

Remise à niveau - Statistique

Intervalles de confiance et tests

Claire Boyer

1. Intervalles de confiance

2. Tests

Definition. Soit $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$, $\alpha \in (0, 1)$ et $\mathbb{X}$ un échantillon. On appelle **intervalle de confiance** pour θ de niveau $1 - \alpha$ tout intervalle **aléatoire**

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = [a(\mathbb{X}), b(\mathbb{X})]$$

tel que

$$\mathbb{P}(\theta \in [a(\mathbb{X}), b(\mathbb{X})]) = 1 - \alpha.$$

Achtung ! On ne peut pas dire que la probabilité que θ appartienne à la réalisation de l'intervalle de confiance est $1 - \alpha$

Exemple 1 : loi uniforme. Soit $X = (X_1, \dots, X_n) \sim U([0, \theta])^{\otimes n}$. On a

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = [X_{(n)}, X_{(n)}\alpha^{-1/n}].$$

Exemple 2 : lancer de pièce. Soit $\mathbb{X} = (X_1, \dots, X_n) \sim B(\theta)^{\otimes n}$ et $\hat{\theta}_n = \bar{X}_n$. En appliquant l'inégalité de Tchebychev

$$\mathbb{P}\left[\hat{\theta}_n - \frac{1}{2\sqrt{n\alpha}} \leq \theta \leq \hat{\theta}_n + \frac{1}{2\sqrt{n\alpha}}\right] \geq 1 - \alpha.$$

Soit $\mathbb{X} = (X_1, \dots, X_n) \sim \mathcal{N}(\theta, 1)^{\otimes n}$.

Intervalle bilatère. On peut considérer

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \left[\bar{X}_n \pm \frac{q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \right],$$

où $q_{1-\alpha/2}$ est le quantile d'ordre $1 - \alpha/2$ de la loi normale centrée réduite. C'est un intervalle bilatère.

Intervalle unilatère. On peut aussi considérer

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \left[\bar{X}_n - \frac{q_{1-\alpha}}{\sqrt{n}}, +\infty \right),$$

ce qui donne un intervalle unilatère.

Lorsque n est grand et que l'on dispose de résultats de **normalité asymptotique**, on peut utiliser

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}[\theta \in [a(X), b(X)]] = 1 - \alpha$$

Exemple : lancer de pièce.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left[\hat{\theta}_n - \frac{q_{1-\alpha/2} \sqrt{\hat{\theta}_n(1-\hat{\theta}_n)}}{\sqrt{n}} \leq \theta \leq \hat{\theta}_n + \frac{q_{1-\alpha/2} \sqrt{\hat{\theta}_n(1-\hat{\theta}_n)}}{\sqrt{n}} \right] = 1 - \alpha$$

où $q_{1-\alpha/2}$ est le quantile d'ordre $(1 - \alpha/2)$ d'une loi normale centrée réduite

1. Intervalles de confiance

2. Tests

Le principe d'un test est de répondre par oui ou non à une question sur le paramètre d'une expérience statistique, ce qui revient à considérer $\Theta_0, \Theta_1 \subset \Theta$ avec

$$\Theta_0 \sqcup \Theta_1 = \Theta$$

et de déterminer avec un certain **risque** si $\theta \in \Theta_0$ ou $\theta \in \Theta_1$

- ▶ $H_0 : \theta \in \Theta_0$ est l'hypothèse nulle
- ▶ $H_1 : \theta \in \Theta_1$ est l'hypothèse alternative

Exemple : lancer de pièces.

- ▶ **Exemple 1** : tester si une pièce est équilibrée revient à $H_0 : \theta = 1/2$ contre $H_1 : \theta \neq 1/2$.
- ▶ **Exemple 2** : tester si la pièce donne plus de "Pile" revient à $H_0 : \theta \geq 1/2$ contre $H_1 : \theta < 1/2$.

Un **test** est une statistique $T(\mathbb{X}) \in \{0, 1\}$ telle que H_0 n'est pas rejetée si $T(\mathbb{X}) = 0$, et inversement si $T(\mathbb{X}) = 1$. La **zone de rejet** du test est alors donnée par

$$ZR = T^{-1}(\{1\}) = \{\mathbb{X} \in E : T(\mathbb{X}) = 1\}$$

- ▶ **Risque de première espèce** : $\alpha(\theta) = \mathbb{P}_\theta[T(\mathbb{X}) = 1]$ pour $\theta \in \Theta_0$
 - ▶ **Taille du test** : $\alpha^* = \sup_{\theta \in \Theta_0} \alpha(\theta)$
 - ▶ **Risque de deuxième espèce** : $\beta(\theta) = \mathbb{P}_\theta[T(\mathbb{X}) = 0]$ pour $\theta \in \Theta_1$
 - ▶ **Fonction puissance** : $\pi(\theta) = \mathbb{P}_\theta[T(\mathbb{X}) = 1]$ pour $\theta \in \Theta$
-
- 👉 Un test est de niveau α si $\alpha^* \leq \alpha$
 - 👉 $\alpha(\theta)$ = probabilité de rejeter H_0 alors qu'elle est vraie (faux positif)
 - 👉 $\beta(\theta)$ = probabilité de ne pas rejeter H_0 alors qu'elle est fausse (faux négatif)

Soit $\mathbb{X} = (X_1, \dots, X_n) \sim \mathcal{N}(\theta, 1)^{\otimes n}$.

On souhaite tester au niveau de risque $\alpha \in (0, 1)$

$$H_0 : \theta \leq 0 \text{ contre } H_1 : \theta > 0$$

On considère $\hat{\theta}_n = \overline{X}_n$. La zone de rejet est :

$$ZR = \left\{ \overline{X}_n \geq \frac{q_{1-\alpha}}{\sqrt{n}} \right\},$$

où $q_{1-\alpha}$ est le quantile de la loi normale centrée réduite et donc

$$T(\mathbb{X}) = \mathbb{1}_{\overline{X}_n \geq \frac{q_{1-\alpha}}{\sqrt{n}}}$$

👉 Un IC peut définir un test

Proposition. Soit $\alpha \in (0, 1)$. Si $[\theta^-(\mathbb{X}), \theta^+(\mathbb{X})]$ est un IC de niveau $1 - \alpha$, alors le test

$$T(\mathbb{X}) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \Theta_0 \cap [\theta^-(\mathbb{X}), \theta^+(\mathbb{X})] = \emptyset$$

est de niveau α .

Exemple. Soit $\mathbb{X} = (X_1, \dots, X_n) \sim \mathcal{N}(\theta, 1)^{\otimes n}$, alors

$$\Theta_0 \cap \left[\bar{X}_n - \frac{q_{1-\alpha}}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + \frac{q_{1-\alpha}}{\sqrt{n}} \right] = \emptyset \iff T(\mathbb{X}) = 1$$

Motivation. On revient sur l'exemple de l'échantillon gaussien. Supposons que l'on observe $\mathbb{x} = (x_1, \dots, x_{100})$ de moyenne empirique $\hat{\theta}_n(\mathbb{x}) = 0.3$. Pour cette valeur, conserve-t-on H_0 au niveau 10% ? 5% ? 1% ? D'après la procédure de test, on rejette H_0 au niveau α si et seulement si

$$\hat{\theta}_n(\mathbb{x}) > \Phi^{-1}(1 - \alpha)/\sqrt{n} \iff \alpha > 1 - \Phi(\sqrt{n}\hat{\theta}_n(\mathbb{x})) = 1 - \Phi(3) \approx 10^{-3}$$

👉 On rejette donc H_0 au niveau de risque 10%, 5%, 1%, et en fait à tout niveau supérieur à 1‰. La notion de p-value formalise cette idée

Définition. Pour une réalisation $\mathbb{x}$, la p-value est

$$\begin{aligned}\alpha_0(\mathbb{x}) &= \inf\{\alpha \in [0, 1] : \mathbb{x} \in ZR_\alpha\} \\ &= \inf\{\alpha \in [0, 1] : \text{"On rejette } H_0 \text{ pour } \mathbb{x} \text{ au niveau } \alpha"\}\end{aligned}$$

Exemple. Pour $\mathbb{X} \sim \mathcal{N}(\theta, 1)^{\otimes n}$, avec moyenne empirique $\bar{x}_n$,

$$\alpha_0(\bar{x}_n) = \mathbb{P}[\mathcal{N}(0, 1) \geq \sqrt{n}\bar{x}_n]$$