

Feuille de TD 1 : Outils de probabilités

Exercice 1

1. Rappeler les définitions de la convergence en loi, en probabilité, presque sûre et en moyenne quadratique.
2. Montrer que la convergence en moyenne quadratique implique la convergence en probabilité.
3. Soit a une constante et (X_n) une suite de variables aléatoires. Montrer que si (X_n) converge en loi vers a , alors (X_n) converge en probabilité vers a .
4. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires convergeant en loi vers une constante a et soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que $h(X_n)$ converge en probabilité vers $h(a)$.
5. Étudier la convergence de la suite (X_n) dans chacun des cas suivants :
 - $X_n = 1/n$.
 - $X_n = (-1)^n$.
 - $X_n = 1_{A_n}$ où (A_n) est une suite d'évènements et $\mathbb{P}[A_n] \rightarrow 0$.
 - $X_n = Z_n 1_{B_n}$ où $Z_n \Rightarrow Z$ en loi et $\mathbb{P}[B_n] \rightarrow 1$.

Exercice 2

Soit $X \sim \mathcal{U}[0, 1]$.

1. Donner la loi de $Z = -\log(X)$.
2. Soient $Z_1, \dots, Z_n$ i.i.d de même loi que Z . Donner la normalité asymptotique de

$$\bar{Z}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i.$$

3. En déduire la normalité asymptotique de $Y_n = (\prod_{i=1}^n X_i)^{-1/n}$ avec $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. uniformes.

Exercice 3 (Inégalité de Hoeffding simplifiée)

Soient $X_1, \dots, X_n$ indépendantes et centrées. On suppose $|X_i| \leq M$ p.s. Montrer que pour tout $x > 0$:

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i > x\right) \leq \exp\left(-\frac{nx^2}{2M^2}\right), \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right| > x\right) \leq 2 \exp\left(-\frac{nx^2}{2M^2}\right).$$

1. Soit $\lambda > 0$ et $x \in [-M, M]$, montrer que

$$e^{\lambda x} \leq \frac{M-x}{2M} e^{-\lambda M} + \frac{x+M}{2M} e^{\lambda M}.$$

2. En utilisant que $\cosh(u) \leq e^{u^2/2}$, en déduire que

$$\mathbb{E}[e^{\lambda X_i}] \leq \exp\left(\frac{\lambda^2 M^2}{2}\right).$$

3. Montrer que pour tout $\lambda > 0$ et $x > 0$:

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i > x\right) \leq \exp\left(n\left(\frac{\lambda^2 M^2}{2} - \lambda x\right)\right).$$

et conclure.

Exercice 4 (Inégalités classiques)

1. Inégalité de Cauchy-Schwarz

- (a) Soient X, Y deux v.a. admettant des moments d'ordre 2. Montrer que

$$\mathbb{E}[|XY|] \leq \sqrt{\mathbb{E}[X^2]} \sqrt{\mathbb{E}[Y^2]}.$$

- (b) Soient (X_n) et (Y_n) deux suites de v.a. convergeant à l'ordre 4 vers 0. En déduire que $X_n Y_n$ converge en moyenne quadratique vers 0.

2. Inégalité de Hölder

- (a) Soient $a, b \geq 0$, et $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer que

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q.$$

- (b) En déduire l'inégalité de Holder

$$\mathbb{E}[|XY|] \leq (\mathbb{E}[|X|^p])^{1/p} (\mathbb{E}[|Y|^q])^{1/q}.$$

- (c) Soit (X_n) une suite de v.a. qui converge vers zéro à l'ordre r avec $2 < r < 4$, et (Y_n) une suite de v.a. qui converge vers zéro à l'ordre $\frac{2r}{r-2}$. Montrer que $(X_n Y_n)$ converge vers zéro en moyenne quadratique.

Exercice 5 (Lemme de Slutsky)

Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de variables aléatoires. On suppose que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable X et $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers une constante déterministe c . Montrer que la suite de couples de variables aléatoires $(X_n, Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers (X, c) .

Exercice 6 (Delta-méthode)

On se donne une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires, une suite déterministe de réels positifs $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et une application $\ell : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ telles que

— $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$

— il existe une variable déterministe U et une variable aléatoire V telles que

$$a_n(U_n - U) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} V$$

— ℓ est dérivable en U .

1. Montrer que

$$a_n [\ell(U_n) - \ell(U)] - \ell'(U) \times a_n(U_n - U) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0.$$

2. En déduire que

$$a_n [\ell(U_n) - \ell(U)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \ell'(U) \times V.$$

3. (Stabilisation de la variance.) Soit $\bar{X}_n$ est la moyenne empirique associée à un n -échantillon de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Proposer une fonction g telle que

$$\sqrt{n} (g(\bar{X}_n) - g(\lambda))$$

converge en loi vers une limite non dégénérée qui ne dépend pas de λ .