $\overline{D}'^{\mathrm{sat}} \overset{\text{déf}}{=} \overline{D}'[1/t] \cap \overline{D}$. Alors h est un poids de Sen constant de D.

Démonstration. — Rappelons qu'un (φ,Γ)-module sur $\mathcal{R}_E$ est dit cristabellin (resp. cristallin) s'il existe un sous-groupe ouvert Γ' de $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\sqrt[p^\infty]{1})/\mathbb{Q}_p)$ tel que $\dim_E(\overline{D}[1/t])^{\Gamma'} = \mathrm{rg}_{\mathcal{R}_E}\overline{D}$ (resp. $\dim_E(\overline{D}[1/t])^{\Gamma} = \mathrm{rg}_{\mathcal{R}_E}\overline{D}$), cf. aussi [**5**, § 2.5]. Comme $\overline{D}$ a tous ses poids de Sen distincts, notons les $(h_1,\cdots,h_n) \in \mathbb{Z}^n$ où $n \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{rg}_{\mathcal{R}_E}\overline{D}$, il existe une base du $\mathbb{Q}_p(\sqrt[p^\infty]{1}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$-module libre $D_{\mathrm{Sen}}(D)$ telle que la matrice de l'opérateur de Sen dans cette base est de la forme :

$$\mathrm{diag}\Big(\begin{pmatrix} -h_1 & * \\ 0 & -h_1 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} -h_n & * \\ 0 & -h_n \end{pmatrix}\Big) \in M_{2n}(E) \tag{48}$$

(rappelons que le poids de Sen du caractère cyclotomique p-adique est -1 par convention). Alternativement on peut voir cette matrice comme $\mathrm{diag}(-(h_1 + \varepsilon d_1),\cdots,-(h_n+\varepsilon d_n))$ dans $M_n(E[\varepsilon]/(\varepsilon^2))$ pour des $d_i \in E$. Soit $i \in \{1,\cdots,n\}$ tel que $h = h_i$, il faut montrer que le $*$ correspondant dans (48) est nul, i.e. $d_i = 0$. Supposons pour simplifier $\overline{D}$ cristallin. En appliquant le foncteur exact à gauche $D_{\mathrm{cris}}(\cdot) = (\cdot[1/t])^{\Gamma}$ à la suite de morphismes $\mathcal{R}_{E[\varepsilon]/(\varepsilon^2)} \twoheadrightarrow \overline{D}' \hookrightarrow \overline{D}'^{\mathrm{sat}} \hookrightarrow \overline{D}$ on obtient :

$$D_{\mathrm{cris}}(\mathcal{R}_{E[\varepsilon]/(\varepsilon^2)}) \twoheadrightarrow D_{\mathrm{cris}}(\overline{D}') = D_{\mathrm{cris}}(\overline{D}'^{\mathrm{sat}}) \hookrightarrow D_{\mathrm{cris}}(\overline{D})$$

où la première surjection résulte de ce que les deux premiers (φ,Γ)-modules sont triviaux (donc cristallins) et l'isomorphisme central des définitions. Comme la composée se factorise par $D_{\mathrm{cris}}(D) \to D_{\mathrm{cris}}(\overline{D})$, on en déduit que l'image de $D_{\mathrm{cris}}(D)$ dans $D_{\mathrm{cris}}(\overline{D})$ contient $D_{\mathrm{cris}}(\overline{D}'^{\mathrm{sat}})$. Soit $D' \subseteq D$ l'image inverse de $\overline{D}'^{\mathrm{sat}}$ dans D. En appliquant D_{cris} au diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & & & D/D' & \cong & \overline{D}/\overline{D}'^{\mathrm{sat}} & & \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & \overline{D} & \longrightarrow & D & \longrightarrow & \overline{D} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & \overline{D} & \longrightarrow & D' & \longrightarrow & \overline{D}'^{\mathrm{sat}} & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

et en utilisant ce qui précède, on en déduit par une chasse au diagramme facile que $D_{\mathrm{cris}}(D') \to D_{\mathrm{cris}}(\overline{D}'^{\mathrm{sat}})$ est surjectif, d'où :

$$\dim_E D_{\mathrm{cris}}(D') = \dim_E D_{\mathrm{cris}}(\overline{D}) + \dim_E D_{\mathrm{cris}}(\overline{D}'^{\mathrm{sat}}) = \dim_E D_{\mathrm{cris}}(\overline{D}) + 1 = \mathrm{rg}_{\mathcal{R}_E}(D')$$

puisque $\overline{D}$ est cristallin (et donc $\dim_E D_{\mathrm{cris}}(\overline{D}) = \mathrm{rg}_{\mathcal{R}_E}(\overline{D})$), d'où D' cristallin. On a donc en particulier une suite exacte de φ-modules *filtrés* (i.e. avec des suites exactes aussi sur les $\mathrm{Fil}^{\cdot}$) :

$$0 \longrightarrow D_{\mathrm{cris}}(\overline{D}) \longrightarrow D_{\mathrm{cris}}(D') \longrightarrow D_{\mathrm{cris}}(\overline{D}'^{\mathrm{sat}}) \longrightarrow 0.$$

Comme h_i est un saut de la filtration sur $D_{\mathrm{cris}}(\overline{D})$ et sur $D_{\mathrm{cris}}(\overline{D}'^{\mathrm{sat}})$, on voit que la matrice de l'opérateur de Sen dans une base convenable de $D_{\mathrm{Sen}}(D')$ contient en “sous-quotient” $\left(\begin{smallmatrix} -h_i & 0 \\ 0 & -h_i \end{smallmatrix}\right)$, donc il en est de même avec $D_{\mathrm{Sen}}(D)$ qui contient $D_{\mathrm{Sen}}(D')$. Comme $-h_i$ n'apparaît pas ailleurs (puisque les h_j sont tous distincts), cela montre que l'on a forcément $d_i = 0$ lorsque $\overline{D}$ est cristallin. Le cas cristabellin se démontre de manière analogue en remplaçant Γ par un sous-groupe ouvert suffisamment petit $\Gamma' \subset \Gamma$ tel que $\dim_E(\overline{D}[1/t])^{\Gamma'} = \mathrm{rg}_{\mathcal{R}_E}\overline{D}$. □

On note $d(x) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ le degré local en $x \in \mathcal{E}(E')$ de l'application $\kappa : \mathcal{E} \to \mathcal{W}$ (cf. propriété (vii) du § 7) : l'application κ est ramifiée en x si et seulement si $d(x) > 1$. Si $v|p$ et $w_{\widetilde{v}} \in \mathcal{S}_n$, on dit que $\rho_{\widetilde{v}}$ est *fortement* générique pour $w_{\widetilde{v}}$ si, pour *tout* $m \in \{1, \cdots, n\}$, le caractère $\prod_{i=1}^m \pi_{w_{\widetilde{v}}^{-1}(i),\widetilde{v}}$ (cf. (29)) apparaît avec multiplicité un dans la liste :

$$\left\{\prod_{i\in I} \pi_{w_{\widetilde{v}}^{-1}(i),\widetilde{v}},\ I \subseteq \{1, \cdots, n\},\ |I| = m\right\}.$$

Le théorème qui suit est dû à Bergdall ([**3**], [**4**, Th.3.3] pour $n = 3$).

Théorème 9.7 **([3])**. — *Soit $(w_{\widetilde{v}})_{v|p} \in \prod_{v|p} \mathcal{S}_n$ et $v_0 \in \Sigma_p$ tel que $w_{\widetilde{v}_0}^{\mathrm{alg}}(w_{\widetilde{v}_0}) \neq 1$ et $\rho_{\widetilde{v}_0}$ est fortement générique pour $w_{\widetilde{v}_0}$. Soit $x_{\mathrm{cl}} \in \mathcal{E}(E)$ le point classique (45), alors $d(x_{\mathrm{cl}}) > 1$, i.e. l'application κ est ramifiée en x_{cl}.*

Démonstration. — Nous donnons une variante de la preuve de Bergdall basée sur le Lemme 9.6 qui n'utilise pas d'anneaux de déformations. Rappelons que si x est un point de corps résiduel E d'un espace rigide analytique $\mathcal{X}$ sur E, l'espace tangent $T_{\mathcal{X},x}$ en x est le E-espace vectoriel $\mathrm{Hom}_E\left(\mathfrak{m}_{\mathcal{X},x}/\mathfrak{m}_{\mathcal{X},x}^2, E\right) = \mathrm{Hom}_{E\text{-alg}}\left(\mathcal{O}_{\mathcal{X},x}, E[\varepsilon]/(\varepsilon^2)\right)$ où $\mathfrak{m}_{\mathcal{X},x}$ est l'idéal maximal de l'anneau local $\mathcal{O}_{\mathcal{X},x}$ en x de la variété rigide analytique $\mathcal{X}$. Il suffit de montrer que l'application tangente :

$$d\kappa : T_{\mathcal{E},x_{\mathrm{cl}}} \longrightarrow T_{\mathcal{W},\kappa(x_{\mathrm{cl}})}$$

n'est pas injective et l'on peut pour cela travailler sur la variété de Hecke associée au triplet $\left(U^p, \{v_0\}, \eta^0_{\overline{(w_{\widetilde{v}})_{\{v_0\}}}}\right)$ (une sous-variété fermée puisque $\{v_0\} \subseteq \Sigma_p$, cf. § 7) qui contient toujours le point classique x_{cl}. On désigne dans la suite de la preuve par $\mathcal{E}$ cette variété de Hecke et par $\mathcal{W}$ l'espace des poids correspondant. Elle a dimension

n et on a $x_{\mathrm{cl}} = \big(\psi_{\rho,(w_{\widetilde{v}})_{\overline{\{v_0\}}}}, \eta(1, w_{\widetilde{v}_0})\big)$. Comme $\dim_E T_{\mathcal{E},x_{\mathrm{cl}}} \geq n = \dim_E T_{\mathcal{W},\kappa(x_{\mathrm{cl}})}$, il suffit de montrer que $d\kappa$ n'est pas surjective. Soit $\rho_{\Omega,\widetilde{v}_0}$ et $\delta_{1,\widetilde{v}_0}, \cdots, \delta_{n,\widetilde{v}_0}$ comme au début de la preuve de la Proposition 9.2. Si $\vec{v} \in T_{\mathcal{E},x_{\mathrm{cl}}} = \mathrm{Hom}_{E\text{-alg}}\big(\mathcal{O}_{\mathcal{X},x_{\mathrm{cl}}}, E[\varepsilon]/(\varepsilon^2)\big)$, on note $\rho_{\vec{v}} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \to \mathrm{GL}_n(E[\varepsilon]/(\varepsilon^2))$ (resp. $\delta_{i,\vec{v}} : \mathbb{Q}_p^\times \to (E[\varepsilon]/(\varepsilon^2))^\times$) la représentation continue (resp. le caractère continu) obtenu(e) à partir de $\rho_{\Omega,\widetilde{v}_0}$ (resp. $\delta_{i,\widetilde{v}_0}$) par l'extension des scalaires $\mathcal{O}(\Omega) \to \mathcal{O}_{\mathcal{X},x_{\mathrm{cl}}} \xrightarrow{\vec{v}} E[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$. La représentation $\rho_{\vec{v}}$ a n "poids de Sen" dans $E[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ donnés par $h_{1,\widetilde{v}_0} + \varepsilon d_{1,\vec{v}}, \cdots, h_{n,\widetilde{v}_0} + \varepsilon d_{n,\vec{v}}$ pour des $d_{i,\vec{v}} \in E$ où $h_{i,\widetilde{v}_0} + \varepsilon d_{i,\vec{v}}$ est le "poids de Sen" de $\delta_{i,\vec{v}}$ dans $E[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$. On a de plus $d\kappa(\vec{v}) = (-d_{1,\vec{v}}, \cdots, -d_{n,\vec{v}}) \in E^n \cong T_{\mathcal{W},\kappa(x_{\mathrm{cl}})}$. Il suffit donc de montrer qu'il existe $i \neq j$ tels que, pour tout $\vec{v} \in T_{\mathcal{E},x_{\mathrm{cl}}}$, on a $d_{i,\vec{v}} = d_{j,\vec{v}}$.

Soit $0 = i_0 < i_1 < i_2 < \cdots < i_s = n$ l'unique suite strictement croissante d'entiers de $\{0, \cdots, n\}$ telle que i_1 est le plus petit entier vérifiant $\{1, \cdots, i_1\} = \{w_{\widetilde{v}_0}^{\mathrm{alg}}(w_{\widetilde{v}_0})^{-1}(1), \cdots, w_{\widetilde{v}_0}^{\mathrm{alg}}(w_{\widetilde{v}_0})^{-1}(i_1)\}$, i_2 le plus petit entier $> i_1$ vérifiant $\{1, \cdots, i_2\} = \{w_{\widetilde{v}_0}^{\mathrm{alg}}(w_{\widetilde{v}_0})^{-1}(1), \cdots, w_{\widetilde{v}_0}^{\mathrm{alg}}(w_{\widetilde{v}_0})^{-1}(i_2)\}$ etc. Il suit de [**2**, Th.4.13] et de sa preuve (qui s'étend sans problème au cas où $\rho_{\widetilde{v}_0}$ est cristabelline plutôt que cristalline) que, quitte à rapetisser Ω, il existe une filtration :

$$0 = P_{0,\Omega} \subsetneq P_{1,\Omega} \subsetneq P_{2,\Omega} \subsetneq \cdots \subsetneq P_{s,\Omega} = D_{\mathrm{rig}}(\rho_{\Omega,\widetilde{v}_0}) \tag{49}$$

par des sous-(φ, Γ)-modules $P_{j,\Omega}$ de $D_{\mathrm{rig}}(\rho_{\Omega,\widetilde{v}_0})$ localement libres de rang i_j sur $\mathcal{R}_\Omega$ tels que $P_{j,\Omega}/P_{j-1,\Omega}$ est encore localement libre (de rang $i_j - i_{j-1}$) et tels que l'on a des injections de (φ, Γ)-modules sur $\mathcal{R}_\Omega$ (avec la notation de [**22**, Not.6.2.2]):

$$\iota_j : \mathcal{R}_\Omega(\delta_{i_{j-1}+1,\widetilde{v}_0}) \hookrightarrow P_{j,\Omega}/P_{j-1,\Omega}, \quad j \in \{1, \cdots, s\} \tag{50}$$

qui restent injectives après toute spécialisation. On peut justifier (50) comme suit (le reste étant explicitement dans [**2**, Th.4.13]). Pour $j = 1$, une telle injection $\iota_1 : \mathcal{R}_\Omega(\delta_{1,\widetilde{v}_0}) \hookrightarrow P_{1,\Omega}$ est dans [**2**, § 4.3.2], plus précisément découle de [**2**, (4.10)] et du fait que l'image de l'application α_1 de [**2**, (4.10)] est dans le module P_2 construit dans la suite de [**2**, § 4.3.2] (l'hypothèse courante "minimally critical" de [**2**, § 4.3.2] n'étant là que par souci de simplification et ne jouant pas de rôle sérieux). Le cas j général se traite par récurrence en appliquant la même preuve à $D_{\mathrm{rig}}(\rho_{\Omega,\widetilde{v}_0})/P_{1,\Omega}$ et $P_{2,\Omega}/P_{1,\Omega}$ au lieu de $D_{\mathrm{rig}}(\rho_{\Omega,\widetilde{v}_0})$ et $P_{1,\Omega}$, puis à $D_{\mathrm{rig}}(\rho_{\Omega,\widetilde{v}_0})/P_{2,\Omega}$ et $P_{3,\Omega}/P_{2,\Omega}$ etc. (Notons que l'un des points essentiels dans la preuve de [**2**, § 4.3.2] (qui utilise la propriété (viii) du § 7 appliquée en x_{cl}) est le fait que :

$$H^0\big((D_{\mathrm{rig}}(\rho_{\Omega,\widetilde{v}_0})/P_{j-1,\Omega})(\delta^{-1}_{i_{j-1}+1,\widetilde{v}_0})\big) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}_{(\varphi,\Gamma)}\big(\mathcal{R}_\Omega(\delta_{i_{j-1}+1,\widetilde{v}_0}), D_{\mathrm{rig}}(\rho_{\Omega,\widetilde{v}_0})/P_{j-1,\Omega}\big)$$

est localement libre sur $\mathcal{O}(\Omega)$ et compatible au changement de base.) Via $\mathcal{O}(\Omega) \to \mathcal{O}_{\mathcal{X},x_{\mathrm{cl}}} \xrightarrow{\vec{v}} E[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$, on déduit de (49) et (50) pour tout $\vec{v}$ une filtration analogue $(P_{j,\vec{v}})_{1\leq j\leq s}$ de $D_{\mathrm{rig}}(\rho_{\vec{v}})$ et des injections $\iota_j : \mathcal{R}_{E[\varepsilon]/(\varepsilon^2)}(\delta_{i_{j-1}+1,\vec{v}}) \hookrightarrow P_{j,\vec{v}}/P_{j-1,\vec{v}}$ (et les modules sont alors tous libres sur $\mathcal{R}_{E[\varepsilon]/(\varepsilon^2)}$, cf. [**1**, § 2.2.3]).

Soit maintenant k le plus petit entier dans $\{1, \cdots, n\}$ tel que $w_{\widetilde{v}_0}^{\mathrm{alg}}(w_{\widetilde{v}_0})^{-1}(k) \neq k$ (un tel entier existe puisque $w_{\widetilde{v}_0}^{\mathrm{alg}}(w_{\widetilde{v}_0}) \neq 1$). On a $k = i_{k-1} + 1$ puisque $i_j = j$ si $j < k$.

On déduit du Lemme 9.6 appliqué à la composée :

$$\iota : \mathcal{R}_{E[\varepsilon]/(\varepsilon^2)} \overset{\iota_k(\delta_{k,\vec{v}}^{-1})}{\hookrightarrow} \big(P_{k,\vec{v}}/P_{k-1,\vec{v}}\big)(\delta_{k,\vec{v}}^{-1}) \hookrightarrow \big(D_{\mathrm{rig}}(\rho_{\vec{v}})/P_{k-1,\vec{v}}\big)(\delta_{k,\vec{v}}^{-1})$$

et du Lemme 6.4 avec (34) et [**2**, Th.4.13] que le “poids de Sen” :

$$\big(h_{w_{\widetilde{v}_0}^{\mathrm{alg}}(w_{\widetilde{v}_0})^{-1}(k),\widetilde{v}_0} + \varepsilon d_{w_{\widetilde{v}_0}^{\mathrm{alg}}(w_{\widetilde{v}_0})^{-1}(k),\vec{v}}\big) - (h_{k,\widetilde{v}_0} + \varepsilon d_{k,\vec{v}})$$

de $\big(D_{\mathrm{rig}}(\rho_{\vec{v}})/P_{k-1,\vec{v}}\big)(\delta_{k,\vec{v}}^{-1})$ est constant, i.e. $d_{w_{\widetilde{v}_0}^{\mathrm{alg}}(w_{\widetilde{v}_0})^{-1}(k),\vec{v}} = d_{k,\vec{v}}$. Comme c'est vrai pour tout $\vec{v} \in T_{\mathcal{E},x_{\mathrm{cl}}}$, on a le résultat voulu. $\square$

Remarque 9.8. — La preuve de [**2**, Th.4.13] (utilisée dans celle du Théorème 9.7) nécessite *a priori* l'hypothèse “fortement générique” de l'énoncé (appellée “φ-regular” dans le contexte cristallin de [**2**, § 4.2]). Il semble plus délicat *a priori* d'utiliser directement [**22**, Cor.6.3.10] car ce dernier résultat fait intervenir un morphisme birationnel $\mathcal{E}' \to \mathcal{E}$ qui peut changer l'espace tangent au point (critique) considéré.

Le théorème ci-dessous est dû à Chenevier dans le cas où ρ est cristalline en p et $\Sigma_p = \{v|p\}$ (voir [**10**, preuve de Th.4.8] et [**10**, preuve de Th.4.10]). Sa preuve s'étend sans problème au cas cristabellin et aux cas où l'on remplace $\{v|p\}$ par un sous-ensemble non vide $\Sigma_p \subseteq \{v|p\}$.

Théorème 9.9 ([**10**]). — *Supposons ou bien $n \leq 3$, ou bien F/F^+ non ramifié, G quasi-déployé en toute place finie, U_v maximal hyperspécial en toute place inerte. Soit x_{cl} l'un des points classiques (45), alors $d(x_{\mathrm{cl}}) > 1$ implique $\delta^{\mathrm{alg}}(x_{\mathrm{cl}}) < \delta^{\mathrm{an}}(x_{\mathrm{cl}})$.*

Plus exactement, dans [**10**] il est montré que, sous les conditions de l'énoncé, $\delta^{\mathrm{alg}}(x_{\mathrm{cl}}) = \delta^{\mathrm{an}}(x_{\mathrm{cl}})$ implique κ étale en x_{cl}, et donc $d(x_{\mathrm{cl}}) = 1$.

En mettant tout ensemble on obtient un des résultats principaux de cet article, qui donne (sous certaines conditions) l'existence d'au moins quelques constituants non localement algébriques dans $\widehat{S}(U^p, E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho]$ là où on les attend. Bien entendu, il s'agit d'un résultat très partiel, la conjecture 6.1 prédisant bien plus de constituants en général.

Théorème 9.10. — *Soit $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \to \mathrm{GL}_n(E)$ continue satisfaisant (i), (ii), (iii) du § 6 et telle que $\widehat{S}(U^p, E)^{\mathrm{alg}}[\mathfrak{m}_\rho] \neq 0$ pour un sous-groupe ouvert compact $U^p = \prod_{v\nmid p} U_v$ de $G(\mathbb{A}_{F^+}^{\infty,p})$. Supposons ou bien $n \leq 3$, ou bien F/F^+ non ramifié, G quasi-déployé en toute place finie et U_v maximal hyperspécial en toute place inerte. Soit $(w_{\widetilde{v}})_{v|p} \in \prod_{v|p} \mathcal{S}_n$ et $v_0|p$ tel que $w_{\widetilde{v}_0}^{\mathrm{alg}}(w_{\widetilde{v}_0}) \neq 1$ et $\rho_{\widetilde{v}_0}$ est fortement générique pour $w_{\widetilde{v}_0}$. Alors il existe $w_{\widetilde{v}_0}^{\mathrm{alg}} \in \mathcal{S}_n \backslash \{1\}$ tel que :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_n(F^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p)}\Big(C(w_{\widetilde{v}_0}^{\mathrm{alg}}, w_{\widetilde{v}_0})(\varepsilon^{n-1}) \otimes \big(\otimes_{\substack{v|p \\ v \neq v_0}} C(1, w_{\widetilde{v}})(\varepsilon^{n-1})\big), \widehat{S}(U^p, E)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho]\Big) \neq 0.$$

Démonstration. — Cela se déduit des Théorèmes 9.7 et 9.9 (appliqués avec $\Sigma_p = \{v_0\}$), de la Proposition 9.5, et du Corollaire 4.6 appliqué à $\Pi = \widehat{S}(U^p, E)^{\mathrm{an},\overline{\{v_0\}}\text{-alg}}$ et $\chi_\lambda^{-1}\pi_B = \eta(w^{\mathrm{alg}}_{\widetilde{v}_0}, w_{\widetilde{v}_0}) \prod_{v\neq v_0} \eta(1, w_{\widetilde{v}})$ ($w^{\mathrm{alg}}_{\widetilde{v}_0}$ comme dans la Proposition 9.5) combiné avec [**19**, Cor.5.2]. □

Remarque 9.11. — (i) Avec le Théorème 9.3, on voit que si $w^{\mathrm{alg}}_{\widetilde{v}}(w_{\widetilde{v}}) = 1$ pour tout $v \neq v_0$ $(v|p)$ et si $\lg(w^{\mathrm{alg}}_{\widetilde{v}_0}(w_{\widetilde{v}_0})) \leq 1$ alors la Conjecture 6.1 est vraie sous les conditions du Théorème 9.10.

(ii) On peut obtenir des résultats un peu plus précis ou généraux en tenant compte du (i) de la Remarque 9.4 ou en exploitant davantage le Théorème 4.3 (e.g. avec des sous-groupes paraboliques au lieu du Borel, voir aussi le (ii) de la Remarque 8.3).

(iii) Avec les résultats espérés sur le changement de base, la preuve de [**10**, Th.4.10], et donc celle du Théorème 9.10, devraient s'étendre *verbatim* sans l'hypothèse F/F^+ non ramifié à condition de supposer toujours G quasi-déployé aux places finies, U_v maximal hyperspécial aux places inertes et U_v maximal "très spécial" (cf. [**1**, § 6.8.1]) aux places ramifiées.

Références

[1] Bellaïche J., Chenevier G., *Families of Galois representations and Selmer groups*, Astérisque 324, 2009.

[2] Bergdall J., *On the variation of (φ,Γ)-modules over p-adic families of automorphic forms*, thèse, Université Brandeis, 2013.

[3] Bergdall J., lettre à l'auteur, juillet 2013.

[4] Bergdall J., Chojecki P., *Ordinary representations and companion points for $U(3)$ in the indecomposable case*, prépublication 2014.

[5] Berger L., Breuil C., *Sur quelques représentations potentiellement cristallines de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, Astérisque 330, 2010, 155-211.

[6] Breuil C., *Vers le socle localement analytique pour* GL_n *I*, prépublication 2013.

[7] Breuil C., *Towards the locally analytic socle for* GL_n, cours au B.I.C.M.R. de Pékin, mai 2013, disponible à http://www.math.u-psud.fr/~breuil/PUBLICATIONS/Pekin.pdf

[8] Breuil C., Herzig F., *Ordinary representations of $G(\mathbb{Q}_p)$ and fundamental algebraic representations*, prépublication 2012, révisée 2013.

[9] Buzzard K., *Eigenvarieties*, London Math. Soc. Lecture Note Series 320, 2007, 59-120.

[10] Chenevier G., *On the infinite fern of Galois representations of unitary type*, Ann. Scient. É.N.S. 44, 2011, 963-1019.

[11] Chenevier G., *Une application des variétés de Hecke des groupes unitaires*, prépublication 2009.

[12] Ding Y., *Formes modulaires p-adiques sur les courbes de Shimura unitaires et compatibilité local-global*, thèse, en préparation.

[13] Emerton M., *Jacquet modules of locally analytic representations of p-adic reductive groups I. Constructions and first properties*, Ann. Scient. É.N.S. 39, 2006, 775-839.

[14] Emerton M., *Jacquet modules of locally analytic representations of p-adic reductive groups II. The relation to parabolic induction*, à paraître à J. Institut Math. Jussieu.

[15] Emerton M., *On the interpolation of systems of eigenvalues attached to automorphic Hecke eigenforms*, Inventiones Math. 164, 2006, 1-84.

[16] Emerton M., *Locally analytic vectors in representations of locally p-adic analytic groups*, à paraître à Memoirs Amer. Math. Soc.

[17] Haines T. J., Ngô B. C., *Alcoves associated to special fibers of local models*, Amer. J. Math. 124, 2002, 1125-1152.

[18] Hill R., Loeffler D., *Emerton's Jacquet functors for non-Borel parabolic subgroups*, Documenta Mathematica 16, 2011, 1-31.

[19] Humphreys J., *Representations of Semisimple Lie Algebras in the BGG Category $\mathcal{O}$*, Graduate Studies in Math. 94, 2008.

[20] Jones O., *An analogue of the BGG resolution for locally analytic principal series*, J. Number Theory 131, 2011, 1616-1640.

[21] Kedlaya K., Liu R., *On families of (φ, Γ)-modules*, Algebra Number Theory 4, 2010, 943-967.

[22] Kedlaya K., Pottharst J., Xiao L., *Cohomology of arithmetic families of (φ, Γ)-modules*, à paraître à J. Amer. Math. Soc.

[23] Loeffler D., *Overconvergent algebraic automorphic forms*, Proc. London Math. Soc. 102, 2011, 193-228.

[24] Orlik S., Schraen B., *The Jordan-Hölder series of the locally analytic Steinberg representation*, à paraître à Documenta Mathematica.

[25] Orlik S., Strauch M., *On Jordan-Hölder series of some locally analytic representations*, à paraître à J. Amer. Math. Soc.

[26] Orlik S., Strauch M., *On the irreducibility of locally analytic principal series representations*, Repr. Theory 14, 2010, 713-746.

[27] Prasad D., *Locally algebraic representations of p-adic groups*, appendice à *$U(g)$-finite locally analytic representations* (Schneider P., Teitelbaum J.), Representation Theory 5, 2001, 111-128.

[28] Schneider P., Teitelbaum J., *Locally analytic distributions and p-adic representation theory, with applications to GL_2*, J. Amer. Math. Soc. 15, 2001, 443-468.

[29] Schneider P., Teitelbaum J., *Algebras of p-adic distributions and admissible representations*, Inventiones Math. 153, 2003, 145-196.

[30] Schneider P., Teitelbaum J., *Banach space representations and Iwasawa theory*, Israel J. Math. 127, 2002, 359-380.

[31] Sorensen C., *Eigenvarieties and invariant norms*, prépublication 2012.

C. Breuil, Bâtiment 425, C.N.R.S. et Université Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex, France
E-mail : christophe.breuil@math.u-psud.fr