TOPOLOGIE LOG-SYNTOMIQUE, COHOMOLOGIE LOG-CRISTALLINE ET COHOMOLOGIE DE ČECH

Christophe Breuil
Centre de Mathématiques
U.R.A. 169 du C.N.R.S.
Ecole Polytechnique
F-91128 Palaiseau cedex
(France)
E-mail : breuil@orphee.polytechnique.fr

Table des matières

1. Introduction

On sait l'importance du formalisme syntomique dans le travail de Fontaine et Messing ([FM]) pour comparer cohomologie étale et cohomologie de de Rham d'une variété propre et lisse sur un corps p-adique à bonne réduction. Si k est un corps parfait de caractéristique $p > 0$, W_n l'anneau des vecteurs de Witt de longueur n à coefficients dans k, $W = \varprojlim W_n$ et $K_0 = Frac(W)$, Fontaine et Messing introduisent un faisceau $\mathcal{O}_n^{cris}$ sur le gros site syntomique de $Spec\ k$ et montrent que sa cohomologie calcule la cohomologie cristalline sur la base W_n. Ils montrent également comment construire $\mathcal{O}_n^{cris}$ à l'aide de vecteurs de Witt et de puissances divisées. Le but principal de ce travail est d'étendre ces résultats au cadre logarithmique, c'est à dire au cas de la cohomologie log-cristalline de Hyodo-Kato ([HK]).

La géométrie logarithmique intervient quand on considère le cas plus général d'une variété propre et lisse sur K_0 à réduction semi-stable (on conjecture que le cas général se "ramène" au cas de réduction semi-stable moyennant une extension finie du corps K_0) : le modèle semi-stable peut alors être muni d'une log-structure canonique. Le cas logarithmique est plus complexe que le cas de bonne réduction car plusieurs "log-bases" se présentent naturellement (voir ci-après). Divers travaux importants de Hyodo, Kato et Tsuji ont déjà vu le jour à ce sujet ([HK], [Ka2], [Ts]), mais le point de vue adopté est toujours celui de la topologie étale. On montre ici qu'un point de vue purement syntomique existe aussi dans le cas logarithmique et qu'il permet de visualiser les diverses cohomologies log-cristallines et leurs opérateurs par des vecteurs de Witt et des puissances divisées. On y perd de travailler avec un site plus compliqué que le site étale mais on y gagne d'avoir des faisceaux et non plus des complexes de faisceaux. Ce formalisme permet aussi de définir facilement et en toute généralité un opérateur de monodromie sur une certaine cohomologie log-cristalline. D'autre part, les résultats de [Br1] et [Br2] montrent qu'une généralisation logarithmique (ou plutôt semi-stable) de la théorie de Fontaine-Laffaille ([FL]) existe. Il n'est donc pas interdit de songer aussi à une généralisation semi-stable de la théorie entière de Fontaine-Messing ([FM]), dans laquelle le point de vue syntomique se révélerait, sans aucun doute, particulièrement agréable.

Nous détaillons maintenant le contenu du présent travail :

En 2, nous définissons des morphismes "log-syntomiques" entre des log-schémas. Il s'agit essentiellement de pouvoir prendre (étale-) localement des racines $p^{n^{\text{ièmes}}}$ sur le faisceau de monoïdes de la structure logarithmique tout en gardant des morphismes syntomiques (au sens classique) sur les schémas sous-jascents. Nous avons voulu ces morphismes les plus explicites possibles pour faciliter les calculs locaux, ce qui nous a conduit à la définition (2.1.12).
En 3, nous montrons que la cohomologie du faisceau des sections globales log-cristallines sur le site log-syntomique redonne la cohomologie log-cristalline. Notons que dans le cas logarithmique, il faut considérer les bases :

$$\{1\} \to W_n \qquad \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \to & W_n \\ 1 & \mapsto & 0 \end{array} , \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \to & W_n \\ 1 & \mapsto & p \end{array} , \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \to & W_n\!<\!u\!> \\ 1 & \mapsto & u \end{array}$$

En 4, nous construisons pour chaque base un préfaisceau sur le gros site log-syntomique du point logarithmique $(\mathbf{N} \to k,\ 1 \mapsto 0)$ (ou de *Spec* k pour la base $\{1\} \to W_n$) et en 5 nous montrons que le faisceau associé est bien celui des sections globales log-cristallines (pour les diverses bases).
En 6, nous définissons sur ce préfaisceau (sauf pour la base $\mathbf{N} \to W_n,\ 1 \mapsto p$) un opérateur de Frobenius et un opérateur de monodromie canoniques, nous montrons une suite exacte courte de faisceaux et retrouvons un calcul de sections globales log-cristallines important dû à Kato.
Enfin, un appendice est consacrée à un calcul local de Čech : on y calcule d'abord la cohomologie cristalline classique de certaines k-algèbres affines de type fini comme la cohomologie de Čech de certains recouvrements syntomiques (non canoniques) (Appendice A). Avec la définition du site log-syntomique, on en donne ensuite un analogue logarithmique (Appendice B).

Nombreuses sont les idées de ce travail dues à J.-M. Fontaine, W. Messing et K. Kato. L'article de K. Kato [Ka2] a été crucial pour mener à bien ce travail. L. Illusie n'a pas compté son temps pour m'expliquer la théorie des log-structures et m'a signalé plusieurs prolongements possibles à la définition "utile" des morphismes log-syntomiques qu'on propose ici : je lui exprime ma sincère reconnaissance. C'est W. Messing qui m'a initié à la construction "syntomique" de la cohomologie cristalline, qui est à la base de son article avec J.-M. Fontaine ([FM]) : je l'en remercie vivement. Je remercie également B. Le Stum, qui a eu la patience de déchiffrer une toute première version de cet article, et M. Gros, pour toutes les discussions que nous avons eues ensemble. Enfin, j'ai eu la chance de toujours bénéficier de conversations stimulantes avec J.-M. Fontaine : l'idée (centrale) de prendre des racines $p^{n^{\text{ièmes}}}$ sur le faisceau de monoïdes $\mathcal{P}$ et d'utiliser $\mu_{p^n}(\mathcal{P}^{gp}/\mathbf{Z})$ pour construire un opérateur de monodromie en toute généralité (section 6) lui est due. Qu'il trouve ici l'expression de ma plus profonde gratitude.

2. Site log-syntomique

On introduit des morphismes log-syntomiques et on montre leur stabilité par changement de base et composition.

2.1. **Morphismes log-syntomiques.** Si A est un anneau (commutatif), on dit, comme dans (E.G.A.0,15.1.7), qu'une suite $(a_1, ..., a_s)$ d'éléments de A est régulière si a_i n'est pas un diviseur de 0 dans $A/(a_1, ..., a_{i-1})$.

Définition 2.1.1. *On dit qu'un morphisme de schémas $f : Y \to X$ est syntomique si pour tout $y \in Y$ il existe des ouverts étales affines V=Spec B de y et U=Spec A de x=f(y) tels que $f(V) \subset U$ et tels que $B = A[X_1, ..., X_r]/(f_1, ..., f_s)$ où $(f_1, ..., f_s)$ est une suite régulière dans $A[X_1, ..., X_r]$ et où $A[X_1, ..., X_r]/(f_1, ..., f_i)$ est une A-algèbre plate pour tout i (on dit aussi que la suite $(f_1, ..., f_r)$ est transversalement régulière relativement à A, c.f. E.G.A.IV,19.2). On dit qu'une A-algèbre C est syntomique si le morphisme Spec C→Spec A est syntomique.*

Remarque : Cette définition n'est pas tout à fait celle de [FM] (où on décrivait les morphismes Zariski-localement). Mais en utilisant (S.G.A.6,VIII.1.4) et ([Il1],III.3.2.6), on montre facilement que les deux définitions coïncident. Nous utilisons la topologie étale car les structures logarithmiques se décrivent bien étale-localement seulement.

On peut montrer que cette classe de morphismes est stable par changement de base et par composition (la composition est élémentaire, pour le changement de base, cf. E.G.A.0,15.1.15).

Tous les monoïdes considérés sont commutatifs avec un élément neutre et notés multiplicativement. Si Q est un tel monoïde, Q^{gp} désigne le groupe associé. Avant de définir un analogue des morphismes syntomiques dans le cadre des log-schémas, nous allons traduire en termes de monoïdes les notions de platitude et de suite régulière. Un monoïde Q est dit intègre si quels que soient p, p', q de Q, si $pq = p'q$ alors $p = p'$ (il est équivalent de demander que l'homomorphisme naturel de Q dans Q^{gp} soit injectif). Si $P \to Q$ et $P \to P'$ sont deux morphismes de monoïdes, on notera $Q \oplus_P P'$ la limite inductive du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & P' \\ \downarrow & & \\ Q & & \end{array}$$

dans la catégorie des monoïdes. On dit qu'un morphisme de monoïdes intègres $h : P \to Q$ est universellement intègre si pour tout monoïde intègre P' et pour tout morphisme de monoïdes $g : P \to P'$, $Q \oplus_P P'$ est un monoïde intègre. La proposition suivante est due à Kato :

Proposition 2.1.2. *([Ka],4.1) Soit $h : P \to Q$ un morphisme de monoïdes intègres. Alors $\mathbf{Z}[Q]$ est une $\mathbf{Z}[P]$-algèbre plate si et seulement si h est injectif et universellement intègre.*

Définition 2.1.3. *Soit Q un monoïde intègre et g un élément de Q^{gp}. On dit que g est simplifiable dans Q s'il existe q, q' dans Q tels que $g = \frac{q}{q'}$ et tels que, si $x, x' \in Q$ vérifient $\frac{x}{x'} = g$, alors il existe $q_0 \in Q$ tel que $x = q_0 q, x' = q_0 q'$. On dit alors que $\frac{q}{q'}$ est une écriture simplifiée de g dans Q.*

Si $\frac{q}{q'}$ est une écriture simplifiée de g dans Q, toute autre écriture simplifiée est de la forme $\frac{uq}{uq'}$ où u est inversible dans Q.

Lemme 2.1.4. *Soit Q un monoïde intègre et g un élément de Q^{gp}, si g est simplifiable d'écriture simplifiée $\frac{q}{q'}$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, g^n est simplifiable d'écriture simplifiée $\frac{q^n}{q'^n}$.*

Preuve. — Par récurrence sur n. Le cas $n = 1$ étant trivial, supposons la propriété vraie à l'ordre $n-1$ avec $n \geq 2$ et soient x et x' tels que $g^n = \frac{x}{x'}$. On a $\frac{q'x}{qx'} = (\frac{q}{q'})^{n-1}$, par récurrence il existe q_0 dans Q tel que $q'x = q_0 q^{n-1}, qx' = q_0 q'^{n-1}$ d'où $\frac{x}{q^{n-2}q_0} = \frac{q}{q'}$, $\frac{x'}{q'^{n-2}q_0} = \frac{q'}{q}$ et par hypothèse, il existe q_1, q_1' dans Q tels que :

$$\begin{array}{cc} x = q_1 q & x' = q_1' q' \\ q^{n-2}q_0 = q_1 q' & q'^{n-2}q_0 = q_1' q \end{array}$$

d'où on déduit $\frac{q_1}{q_1'} = \frac{q^{n-1}}{q'^{n-1}}$ et par récurrence, il existe q_2 dans Q tel que $q_1 = q_2 q^{n-1}, q_1' = q_2 q'^{n-1}$ d'où $x = q_2 q^n, x' = q_2 q'^n$. $\square$

Si Q est un monoïde intègre et G un sous-groupe de Q^{gp}, on notera Q/G le monoïde intègre image de Q dans Q^{gp}/G.

Définition 2.1.5. *Soit Q un monoïde intègre et g un élément de Q^{gp}. On dit que g est régulier dans Q si g est simplifiable dans Q et d'ordre infini dans Q^{gp}. Soient $(g_1, ..., g_s)$ dans Q^{gp} et $G_i =< g_1, ..., g_i >$ (sous-groupe engendré dans Q^{gp}, $G_0 = \{1\}$). On dit que $(g_1, ..., g_s)$ est une suite régulière dans Q si pour $1 \leq i \leq s$, g_i est régulier dans Q/G_{i-1}.*

Lemme 2.1.6. *Soit Q un monoïde intègre et q,q' deux éléments de Q. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) il existe un entier $n \geq 1$ tel que $q^n = q'^n$
(ii) $q - q'$ est un diviseur de zéro dans $\mathbf{Z}[Q]$.

Preuve. — (i)$\Rightarrow$(ii) : On peut supposer que n est le plus petit entier ≥ 1 tel que $q^n = q'^n$. On a alors $(q - q')(q^{n-1} + q^{n-2}q' + ... + q'^{n-1}) = 0$ dans $\mathbf{Z}[Q]$ et le deuxième facteur est non nul puisque la minimalité de n entraine que, dans Q, les $q^{n-i}q'^i$ sont deux à deux distincts.
(ii)$\Rightarrow$(i) : On suppose $(q - q')(\sum_{i=1}^{r} n_i q_i) = 0$ pour des n_i dans $\mathbf{Z}$ et des q_i dans Q distincts

deux à deux. Puisque Q est intègre, les (qq_i) (resp. $(q'q_i)$) sont distincts deux à deux et on a une unique permutation σ de $[1,...,r]$ telle que $qq_i = q'q_{\sigma(i)}$ et $n_i = n_{\sigma(i)}$ pour tout i. Soit $c = (n_1,...,n_l)$ un cycle de longueur l de cette permutation : on a $\sigma(n_k) = n_{k+1}$ si $k \neq l$ et $\sigma(n_l) = n_1$. En multipliant membre à membre les égalités $qq_{n_k} = q'q_{n_{k+1}}$, on obtient $q^l = q'^l$ avec $l \geq 1$, i.e. $g^l = 1$, d'où le résultat. $\square$

Lemme 2.1.7. *Soit Q un monoïde intègre et q,q' dans Q tels que $g = \frac{q}{q'}$ soit d'ordre infini dans Q^{gp}. Soit f le morphisme canonique : $\mathbf{Z}[Q]/(q-q') \to \mathbf{Z}[Q/{<}g{>}]$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) g est simplifiable d'écriture simplifiée $g = \frac{q}{q'}$
(ii) f est un isomorphisme.

Preuve. — (i)⇒(ii) : on construit une flèche $\phi : \mathbf{Z}[Q/<g>] \to \mathbf{Z}[Q]/(q-q')$. Soit $\bar{x} \in Q/{<}g{>}$ et soient $x, x' \in Q$ deux relèvements de x dans Q. Quitte à échanger x et x', on peut trouver $n \in \mathbf{N}$ tel que $\frac{x}{x'} = g^n$. Il existe alors q_0 dans Q tel que $x = q_0q^n, x' = q_0q'^n$, donc $q - q'$ divise $x - x'$ dans $\mathbf{Z}[Q]$, i.e. $\bar{x} = \bar{x'}$ dans $\mathbf{Z}[Q]/(q-q')$ et il suffit de prendre pour $\phi(\bar{x})$ l'image de x dans $\mathbf{Z}[Q]/(q-q')$. On vérifie facilement que c'est la réciproque de f.
(ii)⇒(i) : Soient x, x' deux éléments de Q tels que $\frac{x}{x'} = \frac{q}{q'}$, donc $\bar{x} = \bar{x}'$ dans $Q/{<}g{>}$), i.e. $\bar{x} = \bar{x'}$ dans $\mathbf{Z}[Q]/(q-q')$ puisque f est un isomorphisme. On a donc $x - x' = (q-q')(\sum_{i=1}^{r} n_i q_i)$ pour des n_i dans $\mathbf{Z}$ et des q_i dans Q distincts deux à deux. En multipliant membre à membre par q et q' et en utilisant $qx' = q'x$, on obtient :

$$(q-q')x = (q-q')(\sum_{i=1}^{r} n_i qq_i) \ , \ (q-q')x' = (q-q')(\sum_{i=1}^{r} n_i q'q_i)$$

Par (2.1.6), $q - q'$ n'est pas un diviseur de 0 dans $\mathbf{Z}[Q]$, donc $x = \sum_{i=1}^{r} n_i qq_i$ et $x' = \sum_{i=1}^{r} n_i q'q_i$, ce qui montre qu'il existe (i,j) dans $\{1,...,r\}^2$ tel que $x = qq_i, x' = q'q_j$ avec forcément $q_i = q_j = q_0$. $\square$

Remarque : L'implication (i) entraine (ii) n'utilise pas que g est d'ordre infini.

La proposition suivante est l'analogue, en quelque sorte, de (2.1.2) :

Proposition 2.1.8. *Soit Q un monoïde intègre, $s \in \mathbf{N}^*$ et $(q_i, q'_i) \in Q \times Q$, $1 \leq i \leq s$. On pose $g_i = \frac{q_i}{q'_i} \in Q^{gp}$ et on note $\bar{g}_i$, $\bar{q}_i$ et $\bar{q}'_i$ les images de g_i, q_i et q'_i dans $Q/{<}g_1,...,g_{i-1}{>}$. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) $(g_1,...,g_s)$ est une suite régulière dans Q et $\frac{\bar{q}_i}{\bar{q}'_i}$ est une écriture simplifiée de $\bar{g}_i$ dans $Q/{<}g_1,...,g_{i-1}{>}$ pour tout i
(ii) $(q_1 - q'_1,...,q_s - q'_s)$ est une suite régulière dans $\mathbf{Z}[Q]$ et $\mathbf{Z}[Q]/(q_k - q'_k)_{1\leq k\leq i} = \mathbf{Z}[Q/{<}g_k{>}_{1\leq k\leq i}]$ pour tout i.

Preuve. — Récurrence élémentaire à partir de (2.1.6) et (2.1.7). $\square$

La définition d'un morphisme “syntomique” de monoïdes est alors naturelle :

Définition 2.1.9. *Soit $h : P \to Q$ un morphisme de monoïdes intègres. On dit que h est syntomique si h est injectif et si Q peut s'écrire $Q = (P \oplus \mathbf{N}x_1 \oplus ... \oplus \mathbf{N}x_r)/ < g_1, ..., g_s >$ où $(g_1, ..., g_s)$ est une suite régulière dans $P \oplus \mathbf{N}x_1 \oplus ... \oplus \mathbf{N}x_r$ et où le morphisme $P \to (P \oplus \mathbf{N}x_1 \oplus ... \oplus \mathbf{N}x_r)/ < g_1, ..., g_i >$ est universellement intègre pour tout i.*

Remarquons tout de suite que les morphismes syntomiques sont trivialement stables par composition. On appelle monoïde fin un monoïde intègre et de type fini. Si $P \to Q$ est un morphisme de monoïdes fins, on peut toujours écrire Q sous la forme $Q = (P \oplus \mathbf{N}x_1 \oplus ... \oplus \mathbf{N}x_r)/G$ pour un certain entier r et un certain sous-groupe G de $P^{gp} \oplus \mathbf{Z}x_1 \oplus ... \oplus \mathbf{Z}x_r$.

Proposition 2.1.10. *Soit $h : P \to Q$ un morphisme syntomique de monoïdes intègres, alors $\mathbf{Z}[Q]$ est une $\mathbf{Z}[P]$-algèbre syntomique.*

Preuve. — Soit $(g'_1, ..., g'_s)$ une suite régulière comme en (2.1.9). Pour tout i, il existe $\bar{q}_i, \bar{q}'_i$ dans $(P \oplus \mathbf{N}x_1 \oplus ... \oplus \mathbf{N}x_r)/ < g'_1, ..., g'_{i-1} >$ tels que $\dfrac{\bar{q}_i}{\bar{q}'_i}$ y est une écriture simplifiée de $\bar{g}'_i$. Soient q_i, q'_i des relèvements de $\bar{q}_i, \bar{q}'_i$ dans $P \oplus \mathbf{N}x_1 \oplus ... \oplus \mathbf{N}x_r$ et $g_i = \dfrac{q_i}{q'_i}$. Il est trivial que $(P \oplus \mathbf{N}x_1 \oplus ... \oplus \mathbf{N}x_r)/ < g'_1, ..., g'_i > = (P \oplus \mathbf{N}x_1 \oplus ... \oplus \mathbf{N}x_r)/ < g_1, ..., g_i >$ et que $(g_1, ..., g_s)$ est encore régulière. Une récurrence élémentaire à partir de (2.1.2) et (2.1.8) permet de conclure. □

Remarque : On dira par la suite abusivement que $(g_1, ..., g_s)$ est une suite régulière d'écriture simplifiée $g_i = \dfrac{q_i}{q'_i}$, $q_i, q'_i \in P \oplus \mathbf{N}x_1 \oplus ... \oplus \mathbf{N}x_r$, si $\dfrac{\bar{q}_i}{\bar{q}'_i}$ est une écriture simplifiée de $\bar{g}_i$ dans $(P \oplus \mathbf{N}x_1 \oplus ... \oplus \mathbf{N}x_r)/ < g_1, ..., g_{i-1} >$.

Définition 2.1.11. *Soient B_0 une A-algèbre plate et B une B_0-algèbre. On dit que B est transversalement (A, B_0)-régulière si B peut s'écrire sous la forme $B_0[X_1, ..., X_r]/(f_1, ..., f_s)$ où $(f_1, ..., f_s)$ est une suite régulière dans $B_0[X_1, ..., X_r]$ et où $B_0[X_1, ..., X_r]/(f_1, ..., f_i)$ est une A-algèbre plate pour tout i.*

On renvoie à [Ka1] pour les définitions et propriétés des log-schémas intègres et des log-schémas fins. Si X est un log-schéma, on note $\dot{X}$ le schéma sous-jacent. Si $\dot{X} = Spec\ A$ et si $\mathcal{P}$ est le faisceau de monoïdes, on note $X = (Spec\ A, \mathcal{P})$. Si la log-structure est associée à une carte $P \to A^\times$ où P est un monoïde et $A^\times$ le monoïde multiplicatif A, on note aussi $(Spec\ A, P)$.

Définition 2.1.12. *Un morphisme de log-schémas fins affines f : $(Spec\ B, \mathcal{P}_B) \to (Spec\ A, \mathcal{P}_A)$ est dit log-syntomique standard s'il existe une carte de f :*

$$\begin{array}{ccc} P & \to & A \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow \\ Q & \to & B \end{array}$$

telle que h est syntomique et B est transversalement $(A, A \otimes_{\mathbf{Z}[P]} \mathbf{Z}[Q])$-régulière. Un morphisme de log-schémas fins $f : Y \to X$ est dit log-syntomique si étale localement sur $\dot{X}$ et $\dot{Y}$ il existe une carte de f qui soit un morphisme log-syntomique standard.

2.2. **Changement de base et composition.** On prouve la stabilité par changement de base et composition des morphismes log-syntomiques. On commence par quelques lemmes techniques mais faciles.

2.2.1.

Lemme 2.2.1.1. *Soient P',P et H trois monoïdes intègres, h un morphisme de monoïdes de P dans P', G un sous-groupe de* $P^{gp} \oplus H^{gp}$ *et* $\tilde{G}$ *son image dans* $P'^{gp} \oplus H^{gp}$. *Notons* $P' \oplus_P ((P \oplus H)/G)$ *la limite inductive du diagramme de monoïdes* $(P \oplus H)/G \leftarrow P \xrightarrow{h} P'$. *Si* $P' \oplus_P ((P \oplus H)/G)$ *est intègre, la projection* $Id \oplus h \oplus Id : P' \oplus P \oplus H \to P' \oplus H$ *induit un isomorphisme :*

$$P' \oplus_P ((P \oplus H)/G) \xrightarrow{\sim} (P' \oplus H)/\tilde{G}.$$

Preuve. — La surjectivité est évidente. On a par ailleurs un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} P' \oplus_P ((P \oplus H)/G) & \rightarrow & (P' \oplus H)/\tilde{G} \\ {\scriptstyle k}\downarrow & & {\scriptstyle l}\downarrow \\ P'^{gp} \oplus_{P^{gp}} ((P^{gp} \oplus H^{gp})/G) & \xrightarrow{\sim} & (P'^{gp} \oplus H^{gp})/\tilde{G} \end{array}$$

où k est injective par hypothèse. La commutativité du diagramme entraine que la flèche du bas est aussi injective, d'où le résultat. □

Lemme 2.2.1.2. *Soit B un anneau commutatif, Q et Q' deux monoïdes fins,* $\beta : Q \to B^\times$ *et* $\beta' : Q' \to B^\times$ *deux morphismes de monoïdes donnant la même structure logarithmique sur B. Alors en tout point de Spec B, il existe une B-algèbre étale B' et un sous-groupe de type fini G de* B'^* *tels qu'on ait un diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} Q' \oplus_{\beta'^{-1}(G)} G & \xrightarrow{\sim} & Q \oplus_{\beta^{-1}(G)} G \\ \downarrow & & \downarrow \\ B' & = & B' \end{array}$$

Preuve. — Soit $x \in Spec\ B$ et $\bar{x}$ un point géométrique au dessus de x. D'après l'énoncé, il existe un isomorphisme $Q \oplus_{\beta^{-1}(B^*_{\bar{x}})} B^*_{\bar{x}} \simeq Q' \oplus_{\beta'^{-1}(B^*_{\bar{x}})} B^*_{\bar{x}}$. On considère les deux sous-groupes de type fini de $B^*_{\bar{x}}$: $G_1 = (\beta(Q) \cap B^*_{\bar{x}})^{gp}$ et $G_2 = (\beta'(Q') \cap B^*_{\bar{x}})^{gp}$. Soient $q_1, ..., q_r$ des générateurs de Q, il existe $u_1, ..., u_r \in B^*_{\bar{x}}$ et $q'_1, ..., q'_r \in Q'$ tels que $q_i = q'_i \oplus u_i$ dans $Q' \oplus_{\beta'^{-1}(B^*_{\bar{x}})} B^*_{\bar{x}}$: on note H_1 le sous-groupe de $B^*_{\bar{x}}$ engendré par $u_1, ..., u_r$. Par le même raisonnement en inversant Q et Q', on construit $H_2 \subset B^*_{\bar{x}}$. Soit $G = G_1 G_2 H_1 H_2$, c'est un sous-groupe de type fini de $B^*_{\bar{x}}$; de plus $Q \oplus_{\beta^{-1}(G)} G$ est inclus dans $Q \oplus_{\beta^{-1}(B^*_{\bar{x}})} B^*_{\bar{x}}$ et son image dans $Q' \oplus_{\beta'^{-1}(B^*_{\bar{x}})} B^*_{\bar{x}}$ tombe dans $Q' \oplus_{\beta'^{-1}(G)} G$, d'où une injection $Q \oplus_{\beta^{-1}(G)} G \hookrightarrow Q' \oplus_{\beta'^{-1}(G)} G$, qui est aussi clairement surjective par choix de G. Comme G est de type fini dans $B^*_{\bar{x}}$, on peut trouver une extension étale B' de B au dessus de x telle que $G \subset B'^*$. □

On rappelle qu'un morphisme de monoïdes intègres $h : P \to Q$ est dit exact si $h^{gp} : P^{gp} \to Q^{gp}$ est tel que $(h^{gp})^{-1}(Q) = P$.

Lemme 2.2.1.3. *Soit* $h : P \to Q$ *un morphisme surjectif de monoïdes intègres et notons* P^* *(resp.* Q^**) les inversibles de P (resp. Q). Alors h est exact si et seulement si* $\bar{h} : P/P^* \to Q/Q^*$ *est un isomorphisme.*

Preuve. — Montrons $\Leftarrow$: soit $\dfrac{p}{p'} \in P^{gp}$ tel que $h^{gp}(\dfrac{p}{p'}) = q \in Q$. Par surjectivité, $q = h(p'')$, $p'' \in P$, donc $h^{gp}(\dfrac{p}{p'p''}) = 1$. Mais de l'hypothèse, on déduit immédiatement $\dfrac{P^{gp}}{P^*} \tilde{\to} \dfrac{Q^{gp}}{Q^*}$. D'où $\dfrac{p}{p'p''} = u \in P^*$, i.e. $\dfrac{p}{p'} = p''u \in P$.

Montrons $\Rightarrow$: il suffit de montrer l'injectivité, la surjectivité étant triviale. Soient p et p'

deux éléments de P tels que $\bar{h}(\bar{p}) = \bar{h}(\bar{p'})$ avec des notations évidentes, alors $h^{gp}(\frac{p}{p'}) \in Q^*$ et $h^{gp}(\frac{p'}{p}) \in Q^*$. Par exactitude, $\frac{p}{p'} \in P$ et de même $\frac{p'}{p} \in P$. D'où $\frac{p}{p'} \in P^*$. $\square$

LEMME 2.2.1.4. *Soit $h : P \to Q$ un morphisme surjectif exact de monoïdes intègres et g un élément régulier de Q^{gp} d'écriture simplifiée $g = \frac{q}{q'}$. Soient p et p' des relevés quelconques de q et q' dans P et $\hat{g} = \frac{p}{p'}$. Alors $\hat{g}$ est régulier d'écriture simplifiée $\frac{p}{p'}$.*

Preuve. — Il est clair d'abord que si $\hat{g}^n = 1$, $g^n = 1$ ce qui est impossible. Donc $\hat{g}$ est d'ordre infini dans P^{gp}. Soient $\hat{x}$ et $\hat{x'}$ dans P tels que $\frac{\hat{x}}{\hat{x'}} = \hat{g}$, on a $h(\hat{x}) = q_0 q$, $h(\hat{x'}) = q_0 q'$ pour un q_0 dans Q, d'où par exactitude $\hat{x} = u p_0 p$ et $\hat{x'} = v p_0 p'$ où p_0 est un relevé de q_0 dans P, $u, v \in P^*$. Enfin il est clair que $u = v$. $\square$

LEMME 2.2.1.5. *Soit $h : P \to Q$ un morphisme surjectif exact de monoïdes intègres et G un sous-groupe de Q^{gp}. Soit $\hat{G}$ un sous-groupe de P^{gp} tel que $h^{gp}(\hat{G}) = G$. Alors $\bar{h} : P/\hat{G} \to Q/G$ est un morphisme surjectif et exact de monoïdes intègres.*

Preuve. — La surjectivité est claire. Soient $p, p' \in P$ tels que $\bar{h}(\frac{\bar{p}}{\bar{p'}}) \in Q/G$ où $\bar{p}, \bar{p'}$ désignent les images de p et p' dans $P/\hat{G}$. Il existe q dans Q tel que $\bar{h}(\frac{\bar{p}}{\bar{p'}}) = \bar{q}$. Si $r \in P$ est tel que $h(r) = q$, on a $h(\frac{p}{rp'}) \in G$ i.e. il existe $\hat{g} \in \hat{G}$ tel que $h(\hat{g}) = h(\frac{p}{rp'})$. Par exactitude de h, on en déduit $\frac{\hat{g}rp'}{p} = u$ pour un u dans P^*, d'où $\bar{p} = \bar{r}\bar{p'}\bar{u}^{-1}$ dans $P/\hat{G}$, i.e. $\frac{\bar{p}}{\bar{p'}} \in P/\hat{G}$ ce qui montre l'exactitude. $\square$

LEMME 2.2.1.6. *Soient P,Q,R,S quatre monoïdes intègres avec un diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{k} & P \\ {\scriptstyle \hat{h}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ S & \xrightarrow{l} & Q \end{array}$$

où h est universellement intègre, k et l sont surjectifs et exacts. Alors $\hat{h}$ est universellement intègre.

Preuve. — Par ([Ka1],4.1), il suffit de montrer que pour tous r_1, r_2 dans R et s_1, s_2 dans S tels que $\hat{h}(r_1)s_1 = \hat{h}(r_2)s_2$, il existe $r_3, r_4 \in R$ et $s \in S$ tels que $r_1 r_3 = r_2 r_4$, $s_1 = \hat{h}(r_3)s$, $s_2 = \hat{h}(r_4)s$. Soient donc r_1, r_2, s_1, s_2 comme précédemment, on a $h(k(r_1))l(s_1) = h(k(r_2))l(s_2)$ et par intégrité de h (et [Ka1],4.1), il existe p_1, p_2 dans P et q dans Q tels que $k(r_1)p_1 = k(r_2)p_2, l(s_1) = h(p_1)q$ et $l(s_2) = h(p_2)q$. Soient r'_3, r'_4 dans R et s' dans S tels que $k(r'_3) = p_1, k(r'_4) = p_2$ et $l(s') = q$. Par exactitude de k et l, il existe u dans R^* et v, w dans S^* tels que $r_1 r'_3 = u r_2 r'_4, s_1 = v\hat{h}(r'_3)s', s_2 = w\hat{h}(r'_4)s'$. On a alors $v\hat{h}(r_1 r'_3) = w\hat{h}(r_2 r'_4)$, d'où $w = v\hat{h}(u)$ et en posant $r_3 = r'_3, r_4 = u r'_4, s = vs'$, on a le résultat. $\square$

LEMME 2.2.1.7. *Soit B un anneau muni d'une structure logarithmique fine donnée par une carte $\beta : Q \to B^\times$. Soit G un sous-groupe de type fini de B^*. Alors il existe un monoïde fin*

S et un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Q & = & Q \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow \\ S & \stackrel{s}{\to} & Q \oplus_{\beta^{-1}(G)} G \end{array}$$

tel que
(i) s est surjectif et exact
(ii) h est syntomique (2.1.9).

Preuve. — Soients $g_1, ..., g_r$ des générateurs de G, on pose :

$$\tilde{Q} = (Q \oplus \mathbf{N}x_1 \oplus \mathbf{N}x'_1 \oplus ... \oplus \mathbf{N}x_r \oplus \mathbf{N}x'_r)/ < x_i \oplus x'_i >$$

On a une surjection $\tilde{Q} \to Q \oplus_{\beta^{-1}(G)} G$ en envoyant x_i sur g_i et x'_i sur g_i^{-1}. Il est clair que le morphisme $Q \to \tilde{Q}$ est syntomique. D'autre part, $(\beta^{-1}(G))^{gp}$ est un sous-groupe de type fini de Q^{gp} ; notons $\dfrac{q_1}{q'_1}, ..., \dfrac{q_t}{q'_t}$ avec $q_i, q'_i \in \beta^{-1}(G)$ des générateurs et posons :

$$S = (\tilde{Q} \oplus \mathbf{N}y_1 \oplus ... \oplus \mathbf{N}y_t \oplus \mathbf{N}y'_1 \oplus ... \oplus \mathbf{N}y'_t)/ < y_i \oplus q_i, y'_i \oplus q'_i >$$

Il est facile de voir que le morphisme $\tilde{Q} \to S$ est syntomique (en fait, c'est ce que Kato appelle une localisation généralisée), par composition on en déduit que $h : Q \to S$ l'est aussi. On définit $s : S \to Q \oplus_{\beta^{-1}(G)} G$ en posant $s(y_i) = (\beta(q_i))^{-1}$ et $s(y'_i) = (\beta(q'_i))^{-1}$. Le morphisme s est surjectif et on vérifie aisément qu'on a un isomorphisme $S/S^* \simeq (Q \oplus_{\beta^{-1}(G)} G)/(Q \oplus_{\beta^{-1}(G)} G)^*$ ce qui montre par (2.2.1.3) que s est exact. $\square$

LEMME 2.2.1.8. *Soient P_1, P_2, S_1 trois monoïdes fins, $h : P_1 \to P_2$ syntomique et $k_1 : S_1 \to P_1$ surjectif et exact. Alors il existe un monoïde fin S_2 et des morphismes $\hat{h} : S_1 \to S_2$ et $k_2 : S_2 \to P_2$ tels que $\hat{h}$ est syntomique, k_2 est surjectif et exact et le diagramme :*

$$\begin{array}{ccc} S_1 & \stackrel{k_1}{\to} & P_1 \\ {\scriptstyle \hat{h}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ S_2 & \stackrel{k_2}{\to} & P_2 \end{array}$$

est commutatif.

Preuve. — Puisque h est syntomique, on peut écrire $P_2 = (P_1 \oplus \mathbf{N}x_1 \oplus ... \oplus \mathbf{N}x_r)/ < g_1, ..., g_s >$ où $(g_1, ..., g_s)$ est une suite régulière dans $P_1 \oplus \mathbf{N}x_1 \oplus ... \oplus \mathbf{N}x_r$ d'écriture simplifiée $g_i = \dfrac{p_i \oplus z_i}{p'_i \oplus z'_i}$ (voir la remarque qui suit (2.1.10)) avec $p_i, p'_i \in P_1$ et $z_i, z'_i \in \mathbf{N}x_1 \oplus ... \oplus \mathbf{N}x_s$. Soient s_i (resp. s'_i) des relevés des p_i (resp. p'_i) dans S_1 et $\hat{g}_i = \dfrac{s_i \oplus z_i}{s'_i \oplus z'_i} \in (S_1 \oplus \mathbf{N}x_1 \oplus ... \oplus \mathbf{N}x_r)^{gp}$. Soit $S_2 = (S_1 \oplus \mathbf{N}x_1 \oplus ... \oplus \mathbf{N}x_r)/ < \hat{g}_1, ..., \hat{g}_s >$ et $\hat{h}$ le morphisme canonique $S_1 \to S_2$. On pose $G_i =< g_1, ..., g_i >$ et $\hat{G}_i =< \hat{g}_1, ..., \hat{g}_i >$ (groupes engendrés). Comme il est clair que $S_1 \oplus \mathbf{N}x_1 \oplus ... \oplus \mathbf{N}x_r \to P_1 \oplus \mathbf{N}x_1 \oplus ... \oplus \mathbf{N}x_r$ est surjectif et exact, les morphismes $k_{2,i}$:

$$(S_1 \oplus \mathbf{N}x_1 \oplus ... \oplus \mathbf{N}x_r)/\hat{G}_i \to (P_1 \oplus \mathbf{N}x_1 \oplus ... \oplus \mathbf{N}x_r)/G_i$$

sont encore surjectifs et exacts par (2.2.1.5) et une récurrence immédiate à partir de (2.2.1.4) et (2.2.1.5) montre que $(\hat{g}_1, ..., \hat{g}_s)$ est une suite régulière dans $S_1 \oplus \mathbf{N}x_1 \oplus ... \oplus \mathbf{N}x_r$. En appliquant (2.2.1.6) à $P_1, (P_1 \oplus \mathbf{N}x_1 \oplus ... \oplus \mathbf{N}x_r)/G_i, S_1$ et $(S_1 \oplus \mathbf{N}x_1 \oplus ... \oplus \mathbf{N}x_r)/\hat{G}_i$, on voit que les morphismes $\hat{h}_i : S_1 \to (S_1 \oplus \mathbf{N}x_1 \oplus ... \oplus \mathbf{N}x_r)/\hat{G}_i$ sont universellement intègres. Il reste à voir l'injectivité de $\hat{h}$: soient s et s' dans S_1 tels que $\hat{h}(s) = \hat{h}(s')$, on a $h(k_1(s)) = h(k_1(s'))$ donc $k_1(s) = k_1(s')$ puisque h est injectif. Par exactitude de k_1, il existe u_1 dans S_1^* tel que

$s = u_1 s'$, donc $\hat{h}(u_1) = 1$ dans S_2^* i.e. $u_1 \in \hat{G} \subset (S_1 \oplus \mathbf{N}x_1 \oplus ... \oplus \mathbf{N}x_r)^{gp}$. On a donc $\alpha_1, ..., \alpha_s$ dans $\mathbf{Z}$ tels que $\hat{g_1}^{\alpha_1} ... \hat{g_s}^{\alpha_s} = u_1$, d'où $g_1^{\alpha_1} ... g_s^{\alpha_s} = k_1(u_1) = 1$ dans $(P_1 \oplus \mathbf{N}x_1 \oplus ... \oplus \mathbf{N}x_r)^{gp}$ ce qui n'est possible que si tous les α_i sont nuls (car $(g_1, ..., g_s)$ est une suite régulière). On a finalement $u_1 = 1$, ce qui montre l'injectivité et achève la preuve du lemme. □

Le lemme suivant (facile) est sûrement bien connu :

Lemme 2.2.1.9. *Soit B un anneau, $(b_1, ..., b_n, c_1, ..., c_m)$ une suite régulière dans B telle que $(c_1, ..., c_m)$ est aussi une suite régulière dans $B/(b_1, ..., b_i)$ pour tout i ($0 \leq i \leq n$). Alors $(c_1, ..., c_m, b_1, ..., b_n)$ est une suite régulière dans B.*

Preuve. — On fait une récurrence sur n.

- cas $n = 1$: on fait une sous-récurrence sur m : si $m = 1$, soit (b, c) une suite régulière. Soit $d \in B$ tel que $\bar{b}\bar{d} = 0$ dans B/c. Il existe $e \in B$ tel que $bd = ce$, i.e. $\bar{c}\bar{e} = 0$ dans B/b, donc $\bar{e} = 0$, i.e. il existe $f \in B$ tel que $e = bf$, d'où $b(d - cf) = 0$ et comme b est non diviseur de 0 dans B, on a $d = cf$ soit $\bar{d} = 0$ dans B/c et $\bar{b}$ est non diviseur de 0 dans B/c. Si de plus, c est non diviseur de 0 dans B, on a bien que (c, b) est une suite régulière. Si m est quelconque, par récurrence au cas $m - 1$, on a que $(c_1, ..., c_{m-1}, b, c_m)$ est une suite régulière et on applique le cas $m = 1$ à $(\bar{b}, \bar{c_m})$ dans $B/(c_1, ..., c_{m-1})$.
- cas $n \geq 1$: en appliquant le cas $n = 1$ à $(\bar{b_n}, \bar{c_1}, ..., \bar{c_m})$ dans $B/(b_1, ..., b_{n-1})$, on a que la suite $(b_1, ..., b_{n-1}, c_1, ..., c_m, b_n)$ est régulière. Par récurrence au cas $n - 1$, la suite $(c_1, ..., c_m, b_1, ..., b_{n-1})$ est encore régulière, et donc la suite $(c_1, ..., c_m, b_1, ..., b_n)$ est bien régulière. □

2.2.2.

Théorème 2.2.2.1. *(1) (changement de base) si $f : Y \to X$ est un morphisme log-syntomique, il en est de même de $f_{X'} : Y \times_X X'$ pour tout morphisme $X' \to X$ de log-schémas fins,*
(2) (composition) le composé de deux morphismes log-syntomiques est un morphisme log-syntomique.

Preuve. — **(1)** Etale localement, on a une carte de f qui est un morphisme log-syntomique standard (2.1.12) :

$$\begin{array}{ccc} P & \to & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ Q & \to & B \end{array}$$

et une carte du morphisme de changement de base :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{P} & \to & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ P' & \to & A' \end{array}$$

où la structure logarithmique sur A est engendrée par P et $\tilde{P}$. A priori $P \neq \tilde{P}$, mais quitte à prendre une extension étale de A, et les extensions étales sur B et A' correspondantes par changement de base classique, et quitte à modifier P', on se ramène par (2.2.1.2) au cas $\tilde{P} = P$. Il suffit donc de montrer que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} P' & \to & A' \\ \downarrow & & \downarrow \\ P' \oplus_P Q & \to & A' \otimes_A B \end{array}$$

est un morphisme log-syntomique standard (remarquons que $P' \oplus_P Q$ reste bien intègre). Il existe $r \in \mathbf{N}$ et un sous-groupe G de Q^{gp} tels que $Q = (P \oplus \mathbf{N}x_1 \oplus ... \oplus \mathbf{N}x_r)/G$ et que l'on peut trouver $(g_1 = \dfrac{p_1}{\tilde{p}_1}, ..., g_s = \dfrac{p_s}{\tilde{p}_s})$ une écriture simplifiée d'une suite régulière de générateurs de G. Soit $G_i = < g_1, ..., g_i >$, $Q_i = (P \oplus \mathbf{N}x_1 \oplus ... \oplus \mathbf{N}x_r)/G_i$, p'_i (resp. $\tilde{p}'_i$, resp. g'_i) l'image de p_i (resp. $\tilde{p}_i$, g_i) dans $(P' \oplus \mathbf{N}x_1 \oplus ... \oplus \mathbf{N}x_r)^{gp}$ et $G'_i = < g'_1, ..., g'_i >$. Comme, pour tout i, $\mathbf{Z}[P' \oplus_P Q_i] = \mathbf{Z}[P'] \otimes_{\mathbf{Z}[P]} \mathbf{Z}[Q_i]$ est une $\mathbf{Z}[P']$-algèbre plate par changement de base, les morphismes $P' \to P' \oplus_P Q_i$ sont injectifs et universellement intègres par (2.1.2). Par changement de base des morphismes syntomiques classiques, $(p'_1 - \tilde{p}'_1, ..., p'_s - \tilde{p}'_s)$ est une suite régulière dans $\mathbf{Z}[P'][X_1, ..., X_r]$, de plus pour tout i, on a par (2.2.1.1) $P' \oplus_P Q_i = (P' \oplus \mathbf{N}x_1 \oplus ... \oplus \mathbf{N}x_r)/G'_i$ et :

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}[P' \oplus_P Q_i] &= \mathbf{Z}[P'] \otimes_{\mathbf{Z}[P]} \mathbf{Z}[Q_i] \\ &= \mathbf{Z}[P'][X_1, ..., X_r]/(p'_1 - \tilde{p}'_1, ..., p'_i - \tilde{p}'_i) \\ &= \mathbf{Z}[P' \oplus_P Q_{i-1}]/(p'_i - \tilde{p}'_i) \end{aligned}$$

D'après (2.1.6), l'image de g'_i dans $P' \oplus_P Q_{i-1}$ est d'ordre infini et d'après (2.1.7), elle est simplifiable dans $P' \oplus_P Q_{i-1}$. Finalement, la suite $(g'_1, ..., g'_s)$ est bien régulière dans $P' \oplus \mathbf{N}x_1 \oplus ... \oplus \mathbf{N}x_r$ et le morphisme $P' \to P' \oplus_P Q$ est syntomique. Enfin, il est clair que $A' \otimes_A B$ est transversalement $(A', A' \otimes_{\mathbf{Z}[P']} \mathbf{Z}[P' \oplus_P Q])$-régulière (2.1.11) par le théorème de changement de base des morphismes syntomiques classiques.

(2) Etale localement, cela revient à considérer un diagramme de cartes :

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\alpha} & A \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow \\ Q & \xrightarrow{\beta} & B \\ & & \| \\ Q' & \xrightarrow{\beta'} & B \\ {\scriptstyle k}\downarrow & & \downarrow \\ R & \xrightarrow{\gamma} & C \end{array}$$

où les deux diagrammes commutatifs du bas et du haut correspondent à des morphismes log-syntomiques standards.

Première étape :
Quitte à localiser en B et en C, on peut supposer par (2.2.1.2) que le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Q' & \xrightarrow{\beta'} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ R & \xrightarrow{\gamma} & C \end{array}$$

se factorise sous la forme :

$$\begin{array}{ccccc} Q' & \longrightarrow & Q \oplus_{\beta^{-1}(G)} G & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ R & \longrightarrow & R \oplus_{Q'} (Q \oplus_{\beta^{-1}(G)} G) & \longrightarrow & C \end{array}$$

où G est un sous-groupe de type fini de B^*, où la structure logarithmique sur C est encore engendrée par $R \oplus_{Q'} (Q \oplus_{\beta^{-1}(G)} G)$ et où, par changement de base (1), la partie de droite du diagramme correspond encore à un morphisme log-syntomique standard. On est donc ramené à la situation suivante :

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\alpha} & A \\ h\downarrow & & \downarrow \\ Q \oplus_{\beta^{-1}(G)} G & \xrightarrow{\beta} & B \\ k\downarrow & & \downarrow \\ R' = R \oplus_{Q'} (Q \oplus_{\beta^{-1}(G)} G) & \xrightarrow{\gamma} & C \end{array}$$

mais où le diagramme du haut n'est pas forcément un morphisme log-syntomique standard.

Deuxième étape : En appliquant successivement (2.2.1.7) et (2.2.1.8), on construit deux monoïdes fins S et T tels qu'on ait un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} Q & & & & \\ k'\downarrow & \searrow & & & \\ S & \xrightarrow{s} & Q \oplus_{\beta^{-1}(G)} G & \xrightarrow{\beta} & B \\ \hat{k}\downarrow & & \downarrow k & & \downarrow \\ T & \xrightarrow{t} & R' & \xrightarrow{\gamma} & C \end{array}$$

où la log-structure sur C (resp. B) est encore engendrée par T (resp. S), où $k, \hat{k}$ et k' sont syntomiques et où s et t sont surjectifs exacts.
Si $M \to D^{\times}$ est un morphisme d'un monoïde M dans un anneau commutatif D, nous noterons dans la suite $\hat{f}$ l'application canonique $M \oplus \mathbf{N}x_1 \oplus ... \oplus \mathbf{N}x_r \to D[X_1, ..., X_r]$ telle que $\hat{f}(x_i) = X_i$.
Par définition, on peut écrire $R' = (Q \oplus_{\beta^{-1}(G)} G \oplus \mathbf{N}z_1 \oplus ... \oplus \mathbf{N}z_{r'})/ < g_1, ..., g_{s'} >$ où $(g_1 = \dfrac{q_1}{q_1'}, ..., g_{s'} = \dfrac{q_{s'}}{q_{s'}'})$ est une suite régulière sous forme simplifiée. Par définition, C s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} C &= B \otimes_{\mathbf{Z}[Q']} \mathbf{Z}[R][W_1, ..., W_{t'}]/(G_1, ..., G_{u'}) \\ &= B \otimes_{\mathbf{Z}[Q \oplus_{\beta^{-1}(G)} G]} \mathbf{Z}[R'][W_1, ..., W_{t'}]/(G_1, ..., G_{u'}) \end{aligned}$$

où $(G_1, ..., G_{u'})$ est (entre autre) une suite régulière. On peut donc écrire :

$$C = B[Z_1, ..., Z_{r'}, W_1, ..., W_{t'}]/(\hat{f}(q_1) - \hat{f}(q_1'), ..., \hat{f}(q_{s'}) - \hat{f}(q_{s'}'), G_1, ..., G_{u'}).$$

Pour simplifier les notations, notons $\hat{f}(g_i) = \hat{f}(q_i) - \hat{f}(q_i')$. Par la construction en (2.2.1.8), on a $T = (S \oplus \mathbf{N}z_1 \oplus ... \oplus \mathbf{N}z_{r'})/ < \hat{g}_1, ..., \hat{g}_s >$ où les $\hat{g}_i$ sont des relevés des g_i dans $(S \oplus \mathbf{N}z_1 \oplus ... \oplus \mathbf{N}z_{r'})^{gp}$, ou encore d'après la construction de S en (2.2.1.7) :

$$T = (Q \oplus \mathbf{N}y_1 \oplus \mathbf{N}y_1' \oplus ... \oplus \mathbf{N}x_1 \oplus \mathbf{N}x_1' \oplus ... \oplus \mathbf{N}z_1 \oplus ... \oplus \mathbf{N}z_{r'})/ < y_i \oplus \tilde{q}_i, y_i' \oplus \tilde{q}_i', x_j \oplus x_j', \hat{g}_1, ..., \hat{g_{s'}} >$$

en notant $\tilde{q}_i, \tilde{q}_i'$ certains éléments de Q d'image inversible dans B (voir preuve de (2.2.1.7)) et en notant encore $\hat{g}_i$ des relevés des g_i dans $(Q \oplus \mathbf{N}y_1 \oplus \mathbf{N}y_1' \oplus ... \oplus \mathbf{N}x_1 \oplus \mathbf{N}x_1' \oplus ... \oplus \mathbf{N}z_1 \oplus ... \oplus \mathbf{N}z_{r'})^{gp}$. D'où :

$$\begin{aligned} B \otimes_{\mathbf{Z}[Q]} \mathbf{Z}[T] &= B[Y_i, Y_i', X_j, X_j', Z_k]/(Y_i - (\beta(\tilde{q}_i))^{-1}, Y_i' - (\beta(\tilde{q}_i'))^{-1}, X_j X_j' - 1, \hat{f}(\hat{g}_k)) \\ &= B[X_1, X_1', ..., Z_1, ..., Z_{r'}]/(X_j X_j' - 1, \hat{f}(\hat{g}_k)) \end{aligned}$$

Dans la preuve de (2.2.1.7), les x_i ont pour image dans B des inversibles v_i, et il est facile de voir que toutes les B-algèbres :

$$B[X_1, X_1', ..., X_r, X_r', Z_1, ..., Z_{r'}]/(X_1 - v_1, ..., X_i - v_i, X_1 X_1' - 1, ..., X_r X_r' - 1, \hat{f}(\hat{g}_1), ..., \hat{f}(\hat{g_{s'}}))$$

sont encore syntomiques sur B, ce qui entraine par (2.2.1.9) que la suite

$$(X_1X_1'-1,...,X_rX_r'-1,\hat{f}(\hat{g_1}),...,\hat{f}(\hat{g_{s'}}),X_1-v_1,...,X_r-v_r)$$

est encore régulière. On déduit alors facilement que

$$C=B\otimes_{\mathbf{Z}[Q]}\mathbf{Z}[T][W_1,...,W_{t'}]/(X_1-v_1,...,X_r-v_r,G_1,...,G_{u'})$$

est transversalement $(B,B\otimes_{\mathbf{Z}[Q]}\mathbf{Z}[T])$-régulière. On est finalement ramené à la situation suivante (en posant $l=\hat{k}\circ k'$) :

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\alpha} & A \\ h\downarrow & & \downarrow \\ Q & \xrightarrow{\beta} & B \\ l\downarrow & & \downarrow \\ T & \xrightarrow{\gamma} & C \end{array}$$

où les deux carrés sont des morphismes log-syntomiques standards.

Troisième étape :
Il est clair d'abord que le morphisme composé $l\circ h:P\to T$ est syntomique. Par définition, B et C s'écrivent :

$$B=A\otimes_{\mathbf{Z}[P]}\mathbf{Z}[Q][V_1,...,V_v]/(F_1,...,F_{v'}),C=B\otimes_{\mathbf{Z}[Q]}\mathbf{Z}[T][W_1,...,W_w]/(G_1,...,G_{w'})$$

où $(F_1,...,F_{v'})$ et $(G_1,...,G_{w'})$ sont des suites régulières. Par définition, Q et T s'écrivent :

$$Q=(P\oplus\mathbf{N}x_1\oplus...\oplus\mathbf{N}x_r)/<f_1,...,f_{r'}>,T=(Q\oplus\mathbf{N}y_1\oplus...\oplus\mathbf{N}y_s)/<g_1,...,g_{s'}>$$

où $(f_1,...,f_{r'})$ et $(g_1,...,g_{s'})$ sont des suites régulières. On a :

$$\begin{aligned} B\otimes_{\mathbf{Z}[Q]}\mathbf{Z}[T] &= (A\otimes_{\mathbf{Z}[P]}\mathbf{Z}[Q][V_1,...,V_v]/(F_1,...,F_{v'}))\otimes_{\mathbf{Z}[Q]}\mathbf{Z}[Q][Y_1,...,Y_s]/(\hat{f}(g_1),...,\hat{f}(g_{s'})) \\ &= A\otimes_{\mathbf{Z}[P]}\mathbf{Z}[Q][V_1,...,V_v,Y_1,...,Y_s]/(F_1,...,F_{v'},\hat{f}(g_1),...,\hat{f}(g_{s'})) \end{aligned}$$

où la suite $(F_1,...,F_{v'},\hat{f}(g_1),...,\hat{f}(g_{s'}))$ est régulière par changement de base et composition des morphismes syntomiques classiques. Mais ce raisonnement s'applique à toutes les algèbres $A\otimes_{\mathbf{Z}[P]}\mathbf{Z}[Q][V_1,...,V_v]/(F_1,...,F_i)$, montrant que les suites $(F_1,...,F_i,\hat{f}(g_1),...,\hat{f}(g_{s'}))$ sont toutes régulières dans $A\otimes_{\mathbf{Z}[P]}\mathbf{Z}[Q][V_1,...,V_v,Y_1,...,Y_s]$. Par (2.2.1.9), la suite $(\hat{f}(g_1),...,\hat{f}(g_{s'}),F_1,...,F_{v'})$ est encore régulière et on voit facilement que les algèbres $B\otimes_{\mathbf{Z}[Q]}\mathbf{Z}[T]=A\otimes_{\mathbf{Z}[P]}\mathbf{Z}[T][V_1,...,V_v]/(F_1,...,F_{v'})$, puis C, sont transversalement $(A,A\otimes_{\mathbf{Z}[P]}\mathbf{Z}[T])$-régulières. Finalement, le morphisme composé est bien log-syntomique standard. □

Définition 2.2.2.2. *Soit X un log-schéma fin et soit $(\mathfrak{L}SF/X)$ la catégorie des log-schémas fins sur X. On définit la topologie log-syntomique sur $(\mathfrak{L}SF/X)$ en prenant comme recouvrements les familles de morphismes $(f_i:U_i\to T)_i$ (où T est un objet de $(\mathfrak{L}SF/X)$) satisfaisant les deux conditions suivantes :*
(1) f_i est log-syntomique,
(2) $\dot{T}=\bigcup_i f_i(\dot{U_i})$ (union ensembliste sur les espaces topologiques sous-jacents).

Dans la suite, on notera X_{SYN} la catégorie $(\mathfrak{L}SF/X)$ munie de la topologie log-syntomique.

3. Calcul de la cohomologie log-cristalline

Dans cette section, on calcule la cohomologie log-cristalline en utilisant le site log-syntomique, selon la voie inaugurée par Fontaine-Messing dans le cas classique ([FM]).

3.1. **Préliminaires.** Rappelons que W_n désigne l'anneau des vecteurs de Witt de longueur n à coefficients dans le corps parfait k de caractéristique $p > 0$ et que $W = \varprojlim W_n$. Pour la définition de la cohomologie cristalline à pôles logarithmiques des log-schémas fins puis des log-schémas intègres, nous renvoyons à [HK] et [Ka2]. Pour un schéma X et un élément $a \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, on note avec Kato ([Ka2],2.3.3) $\mathcal{L}(a)$ la log-structure fine associée à $\mathbf{N} \to \mathcal{O}_X, 1 \mapsto a$. Si $a \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^*$, on retrouve la log-structure triviale. Dans la théorie de Hyodo-Kato, deux bases logarithmiques apparaissent naturellement : $W_n \backslash \{0\} \to W_n^\times$ via $x \mapsto x$ et $W_n \backslash \{0\} \to W_n^\times$ via $x \mapsto x$ si x inversible et $x \mapsto 0$ sinon. On choisit une uniformisante π de W_n ce qui permet d'identifier les bases précédentes aux deux bases $(Spec\ W_n, \mathcal{L}(\pi))$, $(Spec\ W_n, \mathcal{L}(0))$. Soit $W_n{<}u{>}$ l'algèbre aux puissances divisées en u. On a un diagramme commutatif de P.D.-épaississements logarithmiques ([Ka1],5.2) :

$$\begin{array}{ccc} (Spec\ W_n{<}u{>}, \mathcal{L}(u)) & \xrightarrow{u \mapsto \pi} & (Spec\ W_n, \mathcal{L}(\pi)) \\ {\scriptstyle u\mapsto 0}\downarrow & & \downarrow \\ (Spec\ W_n, \mathcal{L}(0)) & \longrightarrow & (Spec\ k, \mathcal{L}(0)) \end{array}$$

(Kato note $W_n{<}t{>}$ dans [Ka2]. Nous utilisons plutôt u car t désigne un élément particulier de l'anneau A_{cris} de Fontaine et il peut y avoir des confusions quand on calcule la cohomologie log-cristalline de $\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\mathcal{O}_{\bar{K}_0}$ par rapport à la base $W_n{<}t{>}$, voir (6.3) ou [Br1]). Dans la suite, on note $(Spec\ k, L) = (Spec\ k, \mathcal{L}(0))$, $Spec\ k = (Spec\ k, \mathcal{L}(1))$ et S_n l'une des quatre bases $(Spec\ W_n{<}u{>}, \mathcal{L}(u))$, $(Spec\ W_n, \mathcal{L}(\pi))$, $(Spec\ W_n, \mathcal{L}(0))$ ou $(Spec\ W_n, \mathcal{L}(1))$.

Soit X un log-schéma fin sur $(Spec\ k, L)$ ou $Spec\ k$, on note $(X/S_n)_{CRIS}$ le site suivant ("gros" site cristallin fin) :
Les objets sont des paires $(U \hookrightarrow T, \delta)$ où U est un objet de $(\mathcal{L}SF/X)$, T un log-schéma fin sur S_n, $U \hookrightarrow T$ une immersion fermée exacte ([Ka1],3.1) sur S_n définie par un idéal J et δ une P.D.-structure sur J compatible avec la P.D.-structure de la base. Puisque $\mathcal{O}_T$ est annulé par une puissance de p, J est un nil-idéal. Les morphismes de $U' \hookrightarrow T'$ dans $U \hookrightarrow T$ sont des diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} U' & \hookrightarrow & T' \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \hookrightarrow & T \end{array}$$

où la flèche de droite est un P.D. morphisme. Les recouvrements de $U \hookrightarrow T$ sont les familles $(U_\alpha \hookrightarrow T_\alpha)_\alpha \longrightarrow (U \hookrightarrow T)$ telles que $(T_\alpha \to T)_\alpha$ est un recouvrement étale classique avec structures logarithmiques induites et telles que les diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha & \hookrightarrow & T_\alpha \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \hookrightarrow & T \end{array}$$

sont cartésiens. On appelle P.D. épaississements les objets de $(X/S_n)_{CRIS}$. On construit de même le site $(X/S_n)_{SYN-CRIS}$ en prenant les mêmes objets et morphismes mais avec des recouvrements $(U_\alpha \hookrightarrow T_\alpha)_\alpha \longrightarrow (U \hookrightarrow T)$ tels que $(T_\alpha \to T)_\alpha$ est un recouvrement log-syntomique (2.2.2.2) et que les diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha & \hookrightarrow & T_\alpha \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \hookrightarrow & T \end{array}$$

sont cartésiens. On note indifféremment $\mathcal{O}_{X/S_n}$ le faisceau structural sur ces sites et $H^i(X/S_n)$ les groupes de cohomologie du faisceau structural sur $(X/S_n)_{CRIS}$. Remarquons que Hyodo

et Kato définissent plutôt le "petit" site cristallin fin ([Ka1],5.2), mais les invariants cohomologiques sont les mêmes que ceux du "gros" site cristallin fin : la preuve est la même que dans ([Be],III.4) ; elle utilise essentiellement la fonctorialité du "petit" site cristallin fin établie dans ([Ka1],5.9). Si $X \to Spec\ k$ est un morphisme de schémas (qui peut-être vu comme un morphisme de log-schémas avec log-structures triviales), le petit site cristallin fin logarithmique par rapport à $(Spec\ W_n, \mathcal{L}(1))$ est égal au petit site cristallin classique par rapport à $Spec\ W_n$ et les groupes $H^i(X/(Spec\ W_n, \mathcal{L}(1)))$ précédents s'identifient donc à la cohomologie cristalline classique. Enfin, on note $\mathcal{O}_n^{st}$ (resp. $\mathcal{O}_n^{dR}$, resp. $\mathcal{O}_n^{HK}$, resp. $\mathcal{O}_n^{cris}$) le préfaisceau sur $(Spec\ k, L)_{SYN}$ (resp. sur $(Spec\ k, L)_{SYN}$, resp. sur $(Spec\ k, L)_{SYN}$, resp. sur $(Spec\ k)_{SYN}$) qui à X dans $(\mathcal{L}SF/(Spec\ k, L))$ (resp. dans $(\mathcal{L}SF/(Spec\ k, L))$, resp. dans $(\mathcal{L}SF/(Spec\ k, L))$, resp. dans $(\mathcal{L}SF/Spec\ k)$) associe $H^0(X/(Spec\ W_n{<}u{>}, \mathcal{L}(u)))$ (resp. $H^0(X/(Spec\ W_n, \mathcal{L}(\pi)))$, resp.
$H^0(X/(Spec\ W_n, \mathcal{L}(0)))$, resp. $H^0(X/Spec\ W_n)$) ("st" pour semi-stable, "dR" pour de Rham et "HK" pour Hyodo-Kato. La notation "dR" vient du fait que, si X est la réduction modulo p d'un log-schéma $\mathcal{X}$ log-lisse sur $(Spec\ W, \mathcal{L}(\pi))$, les groupes $\varprojlim H^i(X/(Spec\ W_n, \mathcal{L}(\pi))) \otimes_W K_0$ calculent la cohomologie de de Rham de $\mathcal{X} \times_W K_0$, voir [Ka1] et [HK]). Le symbole $*$ désignera dans la suite "st", "dR", "HK" ou "cris".

3.2. **Le faisceau des sections globales log-cristallines.** Rappelons le lemme suivant :

LEMME 3.2.1. *Soit A un anneau commutatif, $s : B \to A$ une immersion fermée définie par un nil-idéal et $C = A[X_1, ..., X_n]/(G_1, ..., G_r)$ une A-algèbre telle que $(G_1, ..., G_r)$ est une suite régulière et $A[X_1, ..., X_n]/(G_1, ..., G_i)$ est une A-algèbre plate pour tout i. Soient $\hat{G}_1, ..., \hat{G}_r$ des relevements des G_i dans $B[X_1, ..., X_n]$, alors $(\hat{G}_1, ..., \hat{G}_r)$ est une suite régulière et $B[X_1, ..., X_n]/(\hat{G}_1, ..., \hat{G}_i)$ est une B-algèbre plate pour tout i.*

Preuve. — Soit $\mathcal{M}$ un idéal maximal de A, par changement de base $A \to A/\mathcal{M}$, on en déduit (E.G.A.0,15.1.15) que $(\bar{G}_1, ..., \bar{G}_r)$ est une suite régulière dans $A/\mathcal{M}[X_1, ..., X_n]$. Comme les idéaux maximaux de B et A se correspondent et $B/s^{-1}(\mathcal{M}) \simeq A/\mathcal{M}$, on en déduit par des arguments classiques (voir par exemple ([Mi],I.2.5)) que $(\hat{G}_1, ..., \hat{G}_r)$ est une suite régulière et que pour tout i, la B-algèbre $B[X_1, ..., X_n]/(\hat{G}_1, ..., \hat{G}_i)$ est plate. $\square$

LEMME 3.2.2. *Soit X un log-schéma dans $(\mathcal{L}SF/(Spec\ k, L))$ (resp. $(\mathcal{L}SF/Spec\ k)$) et*

$$\begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & Y_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ (Spec\ k, L) & \hookrightarrow & S_n \end{array}$$

un P.D. épaississement de X (resp. avec $Spec\ k \hookrightarrow Spec\ W_n$). On peut localement relever les morphismes log-syntomiques sur X en morphismes log-syntomiques sur Y_n tels que le relevé (local) soit encore un P.D. épaississement.

Preuve. — Soit $f : Z \to X$ un morphisme log-syntomique (sur $(Spec\ k, L)$ ou $Spec\ k$). Etale localement, on a une carte de f :

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\alpha} & A \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow \\ Q & \xrightarrow{\beta} & B \end{array}$$

qui est un morphisme log-syntomique standard et une carte de l'immersion fermée exacte :

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\gamma} & C \\ {\scriptstyle k}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s} \\ P' & \to & A \end{array}$$

où C est un P.D. épaississement de A et où la structure logarithmique sur A est encore engendrée par R (elle est aussi engendrée par P et P'). En appliquant (2.2.1.2) à P, R et A et quitte à prendre une extension étale A' de A et l'extension étale C' de C correspondante, on se ramène à la situation :

$$\begin{array}{ccc} P \oplus_{\alpha^{-1}(G)} G & \stackrel{\alpha}{\to} & A' \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow \\ Q \oplus_P (P \oplus_{\alpha^{-1}(G)} G) & \stackrel{\beta}{\to} & B \otimes_A A' \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} R & \stackrel{\gamma}{\to} & C' \\ \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle s} \\ P \oplus_{\alpha^{-1}(G)} G & \stackrel{\alpha}{\to} & A' \end{array}$$

où G est un sous-groupe de type fini de A'^* contenant $(\alpha(P) \cap A'^*)^{gp}$, où $R \oplus_{(s\circ\gamma)^{-1}(G)} G \simeq P \oplus_{\alpha^{-1}(G)} G$ et où h est toujours syntomique par changement de base (2.2.2.1). Soit $\hat{G}$ un sous-groupe de type fini de C'^* tel que $s(\hat{G}) = G$ et tel que $(\gamma(R) \cap C'^*)^{gp} \subset \hat{G}$. L'application naturelle $R \oplus_{\gamma^{-1}(\hat{G})} \hat{G} \to P \oplus_{\alpha^{-1}(G)} G$ est surjective. De plus :

$$(R \oplus_{\gamma^{-1}(\hat{G})} \hat{G})/(R \oplus_{\gamma^{-1}(\hat{G})} \hat{G})^* = R/\gamma^{-1}(C'^*) = R/(s \circ \gamma)^{-1}(A'^*)$$
$$= (R \oplus_{(s\circ\gamma)^{-1}(G)} G)/(R \oplus_{(s\circ\gamma)^{-1}(G)} G)^* = (P \oplus_{\alpha^{-1}(G)} G)/(P \oplus_{\alpha^{-1}(G)} G)^*$$

ce qui montre par (2.2.1.3) qu'elle est aussi exacte. On est finalement ramené localement à la situation :

$$\begin{array}{ccc} P & \stackrel{\alpha}{\to} & A \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow \\ Q & \stackrel{\beta}{\to} & B \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} R & \stackrel{\gamma}{\to} & C \\ {\scriptstyle k}\downarrow & & \downarrow {\scriptstyle s} \\ P & \to & A \end{array}$$

où le diagramme du haut est un morphisme log-syntomique standard, où k est surjectif exact et où s est un P.D. épaississement de A. En appliquant (2.2.1.8) à P, Q et R, on construit un monoïde fin T, un morphisme $\hat{h} : R \to T$ syntomique et un morphisme $T \to Q$ surjectif et exact. D'autre part, par hypothèse B s'écrit $B = A \otimes_{\mathbf{Z}[P]} \mathbf{Z}[Q][X_1, ..., X_r]/(G_1, ..., G_s)$ avec $(G_1, ..., G_s)$ suite régulière ; soit $\hat{G}_i$ des relèvements des G_i dans $C \otimes_{\mathbf{Z}[R]} \mathbf{Z}[T][X_1, ..., X_r]$, $D = C \otimes_{\mathbf{Z}[R]} \mathbf{Z}[T][X_1, ..., X_r]/(\hat{G}_1, ..., \hat{G}_s)$ et $\hat{s}$ la surjection évidente $D \to B$. Par (3.2.1), D est transversalement $(C, C \otimes_{\mathbf{Z}[R]} \mathbf{Z}[T])$-régulière, ce qui entraine que le log-schéma $(Spec\ D, T)$ est log-syntomique standard sur $(Spec\ C, R)$ et que $ker(\hat{s})$ est encore muni de puissances divisées ([BO],3.21 et 3.22). Ceci achève la preuve du lemme. □

Comme dans ([FM],1.3), on a alors :

Corollaire 3.2.3. *Les préfaisceaux $\mathcal{O}_n^{st}$, $\mathcal{O}_n^{dR}$ et $\mathcal{O}_n^{HK}$ sont des faisceaux sur $(Spec\ k, L)_{SYN}$. Le préfaisceau $\mathcal{O}_n^{cris}$ est un faisceau sur $(Spec\ k)_{SYN}$.*

Preuve. — Nous donnons la preuve pour $(Spec\ k, L)$, le cas de $\mathcal{O}_n^{cris}$ étant similaire. Soit U un objet de $(Spec\ k, L)_{SYN}$ et $(U_i \to U)_i$ un recouvrement log-syntomique de U. Il s'agit de montrer l'exactitude de :

$$0 \to H^0(U/S_n) \to \prod_i H^0(U_i/S_n) \to \prod_{i,j} H^0(U_i \times_U U_j/S_n)$$

Soit $s \in H^0(U/S_n)$: s peut se décrire comme une famille compatible (s_T) où $V \hookrightarrow T$ est un objet de $(U/S_n)_{CRIS}$ et $s_T \in \Gamma(T, \mathcal{O}_T)$. Supposons que (s_T) a pour image 0 dans $\prod_i H^0(U_i/S_n)$. Soit $V \hookrightarrow T$ un objet de $(U/S_n)_{CRIS}$ et notons $V_i = U_i \times_U V$. Par (3.2.2), il existe $(\dot{W}_l)_l$ un sous-recouvrement étale des $\dot{V}_i$ sur lequel on peut relever $V \hookrightarrow T$ en $W_l \hookrightarrow T_l$, les T_l formant un recouvrement log-syntomique de T. Comme $\forall i, s_T \mapsto 0$ dans $H^0(U_i/S_n)$, on en déduit en particulier que $\forall l, res_{T_l,T}(s_T) = 0$, i.e. s_T=0 puisque $\mathcal{O}_T$ est un faisceau pour la topologie log-syntomique. Ceci est vrai pour tout $V \hookrightarrow T$, on a donc $s = 0$ dans $H^0(U/S_n)$, ce qui montre l'injectivité. L'exactitude de la deuxième flèche se prouve par un raisonnement similaire. □

3.3. **Comparaison des topoï log-syntomique et log-cristallin.** Pour passer du topos $\widetilde{(X/S_n)}_{CRIS}$ au topos $\widetilde{X}_{SYN}$, on utilise le topos intermédiaire $\widetilde{(X/S_n)}_{SYN-CRIS}$:

Lemme 3.3.1. *On a des morphismes de topoï :*

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{(X/S_n)}_{SYN-CRIS} & \xrightarrow{u} & \widetilde{X}_{SYN} \\ v \downarrow & & \\ \widetilde{(X/S_n)}_{CRIS} & & \end{array}$$

Preuve. — Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur $(X/S_n)_{SYN-CRIS}$ et $U \hookrightarrow T$ un objet de $(X/S_n)_{CRIS}$. On définit $v_*(\mathcal{F})(U \hookrightarrow T) = \mathcal{F}(U \hookrightarrow T)$ ($U \hookrightarrow T$ vu comme objet de $(X/S_n)_{SYN-CRIS}$). Soit $\mathcal{G}$ un faisceau sur $(X/S_n)_{CRIS}$, on définit un adjoint à gauche v^* de v_* comme le faisceau associé au préfaisceau : $(U \hookrightarrow T) \mapsto \mathcal{G}(U \hookrightarrow T)$ dans $(X/S_n)_{SYN-CRIS}$.
Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur $(X/S_n)_{SYN-CRIS}$ et U un objet de X_{SYN}. On définit $u_*(\mathcal{F})(U) = H^0_{SYN-CRIS}(U/S_n, \mathcal{F})$. Une démonstration strictement analogue à (3.2.3) montre que $u_*(\mathcal{F})$ est encore un faisceau sur X_{SYN}. Si $\mathcal{E}$ est un faisceau sur X_{SYN} et si $U \hookrightarrow T$ est un objet de $(X/S_n)_{SYN-CRIS}$, on définit $u^*(\mathcal{E})(U \hookrightarrow T) = \mathcal{E}(U)$. Il n'est pas difficile de voir que u^* est un adjoint à gauche de u_* qui commute aux limites projectives finies. □

Lemme 3.3.2. *Avec les notations précédentes, on a pour $i \geq 1$: $R^i v_* \mathcal{O}_{X/S_n} = 0$.*

Preuve. — On suit la méthode de ([BBM],1.1.19). On montre comme dans le cas classique que $R^i v_* \mathcal{O}_{X/S_n}$ est le faisceau sur $(X/S_n)_{CRIS}$ associé au préfaisceau $(U \hookrightarrow T) \mapsto H^i(T_{SYN}, \mathcal{O}_T)$. Il suffit de voir que $H^i(T_{SYN}, \mathcal{O}_T) = 0$ pour $i \geq 1$ et $\dot{T}$ affine. En recopiant la démonstration classique ([Mi],III.2.12), on se ramène à montrer que $\check{H}^i(\mathcal{U}/U, \mathcal{O}_U) = 0$ pour $i \geq 1$, pour tout objet U affine de T_{SYN} et pour tout recouvrement log-syntomique affine de U. Comme le faisceau $\mathcal{O}_U$ est indépendant des structures logarithmiques, et comme le schéma sous-jacent du produit fibré dans la catégorie des log-schémas log-syntomiques sur U s'identifie au produit fibré des schémas sous-jacents (2.2.2.1 (1)), le complexe de Čech logarithmique est égal au complexe de Čech classique (i.e. avec structures triviales). Mais ce dernier est acyclique en degré plus grand que 1 car les morphismes des schémas (affines) sous-jacents sont plats. □

On en déduit des isomorphismes canoniques et fonctoriels :

$$H^i\Big((X/S_n)_{SYN-CRIS}, \mathcal{O}_{X/S_n}\Big) \simeq H^i(X/S_n)$$

Lemme 3.3.3. *Avec les notations précédentes, on a pour $i \geq 1$: $R^i u_* \mathcal{O}_{X/S_n} = 0$.*

Preuve. — On sait que $R^iu_*\mathcal{O}_{X/S_n}$ est le faisceau sur X_{SYN} associé au préfaisceau $U \mapsto H^i(U/S_n)$ (3.3.2). Soit $s \in H^i(U/S_n)$, il s'agit de montrer qu'il existe un recouvrement log-syntomique $(U_\alpha \to U)_\alpha$ tel que $res_{U_\alpha,U}(s) = 0$ dans $H^i(U_\alpha/S_n)$. On fera la démonstration pour $(Spec\, k, L)$ (le cas $Spec\, k$ étant analogue) et on notera $\mathcal{O}(S_n) = \Gamma(S_n, \mathcal{O}_{S_n})$. Le problème étant local, on peut supposer que $\dot{U} = Spec\ A$, la log-structure étant donnée par $P \stackrel{\alpha}{\to} A^\times$ au dessus de $\mathbf{N} \to k$, où P est un monoïde fin. Soient $p_1, ..., p_r$ des générateurs de P et g l'image de $1 \in \mathbf{N}$ dans P. On considère la log-immersion fermée, où le log-schéma du haut est lisse sur S_n :

$$\begin{array}{ccc} Q = \mathbf{N}x_0 \oplus \mathbf{N}x_1 \oplus ... \oplus \mathbf{N}x_r & \stackrel{\beta}{\longrightarrow} & \mathcal{O}(S_n)[X_1, ..., X_r][T_a]_{a\in A} = B \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s} \\ P & \stackrel{\alpha}{\longrightarrow} & A \end{array}$$

où $h(x_j) = p_j$ ($j \geq 1$), $h(x_0) = g$, $s(X_j) = \alpha(h(x_j))$, $s(T_a) = a$, $\beta(x_j) = X_j$ et $\beta(x_0) = 0$, π ou u (suivant la base). Notons $Y = (Spec\ B, Q)$. Soit $h^{gp} : Q^{gp} \to P^{gp}$ et notons $B^{DP_{log}}$ l'enveloppe aux puissances divisées de $B \otimes_{\mathbf{Z}[Q]} \mathbf{Z}[h^{gp-1}(P)]$ par rapport à $Ker(B \otimes_{\mathbf{Z}[Q]} \mathbf{Z}[h^{gp-1}(P)] \longrightarrow A)$ compatible avec les puissances divisées sur S_n ([Ka1],4.10 (1) et 5.6). On sait que la cohomologie cristalline de U se calcule par le complexe ([Ka1],6.4) :

$$B^{DP_{log}} \to B^{DP_{log}} \otimes_B \omega^1_{Y/S_n} \to B^{DP_{log}} \otimes_B \omega^2_{Y/S_n} \to ...$$

et s peut donc être représentée par une i-forme fermée dans $B^{DP_{log}} \otimes_B \omega^i_{Y/S_n}$, i.e. comme une somme finie de termes de la forme $\zeta_{\alpha,\beta} \otimes dlog(x_{\alpha_1}) \otimes ... \otimes dlog(x_{\alpha_r}) \otimes dX_{\beta_1} \otimes ... \otimes dX_{\beta_s} \otimes dT_{\gamma_1} \otimes ... \otimes dT_{\gamma_t}$, $1 \leq \alpha_j \leq r$, $1 \leq \beta_j \leq r$, $\gamma_k \in A$. Soit $Q_n = \mathbf{N}x_0 \oplus \mathbf{N}x_1^{p^{-n}} \oplus ... \oplus \mathbf{N}x_r^{p^{-n}}$, $B_n = \mathcal{O}(S_n)[X_j^{p^{-n}}, T_{\gamma_k}^{p^{-n}}][T_a]_{\substack{a\in A \\ a\neq\gamma_k}}$ avec un morphisme évident $Q_n \to B_n$ et $Y_n = (Spec\ B_n, Q_n)$. Le log-schéma Y_n est log-lisse sur S_n et on a bien un recouvrement log-syntomique :

$$\begin{array}{ccc} Q_n & \longrightarrow & B_n \\ \uparrow & & \uparrow \\ Q & \longrightarrow & B \end{array}$$

avec des flèches évidentes. Il est alors clair que s a pour image 0 dans $H^i((Spec\ A, P) \times_Y Y_n/S_n)$ où $(Spec\ A, P) \times_Y Y_n$ est un recouvrement log-syntomique de $(Spec\ A, P)$. $\square$

Pour $* \neq$ dR, $\mathcal{O}_n^*$ est canoniquement muni d'un Frobenius, donc aussi les préfaisceaux $H^i_{SYN}(-, \mathcal{O}_n^*)$.

Corollaire 3.3.4. *Soit X un objet de $(\mathcal{L}SF/(Spec\, k, L))$ (ou $(\mathcal{L}SF/Spec\, k)$), alors pour tout $i \in \mathbf{N}$, $H^i(X_{SYN}, \mathcal{O}_n^*)$ est canoniquement et fonctoriellement isomorphe à $H^i(X/S_n)$, de façon compatible aux Frobenius si $* \neq dR$.*

Preuve. — Par (3.3.2) et (3.3.3), les suites spectrales de Leray associées aux morphismes de topoï en (3.3.1) dégénèrent, fournissant un isomorphisme canonique et fonctoriel $H^i(X_{SYN}, \mathcal{O}_n^*) \simeq H^i(X/S_n)$. La compatibilité aux Frobenius est formelle et laissée au lecteur. $\square$

4. Les préfaisceaux $W_n^{DP,*}$

On rappelle que $*$ désigne “st”, “dR”, “HK” ou “cris”. Dans cette section, il sera un peu fait usage de la cohomologie cristalline des log-schémas intègres sur une base qui est un log-schéma fin ([Ka2],2.4). Soit X un log-schéma intègre sur $(Spec\, k, L)$ (ou $Spec\, k$). On définit

le petit site cristallin intègre $(X/S_n)_{cris}$ comme la catégorie suivante :
Les objets sont les S_n-P.D. épaississements (voir section 3) :

$$\begin{array}{ccc} U & \hookrightarrow & T \\ \downarrow & & \\ X & & \end{array}$$

où U est étale sur X et muni de la log-structure induite et où T est un log-schéma intègre sur S_n. Les morphismes sont définis comme en 3 et les recouvrements sont pris pour la topologie étale avec structure logarithmique induite. On notera encore $H^i(X/S_n)$ les groupes de cohomologie du faisceau structural. Si X est fin, ces groupes coïncident avec les groupes définis dans la section précédente car le petit site cristallin intègre de X coïncide alors avec le petit site cristallin fin de X ([Ka2],2.4).

Nous allons utiliser les vecteurs de Witt pour construire des préfaisceaux ${W_n}^{DP,*}$ sur $(Spec\ k, L)_{SYN}$ (ou $(Spec\ k)_{SYN}$ si $* =$ cris) et un morphisme canonique de préfaisceaux ${W_n}^{DP,*} \to \mathcal{O}_n^*$.

4.1. **Un diagramme commutatif.** Soit :

$$\begin{array}{ccc} (Spec\ A, \mathcal{P}) & \hookrightarrow & (Spec\ B, \mathcal{Q}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (Spec\ k, L) & \hookrightarrow & S_n \end{array}$$

(ou avec $Spec\ k \hookrightarrow Spec\ W_n$) un diagramme commutatif de log-schémas intègres où la flèche du haut est un P.D.-épaississement. On note $\mathcal{P}(A)$ (resp. $\mathcal{Q}(B)$) les sections globales du faisceau de monoïde $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{Q}$), $\alpha : \mathcal{P}(A) \to A^\times$ (resp. $\beta : \mathcal{Q}(B) \to B^\times$) le morphisme de monoïdes et $s : B \to A$ la surjection sur les anneaux.

Lemme 4.1.1. *Avec les notations précédentes, le morphisme de monoïdes :*

$$\mathcal{Q}(B) \to \mathcal{Q}(B) \oplus_{(s\circ\beta)^{-1}(A^*)} A^*$$

est surjectif et exact.

Preuve. — La surjectivité est claire. Par (2.2.1.3), il suffit, pour montrer l'exactitude, de vérifier que :

$$\mathcal{Q}(B)/B^* \tilde{\to} (\mathcal{Q}(B) \oplus_{(s\circ\beta)^{-1}(A^*)} A^*)/A^*$$

c'est à dire $\mathcal{Q}(B)/\beta^{-1}(B^*) = \mathcal{Q}(B)/(s\circ\beta)^{-1}(A^*)$. Or, B est un P.D.-épaississement de A, d'où $s^{-1}(A^*) = B^*$ et $\beta^{-1}(B^*) = (s\circ\beta)^{-1}(A^*)$. □

Lemme 4.1.2. *Avec les notations précédentes, soient t et t' deux sections globales dans $\mathcal{Q}(B)$ qui donnent la même section dans $\mathcal{P}(A)$. Alors il existe $u \in B^*$ tel que t=ut' dans $\mathcal{Q}(B)$.*

Preuve. — Soient A' une A-algèbre étale et B' la B-algèbre étale correspondante. Puisque $(Spec\ A, \mathcal{P}) \hookrightarrow (Spec\ B, \mathcal{Q})$ est une immersion fermée exacte ([Ka1],3.1), le faisceau sur $(Spec\ A)_{ét}$ associé au préfaisceau $A' \mapsto \mathcal{Q}(B') \oplus_{(s'\circ\beta')^{-1}(A'^*)} A'^*$ redonne la structure logarithmique de A (avec des notations évidentes). On peut donc toujours trouver un recouvrement étale de $Spec\ A$: $(Spec\ A_i)_{i\in I}$ (auquel correspond un recouvrement étale $(Spec\ B_i)_{i\in I}$ de $Spec\ B$) tel que les images de t et de t' dans $\mathcal{Q}(B_i) \oplus_{(s_i\circ\beta_i)^{-1}(A_i^*)} A_i^*$ coïncident. Par (4.1.1), il existe $u_i \in B_i^*$ tel que $res_{B,B_i}(t) = u_i.res_{B,B_i}(t')$ dans $\mathcal{Q}(B_i)$. Les u_i se recollent et donnent une section globale u dans B^* telle que $t = ut'$ (et donc indépendante du recouvrement). □

Si P est un monoïde intègre quelconque, on notera ϕ le “Frobenius” $P \to P, x \mapsto x^p$ et $P^{(n)}$ l'exactifié de P par rapport à la puissance $n^{ième}$ de ϕ, i.e. $P^{(n)} = \{x \in P^{gp}/x^{p^n} \in P\}$.

On définit un morphisme de monoïdes $F_n : \mathcal{P}(A)^{(n)} \to \mathcal{Q}(B)$ de la façon suivante : soit t un élément de $\mathcal{P}(A)^{(n)}$. On peut toujours trouver un recouvrement étale de $Spec\ A$: $(Spec\ A_i)_{i\in I}$ (auquel correspond un recouvrement étale $(Spec\ B_i)_{i\in I}$ de $Spec\ B$) tel que t soit représenté par une collection convenable de $(t_i)_{i\in I}$ avec $t_i \in (\mathcal{Q}(B_i) \oplus_{(s_i\circ\beta_i)^{-1}(A_i^*)} A_i^*)^{gp}$ tel que $t_i^{p^n} \in \mathcal{Q}(B_i) \oplus_{(s_i\circ\beta_i)^{-1}(A_i^*)} A_i^*$ (avec des notations évidentes). Soit $\hat{t_i}$ un relevé de t_i dans $\mathcal{Q}(B_i)^{gp}$, alors $\hat{t_i}^{p^n}$ est indépendant du relevé $\hat{t_i}$ de t_i. De plus, par (4.1.1), $\hat{t_i}^{p^n}$ est en fait dans $\mathcal{Q}(B_i)$. Par recollement, on en déduit une section $F_n(t)$ dans $\mathcal{Q}$(B) et on vérifie qu'on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(A)^{(n)} & \xrightarrow{\alpha\circ\phi^n} & A \\ {\scriptstyle F_n}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle s} \\ \mathcal{Q}(B) & \xrightarrow{\beta} & B \end{array}$$

Soit $\hat{\sigma_n}$ (resp. σ_n) le morphisme $W_n(A) \to B$ (resp. $W_n(A) \to A$) qui à $(a_0, ..., a_{n-1})$ associe $\hat{\sigma_n}((a_0, ..., a_{n-1})) = \hat{a_0}^{p^n} + p\hat{a_1}^{p^{n-1}} + ... + \hat{a_{n-1}}^p$ où $\hat{a_0}, ..., \hat{a_{n-1}}$ sont des relevés quelconques de $a_0, ..., a_{n-1}$ dans B (resp. associe $\sigma_n((a_0, ..., a_{n-1})) = a_0{}^{p^n}$). Soit δ le morphisme de monoïdes : $\mathcal{P}(A) \to W_n(A),\ p \mapsto [\alpha(p)]$ (représentant de Teichmüller) qui fait de $W_n(A)$ une $\mathbf{Z}[\mathcal{P}(A)]$-algèbre. On laisse au lecteur le soin de vérifier le résultat suivant :

Proposition 4.1.3. *On a un diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{P}(A)^{(n)} & \xrightarrow{1\otimes Id} & W_n(A) \otimes_{\mathbf{Z}[\mathcal{P}(A)]} \mathbf{Z}[\mathcal{P}(A)^{(n)}] & \xrightarrow{\sigma_n\otimes(\alpha\circ\phi^n)} & A \\ {\scriptstyle F_n}\downarrow & & {\scriptstyle \hat{\sigma_n}\otimes(\beta\circ F_n)}\downarrow & & \| \\ \mathcal{Q}(B) & \xrightarrow{\beta} & B & \xrightarrow{s} & A \end{array}$$

Pour tout groupe commutatif G, on note $\mu_{p^n}(G)$ le sous-groupe des éléments dont l'ordre divise p^n. Supposons que l'on travaille avec $(Spec\ k, L)$ (on a alors un morphisme de monoïdes $\mathbf{N} \oplus k^* \to \mathcal{P}(A)$) et notons g_A (resp. g_B) l'image de $1 \in \mathbf{N}$ dans $\mathcal{P}(A)$ (resp. dans $\mathcal{Q}(B)$). On remarque que $F_n(g_A) = g_B^{p^n}$ puisque g_A est l'image de g_B dans $\mathcal{P}(A)$. De la suite exacte de groupes :

$$1 \to \mathbf{Z} \oplus k^* \to \mathcal{P}(A)^{gp} \to \mathcal{P}(A)^{gp}/(\mathbf{Z} \oplus k^*) \to 1$$

on déduit une suite exacte de groupes :

$$1 \to \mu_{p^n}(\mathcal{P}(A)^{gp}) \to \mu_{p^n}\Big(\mathcal{P}(A)^{gp}/(\mathbf{Z} \oplus k^*)\Big) \xrightarrow{\sigma} \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$$

Soit $\bar{t}$ dans $\mu_{p^n}\Big(\mathcal{P}(A)^{gp}/(\mathbf{Z}\oplus k^*)\Big)$. On voit facilement qu'il existe un unique représentant t de $\bar{t}$ dans $\mathcal{P}(A)^{gp}$ tel que $t^{p^n} = g_A^{\sigma(\bar{t})}$ (en voyant $\sigma(\bar{t})$ comme un entier entre 0 et $p^n - 1$). Puisque les deux sections $F_n(t)$ et $g_B^{\sigma(\bar{t})}$ de $\mathcal{Q}(B)$ ont même image dans $\mathcal{P}(A)$ $(= g_A^{\sigma(\bar{t})})$, il existe par (4.1.2) une unique unité u de B^* telle que $F_n(t) = u g_B^{\sigma(\bar{t})}$. On construit alors une application canonique $\bar{F_n} : \mu_{p^n}\Big(\mathcal{P}(A)^{gp}/(\mathbf{Z} \oplus k^*)\Big) \to B^*$ en posant $\bar{F_n}(\bar{t}) = u$. Le lecteur pourra vérifier la proposition facile suivante :

Proposition 4.1.4. *Avec les notations précédentes, $\bar{F_n}$ est un homomorphisme de groupes et $\bar{F_n}|_{\mu_{p^n}(\mathcal{P}(A)^{gp})} = (\beta \circ F_n)|_{\mu_{p^n}(\mathcal{P}(A)^{gp})}$.*

Remarque : Notons que la surjection canonique $\mu_{p^n}\Big(\mathcal{P}(A)^{gp}/\mathbf{Z}\Big) \to \mu_{p^n}\Big(\mathcal{P}(A)^{gp}/(\mathbf{Z} \oplus k^*)\Big)$ est un isomorphisme de groupes puisque k est un corps parfait de caractéristique p.

4.2. **Définition des préfaisceaux $W_n^{DP,*}$.**

4.2.1. Soit $\mathcal{P}_n(A)$ le monoïde intègre limite inductive du diagramme de monoïdes :

$$\begin{array}{ccc} \mu_{p^n}(\mathcal{P}(A)^{gp}) & \longrightarrow & \mathcal{P}(A)^{(n)} \\ \downarrow & & \\ \mu_{p^n}\Big(\mathcal{P}(A)^{gp}/(\mathbf{Z}\oplus k^*)\Big) & & \end{array}$$

et $I_{dR}^{(n)}$ (resp. $I_{HK}^{(n)}$) l'idéal de $W_n(A)\otimes_{\mathbf{Z}[\mathcal{P}(A)]}\mathbf{Z}[\mathcal{P}_n(A)]$ engendré par les éléments de la forme $1\otimes(h\oplus[\bar{h}^{-1}])-\pi$ (resp. $1\otimes(h\oplus[\bar{h}^{-1}])$) où h est une racine $p^{n^{ième}}$ de g_A dans $\mathcal{P}(A)^{(n)}$ ($I_{dR}^{(n)}=0$ et $I_{HK}^{(n)}=0$ s'il n'y en a pas). On définit :

$$\begin{array}{rcl} W_n^{st}(Spec\ A,\mathcal{P}) & = & W_n(A)\otimes_{\mathbf{Z}[\mathcal{P}(A)]}\mathbf{Z}[\mathcal{P}_n(A)] \\ W_n^{dR}(Spec\ A,\mathcal{P}) & = & W_n^{st}(Spec\ A,\mathcal{P})/I_{dR}^{(n)} \\ W_n^{HK}(Spec\ A,\mathcal{P}) & = & W_n^{st}(Spec\ A,\mathcal{P})/I_{HK}^{(n)} \\ W_n^{cris}(Spec\ A,\mathcal{P}) & = & W_n(A)\otimes_{\mathbf{Z}[\mathcal{P}(A)]}\mathbf{Z}[\mathcal{P}(A)^{(n)}] \end{array}$$

En (4.1.3), on a construit une flèche $\sigma_n\otimes(\alpha\circ\phi^n) : W_n^{cris}(Spec\ A,\mathcal{P})\to A$. On l'étend facilement en une flèche $W_n^{st}(Spec\ A,\mathcal{P})\to A$ en envoyant $\mu_{p^n}\Big(\mathcal{P}(A)^{gp}/(\mathbf{Z}\oplus k^*)\Big)$ sur 1. Pour $*=$ dR ou $*=$ HK, cette flèche passe au quotient $I_{dR}^{(n)}$ ou $I_{HK}^{(n)}$, car l'image de g_A est nulle dans A. On a finalement un morphisme canonique $W_n^*(Spec\ A,\mathcal{P})\to A$ et on définit $W_n^{DP,*}(Spec\ A,\mathcal{P})$ comme l'enveloppe aux puissances divisées (compatible avec celles sur W_n) de $W_n^*(Spec\ A,\mathcal{P})$ par rapport à l'idéal $Ker(W_n^*(Spec\ A,\mathcal{P})\to A)$. Nous allons construire des flèches $W_n^{DP,*}(Spec\ A,\mathcal{P})\to\mathcal{O}_n^*(Spec\ A,\mathcal{P})$ (4.2.2), montrer que cette construction est fonctorielle (4.2.3) puis recoller (4.2.4).

4.2.2. Considérons le cas $*=$ st seulement i.e. $S_n=(Spec\ W_n{<}u{>},\mathcal{L}(u))$, les autres cas étant analogues. Soit $(Spec\ B,\mathcal{Q})\hookrightarrow(Spec\ A,\mathcal{P})$ un S_n-P.D. épaississement (voir section 3). Par (4.1.3) et (4.1.4), on peut définir un morphisme canonique de W_n-algèbres $\hat{\sigma_n}\otimes F_n\otimes\bar{F_n}$: $W_n^{st}(Spec\ A,\mathcal{P})\to B$ qui par composition avec la surjection $s : B\to A$ redonne le morphisme en (4.2.1). Si A' est une A-algèbre étale et $(Spec\ A',\mathcal{P}|_{Spec\ A'})\hookrightarrow(Spec\ B',\mathcal{Q}')$ un P.D. épaississement, on définit $W_n^{st}(Spec\ A,\mathcal{P})\to B'$ comme le composé :

$$W_n^{st}(Spec\ A,\mathcal{P})\to W_n^{st}(Spec\ A',\mathcal{P}|_{Spec\ A'})\to B'$$

Si on a un diagramme commutatif de P.D. épaississements :

$$\begin{array}{ccc} (Spec\ A',\mathcal{P}|_{Spec\ A'}) & \hookrightarrow & (Spec\ B',\mathcal{Q}') \\ \downarrow & & \downarrow \\ (Spec\ A,\mathcal{P}) & \hookrightarrow & (Spec\ B,\mathcal{Q}) \end{array}$$

on vérifie facilement à partir des contructions en (4.1.3) et (4.1.4) que le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} W_n^{st}(Spec\ A',\mathcal{P}|_{Spec\ A'}) & \to & B' & \longrightarrow & A' \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ W_n^{st}(Spec\ A,\mathcal{P}) & \to & B & \longrightarrow & A \end{array}$$

est bien commutatif. Enfin, par universalité de l'enveloppe aux puissances divisées et de la limite projective, on déduit un morphisme canonique de W_n-algèbres : $W_n^{DP,*}(Spec\ A,\mathcal{P})\to\mathcal{O}_n^*(Spec\ A,\mathcal{P})$.

4.2.3. Soit $f : (Spec\ A, \mathcal{P}) \to (Spec\ C, \mathcal{R})$ un morphisme de log-schémas sur $(Spec\ k, L)$ (ou $Spec\ k$) tel que $(Spec\ C, \mathcal{R})$ est un log-schéma fin et $(Spec\ A, \mathcal{P})$ un log-schéma intègre. On a d'abord des morphismes de fonctorialité évidents : $W_n^{DP,*}(Spec\ C, \mathcal{R}) \to W_n^{DP,*}(Spec\ A, \mathcal{P})$. Par ([Ka2],2.4.2), puisque $(Spec\ C, \mathcal{R})$ est un log-schéma fin, à f est associé un morphisme de topoï f_{cris} du petit topos intègre de $(Spec\ A, \mathcal{P})$ vers le petit topos intègre (= fin) de $(Spec\ C, \mathcal{R})$, d'où on déduit un morphisme de fonctorialité $res_{C,A} : \mathcal{O}_n^*(Spec\ C, \mathcal{R}) \to \mathcal{O}_n^*(Spec\ A, \mathcal{P})$ caractérisé par le fait que si $s' = (s'_{T'})_{T'} \in \mathcal{O}_n^*(Spec\ C, \mathcal{R})$ et si on a un diagramme commutatif sur S_n :

$$\begin{array}{ccccc}
(Spec\ A, \mathcal{P}) & \overset{\acute{e}t}{\leftarrow} & U & \hookrightarrow & T \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
(Spec\ C, \mathcal{R}) & \overset{\acute{e}t}{\leftarrow} & U' & \hookrightarrow & T'
\end{array}$$

alors $s = res_{C,A}(s')$ est tel que s_T est l'image dans $\Gamma(T, \mathcal{O}_T)$ de $s'_{T'} \in \Gamma(T', \mathcal{O}_{T'})$. On déduit alors aisément à partir des constructions en (4.1.3) et (4.1.4) un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
W_n^*(Spec\ A, \mathcal{P}) & \to & \mathcal{O}_n^*(Spec\ A, \mathcal{P}) \\
\uparrow & & \uparrow \\
W_n^*(Spec\ C, \mathcal{R}) & \to & \mathcal{O}_n^*(Spec\ C, \mathcal{R})
\end{array}$$

On déduit la fonctorialité de la propriété universelle de l'enveloppe aux puissances divisées.

4.2.4. Pour tout log-schéma fin X sur $(Spec\ k, L)$ (ou sur $Spec\ k$) notons $\mathcal{O}(X)$ l'anneau des sections globales du faisceau structural, $\mathcal{P}(X)$ le monoïde des sections globales de la structure logarithmique et $\mathcal{P}_n(X)$ la limite inductive :

$$\mathcal{P}_n(X) = \mathcal{P}(X)^{(n)} \oplus_{\mu_{p^n}(\mathcal{P}(X)^{gp})} \mu_{p^n} \Big(\mathcal{P}(X)^{gp}/(\mathbf{Z} \oplus k^*)\Big)$$

On définit comme en (4.2) $W_n^{st}(X) = W_n(\mathcal{O}(X)) \otimes_{\mathbf{Z}[\mathcal{P}(X)]} \mathbf{Z}[\mathcal{P}_n(X)]$, $W_n^{dR}(X) = W_n^{st}(X)/I_{dR}^{(n)}$, $W_n^{HK}(X) = W_n^{st}(X)/I_{HK}^{(n)}$ et $W_n^{cris}(X) = W_n(\mathcal{O}(X)) \otimes_{\mathbf{Z}[\mathcal{P}(X)]} \mathbf{Z}[\mathcal{P}(X)^{(n)}]$. Comme en (4.2.1), on a un morphisme de W_n-algèbres $W_n^*(X) \to \mathcal{O}(X)$ et on note encore $W_n^{DP,*}(X)$ l'enveloppe aux puissances divisées par rapport au noyau (compatible avec les puissances divisées sur W_n). Par fonctorialité, on déduit un préfaisceau $X \mapsto W_n^{DP,*}(X)$ sur $(Spec\ k, L)_{SYN}$ (ou sur $(Spec\ k)_{SYN}$ si $* =$ cris) et on construit un morphisme de préfaisceaux $W_n^{DP,*} \to \mathcal{O}_n^*$ en recollant à droite pour la topologie étale sur X par (3.2.3) les morphismes locaux canoniques et fonctoriels en (4.2.2), (4.2.3).

5. Les faisceaux $\widetilde{W_n}^{DP,*}$

Notons $\widetilde{W_n}^{DP,*}$ le faisceau associé au préfaisceau $W_n^{DP,*}$ sur $(Spec\ k, L)_{SYN}$ (ou $(Spec\ k)_{SYN}$ si $* =$ cris). Dans cette section, nous montrons que les morphismes de faisceaux $\widetilde{W_n}^{DP,*} \to \mathcal{O}_n^*$ déduit des morphismes en (4.2.4) sont des isomorphismes.

5.1. **Calcul des sections globales log-cristallines lorsque le Frobenius est surjectif.** Soit A une k-algèbre munie d'une structure logarithmique intègre quasi-cohérente $\mathcal{P}$ associée à $\alpha : P \to A$ où P est un monoïde intègre. Dans le cas $(Spec\ k, L)$, on suppose qu'on a une carte :

$$\begin{array}{ccc}
P & \overset{\alpha}{\to} & A \\
\uparrow & & \uparrow \\
\mathbf{N} & \to & k
\end{array}$$

et on note $g \in P$ l'image de $1 \in \mathbf{N}$. Soit P_n la limite inductive du diagramme de monoïdes :

$$\begin{array}{ccc} \mu_{p^n}(P^{gp}) & \longrightarrow & P^{(n)} \\ \downarrow & & \\ \mu_{p^n}(P^{gp}/\mathbf{Z}) & & \end{array}$$

De façon similaire à (4.2), on note simplement $W^{st}_{n,P}(A) = W_n(A) \otimes_{\mathbf{Z}[P]} \mathbf{Z}[P_n]$, $W^{dR}_{n,P}(A) = W^{st}_{n,P}(A)/I^{(n)}_{dR}$, $W^{HK}_{n,P}(A) = W^{st}_{n,P}(A)/I^{(n)}_{HK}$ où $I^{(n)}_{dR}$ (resp. $I^{(n)}_{HK}$) est l'idéal de $W^{st}_{n,P}(A)$ engendré par les éléments $1 \otimes (h \oplus [\bar{h}^{-1}]) - \pi$ (resp. $1 \otimes (h \oplus [\bar{h}^{-1}])$) avec h racine $p^{n^{ième}}$ de g dans $P^{(n)}$ et $W^{cris}_{n,P}(A) = W_n(A) \otimes_{\mathbf{Z}[P]} \mathbf{Z}[P^{(n)}]$. On a une flèche canonique $W^*_{n,P}(A) \to W^*_n(Spec\ A, \mathcal{P})$ (déduite de $P \to \mathcal{P}(A)$) qui, par composition avec (4.2.1) et (4.2.2), donne des morphismes $W^*_{n,P}(A) \to A$ et $W^*_{n,P}(A) \to \mathcal{O}^*_n(Spec\ A, \mathcal{P})$. On note $W^{DP,*}_{n,P}(A)$ l'enveloppe aux puissances divisées (compatible avec les puissances divisées sur W_n) par rapport au noyau dans A.

Proposition 5.1.1. *Avec les notations précédentes, si le Frobenius est surjectif sur A et sur P alors le morphisme canonique :*

$$W^{DP,*}_{n,P}(A) \to \mathcal{O}^*_n(Spec\ A, \mathcal{P})$$

est un isomorphisme.

Preuve. — Nous démontrerons le résultat avec $* = $ st, les autres cas étant analogues. Munissons $W^{DP,st}_{n,P}(A)$ de la structure logarithmique associée à $P_n \to W^{DP,st}_{n,P}(A)$. Soit h une racine $p^{n^{ième}}$ de g dans $P^{(n)}$. L'élément $h \oplus \bar{h}^{-1}$ de P_n est indépendant de la racine choisie et on fait de $\left(Spec\ (W^{DP,st}_{n,P}(A)), P_n\right)$ un log-schéma au-dessus de $(Spec\ W_n{<}u{>}, \mathcal{L}(u))$ en envoyant $1 \in \mathbf{N}$ sur $h \oplus \bar{h}^{-1} \in P_n$ et u sur son image dans $W^{DP,st}_{n,P}(A)$ de façon compatible avec les puissances divisées. Le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} P_n & \to & W^{DP,st}_{n,P}(A) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{N} & \to & W_n{<}u{>} \end{array}$$

est alors commutatif. Si $(Spec\ B, \mathcal{Q})$ est un P.D. épaississement de $(Spec\ A, \mathcal{P})$ au dessus de $(Spec\ k, L) \hookrightarrow S_n$ (voir section 3), on vérifie qu'on a bien un diagramme commutatif *de log-schémas* :

$$\begin{array}{ccc} (Spec\ B, \mathcal{Q}) & \to & \left(Spec\ (W^{DP,st}_{n,P}(A)), P_n\right) \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_n & = & S_n \end{array}$$

ce qui donne en particulier un morphisme de $W_n{<}u{>}$-algèbres :

$$f : W^{DP,st}_{n,P}(A) \to \mathcal{O}^{st}_n(Spec\ A, \mathcal{P})$$

Comme le Frobenius est surjectif sur A, $W^{DP,st}_{n,P}(A)$ est un P.D. épaississement de A et le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} P_n & \to & W^{DP,st}_{n,P}(A) \\ \phi^n \downarrow & & \downarrow \\ P & \xrightarrow{\alpha} & A \end{array}$$

est commutatif. Avoir une immersion fermée exacte est équivalent à avoir $P_n \oplus_{(\alpha\circ\phi^n)^{-1}(A^*_{\bar{x}})} A^*_{\bar{x}} \longrightarrow P \oplus_{\alpha^{-1}(A^*_{\bar{x}})} A^*_{\bar{x}}$ surjectif et exact pour tout point géométrique $\bar{x}$. La surjectivité est claire car le Frobenius est surjectif sur P. Par (2.2.1.3), l'exactitude revient à voir que $P^{(n)}/(\alpha \circ \phi^n)^{-1}(A^*_{\bar{x}}) \xrightarrow{\sim} P/\alpha^{-1}(A^*_{\bar{x}})$. La surjectivité de cette dernière flèche est évidente et un rapide calcul (qui utilise aussi la surjectivité du Frobenius sur P) donne l'injectivité. De ceci, on déduit que $\left(Spec\ (W_{n,P}^{DP,st}(A)), P_n\right)$ est un P.D. épaississement de $(Spec\ A, \mathcal{P})$ et que l'on a un morphisme de $W_n\!<\!u\!>$-algèbres :

$$e : \mathcal{O}_n^{st}(Spec\ A, \mathcal{P}) \to W_{n,P}^{DP,st}(A)$$

projection de la limite projective sur l'une de ses composantes.
Par universalité de la limite projective, on a $f \circ e = Id$. Montrons que $e \circ f = Id$. Soit $\mathcal{P}_n(W_{n,P}^{DP,st}(A))$ les sections globales de la structure logarithmique sur $(Spec\ W_{n,P}^{DP,st}(A))_{ét}$, il est facile de voir en reprenant (4.1.3) que l'on a déjà des diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} W_n(A) & \xrightarrow{Id} & W_n(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ W_{n,P}^{DP,st}(A) & \xrightarrow{e\circ f} & W_{n,P}^{DP,st}(A) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} P^{(n)} & \xrightarrow{Id} & P^{(n)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{P}(A)^{(n)} & \xrightarrow{F_n} & \mathcal{P}_n(W_{n,P}^{DP,st}(A)) \end{array}$$

Enfin, soit $\bar{t} \in \mu_{p^n}(P^{gp}/\mathbf{Z})$, il existe $q, q' \in P$ tels que $(\frac{q}{q'})^{p^n} = g^m$ où $0 \leq m \leq p^n - 1$ et $(\frac{\bar{q}}{q'}) = \bar{t}$. Soit h une racine $p^{n^{ième}}$ de g dans $P^{(n)}$ et soit $\mu \in \mu_{p^n}(P^{gp})$ tel que $\frac{q}{q'} = \mu h^m$, par définition, $\bar{F}_n(\bar{t})$ est l'unique inversible de $\mathcal{P}_n(W_{n,P}^{DP,st}(A))$ tel que $\bar{F}_n(\bar{t}).(h \oplus \bar{h}^{-1})^m = \frac{q}{q'}$ i.e. :

$$\bar{F}_n(\bar{t}) = \mu \oplus \bar{h}^m = \overline{\mu h^m} = \bar{t}$$

ce qui achève la preuve. $\square$

5.2. **Description des $\mathcal{O}_n^*$ grâce aux $W_n^{DP,*}$.** Si Q est un monoïde intègre quelconque et A une k-algèbre quelconque avec un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Q & \to & A \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{N} & \to & k \end{array}$$

on notera $W_{n,Q}^{DP,st}(A)$ la W_n-algèbre construite comme en (5.1) en remplaçant P par Q (sans forcément associer à $Spec\ A$ la log-structure provenant de Q).

Théorème 5.2.1. *Avec les notations précédentes, le morphisme canonique de faisceaux :*

$$\widetilde{W_n}^{DP,*} \longrightarrow \mathcal{O}_n^*$$

déduit de (4.2.4) est un isomorphisme.

Preuve. — De même que précédemment, nous ne ferons la preuve que pour $* =$ st, les autres cas étant similaires. Soient $\mathcal{P}K$ (resp. $\mathcal{P}CK$) le préfaisceau noyau (resp. conoyau) du morphisme $W_n^{DP,st} \to \mathcal{O}_n^{st}$ et $\mathcal{K}$ (resp. $\mathcal{C}K$) le faisceau associé. Soit X dans $(\mathcal{L}SF/(Spec\ k, L))$, il s'agit de montrer que $\mathcal{K}(X) = 0 = \mathcal{C}K(X)$. Le problème étant local, on peut supposer que $\dot{X} = Spec\ A_0$ où A_0 est une k-algèbre et que la structure logarithmique est donnée par une carte $P_0 \xrightarrow{\alpha} A_0$ sur $\mathbf{N} \to k$ où P_0 est un monoïde fin. Soit $s \in \mathcal{P}K(Spec\ A_0, P_0)$ (resp. $\mathcal{P}CK(Spec\ A_0, P_0)$), il suffit de trouver un recouvrement log-syntomique de $(Spec\ A_0, P_0)$ sur lequel s s'annule.

Soient $p_1,...,p_r$ des générateurs de P_0 et $J=\{parties\ finies\ de\ A_0\}\times\mathbf{N}$. On munit J de l'ordre :

$$(\mathcal{E}_1,n_1)\leq(\mathcal{E}_2,n_2)\Leftrightarrow\mathcal{E}_1\subset\mathcal{E}_2\ et\ n_1\leq n_2$$

Pour $j=(\mathcal{E},n)\in J$, on construit un log-schéma $(Spec\ A_j,P_j)$ avec :

$$P_j=(P_0\oplus\mathbf{N}x_1\oplus...\oplus\mathbf{N}x_r)/(x_i^{p^n}=p_i)_{1\leq i\leq r}$$

$$A_j=A_0[X_1,...,X_r][X_a]_{a\in\mathcal{E}}/(X_i^{p^n}-\alpha(p_i),X_a^{p^n}-a)_{1\leq i\leq r,a\in\mathcal{E}}$$

et une flèche évidente $P_j\to A_j$. Si $j_1\leq j_2$, on a des morphismes de log-schémas évidents $(Spec\ A_{j_2},P_{j_2})\to(Spec\ A_{j_1},P_{j_1})$ qui sont des recouvrements log-syntomiques. On obtient ainsi un système filtrant tel que le Frobenius est surjectif sur $A=\varinjlim A_j$ et $P=\varinjlim P_j$. Munissons $Spec\ A$ de la log-structure associée à P, on a alors ([Ka2],2.4.3) :

$$\varinjlim\mathcal{O}_n^{st}(Spec\ A_j,P_j)=\mathcal{O}_n^{st}(Spec\ A,P).$$

Notons $\mathcal{P}_\infty=\varinjlim\mathcal{P}_j(A_j)$ (limite inductive des sections globales sur $(Spec\ A_j)_{\acute{e}t}$), les limites inductives filtrantes étant exactes et commutant aux puissances divisées, on a :

$$\varinjlim W_n^{DP,st}((Spec\ A_j,P_j))\simeq W_{n,\mathcal{P}_\infty}^{DP,st}(A)$$

et $\varinjlim W_{n,P_j}^{DP,st}(A_j)\simeq W_{n,P}^{DP,st}(A)$.

Soit $s\in\mathcal{P}K(Spec\ A_0,P_0)$, par définition, on a une suite exacte :

$$0\to\varinjlim\mathcal{P}K(Spec\ A_j,P_j)\to W_{n,\mathcal{P}_\infty}^{DP,st}(A)\to\mathcal{O}_n^{st}(Spec\ A,P)\to\varinjlim\mathcal{P}CK(Spec\ A_j,P_j)\to 0$$

Par fonctorialité (4.2.3), la flèche du milieu se factorise par :

$$W_{n,\mathcal{P}_\infty}^{DP,st}(A)\to W_n^{DP,st}(Spec\ A,P)\to\mathcal{O}_n^{st}(Spec\ A,P)$$

mais par (5.1.1), le morphisme composé :

$$W_{n,P}^{DP,st}(A)\to W_{n,\mathcal{P}_\infty}^{DP,st}(A)\to W_n^{DP,st}(Spec\ A,P)\to\mathcal{O}_n^{st}(Spec\ A,P)$$

est un isomorphisme, ce qui montre que la flèche $W_{n,\mathcal{P}_\infty}^{DP,st}(A)\to\mathcal{O}_n^{st}(Spec\ A,P)$ est surjective i.e. $\varinjlim\mathcal{P}CK(Spec\ A_j,P_j)=0$. Il existe donc $j_0\in J$ tel que :

$$res_{(Spec\ A_{j_0},P_{j_0}),(Spec\ A_0,P_0)}(s)=0$$

Supposons maintenant $s\in\mathcal{P}K(Spec\ A_0,P_0)\subset W_n^{DP,st}(Spec\ A_0,P_0)$. Soit t une section globale de $\mathcal{P}(A_0)^{gp}$, il existe un recouvrement étale affine $(Spec\ A_\lambda)_\lambda$ de $Spec\ A_0$ tel que $res_{A_0,A_\lambda}(t)$ ($\in\mathcal{P}(A_\lambda)^{gp}$) soit dans l'image de $P_0^{gp}\oplus_{(\alpha^{-1}(A_\lambda^*))^{gp}}A_\lambda^*$ i.e. $res_{A_0,A_\lambda}(t)$ est de la forme $\dfrac{p_\lambda}{p'_\lambda}\oplus u_\lambda$ dans $\mathcal{P}(A_\lambda)^{gp}$ où $p_\lambda,\ p'_\lambda\in P_0$ et $u_\lambda\in A_\lambda^*$. Si $t\in\mathcal{P}(A_0)^{(n)}$ (resp. $t^{p^n}\in Im(\mathbf{Z}\oplus k^*\to\mathcal{P}(A_0))$), quitte à prendre un sous-recouvrement, on peut supposer de plus que $(\dfrac{p_\lambda}{p'_\lambda})^{p^n}\oplus u_\lambda^{p^n}\in P_0\oplus_{\alpha^{-1}(A_\lambda^*)}A_\lambda^*$ (resp. $(\dfrac{p_\lambda}{p'_\lambda})^{p^n}\oplus u_\lambda^{p^n}\in Im(\mathbf{Z}\oplus k^*\to P_0\oplus_{\alpha^{-1}(A_\lambda^*)}A_\lambda^*)$). Dans l'écriture de s comme élément de $W_n^{DP,st}(Spec\ A_0,P_0)$, il n'y a qu'un nombre fini de sections $t\in\mathcal{P}(A_0)^{gp}$ qui interviennent et quitte à prendre un recouvrement étale de A_0 et à remplacer s par sa restriction sur ce recouvrement, on peut supposer par ce qui précède que ces sections sont dans $Im\Big(W_{n,P_0\oplus_{\alpha^{-1}(A_0^*)}A_0^*}^{DP,st}(A_0)\to W_n^{DP,st}(Spec\ A_0,P_0)\Big)$. Notons $g\in P$ l'image de $1\in\mathbf{N}$ et soit $t=\dfrac{q}{q'}\oplus u$ un élément de $P^{gp}\oplus_{(\alpha^{-1}(A^*))^{gp}}A^*$. Un calcul facile (qui utilise la surjectivité du Frobenius) permet de prouver :

i) si $t^{p^n}\in P\oplus_{\alpha^{-1}(A^*)}A^*$, alors on peut choisir dans l'écriture de t précédente $q,\ q'$ et u tels

que $\dfrac{q}{q'} \in P^{(n)}$,
ii) si $t^{p^n} = g^m \oplus v$ où $m \in \mathbf{Z}$ et $v \in k^*$ et si h désigne une racine $p^{n^{ième}}$ de g dans $P^{(n)}$, il existe $\mu \in \mu_{p^n}(P^{gp})$ et $\mu' \in \mu_{p^n}(A^*)$ tels que $t = (\mu \oplus \mu').(h^m \oplus v^{p^{-n}})$ dans $P^{gp} \oplus_{(\alpha^{-1}(A^*))^{gp}} A^*$. En appliquant ceci à l'image de s dans $W_n^{DP,st}(Spec\ A, P)$ (qui provient par hypothèse de $W^{DP,st}_{n,P\oplus_{\alpha^{-1}(A^*)}A^*}(A)$), on en déduit facilement que cette image provient en fait d'une section s' de $W_{n,P}^{DP,st}(A)$. Mais par hypothèse cette image devient nulle dans $\mathcal{O}_n^{st}(Spec\ A, P) \simeq W_{n,P}^{DP,st}(A)$, donc $s' = 0$, et à fortiori l'image de s est encore nulle dans $W^{DP,st}_{n,\mathcal{P}_\infty}(A) = \varinjlim(W_n^{DP,st}(Spec\ A_j, P_j))$, ce qui achève la preuve. $\square$

6. Frobenius et monodromie

Dans cette section, on définit sur $\widetilde{W_n}^{DP,st}$, $\widetilde{W_n}^{DP,HK}$ et $\widetilde{W_n}^{DP,cris}$ un opérateur de Frobenius et sur $\widetilde{W_n}^{DP,st}$ et $\widetilde{W_n}^{DP,HK}$ un opérateur de monodromie. On en déduit une suite exacte de faisceaux sur $(Spec\ k, L)_{SYN}$. On retrouve enfin un calcul de $\mathcal{O}_n^{st}$ dans un cas particulier important dû à Kato.

6.1. **Définition des opérateurs.** Soit X dans $(\mathcal{L}SF/(Spec\ k, L))$ (resp. $(\mathcal{L}SF/Spec\ k)$), on reprend les notations de (4.2.4) et on note g l'image de $1 \in \mathbf{N}$ dans $\mathcal{P}(X)$.
On construit $\phi : W_n^{DP,st}(X) \to W_n^{DP,st}(X)$ (resp. avec "HK" et "cris") de la manière suivante :

- ϕ est le Frobenius habituel $W_n(k)$-semi linéaire sur $W_n(\mathcal{O}(X))$
- on définit $\phi : \mathcal{P}_n(X) \to \mathcal{P}_n(X)$ par $\phi(s \oplus \bar{t}) = s^p \oplus \bar{t}^p$ si $s \in \mathcal{P}(X)^{(n)}$ et $\bar{t} \in \mu_{p^n}\Big(\mathcal{P}(X)^{gp}/(\mathbf{Z}\oplus k^*)\Big)$, on étend ϕ à $\mathbf{Z}[\mathcal{P}_n(X)]$ par $\mathbf{Z}$-linéarité, puis à $W_n(\mathcal{O}(X))\otimes_{\mathbf{Z}[\mathcal{P}(X)]} \mathbf{Z}[\mathcal{P}_n(X)]$ (resp. $(W_n(\mathcal{O}(X))\otimes_{\mathbf{Z}[\mathcal{P}(X)]}\mathbf{Z}[\mathcal{P}_n(X)])/I_{HK}$, resp. $(W_n(\mathcal{O}(X))\otimes_{\mathbf{Z}[\mathcal{P}(X)]}\mathbf{Z}[\mathcal{P}^{(n)}(X)])$), puis aux puissances divisées en posant $\phi(\gamma_i(x)) = \gamma_i(\phi(x))$.

Pour $* =$ st ou HK, on construit $N : W_n^{DP,*}(X) \to W_n^{DP,*}(X)$ de la manière suivante :

- sur $W_n^*(X)$, N est l'unique dérivation $W_n(\mathcal{O}(X))\otimes_{\mathbf{Z}[\mathcal{P}(X)]}\mathbf{Z}[\mathcal{P}(X)^{(n)}]$-linéaire telle que, si t est une racine $p^{nième}$ de g^m, $m \in \mathbf{Z}$, dans $\mathcal{P}(X)^{gp}$, on ait $N([\bar{t}]) = \bar{m}.[\bar{t}]$ où $\bar{m}$ désigne la classe de m dans $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ (indépendant du choix du représentant t)
- on étend N aux puissances divisées en posant $N(\gamma_i(x)) = \gamma_{i-1}(x)N(x)$.

Il est clair que ces constructions sont fonctorielles (i.e. sont des morphismes de préfaisceaux) et qu'on a la relation classique $N\phi = p\phi N$. Les deux opérateurs s'étendent alors aux faisceaux $\widetilde{W_n}^{DP,st} \overset{(5.2.1)}{\simeq} \mathcal{O}_n^{st}$ (resp. avec "HK" et "cris"), puis aux groupes de cohomologie $H^i(-/(Spec\ W_n < u >, \mathcal{L}(u)))$ (resp. $H^i(-/(Spec\ W_n, \mathcal{L}(0)))$, resp. $H^i(-/Spec\ W_n)$). On montre enfin facilement (par un calcul local et un passage à la limite inductive analogue à (5.2.1)) que l'isomorphisme en (5.2.1) commute aux Frobenius.

6.2. **Une suite exacte courte de faisceaux.** On a un morphisme de log-schémas évident $(Spec\ k, L) \to Spec\ k$ qui permet de voir $\mathcal{O}_n^{cris}$ comme un faisceau sur $(Spec\ k, L)_{SYN}$.

Proposition 6.2.1. *On a une suite exacte de faisceaux sur* $(Spec\ k, L)_{SYN}$:

$$0 \to \mathcal{O}_n^{cris} \to \mathcal{O}_n^{st} \xrightarrow{N} \mathcal{O}_n^{st} \to 0$$

Preuve. — On reprend les notations de (5.2.1). Le problème étant local, on considère localement le même système inductif $(P_j \to A_j)_{j \in J}$ que dans (5.2.1) et, en notant $A = \varinjlim A_j$ et $\mathcal{P}_\infty = \varinjlim \mathcal{P}_j(A_j)$, il suffit de montrer qu'on a une suite exacte de W_n-algèbres :

$$0 \to W^{DP,cris}_{n,\mathcal{P}_\infty}(A) \to W^{DP,st}_{n,\mathcal{P}_\infty}(A) \xrightarrow{N} W^{DP,st}_{n,\mathcal{P}_\infty}(A) \to 0$$

Soit g l'image de $1 \in \mathbf{N}$ dans $\mathcal{P}_\infty$. Pour toute racine $p^{n^{ième}}$ h de g dans $\mathcal{P}^{(n)}_\infty$, on a un isomorphisme (voir (6.3)) :

$$\begin{array}{cccc} \psi_{\bar{h}} : & W^{DP,cris}_{n,\mathcal{P}_\infty}(A)<X> & \xrightarrow{\sim} & \left(W^{cris}_{n,\mathcal{P}_\infty}(A) \otimes_{\mathbf{Z}[\mu_{p^n}(\mathcal{P}^{gp}_\infty)]} \mathbf{Z}[\mu_{p^n}(\mathcal{P}^{gp}_\infty/(\mathbf{Z} \oplus k^*))]\right)^{DP} \\ & X & \mapsto & [\bar{h}] - 1 \end{array}$$

(algèbre aux puissances divisées en l'indéterminée X), et il faut donc voir que la suite :

$$0 \to W^{DP,cris}_{n,\mathcal{P}_\infty}(A) \to W^{DP,cris}_{n,\mathcal{P}_\infty}(A)<X> \xrightarrow{N} W^{DP,cris}_{n,\mathcal{P}_\infty}(A)<X> \to 0$$

est exacte, où N est l'unique dérivation $W^{DP,cris}_{n,\mathcal{P}_\infty}(A)$-linéaire telle que $N(X) = 1 + X$. L'injectivité de gauche est évidente. Soit $x \in W^{DP,cris}_{n,\mathcal{P}_\infty}(A)<X>$ tel que $N(x) = 0$, il existe $m \in \mathbf{N}$ et $c_i \in W^{DP,cris}_{n,\mathcal{P}_\infty}(A), 0 \leq i \leq m$ tels que $x = \sum_{i=0}^{m} c_i \gamma_i(X)$. On a :

$$N(x) = (\sum_{i=1}^{m} c_i \gamma_{i-1}(X))(1 + X) = 0,$$

mais $1 + X$ est inversible, d'où $c_i = 0, 1 \leq i \leq m$ ce qui montre l'exactitude du milieu. Reste la surjectivité de droite : il suffit de relever 1 et les $\gamma_i(X), i \geq 1$. On remarque que $N(Log(1 + X)) = 1$. De la formule $N(\gamma_{i+1}(X)) = \gamma_i(X) + (i + 1)\gamma_{i+1}(X)$, on voit qu'il suffit de relever $(i + 1)\gamma_{i+1}(X)$. Une récurrence immédiate donne qu'il suffit de relever $(i + 1)(i + 2)...(i + k)\gamma_{i+k}(X),\ k \in \mathbf{N}^*$. Mais pour $k >> 0,\ (i + 1)...(i + k) = 0$. $\square$

On en déduit donc :

Corollaire 6.2.2. *Pour tout log-schéma X de $(\mathcal{L}SF/(Spec\ k, L))$, on a une suite exacte longue de cohomologie :*

$$... \to H^i(X/Spec\ W_n) \to H^i(X/(Spec\ W_n<u>, \mathcal{L}(u))) \xrightarrow{N} H^i(X/(Spec\ W_n<u>, \mathcal{L}(u))) \to ...$$

Remarque : Dans ([HK],3.6), Hyodo et Kato définissent un opérateur de monodromie sur $H^i(X/(Spec\ W_n, \mathcal{L}(0)))$ lorsque X est (log-)lisse sur $(Spec\ k, L)$. Il serait intéressant de voir si cet opérateur coïncide avec celui défini en (6.1) (dans le cas de (log-)lissité) ; voir aussi ([Ka2],4.2).

6.3. **L'algèbre $\widehat{A_{st}}$.** Nous retrouvons ici un calcul de Kato ([Ka2],3.9, $P_n = \widehat{A_{n,st}}$ dans nos notations). Soit $\bar{K}_0$ une clôture algébrique de $K_0 = FrW$ et $\mathcal{O}_{\bar{K}_0}$ l'anneau des entiers de $\bar{K}_0$. On rappelle que $A_{cris} = \varprojlim(\mathcal{O}^{cris}_n(Spec\ \mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\mathcal{O}_{\bar{K}_0})$ ([FM]). On munit $Spec\ \mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\mathcal{O}_{\bar{K}_0}$ de la log-structure associée à $\mathcal{O}_{\bar{K}_0}\backslash\{0\} \to \mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\mathcal{O}_{\bar{K}_0}$ et on choisit une uniformisante π de K_0. On a alors un morphisme de log-schémas :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\bar{K}_0}\backslash\{0\} & \to & \mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\mathcal{O}_{\bar{K}_0} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{N} & \to & k \end{array}$$

où 1 ($\in \mathbf{N}$) $\mapsto \pi$ ($\in \mathcal{O}_{\bar{K_0}}\backslash\{0\}$). Il est clair que le Frobenius est surjectif sur $\mathcal{O}_{\bar{K_0}}\backslash\{0\}$ et $\mathcal{O}_{\bar{K_0}}/p\mathcal{O}_{\bar{K_0}}$ et que $(\mathcal{O}_{\bar{K_0}}\backslash\{0\})^{(n)} = \mathcal{O}_{\bar{K_0}}\backslash\{0\}$. Notons $\widehat{A_{n,st}} = \mathcal{O}_n^{st}(Spec\ \mathcal{O}_{\bar{K_0}}/p\mathcal{O}_{\bar{K_0}}, \mathcal{O}_{\bar{K_0}}\backslash\{0\})$. Par (5.1.1), on a donc :

$$\widehat{A_{n,st}} \simeq \left(W_n(\mathcal{O}_{\bar{K_0}}/p\mathcal{O}_{\bar{K_0}}) \otimes_{\mathbf{Z}[\mu_{p^n}((\mathcal{O}_{\bar{K_0}}\backslash\{0\})^{gp})]} \mathbf{Z}\Big[\mu_{p^n}\Big((\mathcal{O}_{\bar{K_0}}\backslash\{0\})^{gp}/(\mathbf{Z}\oplus k^*)\Big)\Big]\right)^{DP}$$

Soit ξ_n une racine $p^{n^{i\grave{e}me}}$ de π dans $\mathcal{O}_{\bar{K_0}}$, alors :

$$\mu_{p^n}\Big((\mathcal{O}_{\bar{K_0}}\backslash\{0\})^{gp}/(\mathbf{Z}\oplus k^*)\Big) \simeq \mu_{p^n}((\mathcal{O}_{\bar{K_0}}\backslash\{0\})^{gp}) \oplus <1, \bar{\xi_n}, ..., \bar{\xi_n}^{p^n-1}>$$

et on a un isomorphisme $W_n(\mathcal{O}_{\bar{K_0}}/p\mathcal{O}_{\bar{K_0}})^{DP} < X > \simeq \widehat{A_{n,st}}$, $X \mapsto [\bar{\xi_n}] - 1$ avec $\phi(X) = (1+X)^p - 1$ et $N(X) = 1 + X$. Soit $\widehat{A_{st}} = \varprojlim \widehat{A_{n,st}}$, à tout système compatible $(\xi_n)_n$ de racines $p^{n^{i\grave{e}mes}}$ de π dans $\mathcal{O}_{\bar{K_0}}$, on peut finalement associer un isomorphisme $\widehat{A_{st}} \simeq \widehat{A_{cris}<X>}$ (complété p-adique de l'algèbre aux puissances divisées $A_{cris}<X>$).
Tant qu'on se limite aux seules structures sur $\widehat{A_{st}}$ données par ϕ et N (et aussi une action de Galois que nous ne définissons pas ici, voir [Br1]), $\widehat{A_{st}}$ ne dépend pas du choix de l'uniformisante π de W. En effet, soit π' une autre uniformisante et $v \in W^*$ tel que $\pi' = v.\pi$. Soit $(\xi'_n)_n$ un système compatible de racines $p^{n^{i\grave{e}mes}}$ de π' dans $\mathcal{O}_{\bar{K_0}}$ et $v_n = \xi'_n/\xi_n \in \mathcal{O}^*_{\bar{K_0}}$. Aux deux systèmes $(\xi_n)_n$ et $(\xi'_n)_n$ sont associés par ce qui précède deux isomorphismes : $\widehat{A_{st}}(\pi) \simeq \widehat{A_{cris}<X>}$ et $\widehat{A_{st}}(\pi') \simeq \widehat{A_{cris}<X'>}$. Soit $\bar{v}$ (resp. $\bar{v_n}$) la réduction modulo p de v (resp. v_n) et $[\bar{v}]$ (resp. $[\bar{v_n}]$) les représentants de Teichmüller correspondants dans $W_n(\mathcal{O}_{\bar{K_0}}/p\mathcal{O}_{\bar{K_0}})$. On a $[\bar{v}] \in W \hookrightarrow A_{cris}$ et $([\bar{v_n}]^{-1})_n \in A_{cris}$. On peut vérifier alors que l'isomorphisme A_{cris}-linéaire $\widehat{A_{cris}<X>} \to \widehat{A_{cris}<X'>}$ qui à X associe $[\bar{v}].([\bar{v_n}]^{-1})_n.(1+X')-1$ commute à ϕ, N et à l'action de Galois.

Remarque : On peut également définir sur $\widehat{A_{st}}$ une filtration qui dépend de π ([Br1]). L'isomorphisme précédent n'est plus alors forcément compatible aux filtrations.

APPENDICE : UN CALCUL LOCAL DE ČECH

On montre que la cohomologie (log-)cristalline de certaines algèbres affines de type fini se calcule comme la cohomologie à la Čech de certains recouvrements (log-)syntomiques.

Annexe A. Un calcul de Čech : cas classique

Cette section est pour l'essentiel indépendante de ce qui précède.

Soit k un corps de caractéristique p non nulle parfait et A une k-algèbre de type fini. Si $(a_1, ..., a_r)$ sont des générateurs de A comme k-algèbre, on note pour $m \in \mathbf{N}$:

$$A_m = A[X_1, ..., X_r]/(X_1^{p^m} - a_1, ..., X_r^{p^m} - a_r)$$

(A_m dépend donc des générateurs choisis). Pour toute k-algèbre B et pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $\mathcal{O}_n^{cris}(B) = H^0_{cris}(Spec\ B/Spec\ W_n)$. On sait que $\mathcal{O}_n^{cris}$ est un faisceau sur le (gros) site syntomique de $Spec\ k$ ([FM],II.1.3). Comme $Spec\ A_m$ est un recouvrement syntomique de $Spec\ A$, on peut considérer le complexe de Čech associé à ce recouvrement ([Mi],III.2) :

$$C^{\cdot}_{n,m} : \mathcal{O}_n^{cris}(A_m) \to \mathcal{O}_n^{cris}(A_m \otimes_A A_m) \to \mathcal{O}_n^{cris}(A_m \otimes_A A_m \otimes_A A_m) \to ...$$

On se propose de comparer la cohomologie des $C^{\cdot}_{n,m}$ avec la cohomologie cristalline de A.

A.1. **Calcul pour une limite inductive sur certains recouvrements syntomiques.** Nous ne faisons ici aucune hypothèse supplémentaire sur A.

PROPOSITION A.1.1. *Soit* $C^{\cdot}_{n,\infty} = \varinjlim_{m\geq n} C^{\cdot}_{n,m}$*, alors* $C^{\cdot}_{n,\infty}$ *calcule la cohomologie cristalline de* A*.*

Preuve. — Notons $(Spec\ A)_{SYN}$ le gros site syntomique de $Spec\ A$ ([FM],II.1.1) et soit $\mathcal{F}$ un préfaisceau sur $(Spec\ A)_{SYN}$, on note $C^{\cdot}_{n,m}(\mathcal{F})$ le complexe :

$$\mathcal{F}(A_m) \to \mathcal{F}(A_m \otimes_A A_m) \to \mathcal{F}(A_m \otimes_A A_m \otimes_A A_m) \to ...$$

et $C^{\cdot}_{n,m}(\mathcal{F}) = \varinjlim_{m\geq n} C^{\cdot}_{n,m}(\mathcal{F})$. Soient $\underline{H}^q(\mathcal{F})$ les foncteurs dérivés à droite du foncteur d'inclusion des faisceaux dans les préfaisceaux (sur $(Spec\ A)_{SYN}$). On a une suite spectrale ([Mi],III.2.7) :

$$H^p(C^{\cdot}_{n,\infty}(\underline{H}^q(\mathcal{O}_n^{cris}))) \Longrightarrow H^{p+q}_{cris}(Spec\ A/Spec\ W_n)$$

Comme pour toute k-algèbre B, on a $\underline{H}^q(\mathcal{O}_n^{cris})(B) = H^q_{cris}(Spec\ B/Spec\ W_n)$, et comme pour tout $i \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $q \geq 1$, on a :

$$\varinjlim_{m\geq n} H^q_{cris}(Spec\ (\underbrace{A_m \otimes_A ... \otimes_A A_m}_{i fois})/Spec\ W_n) = 0$$

(ceci découle d'un calcul immédiat avec un complexe de de Rham), le complexe $C^{\cdot}_{n,\infty}(\underline{H}^q(\mathcal{O}_n^{cris}))$ est nul dès que $q \geq 1$. La suite spectrale précédente dégénère trivialement et donne l'isomorphisme cherché. □

LEMME A.1.2. *Soit* $\mathcal{O}_n^{cris} \hookrightarrow \mathcal{I}$ *un plongement de* $\mathcal{O}_n^{cris}$ *dans un faisceau injectif sur* $(Spec\ A)_{SYN}$ *et* S *la projection de* $\mathcal{I}$ *sur le faisceau quotient* $\mathcal{O}_n^{cris}/\mathcal{I}$*. On suppose* $m \geq n$*. Alors :*

$$\forall s \in (\mathcal{O}_n^{cris}/\mathcal{I})(A), \exists\ t \in \mathcal{I}(A_m)\ tq\ S(A_m)(t) = res_{A,A_m}(s) \in (\mathcal{O}_n^{cris}/\mathcal{I})(A_m)$$

Preuve. — Si $\mathcal{F}$ est un faisceau sur $(Spec\ A)_{SYN}$, on note $H^i_{SYN}(A,\mathcal{F})$ ses groupes de cohomologie. On rappelle que $H^i_{SYN}(A,\mathcal{O}_n^{cris}) = H^i_{cris}(Spec\ A/Spec\ W_n)$ et, par un calcul à la de Rham, on en déduit facilement que pour $i \geq 1$ et $m \geq n$, la flèche $H^i_{SYN}(A,\mathcal{O}_n^{cris}) \to H^i_{SYN}(A_m,\mathcal{O}_n^{cris})$ est nulle (on tue les différentielles de A par les racines $p^{m^{ièmes}}$ si $m \geq n$). On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & H^0_{SYN}(A,\mathcal{O}_n^{cris}) & \to & H^0_{SYN}(A,\mathcal{I}) & \to & H^0_{SYN}(A,\mathcal{O}_n^{cris}/\mathcal{I}) & \xrightarrow{\delta} & H^1_{SYN}(A,\mathcal{O}_n^{cris}) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & H^0_{SYN}(A_m,\mathcal{O}_n^{cris}) & \to & H^0_{SYN}(A_m,\mathcal{I}) & \to & H^0_{SYN}(A_m,\mathcal{O}_n^{cris}/\mathcal{I}) & \xrightarrow{\delta_m} & H^1_{SYN}(A_m,\mathcal{O}_n^{cris}) & \to & 0
\end{array}$$

Soit $s \in H^0_{SYN}(A,\mathcal{O}_n^{cris}/\mathcal{I})$, alors par ce qui précède $res_{A_m,A}(\delta(s)) = 0$ dans $H^1_{SYN}(A_m,\mathcal{O}_n^{cris})$. Comme $\delta_m(res_{A_m,A}(s)) = res_{A_m,A}(\delta(s)) = 0$, on en déduit un t comme dans l'énoncé. □

Sans passer à la limite inductive, on a alors la :

PROPOSITION A.1.3. *Si* $m \geq n$*, on a :*

$$H^i(C^{\cdot}_{n,m}) = H^i_{cris}(Spec\ A/Spec\ W_n),\ \ i = 0,1$$

Preuve. — Le cas $i=0$ vient du fait que $\mathcal{O}_n^{cris}$ est un faisceau sur $(Spec\ A)_{SYN}$. Rappelons qu'un faisceau injectif est encore acyclique pour la cohomologie de Čech d'un recouvrement quelconque, i.e. $H^p(C^{\cdot}_{n,m}(\mathcal{I}))=0$ si $p\geq 1$. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{O}_n^{cris}(A_m) & \rightarrow & \mathcal{I}(A_m) & \rightarrow & (\mathcal{O}_n^{cris}/\mathcal{I})(A_m) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{O}_n^{cris}(A_m\otimes_A A_m) & \rightarrow & \mathcal{I}(A_m\otimes_A A_m) & \rightarrow & (\mathcal{O}_n^{cris}/\mathcal{I})(A_m\otimes_A A_m) \end{array}$$

où les lignes sont exactes. En utilisant (A.1.2), on déduit par un raisonnement classique un début de suite exacte longue :

$$0\rightarrow H^0(C^{\cdot}_{n,m}(\mathcal{O}_n^{cris}))\rightarrow H^0(C^{\cdot}_{n,m}(\mathcal{I}))\rightarrow H^0(C^{\cdot}_{n,m}(\mathcal{O}_n^{cris}/\mathcal{I}))\rightarrow H^1(C^{\cdot}_{n,m}(\mathcal{O}_n^{cris}))\rightarrow 0$$

car $H^1(C^{\cdot}_{n,m}(\mathcal{I}))=0$. On a finalement un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \rightarrow & H^0(C^{\cdot}_{n,\infty}(\mathcal{O}_n^{cris})) & \rightarrow & H^0(C^{\cdot}_{n,\infty}(\mathcal{I})) & \rightarrow & H^0(C^{\cdot}_{n,\infty}(\mathcal{O}_n^{cris}/\mathcal{I})) & \rightarrow & H^1(C^{\cdot}_{n,\infty}(\mathcal{O}_n^{cris})) & \rightarrow & 0 \\ & & \| & & \| & & \| & & \uparrow & & \\ 0 & \rightarrow & H^0(C^{\cdot}_{n,m}(\mathcal{O}_n^{cris})) & \rightarrow & H^0(C^{\cdot}_{n,m}(\mathcal{I})) & \rightarrow & H^0(C^{\cdot}_{n,m}(\mathcal{O}_n^{cris}/\mathcal{I})) & \rightarrow & H^1(C^{\cdot}_{n,m}(\mathcal{O}_n^{cris})) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

La flèche de droite est donc un isomorphisme, ce qui donne le résultat par (A.1.1). □

A.2. **Calcul pour un recouvrement syntomique particulier.** Nous faisons maintenant une hypothèse supplémentaire sur A :

Théorème A.2.1. *Soit A une k-algèbre de la forme $A=k[X_1,...,X_r]/(F_1,...,F_s)$ où $(F_1,...,F_s)$ est une suite régulière. Soit $A_m=A[Y_1,...,Y_r]/(Y_1^{p^m}-X_1,...,Y_r^{p^m}-X_r)$, alors si $m\geq n$ le complexe $C^{\cdot}_{n,m}$ précédent calcule la cohomologie cristalline de A.*

Soit A une k-algèbre de type fini quelconque et B une W_n-algèbre de type fini lisse telle qu'on ait une surjection $B\rightarrow A$. Soient $r\in\mathbf{N}$ et $b_1,...,b_r$ des générateurs de B sur W_n, on pose pour $m\in\mathbf{N}$, $B_m=B[Y_1,...,Y_r]/(Y_1^{p^m}-b_1,...,Y_r^{p^m}-b_r)$ et $A_m=A\otimes_B B_m$. Soit $(B^{\otimes^i})^{DP}$ l'enveloppe aux puissances divisées de $B^{\otimes^i}=\underbrace{B\otimes_{W_n}...\otimes_{W_n}B}_{i\ fois}$ par rapport au noyau $B^{\otimes^i}\rightarrow A$ (compatible avec les puissances divisées sur W_n). Nous obtiendrons (A.2.1) à partir de :

Théorème A.2.2. *Avec les notations précédentes, si pour tout m, B_m est une W_n-algèbre lisse et si pour tout i, $(B^{\otimes^i})^{DP}$ est une W_n-algèbre plate, alors le complexe $C^{\cdot}_{n,m}$ pour $m\geq n$ calcule la cohomologie cristalline de A.*

Pour le moment, supposons seulement B lisse sur W_n et notons $B_m^{\otimes^i}=\underbrace{B_m\otimes_{W_n}...\otimes_{W_n}B_m}_{i\ fois}$ et $(B_m^{\otimes^i})^{DP}$ l'enveloppe aux puissances divisées de $B_m^{\otimes^i}$ par rapport au noyau de $B_m^{\otimes^i}\rightarrow\underbrace{A_m\otimes_A...\otimes_A A_m}_{ifois}$ (avec la compatibilité habituelle). Soit $\widetilde{C^{\cdot}_{n,m}}$ le complexe :

$$(B_m)^{DP}\rightarrow(B_m^{\otimes^2})^{DP}\rightarrow(B_m^{\otimes^3})^{DP}\rightarrow...$$

où les flèches sont obtenues à partir des i projections de $Spec\ (B_m^{\otimes^i})$ sur $Spec\ (B_m^{\otimes^{i-1}})$. Notons de même $\widetilde{C^{\cdot}}$ le complexe de Čech : $(B)^{DP}\rightarrow(B^{\otimes^2})^{DP}\rightarrow...$: un résultat de Berthelot ([Be],V.1.2.5) nous dit que $\widetilde{C^{\cdot}}$ calcule la cohomologie cristalline de A. "Ecrivons" le complexe $\widetilde{C^{\cdot}_{n,m}}$ en fonction du complexe $\widetilde{C^{\cdot}}$.

Lemme A.2.3. *Avec les notations précédentes, on a :* $(B_m^{\otimes^i})^{DP} = (B^{\otimes^i})^{DP} \otimes_{B^{\otimes_i}} B_m^{\otimes^i}$.

Preuve. — Soit J_i le noyau de $B^{\otimes_i} \to A$. Comme B_m est plat sur B, on a une suite exacte :

$$0 \to B_m^{\otimes^i} \otimes_{B^{\otimes_i}} J_i \to B_m^{\otimes^i} \to B_m^{\otimes^i} \otimes_{B^{\otimes_i}} A \to 0$$

Mais $B_m^{\otimes^i} \otimes_{B^{\otimes_i}} J_i = B_m^{\otimes^i}.J_i$ et $B_m^{\otimes^i} \otimes_{B^{\otimes_i}} A = B_m \otimes_B ... \otimes_B B_m \otimes_B A = A_m \otimes_A ... \otimes_A A_m$, d'où $ker(B_m^{\otimes^i} \to A_m \otimes_A ... \otimes_A A_m) = ker(B^{\otimes_i} \to A).B_m^{\otimes^i}$. Le résultat découle de la platitude de $B_m^{\otimes^i}$ sur $B^{\otimes^i}$ et de ([BO],3.21). □

En tant que B-module, B_m s'écrit :

$$B_m = \bigoplus_{(n_1,...,n_r)\in I^r} B.Y_1^{n_1}...Y_r^{n_r}$$

où $I = \{0, 1, ..., p^m - 1\}$. De même, on a :

$$B_m^{\otimes^i} = \bigoplus_{(n_1^{(1)},...,n_r^{(1)};...;n_1^{(i)},...,n_r^{(i)})\in I^{ri}} B^{\otimes^i}.Y_1^{n_1^{(1)}}...Y_r^{n_r^{(1)}} \otimes Y_1^{n_1^{(2)}}...Y_r^{n_r^{(2)}} \otimes ... \otimes Y_1^{n_1^{(i)}}...Y_r^{n_r^{(i)}}$$

Soit $i \in \mathbf{N}^*$ et $\underline{n} = (n_1^{(1)}, ..., n_r^{(1)}; ...; n_1^{(i)}, ..., n_r^{(i)}) \in I^{ri}$ tel que $\sum_{j=1}^{j=r} n_j^{(k)} \neq 0$ pour tout k entre 1 et i. On note $\underline{Y}^{\underline{n}^{(k)}} = Y_1^{n_1^{(k)}}...Y_r^{n_r^{(k)}}$ et $\widetilde{C^{\cdot}_{\underline{n},i}}$ le complexe de Čech :

$$(B^{\otimes^i})^{DP}.\underline{Y}^{\underline{n}^{(1)}}\otimes...\otimes\underline{Y}^{\underline{n}^{(i)}} \xrightarrow{\delta^0} (B^{\otimes^{i+1}})^{DP}.1\otimes\underline{Y}^{\underline{n}^{(1)}}\otimes...\otimes\underline{Y}^{\underline{n}^{(i)}}\oplus(B^{\otimes^{i+1}})^{DP}.\underline{Y}^{\underline{n}^{(1)}}\otimes1\otimes...\otimes\underline{Y}^{\underline{n}^{(i)}}\oplus...$$

$$... \oplus (B^{\otimes^{i+1}})^{DP}.\underline{Y}^{\underline{n}^{(1)}} \otimes ... \otimes \underline{Y}^{\underline{n}^{(i)}} \otimes 1 \xrightarrow{\delta^1} (B^{\otimes^{i+2}})^{DP}.1 \otimes 1 \otimes \underline{Y}^{\underline{n}^{(1)}} \otimes ... \otimes \underline{Y}^{\underline{n}^{(i)}} \oplus ... \xrightarrow{\delta^3} ...$$

avec des morphismes de transition évidents. A partir du lemme (A.2.3) et du fait que les flèches de transition ne changent pas les exposants des Y_i, on remarque que $\widetilde{C^{\cdot}_{n,m}}$ est une somme directe de $\widetilde{C^{\cdot}}$ et des complexes $\widetilde{C^{\cdot}_{\underline{n},i}}$.

Lemme A.2.4. *Pour tout* $i \in \mathbf{N}^*$ *et tout* $\underline{n}$ *comme précédemment, le complexe* $\widetilde{C^{\cdot}_{\underline{n},i}}$ *est acyclique.*

Preuve. — Une composante de $\widetilde{C^{k}_{\underline{n},i}}$ est de la forme :

$$(B^{\otimes^{i+k}})^{DP}.\underbrace{1 \otimes 1... \otimes 1}_{l_0 fois 1}\otimes\underline{Y}^{\underline{n}^{(1)}} \otimes \underbrace{1 \otimes 1... \otimes 1}_{l_1 fois 1}\otimes\underline{Y}^{\underline{n}^{(2)}} \otimes ...$$

avec $l_j \geq 0$ et $\sum l_j = k$. Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, on construit une application additive $f^k : \widetilde{C^{k}_{\underline{n},i}} \to \widetilde{C^{k-1}_{\underline{n},i}}$ de la manière suivante (sur chaque composante) :
i) sur $(B^{\otimes^{i+k}})^{DP}.\underline{Y}^{\underline{n}^{(1)}} \otimes ...$ (i.e. si $l_0 = 0$), $f^k = 0$

$$ii)\ f^k : (B^{\otimes^{i+k}})^{DP}.\underbrace{1 \otimes 1... \otimes 1}_{\substack{l_0 fois 1\\ 1\leq l_0\leq k}}\otimes\underline{Y}^{\underline{n}^{(1)}} \otimes ... \to (B^{\otimes^{i+k-1}})^{DP}.\underbrace{1 \otimes 1... \otimes 1}_{\substack{l_0-1 fois 1\\ 1\leq l_0\leq k}}\otimes\underline{Y}^{\underline{n}^{(1)}} \otimes ...$$

$$\gamma_t(b_1\otimes...\otimes b_{i+k}).1\otimes...\otimes\underline{Y}^{\underline{n}^{(1)}}\otimes... \mapsto (-1)^{l_0+1}\gamma_t(b_1\otimes b_2...\otimes b_{l_0}b_{l_0+1}\otimes b_{l_0+2}\otimes...\otimes b_{i+k}).1\otimes...\otimes\underline{Y}^{\underline{n}^{(1)}}\otimes...$$

On va voir que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $f^{k+1}\delta^k + \delta^{k-1}f^k = Id$.
Sur

$$(B^{\otimes^{i+k}})^{DP}.\underbrace{1 \otimes 1 ... \otimes 1}_{\substack{l_0 fois 1 \\ 0 \leq l_0 \leq k}} \otimes \underline{Y}^{\underline{n}^{(1)}} \otimes ...$$

un calcul rapide donne (en ne notant pas les Y ni les puissances divisées γ_t pour alléger l'écriture) :

$$f^{k+1}\delta^k(b_1 \otimes ... \otimes b_{i+k}) = (-1)^{l_0+2}\Big(1 \otimes b_1 \otimes ... \otimes b_{l_0}b_{l_0+1} \otimes ... - b_1 \otimes 1 \otimes b_2 \otimes ... \otimes b_{l_0}b_{l_0+1} \otimes ... + ..$$

$$.. + (-1)^{l_0} b_1 \otimes ... \otimes b_{l_0} \otimes b_{l_0+1} \otimes ...\Big) \oplus (-1)^{l_0+1}\Big((-1)^{l_0+1} b_1 \otimes ... \otimes b_{l_0}b_{l_0+1} \otimes 1 \otimes ... + ..$$

$$.. + (-1)^{l_0+l_1+1} b_1 \otimes ... \otimes b_{l_0}b_{l_0+1} \otimes b_{l_0+2} \otimes ... \otimes b_{l_0+l_1+1} \otimes 1 \otimes ...\Big) \oplus (-1)^{l_0+1}\Big(...\Big) \oplus ...$$

et

$$\delta^{k-1}f^k(b_1 \otimes ... \otimes b_{i+k}) = (-1)^{l_0+1}\Big(1 \otimes b_1 \otimes ... \otimes b_{l_0}b_{l_0+1} \otimes ... - b_1 \otimes 1 \otimes b_2 \otimes ... \otimes b_{l_0}b_{l_0+1} \otimes ... + ..$$

$$.. + (-1)^{l_0-1} b_1 \otimes ... \otimes 1 \otimes b_{l_0}b_{l_0+1} \otimes ...\Big) \oplus (-1)^{l_0+1}\Big((-1)^{l_0} b_1 \otimes ... \otimes b_{l_0}b_{l_0+1} \otimes 1 \otimes ... + ..$$

$$.. + (-1)^{l_0+l_1} b_1 \otimes ... \otimes b_{l_0}b_{l_0+1} \otimes b_{l_0+2} \otimes ... \otimes b_{l_0+l_1+1} \otimes 1 \otimes ...\Big) \oplus (-1)^{l_0+1}\Big(...\Big) \oplus ...$$

et on vérifie facilement que dans la somme, il reste seulement le terme $(-1)^{l_0+2}(-1)^{l_0} b_1 \otimes ... \otimes b_{l_0} \otimes b_{l_0+1} \otimes ... = b_1 \otimes ... \otimes b_{i+k}$. Les f^k forment donc une homotopie contractante de $\widetilde{C^k_{\underline{n},i}}$ i.e. le complexe est acyclique. $\square$

Proposition A.2.5. *Le complexe $\widetilde{C^{\cdot}_{n,m}}$ calcule la cohomologie cristalline de A.*

Preuve. — On déduit de (A.2.4) que $\widetilde{C^{\cdot}_{n,m}}$ est quasi-isomorphe à $\widetilde{C^{\cdot}}$, i.e. calcule la cohomologie cristalline de A. $\square$

Proposition A.2.6. *Supposons que pour tout m, B_m est lisse sur W_n, alors il existe un morphisme (de complexes de groupes) canonique :*

$$\Phi^{\cdot} : C^{\cdot}_{n,m} \to \widetilde{C^{\cdot}_{n,m}}$$

Si $m \geq n$, $\Phi^{\cdot}$ est surjectif sur la cohomologie et si de plus $(B^{\otimes^i})^{DP}$ est une W_n-algèbre plate pour tout i, $\Phi^{\cdot}$ est un quasi-isomorphisme.

Preuve. — En vertu du théorème de comparaison de Berthelot entre cohomologie cristalline et cohomologie de de Rham, on sait que, si B_m est lisse, le noyau de la flèche :

$$d^i_m : (B_m^{\otimes^i})^{DP} \to (B_m^{\otimes^i})^{DP} \otimes_{B_m^{\otimes^i}} \Omega^1_{B_m^{\otimes^i}/W_n}$$

s'identifie canoniquement à $H^0_{cris}(Spec\ (\underbrace{A_m \otimes_A ... \otimes_A A_m}_{i\ fois})/Spec\ (W_n))$, d'où une injection canonique $\Phi^i : H^0_{cris}(Spec\ (A_m \otimes_A ... \otimes_A A_m)/Spec\ (W_n)) \hookrightarrow (B_m^{\otimes^i})^{DP}$ qui donne le morphisme $\Phi^{\cdot}$. Supposons $m \geq n$, en reprenant les notations de (A.2.4), on a :

$$(B_m^{\otimes^i})^{DP} = \bigoplus_{\underline{n} \in I^{ri}} (B^{\otimes^i})^{DP}.\underline{Y}^{\underline{n}^{(1)}} \otimes ... \otimes Y^{\underline{n}^{(i)}}$$

et la dérivation d^i_m n'est autre que la dérivation $(B^{\otimes^i})^{DP}$-linéaire par rapport aux variables $Y_k \otimes 1 \otimes ... \otimes 1, 1 \otimes Y_k \otimes ... \otimes 1, ..., 1 \otimes 1 \otimes ... \otimes Y_k, k \in \{1, ..., r\}$ (en effet, tout élément de $B^{\otimes^i}$

s'exprime dans $B_m^{\otimes^i}$ comme une somme de puissances $p^{m^{ièmes}}$ dont la différentielle est nulle si $m \geq n$). En particulier, le complexe de Čech :

$$\widetilde{C^{\cdot}} : (B)^{DP} \to (B^{\otimes^2})^{DP} \to ...$$

est un facteur direct du noyau de la différentiation, i.e. de $C^{\cdot}_{n,m}$. On a donc un diagramme $\widetilde{C^{\cdot}} \hookrightarrow C^{\cdot}_{n,m} \xrightarrow{\Phi^{\cdot}} \widetilde{C^{\cdot}_{n,m}}$ et par (A.2.5), on déduit la surjectivité de $\Phi^{\cdot}$ sur la cohomologie.
Supposons en plus que $(B^{\otimes^i})^{DP}$ est une W_n-algèbre plate, on a alors une suite exacte ($0 \leq k \leq n$) :

$$0 \to p^{n-k}(B^{\otimes^i})^{DP} \to (B^{\otimes^i})^{DP} \xrightarrow{p^k} p^k(B^{\otimes^i})^{DP} \to 0$$

Pour tout $l \in \{1, ..., m-1\}$, notons $E_l^{(i)}$ l'ensemble suivant :

$$E_l^{(i)} = \{\underline{n} \in I^{ri}, \underline{n} = (n_1^{(1)}, ..., n_r^{(1)}; ...; n_1^{(i)}, ..., n_r^{(i)}) / v_p(PGCD(n_k^{(j)})_{\substack{1 \leq k \leq r \\ 1 \leq j \leq i}}) = l\}$$

où v_p est la valuation p-adique. Comme $\{x \in (B^{\otimes^i})^{DP} / p^l x = 0\} = p^{n-l}(B^{\otimes^i})^{DP}$, on déduit :

$$ker(d_m^i) = \left(\bigoplus_{l \in \{1,...,m-1\}} p^{sup\{0,n-l\}} \Big(\bigoplus_{\underline{n} \in E_l^{(i)}} (B^{\otimes^i})^{DP}.\underline{Y}^{\underline{n}} \Big) \right) \oplus (B^{\otimes^i})^{DP}$$

Soient $l \in \{1, ..., m-1\}$ et $x \in p^{sup\{0,n-l\}} \Big(\bigoplus_{\underline{n} \in E_l^{(i)}} (B^{\otimes^i})^{DP}.\underline{Y}^{\underline{n}} \Big)$ tels qu'il existe

$y \in \bigoplus_{\underline{n} \in E_l^{(i-1)}} (B^{\otimes^{i-1}})^{DP}.\underline{Y}^{\underline{n}}$ tel que $\delta(y) = x$ (en notant δ la différentielle correspondante du complexe $\widetilde{C^{\cdot}_{n,m}}$). Pour montrer que $\Phi^{\cdot}$ est un quasi-isomorphisme, il faut montrer que, modulo un cobord, $y \in p^{sup\{0,n-l\}} \Big(\bigoplus_{\underline{n} \in E_l^{(i-1)}} (B^{\otimes^{i-1}})^{DP}.\underline{Y}^{\underline{n}} \Big)$. Si $l \geq n$, c'est évident, on suppose donc $1 \leq l \leq n-1$. Si on réduit modulo p, on a $\bar{\delta}(\bar{y}) = 0$ et comme

$$(B_m^{\otimes^i})^{DP} / p(B_m^{\otimes^i})^{DP} = (B_m^{\otimes^i} / pB_m^{\otimes^i})^{DP} = (B^{\otimes^i} / pB^{\otimes^i})^{DP} \otimes_{B^{\otimes^i}/pB^{\otimes^i}} B_m^{\otimes^i} / pB_m^{\otimes^i}$$

le lemme (A.2.4) avec $n = 1$ donne un élément $\bar{z} \in \bigoplus_{\underline{n} \in E_l^{(i-2)}} ((B/pB)^{\otimes^{i-2}})^{DP}.\underline{Y}^{\underline{n}}$ tel que $\bar{\delta}(\bar{z}) = \bar{y}$ (en notant $\bar{\delta}$ la différentielle correspondante). Soit z un relevé quelconque de $\bar{z}$ dans $\bigoplus_{\underline{n} \in E_l^{(i-2)}} (B^{\otimes^{i-2}})^{DP}.\underline{Y}^{\underline{n}}$, il existe $w \in \bigoplus_{\underline{n} \in E_l^{(i-1)}} (B^{\otimes^{i-1}})^{DP}.\underline{Y}^{\underline{n}}$ tel que $y = \delta(z) + pw$ d'où $x = \delta(y) = p\delta(w)$. Si $n - l = 1$, alors en remplacant y par pw, c'est fini, sinon de $p^l.x = 0$ et de la suite exacte ci-dessus, on tire $\delta(w) \in p^{n-l-1} \Big(\bigoplus_{\underline{n} \in E_l^{(i)}} (B^{\otimes^i})^{DP}.\underline{Y}^{\underline{n}} \Big)$, i.e. en réduisant modulo p, on a $\bar{\delta}(\bar{w}) = 0$ et on peut recommencer le raisonnement précédent. Une récurrence immédiate donne alors un y dans $p^{n-l} \Big(\bigoplus_{\underline{n} \in E_l^{(i-1)}} (B^{\otimes^{i-1}})^{DP}.\underline{Y}^{\underline{n}} \Big)$ tel que $\delta(y) = x$. □

Remarque 1 : Supposons $m \geq n$, on a :

$$B_m^{DP} \otimes_{B_m} \Omega^1_{B_m/W_n} = \bigoplus_{j \in \{1,...,r\}} B_m^{DP}.dY_j$$

$$(B_m^{\otimes^2})^{DP} \otimes_{B_m^{\otimes 2}} \Omega^1_{B_m^{\otimes 2}/W_n} = \bigoplus_{j\in\{1,...,r\}} (B_m^{\otimes^2})^{DP}.d(Y_j \otimes 1) \oplus \bigoplus_{j\in\{1,...,r\}} (B_m^{\otimes^2})^{DP}.d(1 \otimes Y_j)$$

et la flèche $B_m^{DP} \otimes_{B_m} \Omega^1_{B_m/W_n} \to (B_m^{\otimes^2})^{DP} \otimes_{B_m^{\otimes 2}} \Omega^1_{B_m^{\otimes 2}/W_n}$ est injective, puisque les deux flèches canoniques $(B_m)^{DP} \to (B_m^{\otimes^2})^{DP}, \gamma_t(b) \mapsto \gamma_t(b\otimes 1), \gamma_t(b) \mapsto \gamma_t(1\otimes b)$ le sont. Soit $x \in (B_m^{\otimes^2})^{DP}$ tel que $dx = 0$ dans $(B_m^{\otimes^2})^{DP} \otimes_{B_m^{\otimes 2}} \Omega^1_{B_m^{\otimes 2}/W_n}$ et tel que $\delta(x) = 0$ dans $(B_m^{\otimes^3})^{DP}$ (δ est la différentielle du complexe $\widetilde{C^{\cdot}_{n,m}}$). Soit $y \in (B_m)^{DP}$ tel que $\delta(y) = x$, du diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (B_m)^{DP} & \stackrel{\delta}{\to} & (B_m^{\otimes^2})^{DP} \\ d\downarrow & & \downarrow d \\ B_m^{DP} \otimes_{B_m} \Omega^1_{B_m/W_n} & \stackrel{\delta}{\hookrightarrow} & (B_m^{\otimes^2})^{DP} \otimes_{B_m^{\otimes 2}} \Omega^1_{B_m^{\otimes 2}/W_n} \end{array}$$

on déduit $d\delta(y) = 0 = \delta d(y)$ donc $d(y) = 0$ par injectivité, ce qui montre que la flèche $H^1(C^{\cdot}_{n,m}) \to H^1(\widetilde{C^{\cdot}_{n,m}}) \simeq H^1_{cris}(Spec\ A/Spec\ W_n)$ est toujours injective. Mais par (A.2.6), elle est aussi surjective (on peut toujours prendre pour B et B_m des anneaux de polynômes sur W_n) : on retrouve ainsi le résultat de (A.1.3)

Remarque 2 : Un passage à la limite inductive donne :

$$\varinjlim_m C^{\cdot}_{n,m} \stackrel{\sim}{\to} \varinjlim_m \widetilde{C^{\cdot}_{n,m}}$$

car $\varinjlim_m((B_m^{\otimes^i})^{DP} \otimes_{B_m^{\otimes i}} \Omega^1_{B_m^{\otimes i}/W_n}) = 0$, ce qui en vertu de (A.2.5) redonne le résultat de (A.1.1).

Le lemme suivant est bien connu :

Lemme A.2.7. *Soit A une k-algèbre de la forme $A = k[X_1, ..., X_r]/(F_1, ..., F_s)$ où $(F_1, ..., F_s)$ est régulière, et $B = W_n[X_1, ..., X_r]$. Alors pour tout i, $(B^{\otimes^i})^{DP}$ est une W_n-algèbre plate.*

Preuve. — Si on écrit :

$$B^{\otimes^i} = W_n[X_1^{(1)}, ..., X_r^{(1)}; ...; X_1^{(i)}, ..., X_r^{(i)}]$$

$$A = k[X_1^{(1)}, ..., X_r^{(1)}; ...; X_1^{(i)}, ..., X_r^{(i)}]/(F_1, ..., F_s, X_k^{(j)} - X_k^{(1)})_{\substack{2\le j\le i \\ 1\le k\le r}}$$

comme la suite $(F_1, ..., F_s, X_k^{(j)} - X_k^{(1)})_{\substack{2\le j\le i \\ 1\le k\le r}}$ est clairement régulière, on est ramené au cas $i = 1$, i.e. à voir que B^{DP} est plat sur W_n. Soient $\hat{F}_1, ..., \hat{F}_s$ des relevés des F_i dans B, $C = W_n[Z_1, ..., Z_s]$, $J = (Z_1, ..., Z_s)$ et $I = (\hat{F}_1, ..., \hat{F}_s)$. Pour $N \in \mathbf{N}$ suffisamment grand, on a :

$$B/I^N = C/J^N[X_1, ..., X_r]/(Z_i - \hat{F}_i)_{1\le i\le s}$$

où C/J^N est une W_n-algèbre locale d'idéal maximal $\mathcal{M} = (pC/J^N, J/J^N)$ et

$$C/(J^N, \mathcal{M})[X_1, ..., X_r]/(Z_i - \hat{F}_i) = k[X_1, ..., X_r]/(F_i)$$

ce qui montre que B/I^N est plat sur C/J^N puisque la suite $(F_1, ..., F_s)$ est régulière. On a finalement, par ([BO],3.21) :

$$B^{DP} = (B/I^N)^{DP} = B/I^N \otimes_{C/J^N} (C/J^N)^{DP} = B \otimes_C (C/J^N)^{DP} = B \otimes_C C^{DP}$$

et B^{DP} est plat sur $C^{DP} = W_n < Z_1, ..., Z_s >$ (algèbre des polynômes aux puissances divisées) qui est plat sur W_n. $\square$

Le théorème (A.2.1) résulte alors de (A.2.2) et (A.2.7).

Remarque 3 : Soit Y un k-schéma de type fini et $Y^{(p^m)}$ le schéma déduit de Y par le changement de base $k \to k$, $x \mapsto x^{p^m}$. On a un morphisme de Frobenius relatif à la puissance $m : Y \to Y^{(p^m)}$. Soit X un schéma lisse de type fini sur k, on définit le faisceau $\mathcal{O}_{n,m}^{cris,[i]}$ sur le petit site étale de X comme le faisceau associé au préfaisceau $Y \mapsto \mathcal{O}_n^{cris}(\underbrace{Y \times_{Y^{(p^m)}} Y \times_{Y^{(p^m)}} ... \times_{Y^{(p^m)}} Y}_{i\ fois})$ (il est d'ailleurs vraisemblable que ce dernier soit déjà un faisceau). On définit alors de manière évidente un complexe de faisceaux sur le petit site étale de X :

$$\mathcal{C}^{\cdot}_{n,m} : \mathcal{O}_{n,m}^{cris,[1]} \to \mathcal{O}_{n,m}^{cris,[2]} \to \mathcal{O}_{n,m}^{cris,[3]} \to ...$$

Un prolongement naturel de ce travail serait de se demander si l'hypercohomologie de $\mathcal{C}^{\cdot}_{n,m}$ pour $m \geq n$ calcule la cohomologie cristalline de X, ou mieux, si $\mathcal{C}^{\cdot}_{n,m}$ est isomorphe (dans la catégorie dérivée des faisceaux étales sur X) au complexe de de Rham-Witt sur X ([Il1]).

Annexe B. Cas logarithmique

Commençons par deux lemmes faciles sur les monoïdes intègres.

B.1. **Deux lemmes sur les monoïdes intègres.** Si $h : R \to S$ est un morphisme de monoïdes intègres, on note $R^e = \{x \in R^{gp}\ tq\ h^{gp}(x) \in S\}$ et on appelle R^e l'exactifié de R dans le morphisme h.

Lemme B.1.1. *Soient R,S,T trois monoïdes intègres avec deux morphismes de monoïdes :*

$$l : S \to R \text{ et } h : S \to T$$

tels que l est universellement intègre (2.1). Si S^e désigne l'exactifié de S dans h et R^e l'exactifié de R dans le morphisme $R \to R \oplus_S T$, on a $R^e \simeq R \oplus_S S^e$.

Preuve. — Soient $r_1, r_2 \in R$ tels que $\frac{r_1}{r_2} \oplus 1$ $(\in (R \oplus_S T)^{gp})$ soit dans $R \oplus_S T$, i.e. $\frac{r_1}{r_2} \oplus 1 = r \oplus t$, $r \in R$, $t \in T$. Il existe $s_1, s_2 \in S$ tels que $\frac{r_1}{r_2} = l(\frac{s_1}{s_2}).r$ et $1 = h(\frac{s_2}{s_1}).t$ i.e. $\frac{s_1}{s_2} \in S^e$ et $\frac{r_1}{r_2} \in R.l(S^e)$ $(\subset R^{gp})$. Réciproquement, l'image de $R.l(S^e)$ dans $(R \oplus_S T)^{gp} = R^{gp} \oplus_{S^{gp}} T^{gp}$ tombe dans $R \oplus_S T$ (qui s'injecte dans $(R \oplus_S T)^{gp}$ puisque l est universellement intègre), on a donc $R^e = R.l(S^e)$. Comme $(R.l(S^e))^{gp} = (R \oplus_S S^e)^{gp} = R^{gp}$, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} R \oplus_S S^e & \xrightarrow{k} & R^{gp} \\ {\scriptstyle s} \downarrow & & \| \\ R.l(S^e) & \hookrightarrow & R^{gp} \end{array}$$

La flèche s est clairement surjective. Comme l est universellement intègre, k est injective, donc s est aussi injective, d'où le résultat. $\square$

Lemme B.1.2. *Soit Q un monoïde intègre, g et g' deux éléments de Q^{gp}. Les deux énoncés suivants sont équivalents :*
(i) l'image $\bar{g}'$ de g' dans $Q/<g>$ est simplifiable dans $Q/<g>$ (2.1.3)
(ii) g' est simplifiable dans $Q.<g>$.

Preuve. — Montrons que (i) entraine (ii). Soient $q, q' \in Q, n, n' \in \mathbf{Z}$ tels que $g' = \frac{qg^n}{q'g^{n'}}$ et que $\frac{\bar{q}}{\bar{q}'}$ soit une écriture simplifiée de $\bar{g}'$ dans $Q/<g>$. Soient $x, x' \in Q.<g>$ tels que

$g' = \frac{x}{x'}$. Comme $(Q. < g >)/ < g >= Q/ < g >$, on a $\frac{\bar{x}}{\bar{x'}} = \frac{\bar{q}}{\bar{q'}}$, il existe donc $q_0 \in Q$ tel que $\bar{x} = \bar{q_0}\bar{q}$, $\bar{x'} = \bar{q_0}\bar{q'}$, i.e. il existe $m, m' \in \mathbf{Z}$ tels que $x = q_0 g^m (g^n q)$, $x' = q_0 g^{m'} (g^{n'} q)$ avec $g^m = g^{m'}$; g' est donc simplifiable dans $Q. < g >$. La réciproque se prouve de manière analogue. $\square$

B.2. **Calcul pour un recouvrement log-syntomique particulier.** Dans cette section, on munit *Spec* W_n seulement des log-structures $\mathcal{L}(0)$ ou $\mathcal{L}(\pi)$ pour π une uniformisante de W_n, et on munit *Spec* k de la log-structure L $(= \mathcal{L}(0))$. Soit A une k-algèbre de type fini quelconque munie d'une log-structure fine :

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\alpha} & A \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{N} & \rightarrow & k \end{array}$$

Soit B une W_n-algèbre de type fini munie d'une log-structure fine :

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{\beta} & B \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{N} & \rightarrow & W_n \end{array}$$

$(1 \mapsto 0$ ou $1 \mapsto \pi)$ telle qu'on ait une log-immersion fermée :

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{h} & P \\ \beta \downarrow & & \downarrow \alpha \\ B & \xrightarrow{s} & A \end{array}$$

avec s et h surjectives. On suppose Q et B de la forme : $Q = \mathbf{N} \oplus \mathbf{N}q_1 \oplus ... \oplus \mathbf{N}q_s$ et $B = W_n[X_1, ..., X_r]$ avec $s \leq r$ et $\beta(q_i) = X_i, 1 \leq i \leq s$. Soient

$$Q_m = (Q \oplus \mathbf{N}z_1 \oplus ... \oplus \mathbf{N}z_s)/ < \frac{z_i^{p^m}}{q_i} >, \; B_m = B[Y_1, ..., Y_r]/(Y_i^{p^m} - X_i)$$

et β_m le morphisme $Q_m \rightarrow B_m, z_i \mapsto Y_i$. Soit $A_m = A \otimes_B B_m$ et $P_m = P \oplus_Q Q_m$; on munit *Spec* A_m de la log-structure associée à $P_m \xrightarrow{\alpha \oplus \beta_m} A_m$. Si on travaille avec $1 \mapsto \pi$ (resp. $1 \mapsto 0$), on notera $\mathcal{O}_n^{dR} = H^0(-/(Spec\ W_n, \mathcal{L}(\pi)))$ (resp. $\mathcal{O}_n^{HK} = H^0(-/(Spec\ W_n, \mathcal{L}(0)))$, voir section 3). La notation $\mathcal{O}_n^*$ désignera indifféremment $\mathcal{O}_n^{dR}$ ou $\mathcal{O}_n^{HK}$. On note $C_{n,m}^{\cdot,*}$ le complexe de Čech :

$$\mathcal{O}_n^*(Spec\ A_m, P_m) \rightarrow \mathcal{O}_n^*((Spec\ A_m, P_m)^{\otimes^2_{(Spec\ A,P)}}) \rightarrow \mathcal{O}_n^*((Spec\ A_m, P_m)^{\otimes^3_{(Spec\ A,P)}})...$$

où $(Spec\ A_m, P_m)^{\otimes^i_{(Spec\ A,P)}}$ désigne $\underbrace{A_m \otimes_A ... \otimes_A A_m}_{i fois}$ muni de la log-structure associée à :

$$P_m^{\oplus^i_P} = \underbrace{P_m \oplus_P ... \oplus_P P_m}_{i fois} \rightarrow A_m \otimes_A ... \otimes_A A_m$$

Soient $(Q^{\oplus^i})^e$ (resp. $(Q_m^{\oplus^i})^e$) l'exactifié (voir B.1) de $\underbrace{Q \oplus_{\mathbf{N}} ... \oplus_{\mathbf{N}} Q}_{i fois}$ (resp. $\underbrace{Q_m \oplus_{\mathbf{N}} ... \oplus_{\mathbf{N}} Q_m}_{i fois}$) dans le morphisme $Q \oplus_{\mathbf{N}} ... \oplus_{\mathbf{N}} Q \rightarrow P$ (resp. $Q_m \oplus_{\mathbf{N}} ... \oplus_{\mathbf{N}} Q_m \rightarrow P_m^{\oplus^i_P}$) et $(B^{\otimes^i})^{DP_{log}}$ (resp. $(B_m^{\otimes^i})^{DP_{log}}$) l'enveloppe aux puissances divisées (compatible avec les puissances divisées sur W_n) de $(B^{\otimes^i}) \otimes_{\mathbf{Z}[Q^{\oplus^i}]} \mathbf{Z}[(Q^{\oplus^i})^e]$ (resp.$(B_m^{\otimes^i}) \otimes_{\mathbf{Z}[Q_m^{\oplus^i}]} \mathbf{Z}[(Q_m^{\oplus^i})^e]$) par rapport au noyau de la surjection sur A (resp. $A_m^{\otimes_A^i}$). La W_n-algèbre $(B^{\otimes^i})^{DP_{log}}$ (resp. $(B_m^{\otimes^i})^{DP_{log}}$) n'est autre que l'enveloppe aux puissances divisées logarithmique de $B^{\otimes^i}$ (resp. $B_m^{\otimes^i}$) ([Ka1],4.10(1) et 5.6).

Lemme B.2.1. *Soit $C^{\cdot,*}$ le complexe de Čech :*

$$B^{DP_{log}} \to (B^{\otimes^2})^{DP_{log}} \to (B^{\otimes^3})^{DP_{log}} \to ...$$

Alors le complexe $C^{\cdot,*}$ calcule la cohomologie cristalline de $(Spec\, A, P)$ sur $(Spec\ W_n, \mathcal{L}(\pi))$ ou sur $(Spec\ W_n, \mathcal{L}(0))$.

Preuve. — Comme dans le cas classique, on utilise uniquement la lissité formelle locale ([Ka1],3.3 et 3.5) et l'universalité de l'enveloppe aux puissances divisées ([Ka1],5.3) et on recopie la preuve de ([Be],V.1.2). □

Lemme B.2.2. *Avec les notations précédentes, on a :*

$$(B_m^{\otimes^i})^{DP_{log}} = (B^{\otimes^i})^{DP_{log}} \otimes_{B^{\otimes^i}} B_m^{\otimes^i}$$

Preuve. — On a

$$P_m^{\oplus_P^i} = (Q_m \oplus_Q P) \oplus_P ... \oplus_P (Q_m \oplus_Q P) = Q_m^{\oplus_Q^i} \oplus_Q P = Q_m^{\oplus^i} \oplus_{Q^{\oplus^i}} P$$

En appliquant (B.1.1) à $R = Q_m^{\oplus^i}$, $S = Q^{\oplus^i}$ et $T = P$, on obtient $(Q_m^{\oplus^i})^e = Q_m^{\oplus^i} \oplus_{Q^{\oplus^i}} (Q^{\oplus^i})^e$. Soit I le noyau de $B^{\otimes^i} \otimes_{\mathbf{Z}[Q^{\oplus^i}]} \mathbf{Z}[(Q^{\oplus^i})^e] \longrightarrow A$, comme

$$B_m^{\otimes^i} \otimes_{\mathbf{Z}[Q_m^{\oplus^i}]} \mathbf{Z}[(Q_m^{\oplus^i})^e] = B_m^{\otimes^i} \otimes_{\mathbf{Z}[Q^{\oplus^i}]} \mathbf{Z}[(Q^{\oplus^i})^e]$$

est une $B^{\otimes^i} \otimes_{\mathbf{Z}[Q^{\oplus^i}]} \mathbf{Z}[(Q^{\oplus^i})^e]$-algèbre plate, on a une suite exacte :

$$0 \to I.(B_m^{\otimes^i} \otimes_{\mathbf{Z}[Q_m^{\oplus^i}]} \mathbf{Z}[(Q_m^{\oplus^i})^e]) \to B_m^{\otimes^i} \otimes_{\mathbf{Z}[Q_m^{\oplus^i}]} \mathbf{Z}[(Q_m^{\oplus^i})^e] \to A \otimes_{(B^{\otimes^i} \otimes_{\mathbf{Z}[Q^{\oplus^i}]} \mathbf{Z}[(Q^{\oplus^i})^e])} (B_m^{\otimes^i} \otimes_{\mathbf{Z}[Q_m^{\oplus^i}]} \mathbf{Z}[(Q_m^{\oplus^i})^e]) \to 0$$

où le terme de droite est égal à $A \otimes_{B^{\otimes^i}} B_m^{\otimes^i} = A_m^{\otimes_A^i}$. On conclut comme en (A.2.3). □

Soit $\widetilde{C_{n,m}^{\cdot,*}}$ le complexe :

$$B_m^{DP_{log}} \to (B_m^{\otimes^2})^{DP_{log}} \to (B_m^{\otimes^3})^{DP_{log}} \to ...$$

Comme dans le cas classique (A.2.5), on a :

Proposition B.2.3. *Le complexe $\widetilde{C_{n,m}^{\cdot,*}}$ calcule la cohomologie cristalline de $(Spec\ A, P)$ sur $(Spec\ W_n, \mathcal{L}(\pi))$ ou $(Spec\ W_n, \mathcal{L}(0))$.*

Preuve. — Par (B.2.2), on a $(B_m^{\otimes^i})^{DP_{log}} = (B^{\otimes^i})^{DP_{log}} \otimes_{B^{\otimes^i}} B_m^{\otimes^i}$, et la preuve est exactement la même que celle du cas classique, en remplaçant $(B^{\otimes^i})^{DP}$ par $(B^{\otimes^i})^{DP_{log}}$. □

Proposition B.2.4. *Il existe un morphisme (de complexes de groupes) canonique :*

$$\Phi^{\cdot,*} : C_{n,m}^{\cdot,*} \to \widetilde{C_{n,m}^{\cdot,*}}$$

Si $m \geq n$, $\Phi^{\cdot,*}$ est surjectif sur la cohomologie et si de plus $(B^{\otimes^i})^{DP_{log}}$ est une W_n-algèbre plate pour tout i, $\Phi^{\cdot,*}$ est un quasi-isomorphisme.

Preuve. — On obtient $\Phi^{\cdot,*}$ comme dans le cas classique, en utilisant ([Ka1],6.4). Notons S_n l'une des deux bases $(Spec\ W_n, \mathcal{L}(\pi))$ ou $(Spec\ W_n, \mathcal{L}(0))$, on a pour tout i :

$$\omega^1_{(Spec\ B_m^{\otimes^i}, Q_m^{\oplus^i})/S_n} = \bigoplus_{k=1}^{k=s} \Big(\bigoplus_{j=1}^{j=i} B_m^{\otimes^i}.dlog(z_k^{(j)}) \Big) \oplus \bigoplus_{k=s+1}^{k=r} \Big(\bigoplus_{j=1}^{j=i} B_m^{\otimes^i}.d(Y_k^{(j)}) \Big)$$

avec des notations évidentes. Comme en (A.2.6), la flèche :

$$(B_m^{\otimes^i})^{DP_{log}} \to (B_m^{\otimes^i})^{DP_{log}} \otimes_{B_m^{\otimes^i}} \omega^1_{(Spec\ B_m^{\otimes^i}, Q_m^{\oplus^i})/S_n}$$

est la dérivation $(B^{\otimes^i})^{DP_{log}}$-linéaire (c.f. (B.2.2)) :

$$(B^{\otimes^i})^{DP_{log}} \otimes_{B^{\otimes^i}} B_m^{\otimes^i} \to (B^{\otimes^i})^{DP_{log}} \otimes_{B^{\otimes^i}} \omega^1_{(Spec\ B_m^{\otimes^i}, Q_m^{\oplus^i})/S_n}$$

La preuve est alors formellement identique à celle de (A.2.6). $\square$

Remarque : Les remarques 1 et 2 qui suivent (A.2.6) sont encore valables ici (pour les mêmes raisons), i.e. $H^1(C_{n,m}^{\cdot,*})$ est toujours égal à $H^1((Spec\ A, P)/S_n)$ si $m \geq n$ et $\varinjlim_m C_{n,m}^{\cdot,*}$ calcule toujours la cohomologie cristalline de $(Spec\ A, P)$ sur S_n.

On rappelle qu'on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\alpha} & A \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{N} & \to & k \end{array}$$

Proposition B.2.5. *Supposons que le diagramme ci-dessus soit un morphisme log-syntomique standard (2.1.12) i.e.* $P = (\mathbf{N} \oplus \mathbf{N}x_1 \oplus ... \oplus \mathbf{N}x_r)/ < g_1, ..., g_s >$ *où* $(g_1, ..., g_s)$ *est une suite régulière et* $A = k \otimes_{\mathbf{Z}[\mathbf{N}]} \mathbf{Z}[P][Y_1, ..., Y_t]/(F_1, ..., F_u)$ *où* $(F_1, ..., F_u)$ *est une suite régulière (*$\mathbf{N} \to P$ *est toujours intègre et, si* $A \neq 0$*, injectif). Soient* $Q = \mathbf{N} \oplus \mathbf{N}x_1 \oplus ... \oplus \mathbf{N}x_r$*,* $B = W_n[X_1, ..., X_r, Y_1, ..., Y_t]$ *et* $\beta : Q \to B,\ x_i \mapsto X_i,\ 1 \mapsto \pi$ *ou* 0 *selon* $*$*. Alors pour tout* i*,* $(B^{\otimes^i})^{DP_{log}}$ *est une* W_n*-algèbre plate.*

Preuve. — Par un raisonnement identique à (A.2.7), on se ramène au cas $i = 1$, i.e. à voir que $(B \otimes_{\mathbf{Z}[Q]} \mathbf{Z}[Q^e])^{DP}$ est plat sur W_n. On peut toujours choisir $(g_1, ..., g_s)$ tels que $g_j = \dfrac{q_j}{q'_j}$ avec $q_j, q'_j \in Q$ et $\dfrac{\bar{q}_j}{\bar{q}'_j}$ écriture simplifiée de $\bar{g}_j$ dans $Q/ < g_1, ..., g_{j-1} >$. Soit G le sous-groupe de Q^{gp} engendré par les g_j, on a $Q^e = Q.G \subset Q^{gp}$ et $Q.G = (Q \oplus \mathbf{Z}z_1 \oplus ... \oplus \mathbf{Z}z_s)/ < \dfrac{q_j \oplus z_j}{q'_j} >$ (car on a clairement une surjection de la droite vers la gauche, qui est aussi injective puisque les deux monoïdes intègres ont le même groupe engendré). On veut calculer $\mathbf{Z}[Q.G]$. On a $\dfrac{q_k \oplus z_k}{q'_k}$ simplifiable dans $(Q \oplus \mathbf{Z}z_1 \oplus ... \oplus \mathbf{Z}z_s)/ < \frac{q_j \oplus z_j}{q'_j} >_{1 \leq j \leq k-1}$ équivalent à $\dfrac{q_k}{q'_k}$ simplifiable dans $(Q \oplus \mathbf{Z}z_1 \oplus ... \oplus \mathbf{Z}z_{k-1})/ < \frac{q_j \oplus z_j}{q'_j} >_{1 \leq j \leq k-1} = Q. < g_1, ..., g_{k-1} >$ équivalent par (B.1.2) à g_k simplifiable dans $Q/ < g_1, ..., g_{k-1} >$ qui est vrai par hypothèse. Comme $\dfrac{q_k \oplus z_k}{q'_k}$ est clairement d'ordre infini dans $(Q \oplus \mathbf{Z}z_1 \oplus ... \oplus \mathbf{Z}z_s)/ < \frac{q_j \oplus z_j}{q'_j} >_{1 \leq j \leq k-1}$, la suite $< \dfrac{q_j \oplus z_j}{q'_j} >_{1 \leq j \leq s}$ est donc régulière dans $Q \oplus \mathbf{Z}z_1 \oplus ... \oplus \mathbf{Z}z_s$ ce qui entraine par (2.1.8) :

$$\mathbf{Z}[Q^e] = \mathbf{Z}[Q][Z_1, ..., Z_s, \frac{1}{Z_1}, ..., \frac{1}{Z_s}]/([q_j]Z_j - [q'_j])_{1 \leq j \leq s}$$

et

$$\begin{aligned} B \otimes_{\mathbf{Z}[Q]} \mathbf{Z}[Q^e] &= W_n[X_1, ..., X_r, Y_1, ..., Y_t, Z_1, ..., Z_s, \frac{1}{Z_1}, ..., \frac{1}{Z_s}]/(\beta(q_j)Z_j - \beta(q'_j)) \\ &= W_n[X_l, Y_i, V_j]/(\beta(q_j)V_j + \beta(q_j) - \beta(q'_j)) \otimes_{W_n} C \end{aligned}$$

en posant $V_j = Z_j - 1$ et $C = W_n[\frac{1}{V_1+1}, ..., \frac{1}{V_t+1}]$ dans la dernière égalité. Soit I le noyau de la surjection :

$$W_n[X_l, Y_i, V_j]/(\beta(q_j)V_j + \beta(q_j) - \beta(q'_j)) \to W_n[X_l, Y_j]/(\beta(q_j) - \beta(q'_j), \hat{F}_k)$$

où les V_j s'envoient sur 0 et où les $\hat{F}_k$ sont des relèvements des F_k dans $W_n[X_l, Y_i]$. Soient $N \in \mathbf{N}$, N suffisamment grand, $D = W_n[A_1, ..., A_u, B_1, ..., B_s]$ et $J = (A_1, ..., B_s)$. On a :

$$\begin{aligned} B \otimes_{\mathbf{Z}[Q]} \mathbf{Z}[Q^e]/I^N &= D/J^N[X_l, Y_i, V_j]/(\beta(q_j)V_j + \beta(q_j) - \beta(q'_j), B_j - V_j, A_k - \hat{F}_k) \\ &= D/J^N[X_l, Y_i]/(\beta(q_j)B_j + \beta(q_j) - \beta(q'_j), A_k - \hat{F}_k) \end{aligned}$$

où, comme en (A.2.7), D/J^N est une W_n-algèbre locale (la tensorisation par C disparaît car les $V_i + 1$ sont déjà inversibles). Modulo son idéal maximal $\mathcal{M}$, on trouve

$$B \otimes_{\mathbf{Z}[Q]} \mathbf{Z}[Q^e]/(I^N, \mathcal{M}) = k[X_1, ..., X_r, Y_1, ..., Y_t]/(\alpha(q_j) - \alpha(q'_j), F_k)$$

où la suite de droite est régulière par définition, ce qui entraine que $B \otimes_{\mathbf{Z}[Q]} \mathbf{Z}[Q^e]/I^N$ est plat sur D/J^N. Comme de plus J engendre I dans $B \otimes_{\mathbf{Z}[Q]} \mathbf{Z}[Q^e]$, on conclut exactement comme en (A.2.7), en utilisant ([BO],3.21). $\square$

Théorème B.2.6. *Avec les hypothèses de (B.2.5), le complexe $C_{n,m}^{\cdot,*}$ pour $m \geq n$ calcule la cohomologie cristalline de $(Spec\ A, P)$ sur $(Spec\ W_n, \mathcal{L}(\pi))$ ou $(Spec\ W_n, \mathcal{L}(0))$.*

Preuve. — On applique (B.2.3), (B.2.4) et (B.2.5). $\square$

Références

[Be] Berthelot P., *Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique $p > 0$*, Lecture Notes in Maths 407, Springer-Verlag, Berlin, 1974.

[BBM] Berthelot P., Breen L., Messing W., *Théorie de Dieudonné cristalline II*, Lecture Notes in Maths 930, Springer-Verlag, Berlin, 1982.

[BO] Berthelot P., Ogus A., *Notes on crystalline cohomology*, Princeton University Press, Princeton, 1978.

[Br1] Breuil C., *Représentations p-adiques semi-stables et transversalité de Griffiths*, à paraître à Math. Annalen.

[Br2] Breuil C., *Construction de représentations p-adiques semi-stables*, preprint, Ecole Polytechnique, 1995.

[Fa] Faltings G., *Crystalline cohomology and p-adic Galois representations*, Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory, John Hopkins Univ. Press, 1989, 25-79.

[FL] Fontaine J.-M., Laffaille G., *Constructions de représentations p-adiques*, Ann. Scient. E.N.S. 15, 1982, 547-608.

[FM] Fontaine J.-M., Messing W., *P-adic periods and p-adic étale cohomology*, Contemporary Math. 67, 1987, 179-207.

[HK] Hyodo O., Kato K., *Semi-stable reduction and crystalline cohomology with logarithmic poles*, Astérisque 223, Soc. Math. de France, 1994, 221-268.

[Il1] Illusie L., *Complexe de de Rham-Witt et cohomologie cristalline*, Ann. scient. E.N.S. 12, 1979, 501-661.

[Il2] Illusie L., *Complexe Cotangent et Déformations I*, Lecture Notes in Maths 239, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[Ka1] Kato K., *Logarithmic structures of Fontaine-Illusie*, Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory, John Hopkins University Press, 1989, 191-224.

[Ka2] Kato K, *Semi-stable reduction and p-adic étale cohomology*, Astérisque 223, Soc. Math. de France, 1994, 269-293.

[Mi] Milne J., *Etale cohomology*, Princeton University Press, Princeton, 1980.

[Ts] Tsuji T., *On syntomic cohomology of higher degree of a semi-stable family*, preprint, Kyoto, 1994.