

Notes de cours de Géométrie différentielle

par Claude Viterbo

19 mars 2012

Table des matières

1	Préliminaires	7
1	Partition de l'unité	7
2	Inversion locale et fonctions implicites. Théorème du rang constant	10
3	Théorème de Brown-Morse-Sard	11
4	Champs de vecteurs	13
4.1	Remarques générales sur les équations différentielles	13
4.2	Théorème de Cauchy-Lipschitz	14
5	Appendice : paracompacité et espaces métriques	16
6	Exercices	18
2	Sous-variétés	23
1	Définition, premières propriétés.	23
2	Espaces tangents	28
2.1	Faisceaux associés à une sous-variété	30
2.2	Sous-variétés à bord.	32
3	Applications	34
3.1	Points critiques de fonctions définies sur une sous-variété	34
4	Exercices	37
3	Variétés	43
1	Definitions et propriétés de base	43
1.1	Faisceaux sur les variétés, partitions de l'unité, plongements et im- mersions	45
1.2	Espace tangent et fibrés vectoriels	45
1.3	Immersions, plongements, partitions de l'unité	47
1.4	Régularisation des variétés	48
1.5	Exemples de variétés	49
1.6	Classification des variétés	51
2	Exercices	52
4	Formes différentielles, Formule de Stokes et Applications	53
1	Formes différentielles	53
1.1	Algèbre extérieure	53

1.2	Formes différentielles sur les variétés	58
2	Orientation, différentielle, Formule de Stokes	59
2.1	Variétés orientées	59
2.2	Intégration des formes différentielles, formule de Stokes	62
2.3	Différentielle extérieure	63
3	Applications de la formule de Stokes	67
3.1	Formules intégrales	68
3.2	Application topologique : le théorème du point fixe de Brouwer	68
4	Exercices	70
5	Introduction à la Topologie et à la Géométrie différentielle, Calcul de Lie.	73
1	Lemme de Poincaré, théorie du degré	73
1.1	Lemme de Poincaré	73
1.2	Théorie du degré, applications	75
1.3	Indice d'un champ de vecteurs en un zéro isolé	78
2	Théorèmes de Gauss-Bonnet et Poincaré-Hopf	78
3	exercices	86
6	Calcul différentiel de Lie	91
1	Les champs de vecteurs vus comme dérivations	91
1.1	Flot d'un champ de vecteurs	92
2	Crochets de Lie	93
3	Dérivée de Lie	98
4	Exercices	100
7	Cohomologie de deRham	103
0.1	Suites exactes en cohomologie. Suites relatives et de Mayer-Vietoris	104
8	Quelques propriétés des champs de sous-espaces	107
1	Théorème de Frobenius	108
2	Les théorèmes de Chow et Sussmann	111
3	Exercices	118
	Bibliographie	121

Table des figures

1.1	La fonction $f(s)f(1-s)$	8
1.2	Démonstration de Sard d'après deRham	12
1.3	Paire de courbes de niveau transverses	13
1.4	Paire de courbes de niveau non-transverses	13
1.5	Démonstration de la paracompacité des espaces métriques (d'après M.E. Rudin, Proc. Amer. Math. Soc. 20 (1969), p. 603.)	17
2.1	Carte pour une sous-variété de dimension 1 du plan	24
2.2	Image d'une immersion qui n'est pas une sous-variété	27
2.3	Image d'une immersion injective qui n'est pas une sous-variété	28
2.4	Courbes d'intersection de deux ellipsoïdes	36
2.5	Isothermes annuelles du Canada.	39
2.6	Exercice (N)	39
3.1	Une carte de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$	50
4.1	Un exemple de surface non-orientable : le ruban de Möbius	61
5.1	L'application de Gauss	80
5.2	L'application F_ν envoyant (x, h) sur $(\nu(x), h)$	80
7.1	Partition de l'unité de $U \cup V$	105
8.1	Monocycle	107
8.2	Démonstration du théorème de Sussmann	112
8.3	Champ de plans non-intégrable et courbe tangente	115
8.4	Boule roulant sans glisser sur un plan	117

Chapitre 1

Préliminaires

Nous présentons dans ces préliminaires un certain nombre d'outils "analytiques" qui permettent de travailler localement sur les variétés. La Géométrie différentielle commence par établir des propriétés locales des variétés, avant de s'attaquer à des propriétés globales, en général plus difficiles.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et K un compact de Ω . On note $C^m(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe C^m sur Ω et par $C^m(K)$ l'espace des fonctions C^m au voisinage de K . Enfin C_K^m est l'espace des fonctions C^m à support dans K , c'est-à-dire telles que $\{x \mid f(x) \neq 0\} \subset K$. Lorsque Ω est omis, il faut entendre qu'il s'agit du cas $\Omega = \mathbb{R}^n$. Enfin $C_0(\Omega)$ est la réunion des C_K^m pour K dans Ω . Si $m = \infty$, C^m est l'espace des fonctions C^∞ , si $m = \omega$, c'est l'espace des fonctions analytiques, c'est-à-dire des fonctions qui sont au voisinage de chaque point la somme d'une série entière convergente.

1 Partition de l'unité

(d'après [Munkres])

Le théorème énoncé à la fin de cette section permet dans de nombreux cas de remplacer une question globale par une question locale. Il joue surtout un rôle crucial dans l'étude des variétés et sous-variétés.

Tout d'abord il est important de remarquer qu'il existe des fonctions C^m à support compact (ici $m \leq \infty$ mais $m \neq \omega$). En effet,

Lemme 1.1. *La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = e^{-1/t}$ pour $t \geq 0$ et par $f(t) = 0$ pour $t \leq 0$ est C^∞ .*

Démonstration. On montre par récurrence que pour $t > 0$, $f^{(p)}(t)$ est de la forme $\frac{Q(t)}{t^{2p}} e^{-1/t}$

où Q est un polynôme. En effet, cela est vrai pour $p = 0$ et la dérivée de $\frac{Q(t)}{t^p}e^{-1/t}$ est

$$\frac{tQ'(t) - 2pQ(t)}{t^{2p+1}}e^{-1/t} - \frac{Q(t)}{t^{2p+2}}e^{-1/t}$$

Il en résulte que $f^p(t)$ est bien définie pour $t > 0$ et que $\lim_{t \rightarrow 0} f^p(t) = 0$. On en déduit que f est p -fois dérivable en 0, et que sa p -ième dérivée est continue. Donc f est de classe C^p pour tout p , et elle est finalement de classe C^∞ . $\square$

On peut alors construire une fonction g telle que $g(t) = 0$ pour $t \leq 0$ et $g(t) = 1$ pour $t \geq 1$. Il suffit de poser $I = \int_{\mathbb{R}} f(t)f(1-t)dt$. Alors $I > 0$ et $g(t) = \frac{1}{I} \int_{-\infty}^t f(s)f(1-s)ds$.

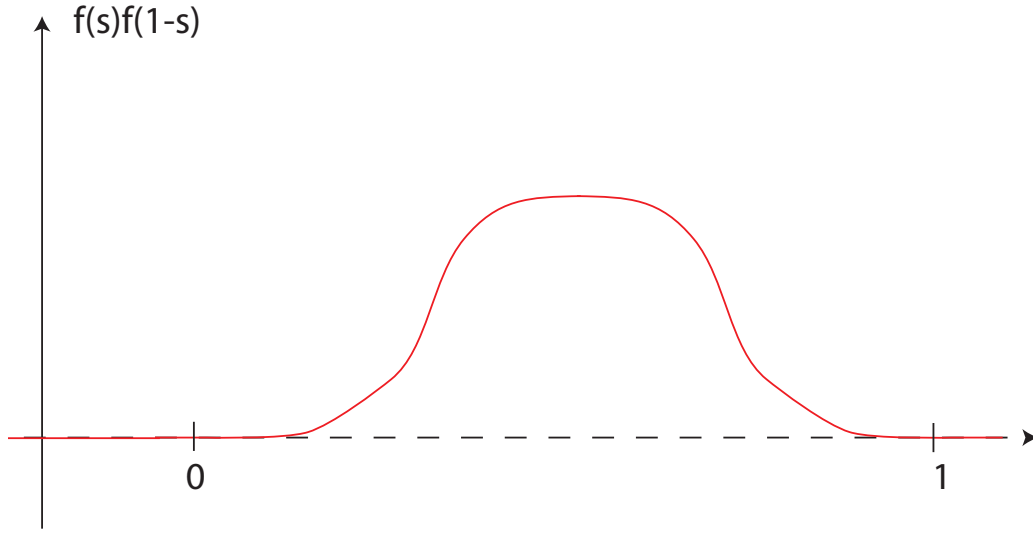


FIGURE 1.1 – La fonction $f(s)f(1-s)$.

Proposition 1.2. *Soit K un compact contenu dans Ω . Il existe une fonction φ de $C_0^\infty(\Omega)$ égale à 1 au voisinage de K .*

Démonstration. Soit δ tel que $B(x, \delta) \subset \Omega$ pour tout x de K (qui existe car $d(x, \mathbb{C}\Omega)$ atteint son minimum > 0 sur le compact K). Alors posant

$$\psi_x(y) = 2g\left(1 - \frac{|y-x|^2}{\delta^2}\right)$$

et $W_x = \{y \mid \psi_x(y) > 1\}$, on a $K \subset \bigcup_{x \in K} W_x$ et en extrayant un sous-recouvrement fini par les W_{x_j} , on pose $\varphi(y) = g(\sum_j \psi_{x_j}(y))$. Alors $\varphi = 1$ sur K et $\varphi = 0$ hors d'un δ -voisinage de K . $\square$

Corollaire 1.3. *Si F est un fermé contenu dans un ouvert U , il existe une fonction C^∞ à support dans U égale à 1 sur F .*

Démonstration. On écrit $F_j = F \cap \overline{B(0, j) \setminus B(0, j-2)}$ et on voit que F est réunion des compacts F_j . La proposition précédente associe à F_j une fonction φ_j à support dans $U_j = U \cap (B(0, j+1) \setminus B(0, j-3))$, et la somme $\sum_j \varphi_j$ étant localement finie, $\varphi = g(\sum_j \varphi_j)$ répond à la question. □

Théorème 1.4. *Soit X un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$ et $(U_j)_{j \in \mathbb{N}}$ un recouvrement localement fini de X . Il existe alors des fonctions χ_j dans $C_0^\infty(U_j)$, à valeurs dans $[0, 1]$ vérifiant*

$$\sum_j \chi_j(x) = 1 \text{ sur } X$$

Démonstration. Il existe un recouvrement de X par des ouverts V_j tels que $\overline{V_j} \subset U_j$ (recouvrement qui est automatiquement localement fini). Supposons en effet avoir défini $V_1, \dots, V_m$ tels que

$$X \subset \bigcup_{1 \leq j \leq m} V_j \cup \bigcup_{k \geq m+1} U_k$$

On pose $F_{m+1} = X \setminus (\bigcup_{1 \leq j \leq m} V_j \cup \bigcup_{k \geq m+2} U_k)$. On a par hypothèse $F_{m+1} \subset U_{m+1}$, on peut alors trouver¹ un ouvert V_{m+1} tel que $F_{m+1} \subset V_{m+1} \subset \overline{V_{m+1}} \subset U_{m+1}$. On a alors

$$X \subset \bigcup_{1 \leq j \leq m+1} V_j \cup \bigcup_{k \geq m+2} U_k$$

On prend alors φ_j valant 1 sur $\overline{V_j}$ et s'annulant hors de U_j . Alors $\sum_j \varphi_j > 0$ sur $\bigcup_j V_j$ et si $\psi(x) = 1$ sur X et vaut 0 hors de $\bigcup_j V_j$, on a sur X l'égalité $\sum_j \frac{\varphi_j(x)}{(1-\psi(x)) + \sum_j \varphi_j(x)} = 1$.

Les fonctions $\chi_j(x) = \frac{\varphi_j(x)}{(1-\psi(x)) + \sum_j \varphi_j(x)}$ répondent donc à la question. □

Théorème 1.5. *Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ contenu dans la réunion d'ouverts $\bigcup_\alpha U_\alpha$. Il existe alors des fonctions χ_α dans $C_0^\infty(U_\alpha)$, à valeurs dans $[0, 1]$ vérifiant*

$$\sum_\alpha \chi_\alpha(x) = 1 \text{ sur } K$$

la somme étant supposée localement finie.

Démonstration. On rappelle le théorème de Lebesgue : pour tout recouvrement de K il existe un δ tel que les boules $B(x, \delta)$ pour x dans K sont toutes contenues dans un U_α . Posant $\psi_x(y) = 2f(\delta^2 - |y - x|^2)$ et $W_x = \{y \mid \psi_x(y) > 1\}$, les W_x pour x dans K forment un recouvrement de K dont on extrait un sous-recouvrement fini par les W_{x_j} . On pose $\psi_j = \psi_{x_j}$. Alors $\sum_j \psi_j(y) > 1$ sur K et si φ est la fonction associée par la proposition précédente à K , les fonctions

$$\chi_j = \frac{\psi_j}{(1 - \varphi) + \sum_j \psi_j}$$

répondent au problème posé. □

1. Car un espace métrique est normal : on prend $V_{m+1} = \{x \mid d(x, F_{m+1}) < d(x, \mathbb{C}U_{m+1})\}$

2 Inversion locale et fonctions implicites. Théorème du rang constant

Le théorème d'inversion locale et le théorème des fonctions implicites ont été vus en cours de Topologie et Calcul Différentiel. Nous nous contentons de rappeler les énoncés des théorèmes

Théorème 1.6 (Fonctions implicites). *Soient E_1, E_2, F des espaces de Banach U, V des ouverts respectivement dans E_1, E_2 , et $f : U \times V \rightarrow F$ une application C^k où $k \geq 1$. On suppose $f(x_0, y_0) = 0$ et $\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0)$ inversible dans $\mathcal{L}(E_2, F)$ d'inverse continue. Alors il existe des voisinages U' de x_0 et V' de y_0 et une application $\varphi \in C^k(U', V')$ tels que*

$$\forall (x, y) \in U' \times V' , f(x, y) = 0 \iff y = \varphi(x) .$$

Théorème 1.7 (Théorème d'inversion locale). *Si $\varphi : U \rightarrow V$ est C^k , $k \geq 1$, et $d\varphi(x_0)$ est un isomorphisme, il existe des ouverts U' et V' contenant x_0 et $y_0 = \varphi(x_0)$ et une application $\psi \in C^k(V', U')$ telle que $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = \text{Id}$. L'application φ est donc un difféomorphisme de U' sur V' .*

Théorème 1.8 (Théorème du rang constant). *Soient U, V des ouverts de $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow V$ de classe C^k , $k \geq 1$, et $d\varphi(x)$ est de rang constant r dans U . Alors il existe des ouverts U' et V' contenant x_0 et $y_0 = f(x_0)$ et des difféomorphismes locaux ρ défini sur U' et σ défini sur V' tels que $\sigma \circ f \circ \rho(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_r, 0, 0, \dots, 0)$.*

Démonstration. Quitte à composer avec des changement de coordonnée affine, on peut supposer que $x_0 = 0, y_0 = 0$ et que $df(x_0)$ est la projection $(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$. Soit alors π la projection $(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_r)$ et w l'application

$$w(x_1, \dots, x_m) = (\pi \circ f(x_1, \dots, x_m), x_{r+1}, \dots, x_m)$$

Sa différentielle en x_0 est l'identité, il existe donc ρ difféomorphisme local de $\mathbb{R}^m$ telle que $w \circ \rho = \text{Id}$ soit $(\pi(f(\rho(x_1, \dots, x_m)))) = (x_1, \dots, x_r)$, on s'est donc ramené à la situation où

$$f(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_r, g(x_1, \dots, x_m))$$

où $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n-r}$. L'hypothèse que f est de rang r au voisinage de 0 entraîne que pour tout x dans U' , $\frac{\partial g}{\partial x_j} = 0$ pour $j > r$ et donc que $g(x_1, \dots, x_m) = g(x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$. En posant $g = (g_{r+1}, \dots, g_m)$ et composant avec le difféomorphisme

$$\sigma : (y_1, \dots, y_n) \mapsto (y_1, \dots, y_r, y_{r+1} - g_{r+1}(y_1, \dots, y_r), \dots, y_n - g_n(y_1, \dots, y_r))$$

cela conclut la démonstration. □

Deux cas particuliers

Corollaire 1.9 (Forme normale des immersions). *Soient U, V des ouverts de $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : U \rightarrow V$ de classe C^k , $k \geq 1$, et $d\varphi(x_0)$ est de rang m . Alors il existe des ouverts U' et V' contenant x_0 et $y_0 = \varphi(x_0)$ et des applications $\rho \in C^k(U', U')$ et $\sigma \in C^k(V', V)$ telle que $\sigma \circ \varphi \circ \rho(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0, 0, \dots, 0)$.*

Corollaire 1.10 (Forme normale des submersions). *Soient U, V des ouverts de $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : U \rightarrow V$ de classe C^k , $k \geq 1$, et $d\varphi(x_0)$ est de rang n . Alors il existe des ouverts U' et V' contenant x_0 et $y_0 = \varphi(x_0)$ et des applications $\rho \in C^k(U', U')$ et $\sigma \in C^k(V', V)$ telle que $\sigma \circ \varphi \circ \rho(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_n)$.*

Démonstration des deux corollaires. Il suffit de remarquer que le rang est semi-continu inférieurement, et que si ce rang est maximal, il reste maximal dans un voisinage. On peut alors appliquer le théorème du rang constant.

□

3 Théorème de Brown-Morse-Sard

Il s'agit du théorème très important suivant

Théorème 1.11 (Morse-Sard). *Soit f une application de classe C^p de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, avec $p \geq \max\{n - m + 1, 1\}$. Alors l'ensemble des valeurs critiques $C = \{f(x) \in \mathbb{R}^m \mid \text{rang}(df(x)) < n\}$ est de mesure nulle.*

Remarques 3.1. (A) Attention, c'est l'ensemble des **valeurs critiques** qui est de mesure nulle, donc un sous-ensemble de $\mathbb{R}^m$. L'ensemble des **points critiques** qui est $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{rang}(df(x)) < m\}$ n'a pas de raison d'être de mesure nulle (exemple : une application constante).

(B) La différentiabilité de l'énoncé est optimale. Voir *A fonction not constant on a connected set of critical points*, par H. Whitney, Duke Math. Journal, 1935, pp. 514-517.

Démonstration pour $n \leq m$. (cf. [deRham]) Nous renvoyons à [Milnor] pour la démonstration générale. Nous traitons cependant le cas facile $n \leq m$. Notons que pour $n < m$ le théorème dit que l'image est de mesure nulle, et il n'y a donc pas d'application de Peano en C^1 , mais le cas $m = n$ est déjà intéressant. Il suffit de se limiter à la restriction de f à un compact de $\mathbb{R}^n$, car $\mathbb{R}^n$ est réunion dénombrable de compacts et une réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle est de mesure nulle. Supposons donc $m = n$. Recouvrons donc $[0, 1]^n$ par N^n cubes dont les côtés sont de taille $1/N$. Considérons le sous-ensemble constitué de cubes contenant au moins un point critique. On note $\mathcal{K}$ l'ensemble de ces cubes, et pour chacun d'entre eux on se donne un point critique x_j . Alors l'image de $df(x_j)$ est contenue dans un sous-espace-vectoriel de codimension > 0 , et on

note H_j le sous-espace affine associé passant par $f(x_j)$. Comme il existe une fonction ε continue et s'annulant en 0 telle que

$$|f(x) - f(x_j) - df(x_j)(x - x_j)| \leq |x - x_j|\varepsilon(|x - x_j|)$$

on a donc que $f(K_j)$ est contenu dans un $1/N \cdot \varepsilon(1/N)$ voisinage de H_j , et notant $C = \|df\|_{C^0([0,1]^n)}$ dans une boule de rayon $(C+1)/N$, donc dans un ensemble de volume $\frac{(C+1)^{n-1}}{N^{n-1}} \varepsilon(1/N)$. Comme il y a au plus N^n cubes, on trouve que le volume total de l'image des cubes de K est au plus $C^{n-1}\varepsilon(1/N)$ qui tend vers 0 avec N . On en déduit que $f(K \cap [0, 1]^n)$ est de mesure nulle, et par le même argument $f(K \cap [-R, R]^n)$ est de mesure nulle. On conclut en utilisant le fait que $F(K) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} f(K \cap [-j, j]^n)$ et qu'une réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle est de mesure nulle. $\square$

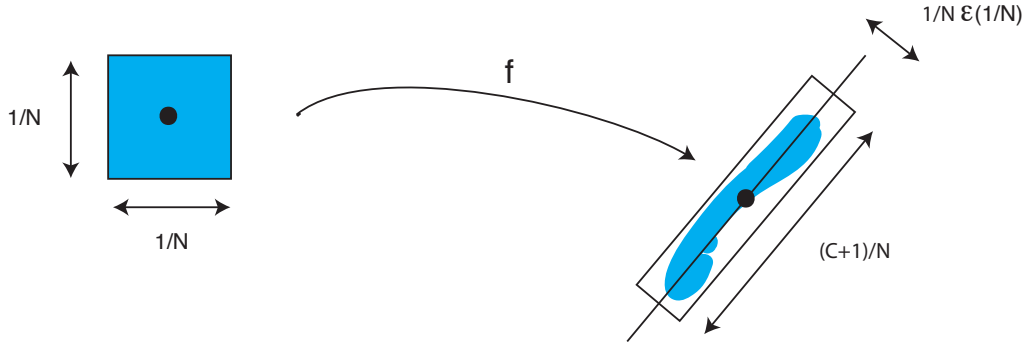


FIGURE 1.2 – Démonstration de Sard d'après deRham

3.0.1 Application

Soit f, g deux applications de classe C^2 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Si $df(x, y) \neq 0$ pour tout $(x, y) \in f^{-1}(t)$ alors le niveau $C(t) = \{(x, y) \mid f(x, y) = t\}$ est localement difféomorphe à $\mathbb{R}$ (théorème de forme normale des submersions). On dit que $C_t(f)$ est une courbe lisse. De même pour $C_s(g)$. On prétend que pour (s, t) hors d'un ensemble de mesure nulle, $C_t(f)$ et $C_s(g)$ sont des courbes lisses qui ne sont pas tangentes aux points d'intersection. Que $C_t(f)$ et $C_s(g)$ soient des courbes lisses pour presque tous (s, t) résulte immédiatement de Sard appliqué à f et g , et du fait que le produit de deux ensembles de mesure nulle est de mesure nulle. La transversalité s'obtient en considérant les valeurs critiques de $(x, y) \mapsto (f(x, y), g(x, y))$ qui sont donnés soit par l'annulation de l'un des vecteurs $(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y))$ ou $(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), \frac{\partial g}{\partial y}(x, y))$ (déjà exclue hors d'un ensemble de mesure nulle par le raisonnement ci-dessus) ou encore par la colinéarité de ces deux vecteurs, tous deux non nuls, correspondant au cas, où $C_t(f)$ et $C_s(g)$ sont des courbes lisses tangentes en (x, y) . Le théorème de Sard dit que pour presque tous (s, t) , $C_t(f)$ et $C_s(g)$ sont des courbes lisses qui ne sont pas tangentes aux points d'intersection.

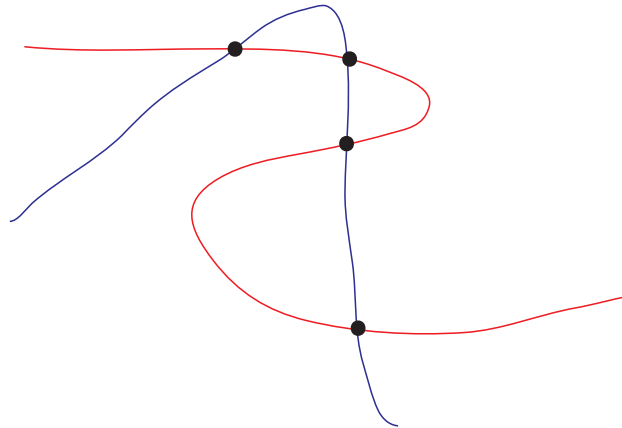


FIGURE 1.3 – Paire de courbes de niveau transverses

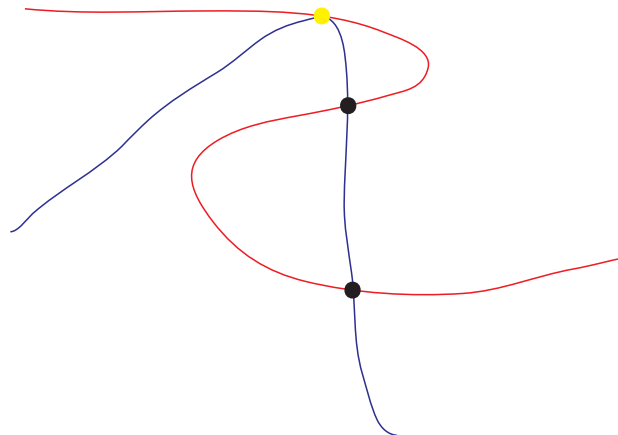


FIGURE 1.4 – Paire de courbes de niveau non-transverses

4 Champs de vecteurs

4.1 Remarques générales sur les équations différentielles

Un système d'équations différentielles d'ordre quelconque se ramène toujours à un système d'équations d'ordre un. En effet l'équation

$$\frac{d^k x}{dt^k} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2 x}{dt^2}, \dots, \frac{d^{k-1} x}{dt^{k-1}}\right) \quad x \in \mathbb{R}^k$$

se réécrit sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots = \vdots \\ \dot{x}_{k-1} = f(t, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}) \end{cases}$$

Cette remarque banale permet d'éviter de répéter les mêmes énoncés pour les équations de degré 2, puis 3, etc. . . alors même qu'il ne s'agit que de transcrire les résultats. Cela ne signifie pas que les équations de degré k ne puissent avoir des spécificités que ne possèdent pas les systèmes de degré un.

Plus généralement, un système d'équations de degrés différents se réduira par le même procédé à un système de degré un, défini sur un espace de dimension plus grande, que l'on écrira en toute généralité :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_k) \\ \vdots = \vdots \\ \dot{x}_k = f_k(x_1, \dots, x_k) \end{cases}$$

et de manière abrégée, sous la forme

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{t}, \mathbf{x})$$

où $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$, et $\mathbf{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$ est au moins continue.

On peut même supposer que $\mathbf{f}$ est une application de $\mathbb{R} \times E$ dans E où E est un espace de Banach

Remarque 4.1. Il est important de noter que les équations différentielles implicites, c'est à dire de la forme $f(t, x, \dot{x}) = 0$, présentent des difficultés qui n'apparaissent pas dans l'étude des équations « ordinaires ». On peut lorsque $\frac{\partial}{\partial v} f(t, x, v)$ est inversible en un point (t_0, x_0, v_0) annulant f , utiliser le théorème des fonctions implicites pour se ramener au voisinage de ce point aux théorèmes du cours. Nous ne ferons pas ici la théorie générale de telles équations.

4.2 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Soit $X : I \times \Omega \rightarrow E$ est définie sur le produit d'un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et d'un ouvert Ω d'un espace de Banach, E . On veut résoudre l'équation $\dot{x} = X(t, x)$ avec condition initiale $x(t_0) = x_0 \in \Omega$.

Théorème 1.12 (Théorème de Cauchy-Lipschitz). *Supposons X continue en (t, x) , et lipschitzienne en la seconde variable. Alors, pour tous $\tau_0 \in I$, $u_0 \in \Omega$ il existe $\delta > 0$ et $\alpha > 0$ tels que quels que soient u dans $B(u_0, \delta)$ et t_0 dans $]\tau_0 - \delta, \tau_0 + \delta[$, le système*

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x} &= X(t, x) \\ x(t_0) &= u \end{cases}$$

possède une unique solution définie sur $]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$.

Il est souvent utile d'avoir une version à paramètres de ce théorème, la taille de l'intervalle d'existence restant minorée

Théorème 1.13 (Cauchy-Lipschitz à paramètres). *Soit $(\lambda, t, x) \rightarrow X_\lambda(t, x)$ une application C^p , avec $p \geq 0$, définie sur $\Lambda \times I \times \Omega$, lipschitzienne en x . Pour tout (λ_0, τ_0, u_0) , il existe $\delta > 0$ et $\alpha > 0$ tels que quel que soit (λ, t_0, u) dans $B(\lambda_0, \delta) \times]\tau_0 - \delta, \tau_0 + \delta[\times B(u_0, \delta)$, la solution $x_\lambda(t; t_0, u)$ de*

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{x} &= X_\lambda(t, x) \\ x(t_0) &= u \end{cases}$$

soit définie sur $]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$. De plus l'application $(t, \lambda, t_0, u) \rightarrow x_\lambda(t; t_0, u)$ est de classe C^p , et de classe C^{p+1} en t .

Remarque 4.2. Soient $\dot{x} = f(x)$, où $x \in \mathbb{R}^n$ une équation différentielle, alors les solutions $t \mapsto x(t)$ fournissent une famille de courbes remplissant l'espace (puisque pour chaque $x_0 \in \mathbb{R}^n$ il passe une courbe par ce point (i.e. il existe une solution telle que $x(0) = x_0$) et deux courbes de la famille ne se croisent pas (i.e. la solution telle que $x(0) = x_0$ est unique et la solution telle que $y(t_0) = x_0$ est donnée par $y(t) = x(t - t_0)$, c'est donc un reparamétrage de x). Ces familles de courbes doivent satisfaire à des restrictions plus importantes, par exemple absence d'enveloppe de la famille (cf. exercice P du chapitre 2).

On peut se demander pourquoi une solution de (1) peut ne pas être définie sur I tout entier. La proposition suivante montre que l'unique raison est le phénomène d'« explosion en temps fini » :

Proposition 1.14. *Soit $X :]t_-, t_+[\times \Omega \rightarrow E$ vérifiant les hypothèses de Cauchy-Lipschitz, et x une solution maximale, définie sur $J =]\tau_-, \tau_+[$. Alors si $\tau_+ < t_+$, $x(t)$ « sort de tout compact » lorsque t tend vers τ_+ . En d'autres termes : pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $t_0 \in J$, tel que pour tout $t \geq t_0$, $t \in J$ on a $x(t) \notin K$.*

Remarque 4.3. Lorsque E est de dimension finie et $\Omega = E$, la conclusion est équivalente à $\lim_{t \rightarrow \tau_+} |x(t)| = +\infty$, car les boules de rayon R étant compactes, et $x(t)$ sortant de toute boule, on a

$$\forall R > 0 \quad \exists \tau_R \text{ tel que } \tau_R < t < \tau_+ \Rightarrow |x(t)| \geq R$$

c'est-à-dire que $|x(t)|$ tend vers $+\infty$ lorsque t tend vers τ_+ .

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe une suite $(t_n)_{n \geq 1}$ telle que $x(t_n) \in K$, où K est compact, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \tau_+$. On peut alors extraire une sous-suite, que l'on note encore $(t_n)_{n \geq 1}$, telle que $x_n = x(t_n)$ converge vers x_∞ .

Le théorème de Cauchy-Lipschitz nous assure l'uniformité de la taille de l'intervalle de définition au voisinage d'un point, ce qui permet d'affirmer qu'il existe α, δ strictement positifs tels que la solution de

$$\begin{cases} \dot{x} &= X(t, x) \\ x(t_n) &= x_n \end{cases}$$

est définie sur $]t_n - \alpha, t_n + \alpha[$ si $d(x_n, x_\infty) < \delta$.

Or pour n assez grand, on aura bien $d(x_n, x_\infty) < \delta$, et comme t_n tend vers τ_+ , on aura que $]t_n - \alpha, t_n + \alpha[$ n'est plus contenu dans J . La solution x est donc définie sur un intervalle strictement plus grand que J , qui n'était donc pas maximal. $\square$

5 Appendice : paracompacité et espaces métriques

On rappelle

Définition 1.15. Un espace paracompact est un espace X tel que pour tout recouvrement ouvert $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ on peut trouver un sous-recouvrement $(V_\beta)_{\beta \in B}$ (i.e. pour tout β il existe α tel que $V_\beta \subset U_\alpha$) qui soit localement fini (i.e. tout point possède un voisinage qui ne rencontre qu'un nombre fini de V_β).

Théorème 1.16 (Stone). *Tout espace métrique est paracompact*

Démonstration. Voir l'article de M.E. Rudin reproduit ci-dessous. $\square$

A NEW PROOF THAT METRIC SPACES ARE PARACOMPACT

MARY ELLEN RUDIN

By using a well-ordered open cover, there is a simple proof of the nice theorem [1] that every metric space is paracompact.

Assume that X is a metric space and that $\{C_\alpha\}$ is an open cover of X indexed by ordinals. Let ρ be a metric on X and let $S(x, r)$ be the open sphere with center x and radius r . For each positive integer n define D_{an} (by induction on n) to be the union of all spheres $S(x, 2^{-n})$ such that:

- (1) α is the smallest ordinal with $x \in C_\alpha$,
- (2) $x \notin D_{\beta j}$ if $j < n$,
- (3) $S(x, 3 \cdot 2^{-n}) \subset C_\alpha$.

Then $\{D_{an}\}$ is a locally finite refinement of $\{C_\alpha\}$ which covers X ; hence X is paracompact.

Certainly $\{D_{an}\}$ refines $\{C_\alpha\}$. To see that $\{D_{an}\}$ covers X , observe that, for $x \in X$, there is a smallest ordinal α such that $x \in C_\alpha$, and an n so large that (3) holds. Then, by (2), $x \in D_{\beta j}$ for some $j \leq n$.

To prove that $\{D_{an}\}$ is locally finite, assume an $x \in X$ and let α be the smallest ordinal such that $x \in D_{an}$ for some n , and choose j so that $S(x, 2^{-j}) \subset D_{an}$. The proof consists of showing that:

- (a) if $i \geq n+j$, $S(x, 2^{-n-j})$ intersects no $D_{\beta i}$,
- (b) if $i < n+j$, $S(x, 2^{-n-j})$ intersects $D_{\beta i}$ for at most one β .

PROOF OF (a). Since $i > n$, by (2), every one of the spheres of radius 2^{-i} used in the definition of $D_{\beta i}$ has its center y outside of D_{an} . And since $S(x, 2^{-j}) \subset D_{an}$, $\rho(x, y) \geq 2^{-j}$. But $i \geq j+1$ and $n+j \geq j+1$, so $S(x, 2^{-n-j}) \cap S(y, 2^{-i}) = \emptyset$.

PROOF OF (b). Suppose $p \in D_{\beta i}$, $q \in D_{\gamma i}$, and $\beta < \gamma$; we want to show that $\rho(p, q) > 2^{-n-j+1}$. There are points y and z such that $p \in S(y, 2^{-i}) \subset D_{\beta i}$, $q \in S(z, 2^{-i}) \subset D_{\gamma i}$; and, by (3), $S(y, 3 \cdot 2^{-i}) \subset C_\beta$ but, by (2), $z \notin C_\beta$. So $\rho(y, z) \geq 3 \cdot 2^{-i}$ and $\rho(p, q) > 2^{-i} \geq 2^{-n-j+1}$.

BIBLIOGRAPHY

1. A. H. Stone, *Paracompactness and product spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **54** (1948), 977-982.

UNIVERSITY OF WISCONSIN

Received by the editors January 30, 1968.

6 Exercices

- (A) Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble fermé A de $\mathbb{R}^n$. On dit que f est de classe C^p sur A si pour tout point x de A , il existe une fonction f_x de classe C^p définie au voisinage de x telle que $f_x = f$ sur A . Montrer que toute fonction f de classe C^p sur A s'étend en une fonction de classe C^p sur $\mathbb{R}^n$ (voir [Dieudonné], tome 3, 16.4 exercice 6 pour une autre caractérisation).
- (B) Soit f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. On suppose que f est propre et que $df(x)$ est inversible pour tout x . Montrer que f est un difféomorphisme. On pourra commencer par montrer que $x \mapsto \#f^{-1}(x)$ est constante. On considérera alors une préimage u_0 de 0, et on montrera que pour chaque segment $[0, x]$ il existe un unique relèvement continu $u_x(t)$ tel que $f(u_x(t)) = tx$ et donc $f(u_x(1)) = x$. Montrer que $x \mapsto u_x(1)$ est continu. En déduire qu'il existe une application g inverse continue à droite de f , puis que f est bijective. (voir aussi l'exercice E).
- (C) **Théorème d'Hadamard** (Il s'agit d'une version du théorème précédent où la propriété de f est remplacée par une hypothèse sur $df(z)$. Il nécessite la connaissance du lemme de Gronwall) .
 Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $f(0) = 0$ et qu'il existe des constantes A, B telle que pour tout z dans $\mathbb{R}^n$ la matrice $df(z)$ satisfait l'inégalité

$$|df(z)^{-1}| \leq A|z| + B$$

- (a) Soit $x \in \mathbb{R}^n$ $\gamma_x(t)$. On cherche un chemin de classe C^1 , $\gamma_x(t), t \in [0, 1]$ tel que $f(\gamma_x(t)) = tx$ Montrer que cela équivaut à $df(\gamma_x(t))\dot{\gamma}_x(t) = x$, soit

$$\dot{\gamma}_x(t) = df(\gamma_x(t))^{-1}x$$

- (b) Montrer que sous l'hypothèse faite sur f , le flot de

$$\dot{\gamma}_x(t) = df(\gamma_x(t))^{-1}x$$

est défini sur $[0, 1]$, et que g est de classe C^1 .

- (c) En déduire que si $g(x)$ est l'image de 0 par le flot au temps 1 de $\dot{\gamma}(t) = df(\gamma(t))^{-1}x$ on a $f(g(z)) = z$.
- (d) Montrer que l'image de g est ouverte.
- (e) Montrer que $z \in \text{Im}(g)$ si et seulement si $g(f(z)) = z$. En déduire que cette image est fermée, puis que g est surjective.
- (f) Montrer que si g vérifie $f \circ g = Id$ on a aussi $g \circ f = Id$.
- (g) Démontrer le théorème suivant

Théorème (Hadamard). Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $f(0) = 0$ et qu'il existe une constante A telle que pour tout z dans $\mathbb{R}^n$ on ait l'inégalité

$$|df(z)^{-1}| \leq A|z| + B$$

Alors f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$

(D) Théorème de d'Alembert-Gauss

Soit $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une application polynomiale. Soit $K = \{P(x) \mid dP(x) = 0\}$.

- (a) Montrer en utilisant le théorème des fonctions implicites que l'application $\nu : \mathbb{C} \setminus K \rightarrow \mathbb{N}$ donnée par $\nu(z) = \text{card}(P^{-1}(z))$ est localement constante.
- (b) Montrer que $\mathbb{C} - K$ est connexe par arcs. En utilisant que ν ne peut être partout égale à zéro, montrer que P est surjective.
- (c) En déduire que tout polynôme sur $\mathbb{C}$ possède au moins une racine complexe. (Théorème de d'Alembert-Gauss)
- (d) Quelle est la partie de la démonstration qui ne marche pas sur $\mathbb{R}$?

(E) Théorème de relèvement

- (a) Soit f une application continue de $[0, 1]$ dans le cercle unité. Montrer qu'il existe $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(t) = e^{i\varphi(t)}$, et que φ est unique une fois fixé $\varphi(0)$.

Indication : On découpera $[0, 1]$ en intervalles assez petits sur lesquels φ est définie facilement, et on recollera convenablement sur l'intersection de ces intervalles.

- (b) Montrer qu'il en est de même pour $[0, 1]^2$ au lieu de $[0, 1]$
Indication : Utiliser a) pour le faire sur $[0, 1] \times \{y\}$ puis étendre aux bandes $[0, 1] \times [y - \varepsilon, y + \varepsilon]$. Terminer en recouvrant $\{0\} \times [0, 1]$ par compacité, et en utilisant le a) pour les intersections des bandes.
- (c) De même pour $[0, 1]^k$ pour k quelconque
- (d) Montrer que si f est de classe C^k alors ϕ est de classe C^k .

- (F) Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans S^1 continue (ou de classe C^∞ si on préfère) et périodique de période 2π (i.e. $f(t + 2\pi) = f(t)$).

- (a) Montrer que si $\phi(t)$ est le relèvement défini à l'exercice précédent, $\frac{1}{2\pi} (\phi(t + 2\pi) - \phi(t))$ est un entier appelé degré de f et noté $\deg(f)$. Montrer que cet entier ne dépend pas du choix de ϕ .
- (b) Montrer que si f_s est une famille continue de telles applications, $\deg(f_s)$ ne dépend pas de s .
- (c) Calculer le degré d'une application constante. De l'application $f(x) = e^{2ix}$

(G) Théorème de Peano

Soit $\dot{x}(t) = X(t, x(t))$ une équation différentielle où X est seulement supposé continu. On veut montrer que cette équation a une solution pour $x(t_0) = x_0$.

- (a) Montrer que si X_n est une suite de fonctions C^1 telle que $\lim_n X_n = X$, alors sur tout borné de $I \times \mathbb{R}^n$, les solutions x_n données par Cauchy-Lipschitz sont équicontinues et définies sur un intervalle commun.
- (b) En déduire qu'on peut extraire de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge uniformément vers x .
- (c) Montrer que x est solution de $\dot{x}(t) = X(t, x(t))$. La solution est-elle unique ?

(H) Méthode de Newton

Soit f une application C^2 définie sur une boule $B(0, r)$ d'un espace de Banach E et $f : B(0, r) \rightarrow E$. On suppose que $|D^2f(x)| \leq C$ et $|(Df(x))^{-1}| \leq C$ sur $B(0, r)$.

- (a) On considère la suite définie par $x_{n+1} = x_n - Df(x_n)^{-1}f(x_n)$.

Montrer que $|x_{n+1} - x_n| \leq C|f(x_n)|$ et que $|f(x_{n+1})| \leq C|x_{n+1} - x_n|^2$

- (b) En déduire que si $|f(x_0)| < \delta$ avec δ convenablement choisi, on a

$$|f(x_n)| \leq C^{3(1+2+\dots+2^n)}\delta^{2^n} \text{ et } |x_{n+1} - x_n| \leq CC^{3(1+2+\dots+2^n)}\delta^{2^n}$$

- (c) En déduire que si $\delta < 1/C^3$, la suite x_n converge vers une solution de $f(x) = 0$.

On a donc obtenu une solution de $f(x) = 0$ en partant d'une solution approchée, x_0 . C'est souvent plus utile numériquement que ce que fournit le théorème d'inversion locale (qui lui part d'une solution exacte pour en construire d'autres)

- (d) En déduire que si $f(x_0) = 0$ alors $f(x) = y$ a une solution pour tout y dans $B(0, C^{-3})$.

Cela fournit une estimation de la taille de l'image de $f(B(x_0, r))$ dans le théorème d'inversion locale.

- (e) Montrer que si x est la limite de la suite ci dessus, on a $|x_n - x| \leq K\rho^{2^n}$ avec $\rho < 1$. Comparer avec la vitesse d'approximation donnée par le théorème de Picard.

- (f) Ecrire la méthode de Newton pour calculer $\sqrt{a}$, (i.e. pour $f(x) = x^2$) où a est un réel positif. Pour quelles valeurs initiales converge-t-il ?

- (g) Comparer la suite x_n avec celle obtenue en itérant $T_y(x)$ où T_y est l'application définie dans la démonstration du théorème des fonctions implicites appliquée à $f(x, y) = y - f(x)$.

- (a) Montrer que si X_n est une suite de fonctions C^1 telle que $\lim_n X_n = X$, alors sur tout borné de $I \times \mathbb{R}^n$, les solutions x_n données par Cauchy-Lipschitz sont équicontinues et définies sur un intervalle commun.

- (b) En déduire qu'on peut extraire de la suite (x_n) une suite de fonctions qui converge uniformément vers x .

- (c) Montrer que x est solution de $\dot{x}(t) = X(t, x(t))$. La solution est-elle unique ?

(I) (Problème de perturbation singulière) On considère l'équation

$$\varepsilon \dot{x} = f(t, x)$$

pour $x \in \mathbb{R}$.

Que dire des solutions lorsque ε tend vers 0 ? Tendent-elles (et en quel sens) vers une solution de $f(t, x) = 0$? Quel rôle jouent les conditions initiales ?

On pourra traiter des exemples, comme

$$\varepsilon \dot{x} = x(e^x - 2)$$

$$\varepsilon \dot{x} = (x - t)^2$$

Le théorème de Cauchy à paramètres permet-il d'étudier la limite en $\varepsilon = 0$ de ces équations ?

- (J) (a) Utiliser le principe de Bernoulli² pour montrer que la hauteur d'eau d'un réservoir dont le fond est percé d'un orifice, vérifie une équation du type $\dot{h}(t) = -C\sqrt{h(t)}$, où C est une constante dépendant des paramètres physiques (densité du liquide, taille du trou, etc....).
- (b) Montrer qu'une telle équation a plusieurs solutions, et en particulier une solution telle que $h(t) = \frac{C^2}{4}(t - T)^2$ pour $t \leq T$ et $h(t) = 0$ si $t \geq T$. Quel est le sens physique de la non-unicité de la solution ? Connaissant l'état du réservoir à l'instant t_0 , peut-on en déduire son état à n'importe quel autre instant ?
- (K) Montrer que l'espace des immersions (i.e. les applications de différentielle inversible) de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ est ouvert pour la topologie dont les ouverts sont donnés par $\|f - g\|_{C^1(K_j)} < \varepsilon_j$ (la suite ε_j est une suite quelconque de réels > 0). Montrer qu'il en est de même pour l'espace des difféomorphismes de $\mathbb{R}^n$. Montrer par contre que l'espace des homéomorphismes C^0 n'est pas ouvert.

2. Ce principe affirme que pour un fluide, si P est la pression, ρ la densité, g l'accélération de la pesanteur, v la vitesse du fluide, h sa hauteur, $P + \frac{1}{2}\rho v^2 + gh$ est la même en tous points du fluide. Il se démontre aisément en considérant que le travail effectué par la pression sur une volume infinitésimal de fluide égale la somme des variations de son énergie cinétique et de son énergie potentielle.

Chapitre 2

Sous-variétés

La géométrie différentielle a pour objet l'étude locale et globale d'objets géométriques appelés **variétés différentielles** et leurs transformations. Ces objets interviennent dans de nombreux domaines des mathématiques, allant des systèmes dynamiques, équations aux dérivées partielles, géométrie algébrique ou arithmétique et probabilités.

Avant de définir la notion de variété différentielle, nous allons définir et étudier les **sous-variétés différentielles de $\mathbb{R}^n$** qui en sont un exemple remarquable, généralisation naturelle des courbes et surfaces « régulières ».

Au voisinage de chacun de ses points, une sous-variété « ressemble » à un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, si l'on décide que deux objets se “ressemblent” lorsqu'ils sont difféomorphes- au moins localement.

L'une des principales difficultés de la Géométrie différentielle est la diversité des points de vue possibles, qui correspondent aux différentes manières dont elles interviennent naturellement. Il est indispensable de savoir passer d'un point de vue à l'autre, et le géomètre différentiel est un sorte de jongleur, qui pour chaque problème sait prendre en compte les différents points de vue appropriés qui constituent la première étape de sa résolution.

1 Définition, premières propriétés.

Dans ce chapitre, on supposera tous les difféomorphismes sont de classe C^∞ .

Définition 2.1. Soit M un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. On dit que M est une sous-variété, si et seulement si en chaque point x_0 de M il existe un voisinage U de x_0 et un difféomorphisme local φ tel que l'on ait

$$\varphi(U \cap M) = \mathbb{R}^p \times \{0\} \cap \varphi(U)$$

L'entier p est appelé dimension de M en x_0 .

- Remarques 1.1.* (A) Le difféomorphisme φ s'appelle une « carte locale » de M en x_0 . On va voir (Proposition 2.2) que p est bien défini et ne dépend pas du choix de φ
- (B) Être une sous-variété est une propriété « locale », ce qui signifie qu'elle se vérifie en se restreignant au voisinage de chaque point.

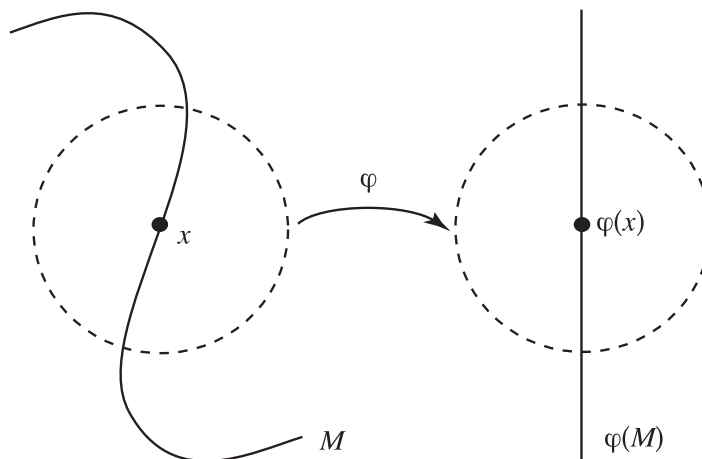


FIGURE 2.1 – Carte pour une sous-variété de dimension 1 du plan

L'unicité de la dimension en x et son indépendance de x pour une variété connexe résultent de la proposition suivante :

Proposition 2.2. *La dimension en un point x d'une variété est définie de manière unique, et notée $\dim_x M$. Si la variété M est connexe, cette dimension ne dépend pas du point choisi.*

Démonstration. En effet, si on avait deux difféomorphismes φ_1, φ_2 tels que $\varphi_1(U \cap M) = \varphi_1(U) \cap \mathbb{R}^p \times \{0\}$ et $\varphi_2(U \cap M) = \varphi_2(U) \cap \mathbb{R}^q \times \{0\}$, alors $\psi = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ serait un difféomorphisme local défini sur un voisinage de 0 envoyant $\mathbb{R}^p \times \{0\}$ sur $\mathbb{R}^q \times \{0\}$. On en déduit que $d\psi(0)$ envoie $\mathbb{R}^p \times \{0\}$ dans $\mathbb{R}^q \times \{0\}$. Or $d\psi(0)$ est une application linéaire bijective donc injective, ce qui entraîne $p \leq q$. Par symétrie on voit que $p = q$.

Maintenant si $\varphi : U \rightarrow V$ est une carte en x , et y est un point de U , φ donne par translation une carte en y : le difféomorphisme ψ donné par $\psi(z) = \varphi(z) - \varphi(y)$ est une carte en y . On en déduit que $\dim_x M = \dim_y M$ et donc $D_p = \{x \in M \mid \dim_x M = p\}$ est un ouvert. Son complémentaire est réunion d'ouverts $M - D_p = \bigcup_{j \neq p} D_j$, il est donc ouvert, ce qui entraîne que D_p est à la fois ouvert et fermé. On en conclut que si D_p est non vide et M connexe, $M = D_p$. $\square$

Utiliser la définition ci-dessus pour démontrer qu'un ensemble est une sous-variété est parfois peu commode. Il vaut mieux connaître le plus grand nombre de définitions équivalentes pour utiliser chaque fois celle qui est la mieux adaptée. En voici quelques unes :

Proposition 2.3. Soit M un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. Alors M est une sous-variété si et seulement si pour chaque point x_0 de M , il existe un voisinage W de x_0 dans $\mathbb{R}^n$, tel que l'une de ces propriétés soit vérifiée

(A) **(graphe)** Il existe un changement linéaire de coordonnées, $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, et une application C^∞ , $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ telle que

$$W \cap M = W \cap \{A(z, f(z)) \mid z \in \mathbb{R}^p\}$$

(B) **(équation)** Il existe une application C^∞ , $F : W \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ telle que $dF(x_0)$ soit surjective, et $W \cap M = F^{-1}(0)$.

(C) **(nappe paramétrée)** Il existe $j : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$, C^∞ et définie sur un voisinage U de 0, telle que $j(0) = x_0$, $dj(0)$ est injective et j est une bijection bicontinue¹

$$j : U \rightarrow M \cap W$$

Remarque 1.1. La condition (B) signifie que si on pose $F(x) = (F_1(x), \dots, F_{n-p}(x))$, les formes linéaires $dF_1(x), \dots, dF_{n-p}(x)$ sont linéairement indépendantes.

Exemples 1.1. Pour $p = 0$ une variété est simplement un ensemble de points isolés. Pour $p = 1$ on retrouve la notion de courbe plane régulière injective et propre du plan ($n = 2$) ou de l'espace ($n = 3$). Pour $p = n$ une sous-variété de dimension n de $\mathbb{R}^n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. – On note (DEF) la propriété de la définition (2.1). Montrons que (DEF) entraîne la propriété (B).

Soit $\varphi : M \cap W \rightarrow \mathbb{R}^p \times \{0\}$. On note $(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_{n-p})$ les coordonnées sur $\mathbb{R}^n$ et $F : x \mapsto (v_1(\varphi(x)), \dots, v_{n-p}(\varphi(x)))$

Alors il est clair que

$$x \in M \cap W \iff F(x) = 0 \text{ et } x \in W$$

or $dF(0)$ est surjective car c'est la composée de la différentielle de $(u, v) \mapsto v$ et de $d\varphi$.

– Montrons que $(B) \implies (A)$
Soit en effet $(u, v) \in W$. Alors

$$F(u, v) = 0 \iff (u, v) \in M \cap W$$

Quitte à faire un changement linéaire de variables et à restreindre W , on peut supposer que $\frac{\partial F}{\partial v}$ est inversible. Par le théorème des fonctions implicites, il existe $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$

$$(u, v) \in W \text{ et } F(u, v) = 0 \iff v = f(u) \text{ et } u \in U$$

Donc M est localement le graphe de f .

1. Ce qui signifie qu'elle est continue, d'inverse continue, ou encore que l'image d'un ouvert est un ouvert de M (c'est à dire intersection d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et de M). On verra en exercice (Q) que la bicontinuité peut être remplacée par la propriété.

– (A) $\implies$ (DEF)

Quitte à faire un changement linéaire de variables, on peut supposer que $M \cap W$ est le graphe de $f : U \rightarrow V$. Alors $\varphi : (u, v) \mapsto (u, v - f(u))$ envoie $M \cap W$ sur $\mathbb{R}^p \times \{0\} \cap (U \times V)$

– (A) $\implies$ (C)

Soit $M \cap (U \times V)$ le graphe de $f : U \rightarrow V$. Et soit $j : x \mapsto (x, f(x))$ définie sur U . Alors j a sa différentielle injective. De plus l'image d'un ouvert U' contenu dans U est égale à $(U' \times V) \cap M$ qui est donc un voisinage de x_0 dans M . L'application j est donc bicontinue.

– (C) $\implies$ (A)

Soit $j(x) = (u(x), v(x))$ définie sur U , et telle que $j(U) = M \cap W$. On peut supposer après changement linéaire de variables, que l'image de $dj(0)$ est $\mathbb{R}^p \times \{0\}$, c'est-à-dire que $dv(0) = 0$ et $du(0)$ est un isomorphisme. Le théorème d'inversion locale permet alors de trouver des ouverts $U' \subset U$ et $V' \subset V$ et une application C^∞ , $\rho : U' \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\}) \rightarrow V'$ telle que pour $(x, y) \in U' \times V'$

$$u(x) = y \iff x = \rho(y)$$

Alors $f : x \mapsto v \circ \rho(x)$ a pour graphe $\{(x, v \circ \rho(x)) \mid x \in V'\} = \{u(x), v(x) \mid x \in U'\}$. Par bicontinuité de j , on peut affirmer que $j(U') = M \cap W'$ pour un voisinage W' de x_0 . Alors $M \cap W'$ est bien le graphe de f au dessus de U' .

□

Notons qu'une sous-variété n'est pas à priori fermée. Par exemple la spirale, image de $s \mapsto (\exp(-s) \cos(s), \exp(-s) \sin(s))$ est une sous-variété, d'après le critère (C). De même une droite privée d'un point est une sous-variété du plan. Si on veut exclure ces exemples (mais on exclut du même coup les ouverts de $\mathbb{R}^n$), on peut se restreindre aux sous-variétés fermées. La plupart des sous-variétés que nous utiliserons sont fermées.

Exemples 1.2. (A) La sphère

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^n &\longmapsto \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto \sum_{i=1}^n x_i^2 - 1 \end{aligned}$$

Si $(x_1, \dots, x_n) \in F^{-1}(0)$, on a

$$dF(x_1, \dots, x_n) = 2x_1 dx_1 + \dots + 2x_n dx_n$$

qui est non nulle (car $(x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$) donc $dF(x)$ est surjective si $x \in F^{-1}(0)$, et $F^{-1}(0)$, est une sous-variété.

On voit de même que les autres quadriques

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i^2 - 1 = 0 \quad , \quad \varepsilon_i = \pm 1$$

sont des sous-variétés.

(B) Le tore

$$j : (\theta, \varphi) \mapsto ((r - \rho \cos(\theta)) \cos(\varphi), (r - \rho \cos(\theta)) \sin(\varphi), \rho \sin(\theta))$$

où $\rho < r$. C'est une sous-variété car les vecteurs

$$\frac{\partial j}{\partial \theta}(\theta, \varphi) = (\rho \cos(\varphi) \sin(\theta), \rho \sin(\varphi) \sin(\theta), \rho \cos(\theta))$$

$$\frac{\partial j}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) = (-(r - \rho \cos(\theta)) \sin(\varphi), (r - \rho \cos(\theta)) \cos(\varphi), 0)$$

sont linéairement indépendants. De plus j est localement bicontinue. Soit en effet $j(\theta_0, \varphi_0) = (x_0, y_0, z_0)$. Si z est dans un intervalle de longueur inférieure à $1/2$, il existe une unique détermination continue de $\theta(z) = \arcsin(\frac{z}{\rho})$ égale à θ_0 en z_0 . Comme $\rho < r$, on a $r - \rho \cos(\theta(z)) > 0$ et en choisissant une détermination continue de $\varphi(y, z) = \arcsin(\frac{y}{(r - \rho \cos(\theta(z)))})$ telle que $\varphi(y_0, z_0) = \varphi_0$, on obtient une application continue $(x, y, z) \mapsto (\theta(z), \varphi(y, z))$ qui envoie un voisinage de (x_0, y_0, z_0) du tore sur un voisinage de (θ_0, φ_0) .

Remarque 1.2. Attention : Si $j : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une application dont la différentielle est injective, il n'en résulte pas que $j(U)$ soit une sous-variété. Une telle application j s'appelle une **immersion**. Par abus de langage un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ tel que tout point a un voisinage qui soit image d'une application de différentielle injective est appelé **sous-variété immergée**. Mais ce n'est pas une sous-variété. En particulier si j n'est pas injective, $j(u_0) = j(u_1) = x_0$, on peut avoir la situation suivante ($p = 1, n = 2$)

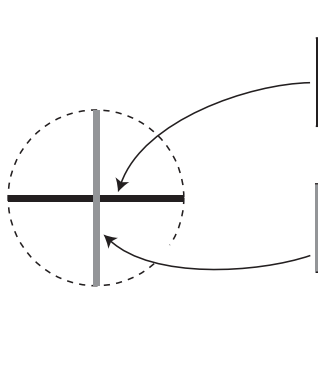


FIGURE 2.2 – Image d'une immersion qui n'est pas une sous-variété

On voit alors que $M = j(U)$ n'est pas une sous-variété, car une carte enverrait les deux vecteurs tangents à chaque branche de la courbe (qui sont linéairement indépendants) sur des vecteurs de $\mathbb{R}$, donc liés. Un autre cas, plus subtil se présente si j n'est pas bicontinue, comme sur le dessin suivant

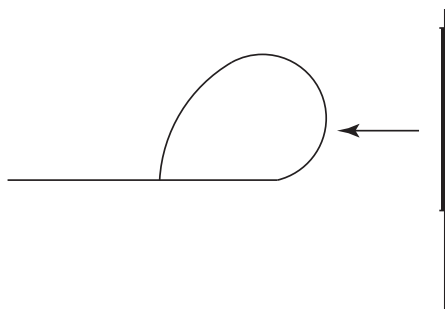


FIGURE 2.3 – Image d’une immersion injective qui n’est pas une sous-variété

On utilisera donc la caractérisation des sous-variétés comme nappes paramétrées avec une certaine prudence. Et dans ce cas il est souvent préférable d’utiliser le fait que **la bijectivité et la propriété de j entraînent sa bicontinuité.**

2 Espaces tangents

On suppose dorénavant que M^p est une variété de dimension p .

Lorsque $t \mapsto c(t)$ est une courbe paramétrée, sa tangente en $c(t_0)$ est dirigée par le vecteur $c'(t_0)$, si celui-ci est non nul. Pour une nappe paramétrée $j(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, le plan tangent en $j(u_0, v_0)$ est engendré par les vecteurs $\frac{\partial j}{\partial u}(u_0, v_0)$, $\frac{\partial j}{\partial v}(u_0, v_0)$, qui sont linéairement indépendants si dj est injective.

La notion d’espace tangent à une sous-variété généralise ces situations.

Définition 2.4. Soit M^p une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, et x_0 un point de M^p , φ une carte en x_0 . L’espace tangent (vectoriel) à M en x_0 est l’espace vectoriel $d\varphi^{-1}(0)(\mathbb{R}^p \times \{0\})$, noté $T_{x_0}M$. L’espace affine tangent à M en x_0 est l’unique espace affine passant par x_0 et dirigé par $T_{x_0}M$. On le note $\tilde{T}_{x_0}M$.

Remarque 2.1. On peut montrer directement que l’espace tangent ne dépend pas du choix de la carte. En effet si φ, ψ sont deux cartes en x_0 , $\varphi \circ \psi^{-1}$ envoie $\mathbb{R}^p \times \{0\}$ sur lui-même et donc sa différentielle aussi. Cela signifie que

$$d\varphi(x_0)d\psi^{-1}(0)(\mathbb{R}^p \times \{0\}) = \mathbb{R}^p \times \{0\}$$

en d’autres termes que

$$d\psi^{-1}(0)(\mathbb{R}^p \times \{0\}) = d\varphi^{-1}(0)(\mathbb{R}^p \times \{0\})$$

On remarquera que la proposition 2.5 donne une autre démonstration de cette indépendance.

D’un point de vue pratique,

a) si M est définie localement comme l'image par j de $\mathbb{R}^p$, avec $j(0) = x_0$, $dj(0)$ injective, on a

$$T_{x_0}M = dj(0)\mathbb{R}^p$$

b) si M est définie localement comme le graphe $\{(z, f(z)) | z \in \mathbb{R}^p\}$

$$T_{x_0}M = \{(h, df(z_0)h) | h \in \mathbb{R}^p\}$$

où $x_0 = (z_0, f(z_0))$

Dans ce cas $T_{x_0}M$ est le graphe de $df(z_0)$.

c) si M est définie localement comme le lieu des zéros de $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ telle que $dF(x_0)$ soit surjective. Alors $T_{x_0}M = \ker dF(x_0)$.

La caractérisation suivante de l'espace tangent est parfois utile

Proposition 2.5. *Soit M une sous-variété. L'espace tangent T_xM est l'ensemble des vecteurs vitesse en $t = 0$ des chemins C^∞ tracés sur M passant par x à l'instant $t = 0$.*

Démonstration. Soit φ une carte en x , et c une courbe tracée sur M telle que $c(0) = x$. Alors pour t assez proche de 0 $\varphi(c(t))$ est définie, tracée sur $\mathbb{R}^p \subset \mathbb{R}^n$ et passe par 0 en $t = 0$. Donc la tangente en 0 de $\varphi(c(t))$ est dans $\mathbb{R}^p$ c'est-à-dire que $d\varphi(c(0))c'(0)$ est dans $\mathbb{R}^p$, ce qui par définition équivaut à $c'(0) \in T_xM$.

Inversement soit $\xi \in T_xM$ alors $d\varphi(x)\xi$ est dans $\mathbb{R}^p$. Soit $t \rightarrow \gamma(t)$ une courbe paramétrée de $\mathbb{R}^p$ tangente à $d\varphi(x)\xi$ en $t = 0$. Alors quitte à restreindre γ à un voisinage de 0, on peut supposer son image contenue dans $V = \varphi(U)$. Alors $c(t) = \varphi^{-1}(\gamma(t))$ est une courbe tracée sur M , et le calcul précédent montre qu'elle est tangente à ξ en $t = 0$. $\square$

Exemples 2.1. (A) Soit $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x|^2 = 1\}$. C'est une sous-variété définie par $F(x) = 0$ où $F(x) = |x|^2 - 1$. Vu que $dF(x)h = 2\langle x, h \rangle$, l'espace tangent en x à la sphère, T_xS^2 , est le plan orthogonal à x , et $\tilde{T}_xS^2$ le plan orthogonal à x passant par x .

(B) Soit I un intervalle et $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée. Si $\gamma'(t)$ ne s'annule jamais et γ est injective et propre, $\Gamma = \gamma(I)$ est une courbe lisse, son espace tangent en $\gamma(t_0)$ est donnée e par $\mathbb{R}\gamma'(t_0)$.

(C) Soit $V = O(3) = \{M \in \text{Mat}(3, 3) \mid {}^tM \cdot M = \text{Id}\}$. Il suffit de montrer que $F : \text{Mat}(3, 3) \rightarrow \text{Sym}(3, 3)$ donnée par $F(M) = {}^tM \cdot M - \text{Id}$ à valeurs dans l'espace des matrices symétriques a sa différentielle surjective sur $F^{-1}(0)$. Or $dF(M)H = {}^tM \cdot H + {}^tH \cdot M$ et si S est symétrique, $H = \frac{1}{2}({}^tM)^{-1}S$ vérifie bien $dF(M)H = S$. Donc $O(3)$ est une sous-variété, et son espace tangent en Id est donné par $\ker(dF(\text{Id})) = \{H \mid {}^tH + H = 0\}$, ensemble des matrices antisymétriques. Or si

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}$$

est une matrice antisymétrique, l'endomorphisme associé est donné par le produit vectoriel avec $u_H = (x, y, z)$.

Si $M(t)$ décrit le mouvement d'un solide, on a $M(t) = R(t)M(0)$ où $R(t) \in SO(3)$. Donc si $R(0) = \text{Id}$, les vecteurs vitesse de chaque point sont donnés par $\frac{d}{dt}R(t) \in T_{\text{Id}}O(3)$ qui est une matrice antisymétrique, H . Alors u_H détermine l'axe instantané de rotation $\mathbb{R}u_H$ et la vitesse de rotation instantanée autour de cet axe est $|u_H|$.

- (D) Soit C le cône $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$. Alors C n'est pas une sous-variété. En effet, on montre aisément que C est connexe (utiliser le fait que tout point est sur un segment de droite contenue dans C et passant par 0 pour montrer que C est connexe par arcs), et d'après le (B) de la proposition 2.3, un voisinage de $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ est une sous-variété de dimension 2, vu qu'en un tel point $dF(x, y, z)(u, v, w) = x \cdot u + y \cdot v + z \cdot w$ n'est pas identiquement nulle. Donc si C est une sous-variété, elle sera partout de dimension 2.

Mais en $(0, 0, 0)$ les courbes $t \rightarrow (t \cdot \cos(\theta), t \cdot \sin(\theta), t)$ tracées sur C , ont pour vecteur vitesse en 0 le vecteur $(\cos(\theta), \sin(\theta), 1)$. L'ensemble de ces vecteurs n'est contenu dans aucun plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$. L'ensemble C ne peut donc être une sous-variété.

Exercice 2.1. Montrer que C n'est pas une sous-variété en utilisant la méthode suivante :

1) Montrer que C est connexe par arcs, et si C est une sous-variété elle est nécessairement de dimension 2

2) Montrer que si M est une sous-variété connexe par arcs de dimension 2, et x un point de M , alors $M \setminus \{x\}$ est encore connexe

3) Montrer que $C - (0, 0, 0)$ n'est pas connexe. On pourra montrer que la fonction $f(x, y, z) = z$ prend des valeurs positives et négatives sur $C - \{(0, 0, 0)\}$, mais ne s'y annule pas.

2.1 Faisceaux associés à une sous-variété

2.1.1 Fonctions sur une sous-variété

Soit M une sous-variété **fermée** de $\mathbb{R}^N$. On note $C^\infty(M, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions C^∞ sur M . D'après l'exercice A du chapitre 1 il est équivalent de définir cela comme l'espace des restrictions de fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^N$ et l'espace des fonctions qui s'étendent au voisinage de chaque point en une fonction C^∞ . Il en résulte la

Proposition 2.6. *Soit M une sous-variété fermée de $\mathbb{R}^N$. Soit $C^\infty(M, \mathbb{R})$ l'espace des restrictions de fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ à M . Alors $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ si et seulement si pour toute carte (U, φ) l'application $f \circ \varphi_{|\varphi(U) \cap \mathbb{R}^p}^{-1}$ est C^∞ .*

Démonstration. Par l'exercice ci-dessus mentionné (exercice A du chapitre 1), il suffit de montrer que quel que soit $x_0 \in M$, f s'étend en une fonction C^∞ définie sur un voisinage de x_0 dans $\mathbb{R}^N$. Or prenons (U, φ) une carte autour de x_0 . On sait que $g = f \circ \varphi_{|\varphi(U) \cap \mathbb{R}^p}^{-1}$

est C^∞ . Quitte à restreindre le voisinage de 0, on peut étendre g en une fonction C^∞ définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^N$: si π est la projection de $\mathbb{R}^N$ sur $\mathbb{R}^p \times \{0\}$, on pose $\tilde{g} = g \circ \pi$. Alors $\tilde{g}$ est définie et C^∞ au voisinage de $\varphi(x_0)$ et $\tilde{f} = \tilde{g} \circ \varphi^{-1}$ est l'extension cherchée. $\square$

2.1.2 Champs de vecteurs sur les sous-variétés

Dans cette sous-section, les champs de vecteurs seront supposés avoir un flot défini pour tout temps. Il est utile de caractériser simplement les équations différentielles dont les solutions restent dans une sous-variété :

Proposition 2.7. *Soit V une sous-variété fermée de $\mathbb{R}^n$ et X une équation différentielle telle que*

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \forall v \in V, \quad X(t, v) \in T_v V$$

Si γ est une solution de $\dot{\gamma}(t) = X(t, \gamma(t))$ définie sur un intervalle $[0, s]$, telle que $\gamma(0) \in V$, alors $\gamma([0, s])$ reste dans V .

Démonstration : Soit $\tau = \sup\{t \in [0, 1] \mid \gamma([0, t]) \subset V\}$, on veut montrer que $\tau = s$. Tout d'abord, V étant fermée, $\gamma(\tau) \in V$. Il suffit alors de montrer que $\gamma([\tau, \tau + \varepsilon]) \subset V$ pour ε assez petit.

Soit φ une carte de V autour de $\gamma(\tau)$

$$\varphi : V \cap U \rightarrow \varphi(U) \cap \mathbb{R}^p \times \{0\}$$

Alors si $Y = \varphi_*(X)$, ou encore $Y(t, \varphi(x)) = d\varphi(x)X(t, x)$, la courbe $\sigma(t) = \varphi(\gamma(t))$ vérifie

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{\sigma}(t) = Y(t, \sigma(t)) \\ \sigma(t_0) \in \mathbb{R}^p \times \{0\} \end{cases}$$

Puisque si $z \in \mathbb{R}^p \times \{0\}$, $Y(t, z) \in \mathbb{R}^p \times \{0\}$, en posant $\sigma(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ l'équation (1) équivaut à

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A(t, x(t), y(t)) \\ \dot{y}(t) = B(t, x(t), y(t)) \\ x(\tau) = x_0, y(\tau) = 0 \end{cases}$$

où B vérifie $B(t, x, 0) = 0$. La seconde équation a pour solution $y \equiv 0$, et si x est la solution de

$$\dot{x}(t) = A(t, x(t), 0), x(\tau) = x_0$$

dont l'existence nous est garantie par le théorème de Cauchy-Lipschitz, on constate que $(x(t), 0)$ est solution de (1), et par le même théorème, c'est la seule.

On en conclut que y reste nul tant qu'il est défini, c'est à dire sur $] \tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon[$, d'où

$$\sigma(t) \in \varphi^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{0\}) = U \cap V$$

pour $t \in] \tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon[$. Donc sur cet intervalle, $\gamma(t) = \varphi(\sigma(t)) \in V$, ce qui contredit la maximalité de τ $\square$

Exercice 2.2. Si $X(0, x) \notin T_x V$ pour un $x \in V$, il existe une solution de $\dot{\gamma} = X(t, \gamma)$ qui est sur V en $t = 0$ et quitte V pour $t > 0$.

Remarque 2.2. La fermeture de la sous-variété V est essentielle. En effet, si $V = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$, on aura que le champ de vecteurs $X(x, y) = (0, 1)$ est tangent à V , mais $\varphi_1(0, -1) = (0, 0) \notin V$.

Exemples 2.2. (A) Soit $X(t, x)$ un champ de vecteurs tel que $X(t, x)$ soit orthogonal à x . Alors son flot préserve les sphères. (voir un cas particulier dans l'exemple suivant).

(B) Soit $\dot{M}(t) = \Omega(t) \wedge M(t)$, où $M(t), \Omega(t)$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Cette équation décrit le mouvement libre d'un solide de moment cinétique $M(t)$ et de moment d'inertie Ω .

On a alors

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} |M(t)|^2 \right) = \langle \dot{M}(t), M(t) \rangle = \langle \Omega(t) \wedge M(t), M(t) \rangle = 0$$

On en déduit que la variété $|M|^2 = |M(0)|^2$ est préservée, c'est à dire que le moment cinétique est de norme constante.

(C) Si $H(q, p)$ est une fonction sur $\mathbb{R}^{2n}$, et $X_H = (\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q})$. Puisque $dH(q, p)X_H(q, p) = 0$, X_H est tangent aux hypersurfaces $\{H(q, p) = C\}$ et le flot préserve ces hypersurfaces. En fait dans ce cas, il suffit de dire que la fonction $t \mapsto H(q(t), p(t))$ a sa dérivée identiquement nulle.

2.2 Sous-variétés à bord.

Nous allons définir la notion de variété à bord. On note $\mathbb{H}^n$ le demi-espace $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \leq 0\}$.

Définition 2.8. Soit M un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. On dit que M est une sous-variété à bord, si et seulement si en chaque point x_0 de M il existe un voisinage U de x_0 et un difféomorphisme local φ de $\mathbb{R}^n$ envoyant x_0 sur 0 tel que l'on ait

soit

(a)

$$\varphi(U \cap M) = (\mathbb{R}^p \times \{0\}) \cap \varphi(U)$$

soit

(b)

$$\varphi(U \cap M) = (\mathbb{H}^p \times \{0\}) \cap \varphi(U)$$

L'entier p est appelé dimension de M en x_0 . On appelle bord de M et on note ∂M l'ensemble des points x_0 correspondant au cas (b).

Remarque 2.3. (A) Comme dans le cas de l'invariance de la dimension, les cas (a) et (b) ne peuvent se présenter simultanément pour un même point x_0 , car il n'existe pas de difféomorphisme local préservant l'origine et envoyant $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}^n$: en effet, l'image d'un ouvert contenant 0 par un difféomorphisme est encore un ouvert contenant 0, mais $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$ ne contient pas de tel ouvert.

- (B) Le sous-ensemble ∂M n'est en général pas la frontière de M au sens topologique : pour la topologie induite de M , la frontière de M est vide (!), et comme sous-ensemble de $\mathbb{R}^N$, si $p < N$, M est d'intérieur vide, donc $Fr(M) = M$. Dans le cas particulier où M est une sous-variété fermée de dimension N dans $\mathbb{R}^N$, le sous-ensemble M de $\mathbb{R}^n$ a en effet pour frontière ∂M .
- (C) On définit l'espace tangent comme dans le cas sans bord. Pour les points de $M \setminus \partial M$ cela ne pose pas de problème. Pour les points de ∂M , on définit $T_x M = d\varphi(0)^{-1}(\mathbb{R}^p)$.
- (D) Attention, en un point x_0 du bord l'espace tangent en x_0 n'est plus l'ensemble des vecteurs vitesse d'une courbe tracée sur M passant par x_0 . En effet, si $c : [0, \varepsilon[\rightarrow M$ est un chemin de classe C^1 , $c'(0)$ est dans le demi-espace

$$d\varphi(x_0)^{-1}(0)((\mathbb{R}^{p-1} \times \{\mathbb{R}_+\} \times \{0\})$$

que l'on note $T_{x_0}^+ M$.

On vérifie que si on regarde l'ensemble des $c'(0)$ tels que $c :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M$

Exemple 2.1. La demi-sphère,

$$S^+ = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$$

est une variété à bord, dont le bord est le cercle

$$\Gamma = \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

et dont l'espace tangent en (x, y, z) est donné par

$$T_{(x,y,z)} S^+ = \{(u, v, w) \mid xu + yv + zw = 0\}$$

Les sous-variétés définies précédemment sont telles que ∂M est vide. On les appelle, lorsqu'une confusion est possible, sous-variétés sans bord.

Il y a bien entendu l'analogue à bord de la Proposition 2.3. Nous allons nous contenter du cas des équations. On pose $\pi : \mathbb{R}^{N-p} \rightarrow \mathbb{R}^{N-p-1}$ la projection parallèlement à $\mathbb{R} \times \{0\}$.

Proposition 2.9. *Soit M un sous-ensemble de $\mathbb{R}^N$ et soit une fonction $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N-p}$ telle que $M = F^{-1}(\mathbb{R}_+ \times \{0\})$, et que sur $F^{-1}(0)$ $dF(x)$ soit surjective, et sur $F^{-1}(\mathbb{R}_+^* \times \{0\})$ l'application $d(\pi \circ F)(x)$ soit surjective.*

Démonstration. En effet, en un point x de $F^{-1}(\mathbb{R}_+^* \times \{0\})$, M coïncide avec $G^{-1}(0)$ et nous sommes dans la situation d'une sous-variété ordinaire (x est un point de $M \setminus \partial M$) la forme normale des submersions ramène F l'application $F(x_1, \dots, x_N) = (x_1, \dots, x_{N-p})$ et donc M se ramène localement à $\{(x_1, \dots, x_N) \mid x_1 \geq 0, x_{N-p+1} = \dots = x_N = 0\}$.

□

3 Applications

3.1 Points critiques de fonctions définies sur une sous-variété

Soit S la surface de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$F(x, y, z) = x^4 + x^2 z^2 + y^4 + 2z^2 - 1 = 0$$

C'est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$, car en chaque point, les dérivées partielles

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 4x^3 + 2xz^2 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 4y^3 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 2x^2 z + 4z \end{cases}$$

ne s'annulent pas simultanément sur S (exercice).

Soit f la restriction à S de $x^2 + y^2 + z^2$. Comment caractériser les maxima et minima de f ? Lorsque S est une sous-variété compacte, on sait que f atteint son maximum et son minimum, et ce problème donne lieu aux conditions nécessaires classiques d'extrema liés que l'on va énoncer. En effet, grâce aux cartes locales, la recherche des extrema locaux de f_S se ramène au problème analogue sur $\mathbb{R}^p$. Une fonction réelle de classe C^1 définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ ne peut avoir d'extremum local en 0 que si sa différentielle en 0 s'annule. Plus généralement si g est définie sur $\mathbb{R}^n$, et sa restriction à $\mathbb{R}^p$ possède en 0 un extremum local, alors $dg(0)|_{\mathbb{R}^p} = 0$, ou encore $dg(0)(\mathbb{R}^p) = 0$.

Soit alors M une sous-variété, et supposons qu'une fonction g de classe C^1 définie sur $\mathbb{R}^n$ admette un extremum en x_0 . Considérons une carte locale : $\varphi : U \cap V \rightarrow \varphi(U) \cap \mathbb{R}^p \times \{0\}$. Alors φ^{-1} envoie un voisinage de 0 de $\mathbb{R}^p$ sur un voisinage de x_0 dans V , et $g = f \circ \varphi|_{\mathbb{R}^p}^{-1}$ a un extremum local en 0 seulement si $f|_V$ en a un en x_0 .

La condition nécessaire usuelle d'extremum local, $dg(0) = 0$ devient $df(x_0) \circ d\varphi^{-1}(0)(\mathbb{R}^p \times \{0\}) = 0$. Or $d\varphi^{-1}(0)(\mathbb{R}^p \times \{0\}) = T_{x_0}M$, et on a donc

Proposition 2.10. *Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une application C^1 , et V une sous-variété. Si $f|_V$ a un extremum local en x_0 alors $T_{x_0}V \subset \ker df(x_0)$.*

Définition 2.11. Si la condition nécessaire de la proposition précédente est vérifiée en x_0 , c'est à dire si $df(x_0)|_{T_{x_0}V} = 0$, on dit que x_0 est un **point critique** de $f|_V$.

Voyons comment s'exprime cette condition lorsque V est définie comme nappe, comme graphe ou par une équation :

a) Dans le cas d'une nappe, puisque $T_{x_0}V = \text{Im } dj(u_0)$ on doit vérifier $df(j(u_0))dj(u_0) = 0$.

b) Pour le graphe de $u : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$, vu que $T_{x_0}V$ est le graphe de $du(x_0)$ il faut vérifier que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, u(x_0)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, u(x_0))\frac{\partial u}{\partial x}(x_0) = 0$.

c) Dans le cas d'une équation $V = \{x|F(x) = 0\}$, vu que $T_{x_0}V = \ker dF(x_0)$, nous obtenons le théorème des extrema liés. La condition

$$\ker dF(x_0) \subset \ker df(x_0)$$

c'est-à-dire que la forme linéaire $df(x_0)$ doit s'annuler sur le noyau de $dF(x_0)$. Or si $F(x) = (F_1(x), \dots, F_{n-p}(x))$ $\ker dF(x_0)$ est l'intersection du noyau des formes linéaires $dF_j(x_0)$. Pour que la forme linéaire $df(x_0)$ s'annule sur l'intersection du noyau des $dF_j(x_0)$ il faut et il suffit que $df(x_0)$ soit combinaison linéaire des $dF_j(x_0)$. Cette condition équivaut encore à l'existence de réels w_j tels que

$$df(x_0) = \sum_{j=1}^{n-p} w_j dF_j(x_0) = \langle w, dF(x_0) \rangle$$

On a donc

Corollaire 2.12 (Extrema liés). Soit $V = \{x|F(x) = 0\}$ où $F \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n-p})$ a sa différentielle surjective sur V . Alors, pour que la restriction de $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ à V ait un point critique en x_0 , il faut et il suffit qu'il existe $w \in \mathbb{R}^{n-p}$ tel que

$$df(x_0) = \langle w, dF(x_0) \rangle$$

Remarque 3.1. Le vecteur w (ou ses composantes) s'appelle multiplicateur de Lagrange.

Interprétation géométrique :

En les points où $df(x_0)$ est non nulle, $\ker df(x_0)$ est l'espace tangent à la sous-variété de niveau $\Sigma_\lambda = \{f(x) = \lambda\}$. Donc les points critiques de $f|_V$ sont les points où les Σ_λ sont tangentes² à V .

Exemples 3.1. Soient $q_1(x) = \frac{1}{2}\langle A_1x, x \rangle$ une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^n$, et $V = \{q_1(x) = 1\}$. Comme $dq_1(x).h = \langle A_1x, h \rangle$, $dq_1(x)$ est non nulle sur V qui est donc une sous-variété : c'est un ellipsoïde !

2. c'est-à-dire que l'espace tangent de Σ_λ contient l'espace tangent de V .

Si $q_2(x) = \frac{1}{2}\langle A_2x, x \rangle$ est une autre forme quadratique, les points critiques de la restriction de q_2 à V sont les x tels que

$$A_2x = \lambda A_1x$$

Ce sont les vecteurs propres de $A_1^{-1}A_2$.

En particulier si $A_2 = I$ (on peut toujours s'y ramener par changement de base) les extrema de $\|x\|^2$ sur V correspondent aux axes de la quadrique V . D'après notre interprétation géométrique, ces axes correspondent aux points où les sphères centrées à l'origine sont tangentes à la quadrique.

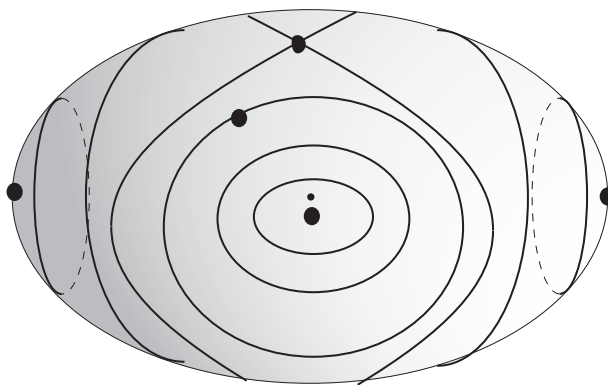


FIGURE 2.4 – Courbes d'intersection de deux ellipsoïdes

Reprenons le problème des extrema de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sur $F^{-1}(0)$ où $F(x, y, z) = x^4 + x^2z^2 + y^4 + 2z^2 - 1$. L'ensemble $F^{-1}(0)$ étant fermé et borné, on sait que f y atteint son maximum et son minimum. On doit résoudre les équations

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial F}{\partial x} - \lambda x = 4x^3 + 2xz^2 - \lambda x \\ 0 = \frac{\partial F}{\partial y} - \lambda y = 4y^3 - \lambda y \\ 0 = \frac{\partial F}{\partial z} - \lambda z = 2x^2z + 4z - \lambda z \\ x^4 + x^2z^2 + y^4 + 2z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Les solutions (réelles) sont ³

$(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), ((\pm \frac{1}{2})^{1/4}, \pm (\frac{1}{2})^{1/4}, 0), (0, 0, \pm (\frac{1}{2})^{1/2})$ et le maximum de f est atteint en quatre points $(\pm (\frac{1}{2})^{1/4}, \pm (\frac{1}{2})^{1/4}, 0)$, et est égal à $\sqrt{2}$ le minimum en les deux points $(0, 0, \pm (\frac{1}{2})^{1/2})$, et vaut $\frac{1}{2}$. Les quatre points $(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0)$ ne sont ni des minima ni des maxima.

Exemple 3.1 (Exemple pratique). Nous sommes en mesure de résoudre le problème général suivant :

Soit F une fonction réelle de classe C^1 définie sur $\mathbb{R}^n$, telle que le domaine $\Omega = \{x \mid F(x) \leq 0\}$ soit compact, et $dF(x)$ soit surjective pour x dans $F^{-1}(0)$. Soit f une autre

3. Obtenues encore une fois en utilisant Maple, et les commandes `solve` et `evalf`

fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$. On cherche le maximum (ou le minimum) de f dans le domaine Ω .

La compacité de Ω nous permet d'affirmer qu'un tel maximum existe, et il y a deux possibilités, suivant qu'il est réalisé dans l'intérieur de Ω ou sur son bord $F^{-1}(0)$. Dans le premier cas, on doit avoir $df(x_0) = 0$. Dans le second cas on a un problème d'extrema liés, et on doit résoudre

$$df(x_0) = \lambda dF(x_0), \quad F(x_0) = 0$$

Le maximum de f sur Ω appartient à l'un des deux ensembles ainsi déterminés (voir l'exercice (J)).

4 Exercices

- (A) Trouver des conditions suffisantes pour qu'une courbe paramétrée, $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ soit une sous-variété.
- (B) Montrer que si une courbe de niveau de $\frac{1}{2}y^2 - \cos(x)$ ne contient pas de zéro, la trajectoire de $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -\nabla V(x)$ partant d'un point de cette courbe, coïncide avec une composante connexe de la courbe de niveau.
- (C) Démontrer que la réunion de deux plans non parallèles n'est pas une sous-variété. Indication : montrer que son espace tangent en un point d'intersection doit avoir des propriétés contradictoires.
- (D) Montrer que l'image de la courbe $t \rightarrow (t^2, t^3)$ n'est pas une sous-variété.
- (E) Montrer qu'en tout point x_0 , une sous-variété M est localement un graphe au dessus de son espace tangent $T_{x_0}M$. En déduire une nouvelle démonstration de l'exercice précédent.
- (F) Montrer que si $p \neq 1$, $\mathbb{R}^p$ ne peut être homéomorphe à $\mathbb{R}$ (utiliser la non connexité de $\mathbb{R} - \{0\}$).
Utiliser le théorème de Jordan pour montrer que si $p \neq 2$, $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^p$ ne sont pas homéomorphes.
- (G) Lire et comprendre dans [Milnor] la démonstration du fait qu'une variété de dimension 1 compacte est difféomorphe à un cercle.
- (H) Soit f une fonction définie au voisinage de la sous-variété M . On suppose que pour toute carte (U, φ) la restriction de $f \circ \varphi^{-1}$ à $\mathbb{R}^k$ est C^∞ . Montrer que f est la restriction d'une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ (utiliser une partition de l'unité pour se ramener au cas local).
- (I) Définir une sous-variété de classe C^k pour $k \geq 0$. Remarquer que pour $k \geq 1$ la Proposition 2.2 se démontre comme pour $k = +\infty$. Lorsque $k = 0$ cette proposition porte le nom de théorème d'invariance du domaine. Il équivaut à dire qu'il n'existe pas d'homéomorphisme d'un ouvert de $\mathbb{R}^p$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^q$.
- (J) Soit $F : E \rightarrow G$ une application C^k ($k \geq 1$) entre espaces de Banach, telle que $dF(x)$ soit surjective pour tout $x \in F^{-1}(0)$. Soit $\varphi = E \rightarrow H$ une autre application, de

classe C^k telle que $\ker d\varphi(x) \cap \ker dF(x) = \{0\}$ pour tout $x \in F^{-1}(0)$. Montrer que l'image de $F^{-1}(0)$ par φ est une sous variété immergée, et que son espace tangent en $\varphi(x)$ est $d\varphi(x) \ker dF(x)$.

- (K) Soit V une sous-variété de dimension n de $\mathbb{R}^{n+1}$. On suppose V donnée par l'équation $F \leq 0$, où dF ne s'annule pas sur V , et F est minorée et tend vers $+\infty$ à l'infini.

(a) Soit $\nu(x) = \frac{dF(x)}{|dF(x)|}$. Montrer que $\nu(x)$ est orthogonal à $T_x V$.

(b) $\varphi : V \times]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ donnée par $\varphi(v, t) = v + t\nu(x)$ où ν est la normale extérieure de V .

Montrer que pour ε assez petit, φ est une difféomorphisme sur son image.

- (L) Trouver le maximum de $\sum_{j=1}^n x_j^2$ avec la contrainte $\sum_{j=1}^n x_j = 1, x_j \geq 0$

- (M) Soit D un domaine du plan bordé par une courbe C^1 . Montrer que les extrema de f sur D sont à chercher parmi

-les points où $df(x)$ s'annule

- les points où $df(x)|_{T_x \partial D} = 0$

Décrire graphiquement ces points. Montrer que la restriction de f à ∂D et la direction de $\nabla f(x)$ (supposé non nul) en un point x de ∂D permettent de savoir si x est un minimum ou un maximum local de f .

Expliquer comment, en utilisant une carte météorologique des isothermes, on trouve le point le plus chaud et le plus froid d'un pays (ou d'une région) de la carte, dont la frontière est supposée de classe C^1 . Le faire pour la carte des températures moyennes annuelles du Canada (cf. Figure 2.5).

Indication : décrire l'allure des isothermes au voisinage d'un un tel point.

Que deviennent les conditions d'extrema liés si le bord de la région est seulement C^1 par morceaux ?

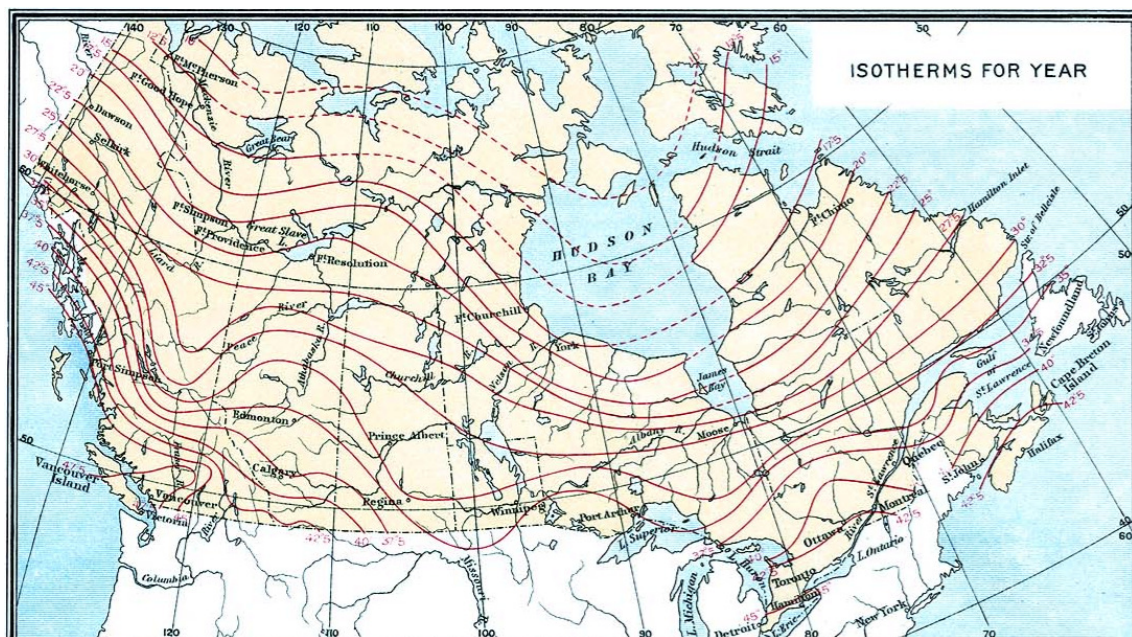


FIGURE 2.5 – Isothermes annuelles du Canada.

(N) Sur le graphe suivant, on a tracé les courbes

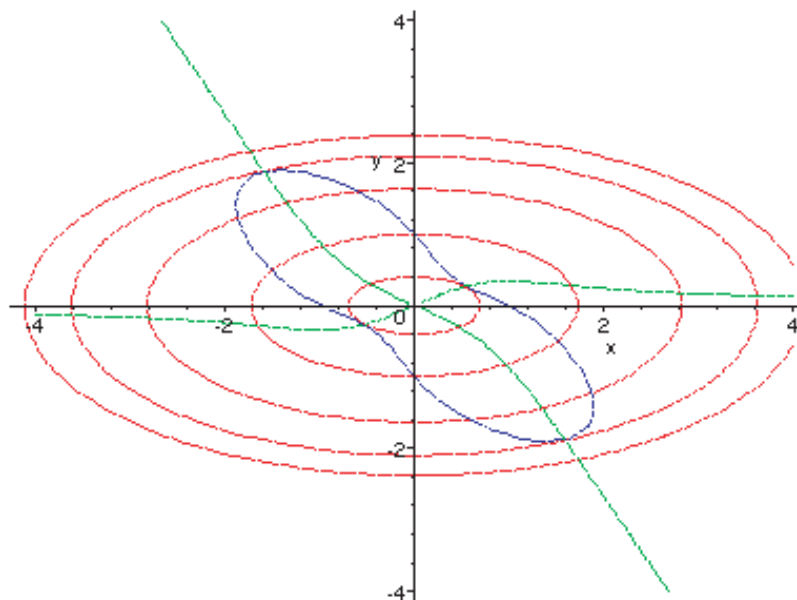


FIGURE 2.6 – Exercice (N)

- en bleu : $F(x, y) = 0$ où $F(x, y) = x^4 + y^4 + 6xy - 1$
- en rouge : les niveaux de $G(x, y)$ où $G(x, y) = x^2 + 3y^2$

-en vert : la courbe $D(x, y) = 0$ où

$$D(x, y) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial G}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$$

[D'après Maple, $D(x, y) = 24yx^3 + 36y^2 - 8xy^3 - 12x^2$]

Indiquer sur le dessin les extrema de la restriction de G à $F = 0$.

- (O) Soit Γ une sous-variété connexe compacte de dimension 1 du plan (i.e. une courbe fermée). On admettra qu'il existe une application $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ injective, telle que $\dot{\gamma}(t)$ ne s'annule pas, et telle que $\Gamma = \gamma(S^1)$. On identifie dans la suite S^1 à Γ via γ . On note $\|\bullet\|$ la norme canonique sur le plan.

- (a) Montrer que l'application de d_2 de Γ^2 dans $\mathbb{R}$ donnée par

$$d_2 : (t_1, t_2) \rightarrow \|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)\|$$

atteint son maximum en un point où $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ et que $\dot{\gamma}(t_1)$ et $\dot{\gamma}(t_2)$ sont orthogonaux à $\gamma(t_1) - \gamma(t_2)$.

- (b) Montrer que l'application d_3 de Γ^3 dans $\mathbb{R}$ donnée par

$$d_3 : (t_1, t_2, t_3) \rightarrow \|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)\| + \|\gamma(t_2) - \gamma(t_3)\| + \|\gamma(t_3) - \gamma(t_1)\|$$

atteint son maximum en un point où $\gamma(t_i) \neq \gamma(t_j)$ si $i \neq j$ et qu'en un tel point

$$\frac{\gamma(t_1) - \gamma(t_2)}{\|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)\|} - \frac{\gamma(t_2) - \gamma(t_3)}{\|\gamma(t_2) - \gamma(t_3)\|} \perp \dot{\gamma}(t_2)$$

et de même en effectuant une permutation circulaire de t_1, t_2, t_3

- (c) Il existe donc des trajectoires à 3 rebonds sur tout billard dont le bord est convexe. Que dire pour k rebonds ($k > 3$) ?

- (P) (Théorie des enveloppes)

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ une famille de fonctions C^∞ définies sur le plan que l'on écrira $f(\lambda, x, y)$. On suppose que pour tout (λ, x, y) annulant f , l'une des dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial x} f(\lambda, x, y)$, $\frac{\partial}{\partial y} f(\lambda, x, y)$ est non nulle.

- (a) Montrer que l'ensemble $C_\lambda = \{(x, y) \mid f(\lambda, x, y) = 0\}$ est une sous-variété de dimension 1 (i.e. une courbe régulière plongée).
 (b) Montrer que la tangente à C_λ en (x_0, y_0) est donné par l'équation

$$(x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} f(\lambda, x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} f(\lambda, x_0, y_0) = 0$$

- (c) Écrire des hypothèses suffisantes pour que l'ensemble

$$\{(x, y) \mid \exists \lambda, f(\lambda, x, y) = \frac{\partial}{\partial \lambda} f(\lambda, x, y) = 0\}$$

définisse une courbe C^∞ notée Γ

- (d) Montrer sous les hypothèses précédentes, qu'en chacun de ses points, la courbe Γ est tangente à une des courbes C_λ . On appelle Γ l'**enveloppe** de la famille de courbes C_λ

- (e) La famille de cubiques

$$y = (x - \lambda)^3$$

vérifie-t-elle les hypothèses des questions précédentes. Existe-t-il une équation différentielle,

$$\dot{x} = a(x, y), \dot{y} = b(x, y)$$

avec a, b Lipschitziens, dont les solutions sont les paraboles en question ?

- (Q) Montrer que l'image d'une immersion injective propre est une sous-variété (propre signifie que l'image réciproque d'un compact est compacte).
- (R) (Théorème de Sard) Démontrer le cas $n > m$ du théorème de Sard en utilisant la méthode suivante : Si $\text{rg}(df(x)) < m$, on note $J_1 f(x), \dots, J_k f(x)$ les mineurs de $df(x)$. Ils doivent être tous nuls en x .

Chapitre 3

Variétés

1 Définitions et propriétés de base

Il apparaît au cours de l'étude des sous-variétés, que l'espace ambiant est souvent une "graisse inutile" qui alourdit la démarche. C'est notamment le cas lorsque l'on veut considérer l'opération de quotient d'une sous-variété. Par exemple la sphère S^2 est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$, mais son quotient par l'application antipodale $x \mapsto -x$ est homéomorphe à l'espace projectif, qui ne peut se voir comme sous-variété de $\mathbb{R}^3$ (on verra pourquoi ultérieurement).

On pose alors

Définition 3.1. Soit M un espace métrisable¹

On appelle structure de variété C^k sur M la donnée d'une famille $(U_j, \varphi_j)_{j \in \Lambda}$, telle que

- (A) les U_j sont des ouverts qui forment un recouvrement de M
- (B) les $\varphi_j : U_j \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont des homéomorphismes sur l'ouvert $\varphi_j(U_j)$ tels que $\varphi_j \circ \varphi_k^{-1} : \varphi_k(U_k \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_k \cap U_j)$ soit une application de classe C^k .

On appelle (U_j, φ_j) cartes définissant la sous-variété. Il est clair que si (U, φ) est telle que pour tout j , on ait $\varphi \circ \varphi_j^{-1} : \varphi(U \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U \cap U_j)$ soit une application de classe C^k , alors on peut ajouter (U, φ) à l'ensemble des cartes de M . En prenant tous les (U, φ) ayant cette propriété, on obtient un **atlas** de M . Lorsque $k = 0$ on appelle M une variété topologique. Bien entendu une même variété topologique peut avoir différentes structures de variété C^k ($k \geq 1$), cependant la vraie question est de savoir si celle-ci sont isomorphes.

1. En général les conditions topologiques imposées à une variété sont plutôt la paracompacité, c'est à dire que l'on demande que M soit séparé (deux points ont des voisinages disjoints) et tout recouvrement ouvert possède un sous-recouvrement localement fini. Mais comme l'existence de cartes locales entraîne que M sera automatiquement localement compact, localement connexe et localement métrisable, cela entraîne que M est métrisable (th. de Smirnov). On préfère donc le déclarer d'emblée. On suppose souvent aussi que M est réunion dénombrable de compacts, mais c'est automatiquement le cas pour chaque composante connexe d'un espace métrisable.

On appelle n la dimension de M en $x \in U_j$ et on la note $\dim_x(M)$. Clairement n ne dépend pas du choix de la carte contenant x , car il n'existe pas d'homéomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ pour $m \neq n$. Ce fait est non trivial et s'appelle le **théorème de l'invariance du domaine**. Il devient par contre trivial (comme dans le cas des sous-variétés) lorsqu'on suppose $k \geq 1$

Enfin notons qu'une sous-variété de $\mathbb{R}^N$ est une variété. En effet à une carte (U, φ) de la sous-variété on peut associer $(U \cap M, \varphi_{U \cap M})$ qui est une carte de la variété M .

On peut aussi considérer le cas des variétés à bord, qui jouent un rôle important :

Définition 3.2. Soit M un espace métrisable. On appelle structure de variété à bord de classe C^k sur M la donnée d'une famille $(U_j, \varphi_j)_{j \in \Lambda}$, telle que

- (A) les U_j sont des ouverts qui forment un recouvrement de M
- (B) φ_j est soit une application $\varphi_j : U_j \rightarrow \mathbb{R}^n$ soit une application $\varphi_j : U_j \rightarrow \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$ qui soit un homéomorphisme sur un ouvert, tel que $\varphi_j \circ \varphi_k^{-1} : \varphi_k(U_k \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_k \cap U_j)$ soit une application de classe C^k .

Remarques 1.1. (A) On rappelle qu'un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$ est l'intersection d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$.

- (B) Les points envoyés sur $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ sont appelés points du bord, et on note leur ensemble ∂M . Ces points sont bien définis car il n'y a pas d'homéomorphisme $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$. Ce résultat n'est pas évident en dimension > 1 (enlever le point et regarder la connexité) mais le devient dès que $k \geq 1$ (exercice!).
- (C) Si on ne suppose pas l'espace métrisable, mais seulement l'existence de cartes, il existe des "pathologies", essentiellement de deux types :
 - $\mathbb{R} \cup \{0^*\}$ où les ouverts sont les ouverts de $\mathbb{R}$ et les ensembles de la forme $U \setminus \{0\} \cup \{0^*\}$ où U est un ouvert contenant 0. C'est un espace non-séparable, donc non métrique.
 - $\bigcup_{\alpha \in A} [0, 1[\setminus \{(0, 0)\}$ où A est le premier ordinal non-dénombrable, muni de la topologie induite par l'ordre lexicographique. L'espace n'est pas métrisable car il n'est pas réunion dénombrable de compacts

Exemple 1.1. Soit $\mathbb{R}$ muni des cartes $(]-\infty, -1[, \text{Id})$, $(]-1, 1[, c)$, $(]1, \infty[, \text{Id})$, où $c(x) = x^3$. Parce que c n'est pas un difféomorphisme, cette structure C^1 diffère de la structure usuelle. Cependant l'homéomorphisme $x \rightarrow x^3$ définit un isomorphisme entre les deux structures C^1 .

- (A) Toute variété possédant une structure C^k possède en fait une structure C^∞ unique : cela résulte du fait que grâce au théorème d'inversion locale, en topologie C^1 , les difféomorphismes C^k forment un sous-ensemble C^1 -dense (alors qu'en topologie C^0 , les difféomorphismes C^1 ne sont pas C^0 -denses, sauf en petite dimension). On parlera donc désormais de **structure différentiable**.
- (B) En fait, les variétés topologiques de dimension 1 ou 2 possèdent une structure différentiable unique (quel que soit k). Ceci est encore vrai en dimension 3, faux en dimension 4, l'espace $\mathbb{R}^4$ ayant plusieurs structures différentiables (et même une infinité) distinctes, mais la dimension 4 est dans ce cas une exception : en dimension

différente de 4, $\mathbb{R}^n$ possède une unique structure de variété différentiable et la dimension 4 est la seule pour laquelle une variété (compacte) peut avoir une infinité de structures différentiables. Par ailleurs en dimension 7, la sphère possède 28 structures différentiables distinctes (résultat dû à Kervaire et Milnor, cf. [Kervaire-Milnor]) et il existe des variétés topologiques n'ayant pas de structure différentiable (Thom)

Notons qu'il résulte de la définition que M est localement compact.

1.1 Faisceaux sur les variétés, partitions de l'unité, plongements et immersions

Définition 3.3. Soit M une variété. On appelle $C^k(M, \mathbb{R})$ l'espace des applications f de $C^0(M, \mathbb{R})$ telles que pour toute carte (U, φ) la fonction $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ soit de classe C^k .

Définition 3.4. Soient M, N deux variétés. On note $C^k(M, N)$ l'ensemble des applications telles que pour toute paire de cartes (U, φ) et (V, ψ) de M et N respectivement, $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est C^k sur son ensemble de définition (qui est donné par $\varphi^{-1}(\varphi(U \cap f^{-1}(V)))$).

1.2 Espace tangent et fibrés vectoriels

Parmi les définitions de l'espace tangent pour une sous-variété, on peut en retenir une dans le cas des variétés

Définition 3.5 (Vecteur tangent en x). Soit M une variété, x un point de M , γ_1, γ_2 deux courbes paramétrées par $] -1, 1[$ telles que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = x$. On dit que γ_1, γ_2 sont tangentes en x si quelle que soit la carte (U, φ) telle que $x \in U$ on ait $\frac{d}{dt}(\varphi(\gamma_1(t)))_{t=0} = \frac{d}{dt}(\varphi(\gamma_2(t)))_{t=0}$. Si cette égalité est vérifiée pour une carte, elle l'est par toutes. On note parfois $j^1\gamma_1(0) = j^1\gamma_2(0)$. L'ensemble des classes d'équivalences de telles courbes pour cette relation d'équivalence est appelé espace tangent en x de M . On le note $T_x M$.

L'un des inconvénients de cette définition est que la structure d'espace vectoriel de $T_x M$ n'est pas évidente. De même, il n'est pas tout à fait clair ce qu'est une famille continue (ou de classe C^k) de champs de vecteurs (Exercice : proposer une telle définition).

Notons par contre une naturalité de cette définition : si $f : M \rightarrow N$ est une application différentiable entre variétés, on définit $df : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ par $[\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]$

Définition 3.6 (Fibré vectoriel). On appelle fibré vectoriel sur M la donnée d'un espace E et d'une projection $\pi : E \rightarrow M$ telle que les $\pi^{-1}(x) = E_x$ possèdent une structure d'espace vectoriel ayant les propriétés suivantes. Il existe un recouvrement de M par des ouverts U_j et des cartes $\psi_j : \pi^{-1}(U_j) \rightarrow U_j \times \mathbb{R}^n$ telles que

- (A) $p_1 \circ \psi_j = \pi$ où $p_1 : U_j \times \mathbb{R}^n$ est la première projection
- (B) On ait $\psi_j \circ \psi_i^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n \rightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n$ soit de la forme $(x, v) \mapsto (x, g_{i,j}(x)v)$ où $x \mapsto g_{i,j}(x)$ est une application C^∞ de $U_i \cap U_j$ dans $GL(n, \mathbb{R})$.

Remarque 1.1. (A) Les propriétés (A) et (B) suffisent pour définir un fibré vectoriel. En effet, les ψ_j donnent par transport une structure d'espace vectoriel sur les E_x pour $x \in U_j$, et la propriété (C) garantit que cette structure ne dépend pas du choix de la carte.

(B) La définition donne automatiquement à E une structure de variété dont les ψ_j sont des cartes. Il est facile de vérifier que la projection π est une application C^∞ pour cette structure, puisque dans une "carte de fibré" c'est une projection.

Proposition 3.7. *L'espace tangent à M , $TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$ muni de la projection naturelle telle que $\pi(T_x M) = \{x\}$ est un fibré vectoriel. Si $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une carte, on définit $\psi = d\varphi$ par*

$$\psi_j([\gamma]) = (\gamma(0), \frac{d}{dt}\varphi(\gamma(t))|_{t=0}) \in U \times \mathbb{R}^n$$

On a alors $\psi_j \circ \psi_i^{-1}(x, v) = (x, d(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(v))$ vu que $d(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})$ est l'application qui envoie $\frac{d}{dt}\varphi(\gamma(t))|_{t=0}$ sur $\frac{d}{dt}\varphi(\gamma(t))|_{t=0}$

Démonstration. Si les (U_j, φ_j) sont des cartes de M , les applications $T_{U_j} M \rightarrow U_j \times \mathbb{R}^n$ données par $[\gamma] \mapsto (\gamma(0), \frac{d}{dt}\varphi_j(\gamma(t))|_{t=0})$ fournissent les cartes de fibré. En effet la

□

Notons que si f est une application C^1 , df (parfois aussi notée $T_x f$ ou $Df(x)$) est bien définie, et $df(x) : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ est linéaire. C'est un exemple de ce qu'on appelle un morphisme de fibrés

Définition 3.8. Soit E_1 un fibré vectoriel sur M_1 , E_2 un fibré vectoriel sur M_2 . On appelle morphisme de fibrés la donnée d'une application $\psi : E_1 \rightarrow E_2$ telle que ψ envoie les fibres $(\pi_1)^{-1}(x)$ sur $(\pi_2)^{-1}(f(x))$ par une application linéaire, et ψ est C^∞ . On représente un tel morphisme de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\psi} & F \\ \downarrow \pi_E & & \downarrow \pi_F \\ M & \xrightarrow{\varphi} & N \end{array}$$

En particulier si on a une application $f : M \rightarrow N$ sa différentielle df est un morphisme de fibrés $TM \rightarrow TN$.

Une conséquence de ce qui précède est que deux variétés difféomorphes ont des espaces tangents isomorphes. Par exemple la propriété de posséder ou non un champ de vecteurs (C^∞ ou en tous cas au moins C^0 !) sans zéros est une propriété de l'espace tangent. Cela signifie qu'il existe une application $s : M \rightarrow TM$ telle que $\pi \circ s = \text{Id}_M$, et $s(x) \neq 0$ quel que soit x . Il est clair que cette propriété se conserve par isomorphisme de fibrés. Cela permet de voir que S^2 et T^2 ne sont pas difféomorphes - à condition de savoir que S^2 ne possède pas de champ de vecteurs sans zéro (cf. théorème 5.6 du chapitre 5).

1.3 Immersions, plongements, partitions de l'unité

Soit $f : M \longrightarrow N$ une application.

Définition 3.9. On dit que $f \in C^0(M, N)$ est de classe C^k si pour toute cartes (U, φ) de M et (V, ψ) de N on a que

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \longrightarrow \psi(V \cap f(U))$$

on note $C^k(M, N)$ l'ensemble des applications de classe C^k de M dans N . On note alors df la différentielle de f . On dit que f est une immersion si $df(x)$ est injective pour tout x . On dit que f est un plongement si c'est une immersion injective qui est un homéomorphisme sur son image.

Proposition 3.10. *Une immersion injective propre est un plongement. L'image d'un plongement dans $\mathbb{R}^N$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^N$. Si M est compacte, l'espace des plongements de M dans N est ouvert pour la topologie C^1 .*

Démonstration. Cela résulte immédiatement de la définition par nappes des sous-variétés. En effet, si f est un plongement, $x \in M$, (U, φ) est une carte au voisinage de x , il existe V voisinage de $f(x)$ dans $\mathbb{R}^N$ tel que f soit un homéomorphisme de U sur $V \cap f(U)$. Alors $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow f(U) \cap V$ est une application de différentielle injective qui est bicontinue sur son image (par définition du plongement).

□

On peut alors étendre aux variétés le théorème des partitions de l'unité. On notera qu'une somme convergente n'a qu'un nombre dénombrable de termes non nuls.

Théorème 3.11 (Partition de l'unité sur une variété (cas à support quelconque)). *Soit M une variété et $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ un recouvrement ouvert de M . Il existe alors une famille $(\rho_j)_{j=1 \dots q}$ de fonctions de classe C^∞ telles que*

- (A) pour tout j $\text{supp}(\rho_j) \subset U_j$
- (B) $\forall x \in M, 0 \leq \rho_j(x) \leq 1$
- (C) $\forall x \in M, \sum_{j=1}^{+\infty} \rho_j(x) = 1$
- (D) Chaque point x de M a un voisinage qui ne rencontre qu'un nombre fini des supports de φ_j

Théorème 3.12 (Théorème de plongement de Whitney). *Soit M une variété de dimension n . Il existe alors un plongement de M dans un espace euclidien $\mathbb{R}^N$.*

Démonstration dans le cas compact. Soient (U_j, φ_j) des cartes telles que les ouverts U_j forment un recouvrement de M . On considère un sous-recouvrement V_j par des ouverts tels que $V_j \subset \bar{V}_j \subset U_j$ et une partition de l'unité χ_j subordonnée aux U_j . On pose alors $F(x) = (\chi_1(x), \dots, \chi_N(x), \chi_1(x)\varphi_1(x), \dots, \chi_N(x)\varphi_N(x))$. Cette application est bien

définie, car le prolongement de $\chi_j \cdot \varphi_j$ par la fonction nulle en dehors de U_j est une fonction C^∞ . Maintenant en chaque point x , l'un des $\chi_j(x)$ est non nul, et l'image de $(d\chi_j(x), \varphi_j(x)d\chi_j(x) + \chi_j(x)d\varphi_j(x))$ est de rang n car si $d\chi_j(x)h = 0$ et $\varphi_j(x)d\chi_j(x)h + \chi_j(x)d\varphi_j(x)h = 0$ on en déduit $d\chi_j(x)h = 0$ pour $x \in V_j$ ce qui est impossible. Elle est injective, car si $F(x) = F(y)$ on doit avoir $\chi_j(x) = \chi_j(y)$, donc ils sont dans le même carte U_j et $\varphi_j(x) = \varphi_j(y)$, donc $x = y$. Maintenant une immersion injective dans le cas compact est un plongement, puisqu'elle est nécessairement propre.

□

Remarque 1.2. Dans le cas non compact, soit on plonge dans $\mathbb{R}^N$ puis on projette sur un sous-espace de dimension finie, soit on utilise le théorème suivant

Proposition 3.13. Soit M une variété de dimension n . Alors a tout recouvrement de M par des ouverts, il existe un sous-recouvrement plus fin $(V_j)_{j \in \mathbb{N}}$ tel que les intersections $\bigcap_{j \in J} V_j$ sont vides dès que $\text{card}(J) \geq n + 1$.

1.4 Régularisation des variétés

Bien que cela ne semble pas évident à première vue, seules les notions de variété C^0 et de variété C^∞ sont à distinguer. En effet

Théorème 3.14. Soit M une variété de classe C^r avec $r \geq 1$. Il existe alors une structure de variété C^∞ sur M unique à difféomorphisme C^∞ près, et compatible avec la structure C^r . En d'autres termes si $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ est une famille de cartes C^r et (V_β, ψ_β) est la famille de cartes C^∞ , les $(\psi_\beta \circ \varphi_\alpha)^{-1}$ sont de classe C^r , c'est-à-dire telle que toutes les cartes de la structure C^∞ sont aussi de classe C^r .

Démonstration. D'après le résultat précédent, il suffit de considérer le cas où M est une sous-variété de classe C^r de $\mathbb{R}^N$. On va montrer qu'en bougeant un tout petit peu M , on peut la rendre C^∞ . La démonstration est basée sur le lemme d'approximation suivant

Lemme 3.15. Soient $U \subset \bar{U} \subset V$ et W des ouverts d'espace euclidiens et f une fonction C^r sur V . Soient $C_{(f,U)}^\infty(V, W)$ l'espace des fonctions qui coïncident avec f hors d'un voisinage de $\bar{U}$ et sont C^∞ sur U . Alors $C_{(f,U)}^\infty(V, W)$ est dense dans $C_{(f,U)}^r(V, W)$ espace des fonctions C^r qui coïncident avec f hors d'un voisinage de $\bar{U}$.

Démonstration. La démonstration du lemme peut se faire par exemple par convolution avec une fonction plateau χ . On obtient une fonction g qui ne coïncide pas avec f hors d'un voisinage de $\bar{U}$, mais si ρ vaut 1 sur U et 0 hors d'un voisinage de $\bar{U}$, il suffit de prendre $g_\rho = \rho(x)f(x) + (1 - \rho(x))g(x) = f(x) + (1 - \rho(x))(g(x) - f(x))$. Comme $\|f - g\|_{C^r} \leq \varepsilon$ on a

$$\|g_\rho - f\|_{C^r} \leq \|(1 - \rho)(g - f)\|_{C^r} \leq C(\rho)\|g - f\|_{C^r}$$

□

Soit alors M une sous-variété C^r de $\mathbb{R}^N$. On la recouvre par des cartes, $(U_j, \varphi_j)_{j \in \{1, \dots, q\}}$, telles que sur chaque ouvert U_j , on a $U_j \cap M$ est le graphe d'une application C^r $f_j : V_j \rightarrow \mathbb{R}^{N-m}$ où $U \subset \mathbb{R}^m$. On suppose que M est écrit comme réunion croissante des K_j avec $K_j \subset K_{j-1} \cup U_j$. On raisonne alors par récurrence, en demandant que la modification de M sur un voisinage de K_{j-1} soit suffisamment C^r petite (et ici il faut $r \geq 1$) pour que M_{j-1} soit encore le graphe de $\tilde{f}_j$. On a donc une fonction sur les V_j . Cette fonction est de classe C^∞ au voisinage de K_{j-1} et on peut donc l'approcher C^r par une fonction g_j qui coïncide avec $\tilde{f}_j$ sur $\{x \mid (x, \tilde{f}_j(x)) \in K_{j-1}\}$ qui est C^∞ sur un voisinage de K_j et coïncide avec f_j hors de $\bigcup_{i=1..j} V_i$. Le graphe de g_j coïncide alors avec M_{j-1} et définit un $\square$

Remarque 1.3. Ne rêvons pas, cela ne signifie pas que toute fonction C^1 est C^∞

1.5 Exemples de variétés

Outre les sous-variétés, un exemple important de variété s'obtient en quotientant par l'action d'un groupe.

Proposition 3.16. *Soit G un sous-groupe discret du groupe des difféomorphismes de la variété M , agissant proprement et librement sur M . En d'autres termes*

- (A) (action libre) si $g \neq e$, on a $\forall x \in M, gx \neq x$
- (B) (action propre) Pour tout K compact de M , l'ensemble $\{g \in G \mid gK \cap K \neq \emptyset\}$ est fini

Alors le quotient de M par G a une structure de variété qui rend l'application $p : M \rightarrow M/G$ un difféomorphisme local.

Démonstration. Soit U un ouvert d'adhérence compacte, contenu dans une carte contenant x_0 . Quitte à restreindre U , on peut supposer que $gU \cap U = \emptyset$ pour tout g . On en déduit que $p : M \rightarrow M/G$ est un difféomorphisme local de U sur $p(U)$ (seule l'injectivité est à vérifier, et elle résulte de ce que $p(x) = p(y) \Leftrightarrow \exists g, gx = y$) $\square$

Proposition 3.17. *Soit G un groupe agissant proprement librement et sans point fixe sur M . Alors le quotient de M par G a une structure de variété.*

Exemples 1.1. $SO(n, \mathbb{R}), U(n), GL(n, \mathbb{R}), SU(n)$ sont des groupes de Lie.

Exemple 1.2. (A) L'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ espace des droites vectorielles de $\mathbb{R}^{n+1}$ peut être vu comme le quotient de S^n par l'action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ engendrée par $x \rightarrow -x$. L'espace tangent à D peut s'identifier $D^\perp$. En effet, une droite proche de D est caractérisée par son point d'intersection avec un espace affine de direction $D^\perp$ ne passant pas par 0. On associe alors un chemin de droites, un chemin sur $D^\perp$ passant par un point x_0 , et donc le vecteur tangent à ce chemin, contenu dans $D^\perp$. Choisir une autre carte, c'est choisir un autre supplémentaire de D , que l'on notera H et l'application $D^\perp \rightarrow H$ obtenue par projection de centre 0 est linéaire.

- (B) La même construction fonctionne pour $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ (mais $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est remplacé par S^1). Alternativement on peut se donner des cartes de la manière suivante. Si D a pour vecteur directeur $(z_0, \dots, z_n)$ et $z_j \neq 0$ il en sera de même pour les droites voisines, et on prend pour carte (U_j, φ_j)

$$(z_0, \dots, z_n) \longrightarrow \left(\frac{z_0}{z_j}, \frac{z_0}{z_j}, \dots, \frac{\widehat{z_j}}{z_j}, \dots, \frac{z_n}{z_j} \right) \in \mathbb{C}^j \times \{1\} \times \mathbb{C}^{n-j} \simeq \mathbb{C}^n$$

Les U_j recouvrent $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, et les changements de carte sont donnés par

$$(u_1, \dots, u_n) \longrightarrow \left(\frac{u_1}{u_k}, \dots, \frac{\widehat{u_k}}{u_k}, \dots, \frac{u_n}{u_k} \right)$$

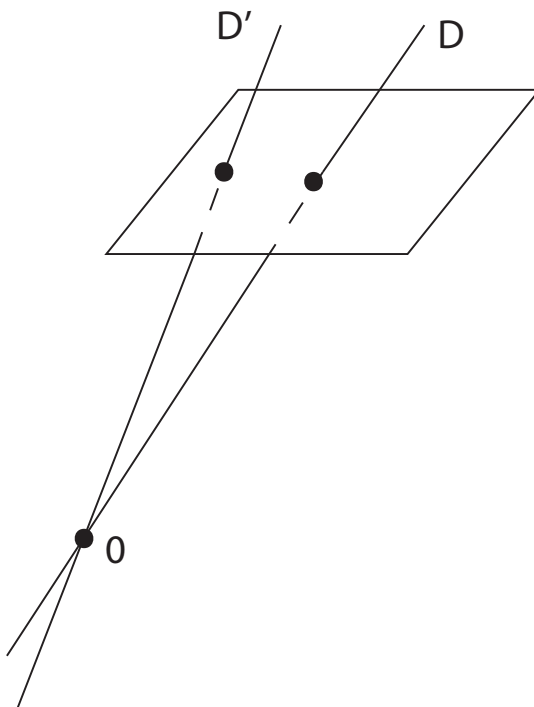


FIGURE 3.1 – Une carte de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$

- (C) Soit $G_k(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des k -sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. Comme dans le cas du projectif, on prend pour carte au voisinage de L le point d'intersection de L' avec un espace affine ne passant pas par 0 de direction $L^\perp$.
- (D) Soit $V_k(n)$ l'espace des k -repères de $\mathbb{R}^n$. On peut le voir comme espace des matrices k, n constituées de vecteurs orthonormés. Dans une base adaptée à un élément donné, celui-ci s'écrit

$$I_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0, \dots & , 0 \\ 0 & 1 & 0, \dots & , 0 \\ 0 & 0 & 1, \dots & , 0 \end{pmatrix}$$

Si $\pi_v : \mathbb{R}^n \longrightarrow \langle v_1, \dots, v_k \rangle$, $E_v = \pi(\mathbb{R}^n)$, $F_v = E_v^\perp$ on

- (E) $SO(3) \simeq \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$. En effet, à une rotation R d'angle $\theta \in [0, \pi]$ autour de l'axe D on associe le vecteur $v(R)$ de D tel que vu de $v(R)$ la rotation soit de θ dans le sens trigonométrique. Le seul cas d'ambiguïté est le cas où l'angle est π , auquel cas, la rotation dans le sens trigonométrique ou anti-trigonométrique d'angle π coïncident. On peut donc identifier $SO(3)$ à $B^3(0, \pi)/\simeq$ où on identifie les vecteurs de norme π à son opposé.
- (F) On considère l'ensemble des quaternions $a+bi+cj+dk$. La norme d'un tel quaternion est $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ et on considère l'ensemble des quaternions de norme 1. C'est bien entendu une sous-variété difféomorphe à S^3 . On considère alors l'action de ces quaternions unitaires sur $\mathbb{R}^3$, identifié aux quaternions imaginaires, i.e. $\mathbb{R}^3 = \{bi+cj+dk \mid (b, c, d) \in \mathbb{R}^3\}$. Les quaternions de norme 1 agissent sur les quaternions imaginaires par $(x, u) \mapsto x^{-1} \cdot u \cdot x$. Cette action est par isométries, car $|x^{-1}ux| = |x^{-1}| \cdot |u| \cdot |x| = |u|$ et on vérifie que deux éléments induisent la même action si et seulement s'ils coïncident au signe près.

On obtient donc une action de $S^3/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ par isométries sur $\mathbb{R}^3$. Pour montrer que l'on obtient tout $SO(3)$, on peut utiliser le fait que l'on a un morphisme de groupes $F : S^3 \longrightarrow SO(3)$ dont le noyau est $\{\pm 1\}$. Si on montre qu'il contient un voisinage de 0, l'exercice (C) permet de conclure qu'il est surjectif. Notons que $T_1 S^3$ s'identifie aux quaternions imaginaires et rappelons que $T_e(SO(3))$ est l'ensemble des applications antisymétriques de $\mathbb{R}^3$.

Soit donc $dF(1)h = u \mapsto -hu + uh$ et l'application $u \mapsto uh - hu$ n'est nulle que si h commute à tous les quaternions imaginaires, donc si h est réel, mais comme h est imaginaire, on a $h = 0$. Donc l'image de F contient un voisinage de l'identité dans $SO(3)$ et comme c'est un morphisme de groupes, il doit contenir $SO(3)$ tout entier (cf. exercice (C)).

Soit G un groupe muni d'une structure de variété.

Définition 3.18. On dit que G est un groupe de Lie si l'application $(x, y) \mapsto x \cdot y^{-1}$ est C^∞ .

1.6 Classification des variétés

Deux variétés sont dites équivalentes s'il existe un difféomorphisme global envoyant l'une sur l'autre. L'un des objectifs de la topologie différentielle était la classification des variétés, à difféomorphisme près. Une classification explicite est possible dans les cas suivants :

- (A) Dimension 1 : la seule variété compacte connexe de dimension 1 est le cercle. Il existe une seule autre variété connexe, non compacte de dimension 1 : $\mathbb{R}$.
- (B) Dimension 2 : la classification des surfaces compactes connexes est donnée par la sphère, le tore à g trous, le plan projectif, le plan projectif recollé avec un tore à g trous. Le cas non-compact est plus compliqué, car on peut avoir une infinité de trous, ainsi que des « pointes ».

- (C) Dimension 3 : G. Perelman a reçu la médaille Fields² en 2006 pour avoir montré que la seule variété compacte connexe de dimension 3 qui soit simplement connexe (c'est-à-dire que tout lacet se déforme continument en un lacet constant) est difféomorphe à la sphère de dimension 3, i.e.

$$S^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$$

2 Exercices

- (A) Soit M une variété compacte de dimension n plongée dans $\mathbb{R}^N$ avec $N > 2n + 1$. Considérons l'image $D(M)$ de l'application $M \times M \setminus \Delta \longrightarrow \mathbb{P}^{N-1}(\mathbb{R})$ qui associe à (x, y) la droite passant par x et y . Soit $D'(M)$ l'ensemble des droites contenues dans TM .
- (a) Montrer en utilisant le théorème de Sard que $D(M) \cup D'(M) \neq \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$
 - (b) Montrer que si D n'est pas dans $D(M) \cup D'(M)$, la projection sur $\mathbb{R}^{N-1}$ parallèlement à D est un plongement.
 - (c) Montrer que M possède toujours un plongement dans $\mathbb{R}^{2n+1}$ et une immersion dans $\mathbb{R}^{2n}$.

Un théorème de Whitney montre que M possède toujours un plongement dans $\mathbb{R}^{2n}$. Une conjecture affirme que toute variété possède une immersion dans $\mathbb{R}^{2n-p(n)}$ où $p(n)$ est le nombre de 1 de l'écriture dyadique de n . Par exemple $n = 7$ s'écrit 111 e, dyadique, et donc toute variété de dimension 7 s'immerge dans $\mathbb{R}^{14-3} = \mathbb{R}^{11}$.

- (B) Soit $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ l'espace projectif, c'est-à-dire l'espace des droites de $\mathbb{R}^{n+1}$. Montrer qu'il peut être muni d'une structure de variété en associant à une droite D dans un voisinage de la droite D_0 , le point d'intersection de D avec un hyperplan affine orthogonal à D_0 ne passant pas par 0.
- (C) Soit G un groupe topologique connexe qui est un espace métrique. Montrer que si U est un voisinage quelconque de l'identité, G est engendré par les éléments de U . Indication : montrer que l'ensemble des éléments s'écrivant comme produit (fini !) d'éléments de U est à la fois ouvert et fermé. En déduire que si G, H sont des groupes de Lie connexe, et $F : G \longrightarrow H$ un morphisme de groupes C^∞ la surjectivité de $dF(e)$ entraîne celle de F .

2. qu'il a refusée.

Chapitre 4

Formes différentielles, Formule de Stokes et Applications

Les formes différentielles interviennent dans plusieurs aspects des mathématiques et tout particulièrement en géométrie et systèmes dynamiques. Intuitivement, une forme différentielle a pour vocation de s'intégrer sur une sous-variété. Le lecteur a sans doute déjà vu de manière plus ou moins explicite les formes de degré 1 à l'occasion de l'étude des fonctions holomorphes (intégrale sur les chemins de $f(z)dz$). L'objet que l'on intègre doit avoir une intégrale ne dépendant pas de la paramétrisation du chemin.

Après avoir introduit le formalisme des formes différentielles, et de la différentielle extérieure, nous démontrons la formule de Stokes qui joue un rôle crucial, autant en mathématiques qu'en mécanique et en physique. Les applications sont alors nombreuses, mais nous insistons particulièrement sur celles de caractère topologique.

1 Formes différentielles

1.1 Algèbre extérieure

On note δ_j^k le symbole de Kroenecker, égal à 1 si $j = k$ et 0 sinon. On note $\mathfrak{S}(p)$ le groupe des permutations de p objets. On rappelle que ce groupe de cardinal $p!$ est engendré par les transpositions (i.e. permutation de $[1, \dots, p]$ échangeant deux éléments), et que la parité du nombre de transpositions nécessaire pour engendrer la permutation σ est un invariant de la permutation. La signature de σ , notée $\varepsilon(\sigma)$, vaut -1 si ce nombre est impair, $+1$ s'il est pair. L'application $\sigma \longrightarrow \varepsilon(\sigma)$ est un morphisme du groupe $\mathfrak{S}(p)$ sur le groupe $(\{-1, +1\}, \times)$.

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$. On note $(E^*)^{\otimes k}$ l'espace des formes k -linéaires, c'est-à-dire telle que pour tout $j \in [1, k]$, et quels que soient les vecteurs

$v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_k$ de E , l'application $v \longrightarrow \alpha(v_1, \dots, v_{j-1}, v, v_{j+1}, \dots, v_k)$ soit linéaire

Définition 4.1. On appelle forme extérieure de degré k une forme k -linéaire alternée sur E , c'est-à-dire une application $\alpha : E^k \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

- (A) pour tout $j \in [1, k]$, et quels que soient les vecteurs $v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_k$ de E , l'application $v \longrightarrow \alpha(v_1, \dots, v_{j-1}, v, v_{j+1}, \dots, v_k)$ soit linéaire
- (B) quels que soient les vecteurs $v_1, \dots, v_k$ de E ,

$$\alpha(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \dots, v_k) = -\alpha(v_1, \dots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \dots, v_k).$$

On note $\Lambda^k(E^*)$ l'espace de ces formes.

Notons que la seconde condition entraîne que pour toute transposition τ ,

$$\alpha(v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(k)}) = -\alpha(v_1, \dots, v_k)$$

Il en résulte que pour toute permutation σ

$$\alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \varepsilon(\sigma)\alpha(v_1, \dots, v_k)$$

et que

$$\alpha(v_1, \dots, v_k) = 0$$

dès qu'il existe $i \neq j$ tels que $v_i = v_j$.

Pour un élément α de $(E^*)^{\otimes k}$ et une permutation σ on pose $\sigma^*(\alpha)(v_1, \dots, v_k) = \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$. On obtient ainsi une représentation du groupe $\mathfrak{S}(k)$ sur $(E^*)^{\otimes k}$. Les formes alternées constituent le sous-espace sur lequel $\mathfrak{S}(k)$ agit comme la multiplication par $\varepsilon(\sigma)$.

Exemples 1.1. (A) Par convention, on pose $\Lambda^0(E^*) = \mathbb{R}$, ce qui est cohérent avec la convention $E^0 = \mathbb{R}$.

- (B) Les formes linéaires (ou 1-linéaires) forment l'espace vectoriel dual de E noté E^* qui s'identifie à $\Lambda^1(E^*)$. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E on note $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ sa base duale, définie par

$$\forall j, k \in [1..n], e_j^*(e_k) = \delta_j^k$$

- (C) Le déterminant de n vecteurs dans la base $e = (e_1, \dots, e_n)$ c'est-à-dire le déterminant de la matrice des coordonnées de ces vecteurs dans cette base, induit une forme n -linéaire alternée. On note $\det_e$ cet élément de $\Lambda^n(E^*)$.
- (D) Enfin si α est une forme multilinéaire non nécessairement alternée, il existe un opérateur de projection, P qui lui associe sa partie alternée. Il est naturellement donné par la formule

$$P(\alpha)(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(k)} \varepsilon(\sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$$

On vérifie aisément que $P(\alpha)$ est alternée, car si τ est une transposition,

$$P(\alpha)(v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(k)}) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(k)} \varepsilon(\sigma) \alpha(v_{\sigma\tau(1)}, \dots, v_{\sigma\tau(k)})$$

et en faisant le changement de variable dans $\mathfrak{S}(k)$ donné par $\rho = \sigma\tau$ on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{k!} \sum_{\rho \in \mathfrak{S}(k)} \varepsilon(\rho\tau^{-1}) \alpha(v_{\rho(1)}, \dots, v_{\rho(k)}) &= \varepsilon(\tau^{-1}) \frac{1}{k!} \sum_{\rho \in \mathfrak{S}(k)} \varepsilon(\rho) \alpha(v_{\rho(1)}, \dots, v_{\rho(k)}) = \\ &= -\frac{1}{k!} \sum_{\rho \in \mathfrak{S}(k)} \varepsilon(\rho) \alpha(v_{\rho(1)}, \dots, v_{\rho(k)}) \end{aligned}$$

Définition 4.2. Le produit extérieur de deux formes extérieures α, β de degrés respectifs k, l est le produit de $\frac{(k+l)!}{k!l!}$ par la projection par P de leur produit usuel. C'est donc la forme de degré $k+l$ donnée par la formule

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1, \dots, v_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(k+l)} \varepsilon(\sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)})$$

On verra ultérieurement la raison de cette normalisation étrange. Notons tout de même que l'on peut aussi écrire

$$\alpha \wedge \beta(v_1, \dots, v_{k+l}) = \sum_A \varepsilon(\sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)})$$

où A est l'ensemble des permutations vérifiant $\sigma(1) < \dots < \sigma(k), \sigma(k+1) < \dots < \sigma(k+l)$. Notons que toute permutation se ramène à un élément de A par composition avec une permutation de $\{1, \dots, k\}$ et une permutation de $\{k+1, \dots, k+l\}$.

Proposition 4.3 (Structure de l'algèbre des formes alternées).

Soit $\alpha \in \Lambda^k(E^*), \beta \in \Lambda^l(E^*)$

(A) (Anti-commutativité) On a

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{k \cdot l} \beta \wedge \alpha$$

(B) (Associativité)

$$\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$$

(C) L'espace vectoriel $\Lambda^p(E^*)$ est engendré par les éléments $e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_p}^*$ où $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$. En particulier sa dimension est égale au coefficient binomial C_n^p (elle est nulle pour $p > n$).

(D) L'algèbre $\Lambda^\bullet(E^*) = \sum_p \Lambda^p(E^*)$ munie de l'addition et du produit extérieur est une algèbre engendrée par les e_i^* .

Remarques 1.1. (A) Attention : dire qu'une algèbre est engendrée par des éléments e_i^* signifie que tout élément est somme de produits des e_i^* .

(B) L'espace des formes de degré n est de dimension un. Il est engendré par le déterminant associé à une base donnée, $e = (e_1, \dots, e_n)$. On appellera **forme déterminant** une telle forme non-nulle.

L'application $\det_e(v_1, \dots, v_n)$ s'écrit avec les notations précédentes

$$\det_e = e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^*$$

qui résulte de la formule

$$\det_e(v_1, \dots, v_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(n)} e_1^*(v_{\sigma(1)}) \dots e_n^*(v_{\sigma(n)})$$

Pour vérifier que deux formes volumes sont égales, il suffit de vérifier qu'elle prennent la même valeur sur une base bien choisie.

Démonstration. Tout d'abord on voit aisément, en écrivant chaque vecteur dans la base, que la forme α est déterminée par les nombres $\alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$. Puisque α s'annule sur un p -uplet de vecteurs dont deux sont égaux, et $\alpha(e_{i_{\sigma(1)}}, \dots, e_{i_{\sigma(p)}}) = \varepsilon(\sigma) \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$, la donnée des $\alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$ pour $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$ détermine α , car on peut toujours trouver une permutation ordonnant les indices.

La forme $e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_p}^*$ vaut $\varepsilon(\sigma)$ sur $e_{i_{\sigma(1)}}, \dots, e_{i_{\sigma(p)}}$ pour σ dans $\mathfrak{S}(p)$ et 0 sur les autres p -uplets de vecteurs de base. Si α est une p -forme et on note $c_{i_1, \dots, i_p} = \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$ pour $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$ on aura

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} c_{i_1, \dots, i_p} e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_p}^*$$

puisque les deux formes coïncident sur les p -uplets $(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$ pour $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$.

Cela démontre la propriété (C) et il suffit de vérifier (A) et (B) pour des formes du type $e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_p}^*$, ce qui est laissé au lecteur.

□

Nous pouvons maintenant définir la notion de forme induite par une application linéaire. Il est clair que si f est une application linéaire et α une forme multilinéaire (pas nécessairement alternée) on peut définir $f^*(\alpha)$ par $f^*(\alpha)(v_1, \dots, v_k) = \alpha(f(v_1), \dots, f(v_k))$. Cette opération envoie les formes alternées sur des formes alternées. On a donc

Définition 4.4. Si $f : E \longrightarrow F$ est une application linéaire, elle induit une application linéaire

$$\Lambda^k f : \Lambda^k(F^*) \longrightarrow \Lambda^k(E^*)$$

(attention, $\Lambda^k f^*$ va dans le sens inverse de celui de f) aussi notée f^* , donnée par la formule

$$f^*(\alpha)(v_1, \dots, v_k) = \alpha(f(v_1), \dots, f(v_k))$$

On notera que la forme induite sur un sous-espace de dimension k par une forme de degré k est soit nulle, soit une forme volume¹ de dimension k . C'est sa principale propriété. On a aussi que si f est bijective,

$$f^* \det_{f(e)} = \det_e$$

(si f n'est pas bijective, $f^* \det_e = 0$). Si f est un endomorphisme, vu que l'application $\Lambda^n f$ est un endomorphisme d'un espace de dimension un, il existe un unique réel noté $\det(f)$ tel que

$$f^* \det_e = \det(f) \det_e$$

Notons que $\det(f)$ ne dépend pas du choix d'une base.

Remarque 1.1. (A) Dans un espace vectoriel on dit que deux bases définissent la même orientation si le déterminant de l'une dans l'autre base est positif. Sinon, elles définissent des orientations opposées. Une orientation de l'espace est le choix d'une des deux classes d'équivalence pour la relation « avoir même orientation ». Lorsque l'espace est muni d'un produit scalaire, on peut choisir une base orthonormée orientée, et on note $\det$ la forme multilinéaire donnée par le déterminant dans cette base. Il est défini de manière unique. Par exemple dans $\mathbb{R}^n$ on choisit l'orientation associée à la base canonique.

(B) Dans un espace euclidien de dimension 3, à tout vecteur v on associe la 1-forme $\alpha_v = \langle v, \bullet \rangle$ et la 2-forme $\Omega_v = \det(v, \bullet, \bullet)$. Les applications $v \rightarrow \alpha_v$ et $v \rightarrow \Omega_v$ sont injectives, donc par raison de dimension bijectives. Les formes de degré 1 ou 2 se paramètrent donc par des vecteurs.

Proposition 4.5. *On a les propriétés suivantes*

(A)

$$f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*(\alpha) \wedge f^*(\beta)$$

(B)

$$(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$$

Démonstration. Pour la première propriété, il suffit de montrer que $f^*P(\alpha) = P(f^*(\alpha))$ car alors

$$f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*\left(\frac{(k+l)!}{k!l!}P(\alpha \cdot \beta)\right) = \frac{(k+l)!}{k!l!}P(f^*(\alpha \cdot \beta)) = \frac{(k+l)!}{k!l!}P(f^*(\alpha) \cdot f^*(\beta)) = f^*(\alpha) \wedge f^*(\beta)$$

Mais on voit que

1. i.e. si $f : V \rightarrow E$ est linéaire injective et $\dim(V) = k$, $f^*(\alpha)$ est une forme volume.

$$f^*P(\alpha)(v_1, \dots, v_k) = f^* \left(\frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(k)} \varepsilon(\sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \right) =$$

$$\frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(k)} \alpha(f(v_{\sigma(1)}), \dots, f(v_{\sigma(k)})) = P(f^*(\alpha))(v_1, \dots, v_k)$$

La seconde n'est rien d'autre qu'une réécriture. $\square$

Exercice 1.1. (A) Montrer que $f^*(\alpha_v) = \alpha_{f(v)}$ et $f^*(\Omega_v) = \det(f)\Omega_{f^{-1}(v)}$ (si f est inversible).

(B) Montrer que si on note $v \wedge w$ le produit vectoriel usuel² dans $\mathbb{R}^3$, on a

$$\alpha_v \wedge \alpha_w = \Omega_{v \wedge w}$$

et que

$$\alpha_v \wedge \Omega_w = \langle v, w \rangle \det$$

(il suffit de vérifier les deux égalités avec des vecteurs choisis parmi $v, w, v \wedge w$).

1.2 Formes différentielles sur les variétés

De même que le déterminant de n vecteurs mesure le volume (n dimensionnel) du parallélépipède engendré par ces vecteurs dans l'espace de dimension n , et intervient crucialement dans la formule des changements de variable en théorie de l'intégration, les formes de degré k vont jouer le même rôle lorsqu'on voudra intégrer sur une sous-variété de dimension k .

Pour cela il faut d'abord définir les formes différentielles. On se contentera ici de formes de classe C^∞ , le cas C^r ne présentant pas de difficultés. Commençons par le cas d'un ouvert d'un espace vectoriel.

Définition 4.6. [Forme différentielle sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$]

- (A) Une forme différentielle de degré k et de classe C^∞ sur un ouvert U de E est une application de classe C^∞ de U dans $\Lambda^k(E^*)$. On note $\Omega^k(U)$ l'espace des formes différentielles C^∞ de degré k définies sur U .
- (B) Si φ est une application C^∞ , définie sur un ouvert U de E à valeurs dans un ouvert V de F , on lui associe une application $\varphi^* : \Omega^k(V) \longrightarrow \Omega^k(U)$ donnée par

$$\varphi^*(\alpha)(x)(\xi_1, \dots, \xi_k) = \alpha(\varphi(x))(d\varphi(x)\xi_1, \dots, d\varphi(x)\xi_k)$$

2. Ce produit est uniquement déterminé dans un espace euclidien de dimension 3 par la formule $\det(u, v, w) = \langle u, v \wedge w \rangle$.

Définition 4.7 (Formes différentielles sur une variété). Soit M une variété. Une forme différentielle de degré k sur M est une application qui à chaque point x de M associe un élément de $\Lambda^k(T_x^*(M))$. On dit qu'une telle forme est de classe C^∞ si pour chaque carte locale, la forme $(\varphi^{-1})^*(\alpha)$ est de classe C^∞ . On note $\Omega^k(M)$ l'espace des formes différentielles C^∞ de degré k .

Enfin nous pouvons définir :

Définition 4.8 (Forme induite par une application différentiable). Si $\varphi : M \longrightarrow N$ est une application C^∞ entre variétés, on note φ^* l'application de $\Omega^*(N)$ vers $\Omega^*(M)$ donnée par

$$\varphi^*(\alpha)(x)(\xi_1, \dots, \xi_k) = \alpha(\varphi(x))(d\varphi(x)\xi_1, \dots, d\varphi(x)\xi_k)$$

Remarque 1.2. Dire que α est une k -forme de classe C^∞ signifie donc que si φ est une carte locale, la forme

$$(\varphi^{-1})^*(\alpha)(\xi_1, \dots, \xi_k) = \alpha(\varphi^{-1}(x))(d\varphi^{-1}(x)\xi_1, \dots, d\varphi^{-1}(x)\xi_k)$$

est une forme de degré k de classe C^∞ (i.e. ses coefficients sont de classe C^∞) sur $\mathbb{R}^n$.

Enfin il suffit de vérifier la régularité, avec une carte locale : si $(\varphi^{-1})^*(\alpha)$ est à coefficients C^∞ , et si ψ est une autre carte, $\psi^{-1}(\alpha)$ sera aussi C^∞ , car

$$(\psi^{-1})^*(\alpha) = (\varphi \circ \psi^{-1})^*(\varphi^{-1})^*(\alpha)$$

Exemples 1.2. (A) Si ω est une k -forme différentielle sur $\mathbb{R}^n$ et M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, alors ω induit de manière évidente une k -forme sur M , qui est égale à $i^*(\omega)$, où $i : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est l'injection de M dans $\mathbb{R}^n$.

(B) Soit $\tilde{f}$ une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$. Soit f sa restriction à la sous-variété M . Alors $d\tilde{f}(x)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$, dont la restriction à $T_x M$ ne dépend que de f et non du choix de l'extension $\tilde{f}$. En effet, il suffit de vérifier que si f est identiquement nulle, alors $d\tilde{f}(x)$ s'annule sur $T_x M$ pour tout x de M . Mais une carte nous ramène au cas $M = \mathbb{R}^k \times \{0\}$, auquel cas cela revient à vérifier que si $\tilde{f}$ est nulle sur $x_{k+1} = \dots = x_n = 0$ alors $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) = 0$ pour tout j inférieur à k , ce qui est évident. On note $df(x)$ la 1-forme différentielle ainsi définie.

(C) Si $\alpha = f(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ et φ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$, on a

$$\varphi^*(\alpha) = f(\varphi(x)) \det(d\varphi(x)) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

2 Orientation, différentielle, Formule de Stokes

2.1 Variétés orientées

La différentielle extérieure, dont la définition peut sembler étrange, est faite pour vérifier la formule de Stokes. Celle-ci joue le rôle, en dimension supérieure, de la formule

d'intégration par parties. Avant d'énoncer la formule de Stokes, nous devons définir la notion de variété orientée.

Afin d'intégrer une forme différentielle sur une variété, nous aurons besoin de la notion d'orientation d'une variété.

Définition 4.9. Soit M une variété. On dit que M est une variété (à bord), orientable, si et seulement si on peut choisir un sous ensemble de l'ensemble des cartes tel que pour deux cartes φ, ψ définies sur des voisinages de x_0 , $U \cap M$ et $V \cap M$, $d(\varphi \circ \psi^{-1})(x_0)$ a un déterminant positif. Le choix d'un tel sous-ensemble de cartes s'appelle une **orientation** de M .

Remarque 2.1. Si M est orientable, il est clair qu'elle possède deux orientations. Ces deux orientations sont dites opposées.

Une définition équivalente de l'orientabilité est la possibilité de choisir en chaque point de M une orientation de $T_x M$ de manière à ce que cette orientation « varie de manière continue ». En d'autres termes

Définition 4.10. Une orientation des espaces $T_x M$ est dite « continue » si la condition suivante est vérifiée. Pour chaque n -uplet de champs de vecteurs définis au voisinage de x_0 et linéairement indépendants en x_0 tels que $(X_1(x_0), \dots, X_n(x_0))$ définisse une base positivement orientée de $T_{x_0} M$ alors pour x voisin de x_0 , les $(X_1(x), \dots, X_n(x))$ définissent encore une base positivement orientée pour $T_x M$.

Proposition 4.11. La variété M possède une orientation continue de son espace tangent, si et seulement si elle est M orientable.

Démonstration. Soit t une symétrie hyperplane (donc renversant l'orientation) de $\mathbb{R}^n$. Soit φ une carte définie sur un ouvert connexe. Alors soit φ soit $t \circ \varphi$ ont la propriété suivante :

$d\varphi(x_0) : T_{x_0} M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ envoie une base positivement orientée de $T_{x_0} M$ sur une base positivement orientée de $\mathbb{R}^n$.

Cela est clair pour un point x_0 , et comme $\det(d\varphi(x)X_1(x), \dots, d\varphi(x)X_n(x))$ varie continûment sur un ouvert connexe sans s'annuler, son signe est constant.

Cela donne pour chaque ouvert de carte une application φ , il reste à vérifier que si φ est définie sur U et ψ sur V , alors $\varphi \circ \psi^{-1}$ a un déterminant positif. Mais en $x_0 \in U \cap V$, $d\varphi(x_0)$ et $d\psi(x_0)$ envoient une base positivement orientée de $T_{x_0} M$ sur une base positivement orientée de $\mathbb{R}^n$. On en déduit que le déterminant de $d(\varphi \circ \psi^{-1})(\psi(x_0)) = d\varphi(x_0) \circ d\psi(x_0)^{-1}$ est positif. $\square$

Exemple 2.1. (A) On peut montrer qu'une hypersurface compacte sans bord de $\mathbb{R}^n$ possède toujours un intérieur et un extérieur (mais ce théorème requiert des bases de la théorie de l'homologie). Elle est donc orientable. En effet, soit $\nu(x)$ la normale extérieure en x . Une base de $T_x M$ sera dite positivement orientée si la base de $\mathbb{R}^n$ donnée par $(\nu(x), X_1(x), \dots, X_{n-1}(x))$ est positivement orientée dans $\mathbb{R}^n$. On vérifie

aisément que cela fournit une orientation continue de $T_x M$ en utilisant la continuité du déterminant et le fait qu'une base est positivement orientée si et seulement si $\det((\nu(x), X_1(x), \dots, X_{n-1}(x))) > 0$.



FIGURE 4.1 – Un exemple de surface non-orientable : le ruban de Möbius

- (B) Si $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ est un chemin, et si on se donne une orientation de $T_{\gamma(0)} M$ il existe une unique manière de prolonger cette orientation à $T_{\gamma(t)} M$.
- (C) Le ruban de Möbius est une variété à bord non orientable. En effet posons

$$F(r, \theta) = ((1 + r \cos(\theta/2)) \cos(\theta), (1 + r \cos(\theta/2)) \sin(\theta), r \sin(\theta/2))$$

soit

$$M = \{F(r, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, -1/2 \leq r \leq 1/2\}$$

Il est facile de construire une base de $T_z M$ dépendant continûment de θ le long de $z = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$ qui change d'orientation lorsque θ varie de 0 à 2π . En effet les vecteurs $\frac{\partial F}{\partial \theta}(0, \theta), \frac{\partial F}{\partial r}(0, \theta)$ forment une base de $T_{F(0, \theta)} M$ mais $\frac{\partial F}{\partial \theta}(0, 0) = \frac{\partial F}{\partial \theta}(0, 2\pi)$, alors que $\frac{\partial F}{\partial r}(0, 0) = -\frac{\partial F}{\partial r}(0, 2\pi)$.

Proposition 4.12. *Si M est une variété à bord orientée, ∂M est une variété (sans bord) orientée.*

Démonstration. On voit en utilisant une carte locale que si x est un point du bord, $T_x M$ est divisé en deux demi-espaces. On appelle demi-espace intérieur (resp. extérieur) le demi-espace $d\varphi(x)^{-1}(\mathbb{R}^{p-1} \times \mathbb{R}_- \times \{0\})$ (resp. $d\varphi(x)^{-1}(\mathbb{R}^{p-1} \times \mathbb{R}_+ \times \{0\})$). Cela permet de diviser les vecteurs non tangents à ∂M en deux classes : les vecteurs pointant vers l'extérieur et ceux pointant vers l'intérieur de M . Les seconds sont par exemple vecteurs tangents en 0 à une courbe $c(t)$ telle que $c(0) = x$ et $c(t) \in M$ pour $t > 0$. Soit alors

v un vecteur sortant. On dira d'une base $(e_1, \dots, e_{n-1})$ de $T_x \partial M$ qu'elle est positivement orientée si la base $(v, e_1, \dots, e_{n-1})$ de $T_x M$ l'est aussi. Cela fournit une orientation continue de $T_x \partial M$, qui d'après la proposition 4.11 est donc orientable. $\square$

2.2 Intégration des formes différentielles, formule de Stokes

Commençons par intégrer des formes à support compact sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 4.13. Soit α une forme de degré n sur $\mathbb{R}^n$ à support compact. Elle peut s'écrire

$$\alpha = f(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

On pose alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} \alpha = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

Ici $dx_1 \dots dx_n$ est la mesure de Lebesgue³ pour laquelle le parallélépipède de côtés e_j a volume 1.

La formule du changement de variable devient alors

Proposition 4.14. Soit φ un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ préservant l'orientation, et α une forme de degré n sur $\mathbb{R}^n$. Alors on a la formule de changement de variable

$$\int_{\mathbb{R}^n} \alpha = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^*(\alpha)$$

Démonstration. La formule n'est rien d'autre que la traduction de la formule du changement de variable dans les intégrales multiples.

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\varphi(x_1, \dots, x_n)) |\det(d\varphi(x_1, \dots, x_n))| dx_1 \dots dx_n = \int_{\mathbb{R}^n} f(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n$$

En effet si φ préserve l'orientation, le déterminant de $d\varphi$ est positif, et donc

$$\begin{aligned} \varphi^*(\alpha) &= f(\varphi(x_1, \dots, x_n)) \det(d\varphi(x_1, \dots, x_n)) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \\ &= (\varphi(x_1, \dots, x_n)) |\det(d\varphi(x_1, \dots, x_n))| dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \end{aligned}$$

$\square$

L'intégration sur une variété orientée peut alors se définir en utilisant le théorème d'existence des partitions de l'unité (théorème 3.11 du chapitre 3)

3. Notons que l'on n'intégrera que des fonctions C^∞ à support compact. La question de la mesurabilité ou de l'intégrabilité de f ne se pose donc pas.

Définition 4.15. Soit M une variété orientée de dimension k et ω une k -forme. On se donne une partition de l'unité ρ_j subordonnée à un recouvrement par des cartes φ_j , préservant l'orientation. On pose

$$\int_M \omega = \sum_{j=1}^q \int_{\varphi_j(U_j)} (\varphi_j^{-1})^*(\rho_j \omega)$$

Bien entendu il faut vérifier que cette définition ne dépend ni du choix des cartes ni de la partition de l'unité. Nous omettons ici cette vérification. Elle résulte immédiatement du fait que si ρ_j est une partition de l'unité subordonnée à U_j et σ_k subordonnée à V_k , alors $\rho_j \cdot \sigma_k$ est subordonnée à $U_j \cap V_k$.

Exemples 2.1. (A) Une forme de degré 1 sur le plan est donnée par $\alpha = f(x, y)dx + g(x, y)dy$. Son intégrale le long d'un chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, défini par $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ est l'intégrale sur $[0, 1]$ de

$$\gamma^* \alpha = [f(x(t), y(t))x'(t) + g(x(t), y(t))y'(t)]dt$$

2.3 Différentielle extérieure

On utilise désormais sur $\mathbb{R}^n$ la notation classique dx_j pour e_j^* . Ceci se justifie par le fait que la différentielle de la coordonnée x_j est la forme linéaire e_j^* . Une forme linéaire α sur $\mathbb{R}^n$ s'écrit donc sous la forme d'une combinaison linéaire de termes de la forme $f(x)dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$.

Définition 4.16 (Différentielle extérieure). Si $\alpha = f(x)dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ on pose

$$d\alpha = df(x) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = \sum_{j \neq i_1, \dots, i_k}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

Proposition 4.17. La définition ci-dessus définit de manière cohérente et unique l'opérateur d . Cet opérateur vérifie les propriétés suivantes

(A) d est une application linéaire de $\Omega^p(\mathbb{R}^n)$ dans $\Omega^{p+1}(\mathbb{R}^n)$

(B) $d \circ d = 0$

(C)

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg(\alpha)} \alpha \wedge d\beta$$

(D) Pour toute paire d'ouverts de $\mathbb{R}^n$, U, V et toute application C^∞ , $\varphi : U \rightarrow V$ on a $d(\varphi^*(\alpha)) = \varphi^*(d\alpha)$.

Démonstration. L'unicité est évidente, car prenant pour φ une permutation des coordonnées, on définit la différentielle de $f(x)dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ et par linéarité cela définit de manière unique la différentielle de toute forme. La propriété (A) est évidente. Les autres

propriétés sont linéaires et invariantes par permutation des coordonnées et il suffit de les vérifier sur les formes du type $f(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$. Pour (B)

$$d(f(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k) = \sum_{j=k+1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)dx_j \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$$

(car les autres termes sont nuls) Donc

$$\begin{aligned} d(d(f(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k)) &= d\left(\sum_{j=k+1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)dx_j \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k\right) = \\ &= \sum_{l=k+1}^n \sum_{j=k+1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_l}(x)dx_l \wedge dx_j \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k \end{aligned}$$

Dans cette somme les termes contenant $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_l}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_j}$, qui sont égaux d'après le lemme de Schwarz apparaissent avec des signes opposés. Leur somme est donc nulle.

Il suffit de vérifier le point (C) pour des formes du type $\alpha = f(x)dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$ et $\beta = g(x)dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_q}$. Or

$$\begin{aligned} d\alpha &= df(x) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \\ d\beta &= dg(x) \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &= d(fg)(x) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_q} = \\ &= (f(x)dg(x) + g(x)df(x)) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_q} = \\ &= df(x) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \wedge g(x)dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_q} + (-1)^p f(x)dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \wedge dg(x) \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_q} = \\ &= \alpha \wedge d\beta + (-1)^p d\alpha \wedge \beta \end{aligned}$$

Pour le point (D), il suffit de le vérifier pour les 0-formes (i.e. les fonctions) auquel cas

$$d(\varphi^*(f))(x)(\xi) = d(f \circ \varphi)(\xi) = df(\varphi(x))d\varphi(x)\xi = (\varphi)^*(df)(x)(\xi)$$

Dans le cas général, on utilise la propriété que toute forme ω sur $\mathbb{R}^n$ est somme de termes du type $\alpha \wedge d\beta$ avec α, β de degré strictement inférieur à celui de ω : par exemple $f(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k = f(x)dx_1 \wedge (d(x_2 dx_3 \wedge \dots \wedge dx_k))$.

Maintenant

$$\varphi^*d(\alpha \wedge d\beta) = \varphi^*d\alpha \wedge \varphi^*(d\beta) = d\varphi^*(\alpha) \wedge d\varphi^*(\beta)$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence. Ce dernier terme est égal à

$$d\varphi^*(\alpha) \wedge d\varphi^*(\beta) = d(\varphi^*(\alpha) \wedge \varphi^*(d\beta)) = d(\varphi^*(\alpha \wedge d\beta))$$

□

On étend d en une application linéaire de $\Omega^k(M)$ dans $\Omega^{k+1}(M)$ en utilisant une partition de l'unité subordonnée à des cartes. Si (U_j, φ_j) est un recouvrement par des cartes, et ρ_j une partition de l'unité subordonnée aux U_j , on pose

$$d\alpha = \sum_j d(\rho_j \alpha) = \sum_j (\varphi_j)^* d((\varphi_j^{-1})^*(\rho_j \alpha))$$

Proposition 4.18. *La définition ci-dessus définit de manière cohérente et unique l'opérateur d . Cet opérateur vérifie les propriétés suivantes*

(A) *d est une application linéaire de $\Omega^p(M)$ dans $\Omega^{p+1}(M)$*

(B) *$d \circ d = 0$*

(C)

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg(\alpha)} \alpha \wedge d\beta$$

(D) *Si M, N sont des variétés, pour toute application C^∞ , $\varphi : M \rightarrow N$ on a $d(\varphi^*(\alpha)) = \varphi^*(d\alpha)$.*

On aurait alternativement pu définir d comme l'unique opérateur linéaire qui correspond à la différentielle sur $\Omega^0(M)$ et vérifie $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg(\alpha)} \alpha \wedge d\beta$.

Remarque 2.2. On a vu que dans un espace de dimension 3 muni d'un produit scalaire, à tout champ de vecteurs X on peut associer la 1-forme $\alpha_X(v) = \langle X(x), v \rangle$ et la 2-forme $\Omega_X(v, w) = \det(X(x), v, w)$. Alors notant Ω la forme volume, on a

$$d\alpha_X = \Omega_{\nabla \wedge X}, d\Omega_X = (\nabla \cdot X)\Omega$$

où $\nabla \wedge, \nabla \cdot$ sont respectivement les opérateurs de rotationnel et de divergence. La propriété (D) de la proposition, fort simple pour les formes différentielles, devient compliquée pour les opérateurs définis sur les champs de vecteurs, car $d\varphi$ ne préserve en général pas le produit scalaire. C'est ce qui explique le comportement délicat du rotationnel et de la divergence par changement de coordonnées.

Exercice 2.1. Retrouver les formules sur $\operatorname{div} \operatorname{rot}(X)$, $\operatorname{rot} \operatorname{grad}(f)$, $\operatorname{grad}(fg)$, $\operatorname{div}(fv)$, $\operatorname{rot}(fw)$ où f, g sont des fonctions et v, w des champs de vecteurs en utilisant la propriété (C) de la proposition 4.17.

Les formes différentielles fournissent un moyen compact de réécrire les équations de Maxwell. Si $E = (E_x, E_y, E_z)$ sont les composantes du champ électrique, $B = (B_x, B_y, B_z)$ celles du champ magnétique, on associe au champ électromagnétique la 2-forme F , définie sur l'espace-temps en coordonnées (x, y, z, t)

$$F = \frac{1}{c}(E_x dx \wedge dt + E_y dy \wedge dt + E_z dz \wedge dt) + B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy$$

Les équations de Maxwell dans le vide entraînent que

$$dF = 0$$

puisque

$$\begin{aligned} dF = & \frac{1}{c} \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} - c \frac{\partial B_z}{\partial t} \right) dy \wedge dx \wedge dt + \frac{1}{c} \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} - c \frac{\partial B_x}{\partial t} \right) dz \wedge dy \wedge dt + \\ & \frac{1}{c} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} - c \frac{\partial B_y}{\partial t} \right) dx \wedge dz \wedge dt + \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

Ce qui se réécrit

$$-\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{1}{c} \nabla \wedge E ; \quad \nabla \cdot B = 0$$

les autres équations de Maxwell peuvent s'écrire sous la forme $d\star F = 0$ où $\star$ est l'opérateur qui échange d'une part $dx \wedge dy$ et $dz \wedge dt$, et d'autre part $dx \wedge dz$ et $dy \wedge dt$, etc. (opérateur qui dépend du choix du produit scalaire).

Enfin, si on note A le potentiel vecteur du champ magnétiques, V le potentiel scalaire du champ électrique, et $\Phi = A_x dx + A_y dy + A_z dz + \frac{1}{c} V dt$ on a $d\Phi = F$.

Nous pouvons maintenant démontrer

Théorème 4.19 (Formule de Stokes). *Soit ω une forme différentielle de degré $n - 1$ définie sur la variété orientée M de dimension n . Alors*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

Démonstration. Tout d'abord le théorème est linéaire : si $\omega = \sum_{j=1}^r \omega_j$ il suffit de démontrer le théorème pour chaque ω_j . On peut donc, par partition de l'unité et changement de variable, se ramener au cas où ω est à support compact soit dans $\mathbb{R}^n$ soit dans $\mathbb{H}^n$. On peut toujours ramener le premier cas au second par translation. Nous allons donc nous limiter au second cas.

La forme ω est soit du type $f(x_1, \dots, x_n) dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$ soit du type

$$f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \dots \wedge dx_n$$

Dans le premier cas,

$$d\omega = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$$

et

$$\int_{\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}} \omega = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) dx_1 \dots dx_n =$$

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^0 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) dx_1 \right) dx_2 \dots dx_{n-1} dx_n = \int_{\mathbb{H}^n} d\omega$$

Dans le second cas,

$$d\omega = (-1)^j \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1} \wedge dx_n$$

$$\int_{\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}} \omega = 0$$

$$\int_{\mathbb{H}^n} d\omega = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) dx_1 \right) dx_2 \dots dx_n =$$

$$\int_{\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{n-2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n) dx_j \right) dx_1 \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_n$$

Comme f est à support compact, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n) dx_j$ s'annule, et l'intégrale ci-dessus est nulle.

On a donc vérifié la formule de Stokes dans les deux cas, ce qui termine la démonstration. $\square$

Remarque 2.3. La régularité demandée à ω ou M est souvent trop importante pour les applications. Il suffit par exemple que M soit réunion finie de variétés à bord.

Exercice 2.2. Montrer que si K est l'intérieur du cube de dimension n (i.e. $K = [0, 1]^n$ et ∂K son bord (i.e. $\partial K = \bigcup_{j=1}^n I^{j-1} \times \{0, 1\} \times [0, 1]^{n-j-1}$), la formule de Stokes est encore vérifiée sur K , i.e.

$$\int_{\partial K} \omega = \int_K d\omega$$

3 Applications de la formule de Stokes

Lorsque $n = 2$ la formule de Stokes est connue sous le nom de formule de Green-Riemann. Elle a pour conséquence directe la formule de Cauchy en variable complexe. On trouvera dans les ouvrages de physique ou de mécanique de nombreuses applications de la formule de Stokes, en particulier à des calculs d'intégrale, de flux, etc. Nous en rappelons ici une version physique et donnons ensuite un certain nombre d'applications moins immédiates, et plus sophistiquées d'un point de vue mathématique.

3.1 Formules intégrales

Soit S une surface bordant un domaine V , c'est-à-dire que V est une sous-variété à bord de dimension 3 de $\mathbb{R}^3$ et $S = \partial V$. Soit $\nu(x)$ la normale à la surface, et A un champ de vecteurs défini au voisinage de V . On considère la forme volume canonique Ω sur $\mathbb{R}^3$ et on pose $\eta(x)(u, v) = \Omega(x)(\nu(x), u, v)$. On pose $\vec{A} \cdot d\vec{S} = \langle A, \nu \rangle \eta$ (où $d\vec{S} = \nu \det(\nu(x), u, v)$ est une deux forme à valeurs vectorielles).

Théorème 4.20 (Formule d'Ostrogradsky).

$$\int \int_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int \int \int_V (\nabla \cdot A) dv$$

Démonstration. On vérifie que pour u, v dans S , $\langle A, \nu \rangle \eta(u, v) = \Omega_A(u, v) = \det(A, u, v)$. Or les deux termes ne dépendent que de la projection de A sur $\mathbb{R}\nu$, et coïncident pour $A = \nu$.

La formule de Stokes affirme que

$$\int_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_S \Omega_A = \int_V d\Omega_A = \int_V \operatorname{div}(\vec{A}) \Omega$$

□

De manière analogue, si S est une surface de bord $\partial S = \Gamma$, on a

Théorème 4.21 (Formule du gradient).

$$\int_{\Gamma} \vec{V} \cdot d\vec{l} = \int \int_S (\nabla \wedge \vec{V}) \cdot d\vec{S}$$

Démonstration. En effet, si

$$\int_{\Gamma} \vec{V} \cdot d\vec{l} = \int_{\Gamma} \alpha_V = \int_{\partial S} \alpha_V = \int_S d\alpha_V = \int_S \Omega_{\nabla \wedge \vec{V}} = \int \int_S (\nabla \wedge \vec{V}) \cdot d\vec{S}$$

□

3.2 Application topologique : le théorème du point fixe de Brouwer

Soit

$$\alpha_n = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} x_j dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \dots \wedge dx_n$$

On a alors $d\alpha_n = n dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$. On en déduit que

$$\int_{S^{n-1}} \alpha_n = \int_{\partial B^n} \alpha_n = \int_{B^n} d\alpha_n = n \int_{B^n} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = n \operatorname{vol}(B^n)$$

Théorème 4.22 (Brouwer). *Soit f une application continue de B^n dans elle-même. Alors f possède au moins un point fixe.*

Démonstration. On raisonne par l'absurde et on traite le cas où f est C^∞ , laissant l'extension au cas continu en exercice (cf. exercice (D)). Construisons d'abord à l'aide de f une application C^∞ de B^n dans S^{n-1} qui vaille l'identité sur S^{n-1} .

La demi-droite $\{x + t(f(x) - x) \mid t \leq 0\}$ rencontre S^{n-1} en un point unique donné par l'unique solution négative ou nulle $t(x)$ de

$$|x|^2 + 2t\langle x, f(x) - x \rangle + t^2|f(x) - x|^2 = 1$$

Notons que c'est bien un trinôme qui a deux solutions réelles soit toutes les deux nulles, soit de signe opposés. En effet le coefficient de t^2 ne s'annule jamais par hypothèse et le discriminant ne s'annule que si

$$|\langle x, f(x) - x \rangle|^2 - |f(x) - x|^2(|x|^2 - 1) = 0$$

ce qui n'est possible que si $|x| = 1$ et x est orthogonal à $f(x) - x$, mais alors un dessin montre immédiatement que $f(x) = x$. Notons aussi que si $|x| = 1$, on a $t(x) = 0$. De plus $t(x)$ est fonction C^∞ de x (la formule donnant les racines du trinôme est C^∞ en les coefficients pourvu que le discriminant ne s'annule pas). Soit alors $r(x) = x + t(x)(f(x) - x)$. On a

$$n \operatorname{vol}(B^n) = \int_{S^{n-1}} \alpha_n = \int_{S^{n-1}} r^* \alpha_n$$

car $r = Id$ sur S^{n-1} . La formule de Stokes donne alors

$$\int_{\partial B^n} r^* \alpha_n = \int_{B^n} r^* d\alpha_n = 0$$

car $d\alpha_n$ est une n -forme volume, mais les vecteurs $dr(x)(e_j)_{j=1..n}$ sont toujours linéairement dépendants, vu qu'ils sont tangents à S^{n-1} qui est de dimension $n - 1 < n$.

Comme $\operatorname{vol}(B^n) \neq 0$ nous arrivons à une contradiction. □

Remarque 3.1. La forme α_n peut aussi s'écrire

$$\alpha_n(x)(u_1, \dots, u_{n-1}) = \det(x, u_1, \dots, u_{n-1})$$

où les u_j sont dans $T_x S^{n-1}$

$$(x, u) \in TS^{n-1} = \{(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid |x| = 1, \langle x, u \rangle = 0\}$$

La même démonstration montre que si M est une variété à bord orientable

Proposition 4.23. *Il n'existe pas d'application continue de M dans ∂M dont la restriction au bord soit l'identité.*

Démonstration. Soit V une variété orientable fermée, alors il existe une forme ω d'intégrale 1 sur V . En effet, si φ est une carte en un point, et $\sigma = \rho(x_1, \dots, x_n)$ une fonction à support dans un voisinage de zéro et d'intégrale 1, alors $\omega = (\varphi^{-1})^*\sigma$ est d'intégrale 1.

Soit ω une telle $n-1$ -forme sur ∂M , et $r : M \rightarrow \partial M$ l'application en question. Nous avons

$$1 = \int_{\partial M} \omega = \int_{\partial M} r^* \omega = \int_M dr^* \omega = \int_M r^*(d\omega)$$

Mais $d\omega$ est une n -forme sur ∂M qui est de dimension $n-1$. Elle est donc nulle et il en est de même pour $r^*(d\omega)$. Comme $\text{vol}(\partial M)$ est non nul, nous obtenons une contradiction.

□

4 Exercices

(A) On considère un espace euclidien de dimension n dont on note $(,)$ le produit scalaire, et $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée. On identifie $\Lambda^n(E^*)$ à $\mathbb{R}$ par l'isomorphisme qui envoie $e_1^* \wedge e_2^* \wedge \dots \wedge e_n^*$ sur 1.

(a) Il existe un unique produit scalaire sur $\Lambda^p(E^*)$ pour lequel la base $e_i^* \wedge \dots \wedge e_{i_p}^*$ est orthonormée.

(b) Montrer qu'il existe un unique opérateur $\star : \Lambda^{n-p}(E^*) \rightarrow \Lambda^p(E^*)$ tel que

$$(\alpha, \star \beta) = \alpha \wedge \beta$$

quels que soient $\alpha \in \Lambda^p(E^*), \beta \in \Lambda^{n-p}(E^*)$

(c) Montrer que $\star^2 = (-1)^{p(n-p)}$

(d) Montrer que si F est le tenseur électromagnétique de l'exercice 2.1, on a $d(\star F) = 0$

(B) Montrer en utilisant une partition de l'unité que M^k est orientable si et seulement si il existe une k -forme ω sur M^k ne s'annulant jamais. On pourra construire la forme localement en utilisant une partition de l'unité. Montrer que dans ce cas $\int_M \omega > 0$ et donc que ω n'est pas exacte.

(C) Montrer en appliquant la formule de Stokes les formules suivantes (dont on précisera les hypothèses)

Théorème du rotationnel :

$$\int \int \int_V \text{rot}(X) dv = \int \int_S \vec{X} \wedge d\vec{S}$$

Théorème du gradient :

$$\int \int \int_V \text{grad}(f) dv = \int \int_S f d\vec{S}$$

(D) Soit f une application continue de B^n dans elle-même supposée sans point fixe.

- (a) Montrer que quel que soit ε strictement positif, on peut trouver g telle que g soit C^∞ et que $|g - f|_{C^0} \leq \varepsilon$. Montrer que pour ε assez petit, l'application

$$h_\varepsilon(x) = \frac{1}{(1 + 2\varepsilon)} \frac{g(x)}{\rho(|g(x)|)}$$

est C^∞ et envoie B^n dans lui-même, où $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est telle que

- i. $\rho(t) = t$ pour $1 - \varepsilon \leq t \leq 1 + \varepsilon$
- ii. $\rho(t) \geq 1 - 2\varepsilon$ pour tout $t \in \mathbb{R}$

- (b) Montrer que toute application continue de B^n dans elle-même possède au moins un point fixe.

(E) Soit l'équation différentielle définie pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$\ddot{x}(t) + f(x(t), \dot{x}(t))\dot{x}(t) + x(t) = e(t)$$

où

- e est C^∞ périodique de période T et il existe un réel E tel que $|e(t)| \leq E - 1$,
- $f(x, v)$ est C^∞ , constante et égale à $f > 0$ pour $|x|^2 + |y|^2$ suffisamment grand.

- (a) Ramener l'équation à un système du premier ordre dans le plan. Que dire du temps de vie des solutions ?
- (b) Montrer que pour R assez grand et $|u| \leq 1$, toute solution partant d'un point d'un cercle $C(u_0, R)$ centré en $(u, 0)$ de rayon R , tel que $|y| > E/f$ rentre dans le disque $D(u, R)$ bordé par $C(u, R)$.
- (c) Pour R assez grand, montrer que la solution de condition initiale $(R, E/f)$ traverse la droite $y = -E/f$ pour $t > 0$. On note t_0 le premier instant où cette droite est atteinte, et $\Gamma_0(R)$ la courbe $\varphi^t(R, E/f)$ pour t dans $[0, t_0]$.
On admettra de même qu'il existe un arc de trajectoire $\Gamma_1(R)$ arrivant en $(-R, -E/f)$ partie de $y = E/f$
- (d) Montrer que si $(R, E/f), (x_+(R), E/f)$ sont les extrémités de Γ_0 on a $|x_+(R) - R| \leq O(1/R)$. On admettra de manière analogue que $|x_-(R) + R| \leq O(1/R)$.

Pour les questions suivantes, on pourra admettre la version suivante du théorème de Schönflies : toute courbe fermée du plan (sans point doubles) sépare le plan en deux ouverts dont la composante bornée est un ouvert difféomorphe au disque.

- (e) En utilisant des arcs de cercles et les courbes définies aux questions précédentes, construire une courbe fermée telle que tout point intérieur à cette courbe reste à l'intérieur de la courbe.
- (f) En déduire l'existence d'au moins une solution périodique de période T .

Chapitre 5

Introduction à la Topologie et à la Géométrie différentielle, Calcul de Lie.

1 Lemme de Poincaré, théorie du degré

1.1 Lemme de Poincaré

Il s'agit de l'énoncé suivant, qui joue un rôle crucial pour lier topologie et formes différentielles. On rappelle que le support d'une forme différentielle est la fermeture de l'ensemble $\{x \in M \mid \omega(x) \neq 0\}$.

Proposition 5.1 (Lemme de Poincaré). *Soit ω une forme de degré n sur $\mathbb{R}^n$. Alors ω est exacte. Si de plus ω est à support dans $]0, 1[^n$, alors ω est la différentielle d'une forme à support dans $]0, 1[^n$ si et seulement si $\int_{\mathbb{R}^n} \omega = 0$.*

Démonstration. Commençons par le cas sans support : si $\omega = f(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ on pose $g(x_1, \dots, x_n) = \int_0^{x_1} f(t, x_2, \dots, x_n)dt$ d'où $\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$. On en déduit que $\omega = d(g(x_1, \dots, x_n)dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n)$.

Passons maintenant au cas à support dans $]0, 1[^n$. La nécessité de la condition est évidente d'après la formule de Stokes : si B est une boule contenant $]0, 1[^n$, et $\omega = d\varphi$ avec φ à support dans $]0, 1[^n$, on aura

$$\int_B \omega = \int_B d\varphi = \int_{\partial B} \varphi = 0$$

Supposons maintenant que ω est d'intégrale nulle, et démontrons le résultat par récurrence sur n . Pour $n = 1$ le résultat est évident : $\omega = f(x)dx$ avec f à support dans $]0, 1[$ et d'intégrale nulle, et $h(x) = \int_0^x f(t)dt$ est à support dans $]0, 1[$ et répond à la question.

Dans le cas général, $\omega = f(x_1, \dots, x_n)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ avec f à support dans $]0, 1[^n$ et d'intégrale nulle. On cherche

$$\begin{aligned} \varphi &= f_1(x_1, \dots, x_n)dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n + f_2(x_1, \dots, x_n)dx_1 \wedge dx_3 \wedge \dots \wedge dx_n + \dots \\ &+ f_j(x_1, x_2, \dots, x_n)dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \dots \wedge dx_n + f_n(x_1, \dots, x_n)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1} \end{aligned}$$

où les f_j sont à support dans $]0, 1[^n$. Notons que $d\varphi = \omega$ se traduit par

$$f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_j}$$

Soit $g(x_1, \dots, x_{n-1}) = \int_0^1 f(x_1, \dots, x_{n-1}, t)dt$. on vérifie que g est à support dans $]0, 1[^{n-1}$, et d'intégrale nulle. on en déduit par hypothèse de récurrence que $g = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial g_j}{\partial x_j}$ où les g_j sont à support dans $]0, 1[^{n-1}$. Soit $\rho \in C^\infty(\mathbb{R})$ une fonction à support dans $]0, 1[$ et d'intégrale un. Posons $f_j(x_1, \dots, x_n) = g_j(x_1, \dots, x_{n-1})\rho(x_n)$ et

$$h(x_1, \dots, x_n) = f - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} = f - \rho(x_n) \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial g_j}{\partial x_j} = f - \rho(x_n)g$$

Enfin on pose

$$f_n(x_1, \dots, x_n) = \int_0^{x_n} h(x_1, \dots, x_{n-1}, t)dt$$

Comme h est à support dans $]0, 1[^n$, et

$$\int_0^1 h(x_1, \dots, x_{n-1}, t)dt = \int_0^1 f(x_1, \dots, x_{n-1}, t)dt - \left(\int_0^1 \rho(t)dt \right) \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial g_j}{\partial x_j} = g - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial g_j}{\partial x_j} = 0$$

f_n est à support dans $]0, 1[^n$ et

on a

$$f = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} + h = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

avec les f_j à support dans $]0, 1[^n$. □

Remarque 1.1. Le résultat est encore vrai pour des formes de degré quelconque, et aussi pour des formes à support non-compact (il n'y a plus de condition d'intégrale nulle). Pour le cas général à support non-compact, on réfère à la section 2 de ce chapitre, proposition 6.12

Nous pouvons alors démontrer

Proposition 5.2. *Soit M une variété connexe, de dimension n , sans bord et orientée. Alors une forme ω à support compacte de degré n est la différentielle d'une forme à support compact si et seulement si*

$$\int_M \omega = 0$$

Démonstration. La nécessité résulte de la formule de Stokes (théorème 4.19, chapitre 4) appliquée à un compact contenant le support (on admet qu'il existe des ouverts à bord contenant tout compact!).

Par compacité du support de ω , celui-ci se recouvre par un nombre fini de domaines difféomorphes à $]0, 1[^n$. La suffisance se démontre par récurrence sur le nombre de domaines difféomorphes à $]0, 1[^n$ nécessaires pour recouvrir le support de ω .

Si le support de ω se recouvre par un seul tel domaine et si φ est le difféomorphisme entre U et $]0, 1[^n$, on se ramène au lemme de Poincaré en considérant $\varphi^*\omega$.

Soient $U_1 \cup \dots \cup U_q$ un recouvrement du support de ω par des ouverts difféomorphes à $]0, 1[^n$. Un argument de compacité donne l'existence d'un tel recouvrement fini, et on suppose la proposition démontrée pour $q - 1$. Une partition de l'unité permet de décomposer ω en somme de formes ω_j à support dans U_j . Alors il existe $k \neq q$ tel que $U_q \cap U_k \neq \emptyset$ sinon M ne serait pas connexe. Quitte à permuter les indices on peut supposer $k = q - 1$. On prend alors σ à support dans $U_q \cap U_{q-1}$ d'intégrale égale à $\int_{U_q} \omega_q$ et on écrit

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 + \dots + (\omega_{q-1} + \sigma) + (\omega_q - \sigma)$$

Puisque $\omega_q - \sigma$ est d'intégrale nulle et à support dans U_q elle s'écrit $d\mu_q$ d'après le lemme de Poincaré. Maintenant

$$\omega - d\mu_q = \omega_1 + \omega_2 + \dots + (\omega_{q-1} + \sigma)$$

a même intégrale que ω et son support est contenu dans $U_1 \cup \dots \cup U_{q-1}$. Par hypothèse de récurrence, c'est une forme exacte. Donc ω est exacte. $\square$

Corollaire 5.3. *Soit M une variété compacte, orientée. Une forme de degré n sur M est exacte si et seulement si $\int_M \omega = 0$.*

1.2 Théorie du degré, applications

Soient M, N deux variétés compactes de dimension n orientées, N étant connexe et f une application de M dans N . Alors si ω est une forme de degré n sur N d'intégrale 1, on associe à toute application f de M dans N le nombre

$$\deg(f) = \int_M f^*\omega$$

Proposition 5.4. *Le nombre $\deg(f)$ ne dépend pas du choix de ω . Si f_t est une famille continue d'applications différentiables, $\deg(f_0) = \deg(f_1)$*

Démonstration. D'après la proposition 5.2, deux formes ω_1, ω_2 de degré n ayant même intégrale diffèrent par une forme exacte. Si $\omega_1 - \omega_2 = d\alpha$, on aura

$$\int_M f^*\omega_1 - \int_M f^*\omega_2 = \int_M d\alpha = \int_{\partial M} \alpha = 0$$

On va démontrer le deuxième énoncé avec l'hypothèse supplémentaire que $F(t, x) = f_t(x)$ est C^∞ , le cas général s'y ramène par approximation. Puisque $\partial([0, 1] \times M) = \{0\} \times M - \{1\} \times M$ (où le signe $-$ signifie que l'on prend l'orientation opposée à celle de M), on aura d'après la formule de Stokes (théorème 4.19, chapitre 4)

$$\int_M f_1^* \omega - \int_M f_0^* \omega = \int_{\partial([0, 1] \times M)} F^* \omega = \int_{[0, 1] \times M} d(F^* \omega) = \int_{[0, 1] \times M} F^*(d\omega) = 0$$

puisque la forme ω est fermée. Le cas où $t \rightarrow f_t(x)$ est seulement continue est laissé en exercice. $\square$

Soit x un réel non nul, on définit $\text{signe}(x)$ comme égal à ± 1 et de même signe que x .

Proposition 5.5. *Soit $f : M \rightarrow N$ une application C^∞ entre deux variétés orientées. Le nombre $\deg(f)$ se calcule comme suit. Soit $y \in N$ tel que pour tout $x \in f^{-1}(y)$ on ait $\det(df(x)) \neq 0$. Alors*

$$\deg(f) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{signe}(\det(df(x)))$$

En particulier ce nombre ne dépend pas du choix de y .

Démonstration. Notons d'abord que si $\det(df(x))$ dépend du choix d'une base de $T_x M$ et $T_y N$, son signe n'en dépend pas pourvu que ces bases soient choisies positivement orientées (ce qui est ici sous-entendu). Soit U un voisinage de y identifié par une carte respectant l'orientation, φ , à un voisinage V de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et considérons une forme $\rho = \rho(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ concentrée en 0 d'intégrale 1. Soit $\alpha_y = \varphi^*(\rho)$ l'image de cette forme par une carte. Alors $f^* \alpha_y$ est à support dans $f^{-1}(U)$. Par le théorème d'inversion locale $f^{-1}(U)$ sera une réunion disjointe d'ouverts difféomorphes à U , notés U_j . On trouvera un U_j pour chaque élément $x_j \in f^{-1}(y)$ correspond un U_j . Sur chacun de ces ouverts U_j , $\varphi \circ f$ est un difféomorphisme et donc

$$\int_U f^* \omega = \sum_j \int_{U_j} f^* \omega = \sum_j \int_{f(U_j)} \omega = \sum_j \left(\int_V \omega \right) \text{signe}(\det df(x)) = \sum_j \text{signe}(\det df(x))$$

$\square$

Le théorème de Sard, affirme que l'ensemble des points y vérifiant les hypothèses du lemme forment un ouvert dense (attention, on peut avoir $\det(df(x)) = 0$ pour tout x , dans ce cas le lemme de Sard affirme que le complémentaire de l'image de f est un ouvert dense).

Exemple 1.1. Examinons le cas $n = 1$. Soit $c : S^1 \rightarrow S^1 \subset \mathbb{R}^2$ une application C^∞ . On considère le nombre

$$\frac{1}{2\pi} \int_{S^1} \det(c(t), \dot{c}(t)) dt$$

Ce nombre est égal à $\deg(c)$, car la forme différentielle sur S^1 donnée par

$$\alpha_1(x)h = \frac{1}{2\pi} \det(x, h)$$

est une 1-forme sur S^1 dont l'intégrale vaut 1, et

$$\int_{S^1} c^* \alpha_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} \det(c(t), \dot{c}(t)) dt$$

Les propositions 5.4 et 5.5 permettent de conclure.

Théorème 5.6 (Théorème de la sphère chevelue). *Tout champ de vecteurs tangent à la sphère S^{2n} possède au moins un zéro.*

Démonstration. Supposons que v soit un champ de vecteurs C^∞ sans zéro. Alors en suivant à partir de x un grand cercle donné par $v(x)$ (i.e. contenu dans le plan engendré par x et $v(x)$), dans la direction de $v(x)$, on obtient une famille C^∞ d'applications joignant l'identité à l'application antipodale $\varphi : x \rightarrow -x$. On en déduit que $\deg(\text{Id}) = \deg(\varphi)$. Or $\deg(\text{Id}) = 1$ et si α_{2n} est la forme citée plus haut on a $\varphi^* \alpha = -\alpha$ donc

$$\deg(\varphi) = \int_{S^{2n}} \varphi^* \alpha_{2n} = - \int_{S^{2n}} \alpha_{2n} = -\deg(\text{Id}) = -1$$

et nous obtenons une contradiction. L'argument d'approximation habituel permet de traiter le cas C^0 . $\square$

Remarques 1.1. (A) Soit p l'application de $\mathbb{R}$ dans S^1 donnée par $p(x) = (\cos(x), \sin(x))$. Alors $p^*(\alpha) = dx$ puisque

$$\alpha_1(p(x))dp(x) = \det((\cos(x), \sin(x)), (-\sin(x), \cos(x)))dx = dx$$

On en déduit que si $c(t) = p(\gamma(t))$ où $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est 2π périodique, on a

$$\int_{S^1} c^* \alpha_1 = \int_0^{2\pi} (p \circ \gamma)^*(\alpha_1) = \int_0^{2\pi} \gamma^*(p^* \alpha_1) = \int_0^{2\pi} \gamma^*(dx) = \gamma(2\pi) - \gamma(0)$$

L'existence de γ est donnée par le théorème de relèvement de l'exercice (E) du chapitre ???. Dans notre cas la définition du degré coïncide avec celle donnée en l'exercice (F) du chapitre ??.

(B) Lorsque X est une application de M dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ on définit l'indice de X par rapport à 0 et on note $\text{ind}(X, 0)$ le nombre $\deg(\frac{X}{|X|})$. Notons $N : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow S^{n-1}$ l'application donnée par $N(x) = \frac{x}{|x|}$, et $\beta_n = \frac{1}{n \text{vol}(B^n)} N^* \alpha_n$. Alors l'indice de l'application X est donné par

$$\text{ind}(X, 0) = \int_M X^* \beta_n$$

1.3 Indice d'un champ de vecteurs en un zéro isolé

Soit X un champ de vecteurs tangent à une sous-variété M .

On suppose les zéros de X isolés. Soit z un tel zéro. On considère une carte φ en z et le champ de vecteurs $Y = \varphi_*(X)$ défini au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et ayant un zéro isolé à l'origine. Soit alors $S(\varepsilon)$ une sphère de rayon ε centrée en 0. On suppose ε assez petit pour que $\varphi_*(X)$ n'ait pas de zéro dans la boule de rayon ε et on considère l'application $Y : S(\varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, et on note son degré $\deg(\varphi_*(X), \varepsilon)$ (avec l'abus de langage de la dernière remarque).

Proposition 5.7. *Pour ε assez petit, le nombre $\deg(\varphi_*(X), \varepsilon)$ ne dépend ni de φ ni de ε . On le note $\text{ind}(X, z)$.*

Démonstration. Tout d'abord l'indépendance de ε (à φ fixé) est claire car on doit comparer $\int_{S(\varepsilon)} Y^* \beta_n$ et $\int_{S(\varepsilon')} Y^* \beta_n$ mais la différence est donnée par

$$\int_{\partial(B(\varepsilon) \setminus B(\varepsilon'))} Y^* \beta_n = \int_{B(\varepsilon) \setminus B(\varepsilon')} dY^* \beta_n = 0$$

. Mais en utilisant le (D) de la proposition 4.17, $dY^* \beta_n = Y^* d\beta_n = 0$.

Maintenant si U est un domaine de bord ∂U contenant 0, le même argument montre que pour ε assez petit (il faut que $B(\varepsilon) \subset U$)

$$\int_{\partial U} Y^* \beta_n = \int_{S(\varepsilon)} Y^* \beta_n$$

Maintenant si φ, ψ sont deux cartes, on doit comparer $\int_{S(\varepsilon)} Y_\varphi^* \beta_n$ et $\int_{S(\varepsilon)} Y_\psi^* \beta_n$. Mais $Y_\psi = (\psi \circ \varphi^{-1})_* Y_\varphi$ et on donc

$$\int_{S(\varepsilon)} Y_\psi^* \beta_n = \int_{S(\varepsilon)} (\psi \circ \varphi^{-1})_* Y_\varphi^* \beta_n = \int_{(\psi \circ \varphi^{-1})S(\varepsilon)} Y_\varphi^* \beta_n = \int_{S(\varepsilon)} Y_\varphi^* \beta_n$$

la dernière égalité résulte de ce que $(\psi \circ \varphi^{-1})S(\varepsilon)$ est le bord de $(\psi \circ \varphi^{-1})B(\varepsilon)$ qui contient l'origine. $\square$

2 Théorèmes de Gauss-Bonnet et Poincaré-Hopf

Soit M une surface compacte orientée sans bord de $\mathbb{R}^3$ et considérons en chaque point $\nu(x)$ la normale unitaire¹. L'application ν envoie M sur la sphère S^2 . Nous allons compter

1. le choix de la normale est déterminé par l'orientation : si (u, v) est une base positivement orientée de $T_x M$, on choisit $\nu(x)$ tel que $\det(\nu(x), u, v) > 0$.

de deux manières différentes le degré de cette application. On note α_2 la forme volume sur S^2 définie plus haut. Notons que $\int_{S^2} \alpha_2 = 4\pi$. On note σ_M la deux forme définie sur M par $\sigma_M(x)(u, v) = \det(\nu(x), u, v)$ où $\det$ est le déterminant dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Définition 5.8. On appelle courbure de Gauss de la surface M , la fonction K définie sur M par

$$\nu^* \alpha_2 = K(x) \sigma_M$$

Remarque 2.1. Le lecteur qui a vu d'autres définitions de la courbure pourra montrer qu'elles sont équivalentes à celle donnée ci-dessus. On dit qu'un point d'une surface est elliptique si $K(x)$ est strictement positif, hyperbolique si $K(x)$ est négatif et parabolique si $K(x) = 0$. La trichotomie elliptique/hyperbolique/parabolique est omniprésente en mathématiques, de la géométrie à l'algèbre en passant par les équations aux dérivées partielles. Nous n'avons malheureusement pas la place de développer cette notion ici, mais les réponses données par un moteur de recherche appliqué à « elliptique, hyperbolique, parabolique » vous en donneront une idée.

L'application $\nu : M \rightarrow S^2$ donnée par $x \rightarrow \nu(x)$ induit une application $F_\nu : TM \rightarrow TS^2$ donnée par

$$\begin{aligned} F_\nu : TM &\rightarrow TS^2 \\ (x, h) &\rightarrow (\nu(x), h) \end{aligned}$$

Si on note p_M, p_2 les projections de TM sur M et de TS^2 sur S^2 respectivement², on a

$$p_2 \circ F_\nu = \nu \circ p_M$$

Soit alors T_2 la 1-forme définie sur le tangent unitaire à la sphère de dimension 2

$$U_2 = \{(x, h) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1, |h| = 1, \langle x, h \rangle = 0\} \subset TS^2$$

par la formule

$$T_2(x, h)(u, v) = \det(x, h, v)$$

On vérifie sans peine que U_2 est une sous-variété de dimension 3 de $\mathbb{R}^6$ (car donné par trois équations aux différentielles indépendantes) et que

$$T_{(x,h)} U_2 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid \langle x, u \rangle = 0, \langle h, v \rangle = 0, \langle x, v \rangle + \langle h, u \rangle = 0\}$$

qui possède une base donnée par

$$(x \wedge h, x \wedge h), (h, -x), (0, x \wedge h)$$

2. i.e. $p_M(x, h) = x$.

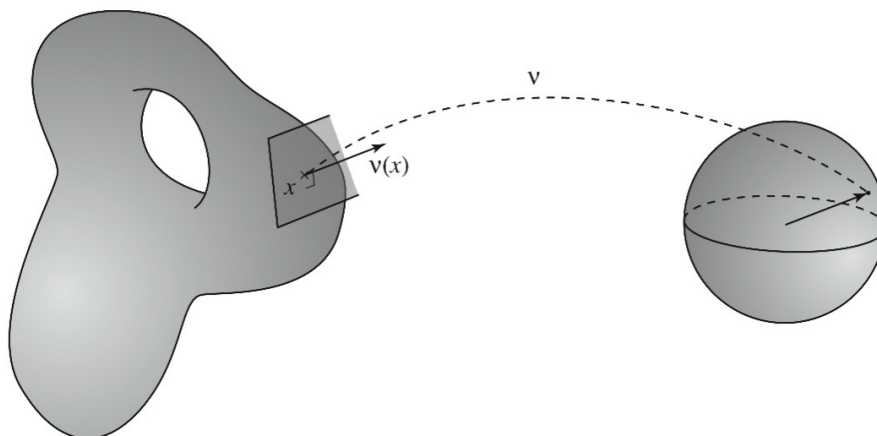
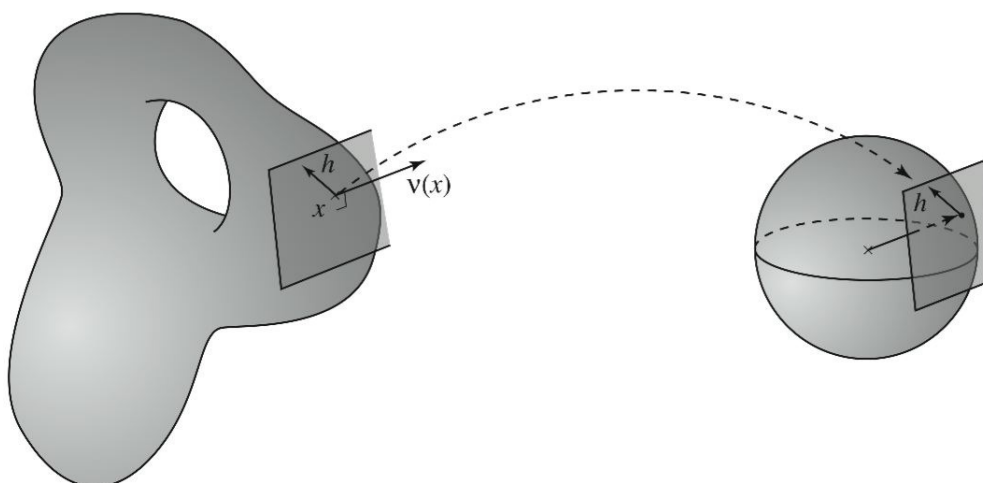


FIGURE 5.1 – L'application de Gauss

FIGURE 5.2 – L'application F_ν envoyant (x, h) sur $(\nu(x), h)$

(où $\wedge$ représente ici le produit vectoriel). Le lemme suivant nous dit que si α_2 n'est pas exacte d'après la formule de Stokes (son intégrale vaut 4π), son relevé à U_2 , $p_2^*\alpha_2$ est exacte.

Lemme 5.9.

$$-dT_2 = p_2^*\alpha_2$$

Démonstration. Il s'agit d'un calcul élémentaire. Par définition dT_2 est l'antisymétrisée de DT_2 . Donc

$$dT_2(x, h)(u_1, v_1)(u_2, v_2) = \det(u_1, h, v_2) - \det(u_2, h, v_1) + \det(x, v_1, v_2)$$

où $(u_1, v_1), (u_2, v_2)$ sont dans $T_{(x, h)}U_0$.

On prétend que sur U_0 cette somme coïncide avec $-\det(x, u_1, u_2)$. Il suffit de vérifier l'égalité sur les éléments d'une base. Or si $u_1 = x \wedge h, v_1 = x \wedge h$ et $u_2 = 0, v_2 = x \wedge h$, tous les termes sont nuls, et il en est de même si $u_1 = h, v_1 = -x$ et $u_2 = 0, v_2 = -x$. Enfin, si $u_1 = x \wedge h, v_1 = x \wedge h$ et $u_2 = h, v_2 = -x$, seul le premier terme est non nul et vaut $\det(x \wedge h, h, -x) = -\det(x, x \wedge h, h) = -\det(x, u_1, u_2)$.

□

Soit alors X un champ de vecteurs sur M , et ρ une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\rho(t) = t$ pour $t \geq \delta$. On pose $Y(x) = \frac{X(x)}{\rho(|X(x)|)}$. Alors Y est de norme 1 hors d'un voisinage Ω_ε de l'ensemble des zéros de X (qui coïncident avec ceux de Y).

On choisit dans la suite pour Ω_ε une réunion de petits disques autour des zéros de X , supposés isolés³. Hors de ce voisinage, l'application Y envoie M dans U_M et vérifie $p_M \circ Y = \text{Id}$.

On a d'après le lemme précédent et la propriété $p_2 \circ F_\nu = \nu \circ p_M$ l'égalité

$$p_M^*(K\sigma_M) = p_M^*\nu^*\alpha_2 = F_\nu^*p_2^*\alpha_2 = F_\nu^*(dT_2) = d(F_\nu^*(T_2))$$

Donc on a en utilisant $p_M \circ Y = \text{Id}_M$

$$\int_{M \setminus \Omega_\varepsilon} K(x)\sigma = \int_{M \setminus \Omega_\varepsilon} Y^*p_M^*\nu^*\alpha_2 = \int_{M \setminus \Omega_\varepsilon} Y^*F_\nu^*p_2^*\alpha_2 = \int_{M \setminus \Omega_\varepsilon} Y^*F_\nu^*dT_2 = \int_{M \setminus \Omega_\varepsilon} d(Y^*F_\nu^*T_2)$$

d'après le Lemme 5.9

On peut alors appliquer la formule de Stokes, ce qui nous donne

3. Par « petit disque » on entend l'image d'un petit disque par une carte. Les disques sont supposés assez petits pour ne pas s'intersecter.

$$- \int_{\partial\Omega_\varepsilon} Y^* F_\nu^* T_2$$

Maintenant, $F_\nu^* T_2(u, v) = \det(\nu(x), h, v)$ et donc

$$Y^* F_\nu^* T_2(\xi) = \det(\nu(x), Y(x), dY(x)\xi)$$

Or, si $p_{x,z}$ est la projection de l'orthogonal de $\nu(z)$ à celui de $\nu(x)$ on a

$$|p_{x,z}(w) - w|_{C^1} \leq \varepsilon |w|$$

si $|x - z|$ est assez petit. On en déduit que si $V(x) = \frac{p_{x,z}Y(x)}{|p_{x,z}Y(x)|}$

$$|V - Y|_{C^1} \leq \varepsilon$$

et donc

$$\det(\nu(x), Y(x), dY(x)\xi) - \det(\nu(z), V(x), dV(x)\xi)$$

tend vers 0 avec $|x - z|$.

On doit donc calculer pour chacun des lacets $c(t)$ constituant le bord de Ω_ε la quantité

$$\int_{S^1} \det(\nu(z), V(c(t)), dV(c(t))\dot{c}(t)) dt$$

or $\det(\nu(z), V(c(t)), dV(c(t))\dot{c}(t)) = \det(V(c(t)), dV(c(t))\dot{c}(t))$ où le déterminant est celui dans $T_z S$. Comme

$$\int_{S^1} \det(V(c(t)), dV(c(t))\dot{c}(t)) = \text{ind}(X, z)$$

on en déduit

Lemme 5.10. *Si $c(t)$ est un chemin positivement orienté autour d'un unique zéro z de X , alors*

$$\int_{S^1} \det(\nu(c(t)), Y(c(t)), dY(c(t))\dot{c}(t)) dt = 2\pi \text{ind}(X, z) + O(\varepsilon)$$

De ce qui précède on déduit, faisant tendre ε vers 0

Théorème 5.11 (Gauss-Bonnet-Poincaré-Hopf).

$$\frac{1}{2\pi} \int_M K(x) \sigma = \sum_{X(z)=0} \text{ind}(X, z)$$

On notera que

-le terme de gauche ne dépend pas du choix d'un champ de vecteurs

-le terme de droite ne dépend pas de la manière dont la surface est plongée dans $\mathbb{R}^3$, puisque l'indice d'un champ de vecteurs en un zéro n'en dépend pas. Si φ est un difféomorphisme entre deux surfaces M_1, M_2 il envoie les zéros de X sur M_1 sur ceux de φ_*X sur M_2 , et on aura

$$\sum_{X(z_1)=0} \text{ind}(X, z_1) = \sum_{(\varphi_*X)(z_2)=0} \text{ind}((\varphi_*X), z_2)$$

Il en résulte, les deux termes étant égaux, que ceux-ci ne dépendent ni du plongement ni du champ de vecteurs. Leur valeur commune ne dépend que de la surface. Si deux surfaces sont difféomorphes ce terme est invariant. Le terme de droite étant clairement entier, il en résulte que l'intégrale de la courbure est un multiple entier de 2π . Ce résultat est remarquable, dans la mesure où la courbure elle-même n'est bien entendu pas un entier, et peut prendre, localement, des valeurs quelconques.

La valeur commune de ces termes est appelée caractéristique d'Euler, et notée $\chi(S)$. Elle vaut 2 pour la sphère (calculer la somme des indices du champ de vecteurs « Nord-Sud »), 0 pour un tore (trouver un champ de vecteurs sans zéro sur le tore), et $2-2g$ pour une surface « à g trous ». On démontre, et on l'admettra ici, que toute surface orientable est difféomorphe à une et une seule surface à g trous. En d'autres termes le genre ou la caractéristique d'Euler permettent de classer les surfaces à difféomorphisme près.

Nous répétons ce théorème en deux versions séparées :

Proposition 5.12 (Théorème de Gauss-Bonnet). *La quantité*

$$\frac{1}{2\pi} \int_M K(x) \sigma = \chi(M)$$

est un nombre entier pair appelé caractéristique d'Euler de M .

Le théorème de Gauss-Bonnet affirme que le nombre $\chi(M)$ ne dépend que de la « topologie » de M . Par exemple une sphère « cabossée » aura même valeur de $\chi(M)$ qu'une sphère ronde.

Proposition 5.13 (Théorème de Poincaré-Hopf). *Si les zéros de X sont isolés*

$$\sum_{z|X(z)=0} \text{ind}(X, z) = \chi(M)$$

Elle est égale à $\chi(M)$, qui ne dépend donc d'aucun choix. C'est un invariant ne dépendant que de la surface M à difféomorphisme près.

Corollaire 5.14. *Une surface ayant un champ de vecteurs sans zéro a une caractéristique d'Euler nulle. En particulier, la seule surface orientable ayant un champ de vecteurs sans zéro est la surface de genre 0, le tore.*

Remarque 2.2. Le cas du flot irrationnel sur le tore, donné en coordonnées $(\alpha, \beta) \in S^1 \times S^1$ par $\varphi^t(\alpha, \beta) = (\alpha + t, \beta + t\theta)$ où θ est irrationnel, et dont les trajectoires sont des courbes s'enroulant sans jamais se refermer sur le tore, montre que non seulement il existe sur le tore un champ de vecteurs sans zéro, mais qu'il en existe même sans orbites périodiques : l'analogie du théorème de Poincaré-Bendixson n'est pas valable sur le tore.

Enfin la proposition suivante donne une autre méthode pour calculer la caractéristique d'Euler.

Proposition 5.15. *Soit v un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$ et H_v la restriction à M de la fonction $z \rightarrow \langle v, z \rangle$. On suppose que les points critiques de H_v sont non-dégénérés, c'est à dire qu'en un tel point z , la forme quadratique $d^2 H_v(z)$ restreinte à $T_z M$ est non dégénérée. Alors $\chi(M)$ est égal au nombre de maxima et de minima de H_v moins le nombre des autres points critiques.*

Démonstration. Il y a deux démonstrations possibles et il est intéressant de les mentionner toutes les deux. D'une part le théorème de Poincaré-Hopf appliqué au gradient de H_v permet de démontrer immédiatement le résultat. L'autre démonstration que nous donnons ici fait le lien direct avec la courbure de Gauss.

En effet, $\deg(\nu)$ est aussi égal au nombre de préimages de v comptées avec multiplicité. Or $\nu(p) = \pm v$ si et seulement si p est un point critique de H_v puisque cette dernière condition s'écrit, par le théorème des extrema liés, $T_p M \subset \ker(H_v)$ soit $\nu(p) = \lambda v$.

Au voisinage d'un tel point, $p = (x, y, z)$, la surface est un graphe au dessus de z soit $z = f(x, y)$, et le plan tangent est donné par

$$T_p M = T_{(x,y,z)} M = \{(u, v, w) \mid w = u \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) + v \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)\}$$

d'où $\nu(x, y, z)$ est proportionnel à

$$n(x, y, z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y), \frac{\partial}{\partial y} f(x, y), -1 \right)$$

et

$$dn(x, y, z)(u, v, w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) & 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) & \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) & 0 \end{pmatrix}$$

Puisque $\nu(x, y, z) = \lambda(x, y, z)n(x, y, z)$ avec $\lambda(x, y, z) > 0$ on a

$$d\nu(x, y, z) = d\lambda(x, y, z)n(x, y, z) + \lambda(x, y, z)dn(x, y, z)$$

et donc la projection de $d\nu(x, y, z)$ sur l'espace tangent à la sphère (qui est orthogonal à $n(x, y, z)$) est égal à la projection de $\lambda(x, y, z)dn(x, y, z)$ sur cet espace. Dans notre cas,

cette projection est donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) & \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) \end{pmatrix}$$

On a donc que le signe de $\det(d\nu(x, y, z))$ est égal à celui de

$$\det(d^2 f(x, y))$$

On en déduit que $\det(d\nu(x, y, z))$ est positif si la forme quadratique $d^2 f(x, y)$ est définie, c'est-à-dire si (x, y) est un maximum ou un minimum local de H_v et négatif sinon. On a pour conclure

$$\begin{aligned} \deg(\nu) &= \sum_{p \mid \nu(p)=\pm v} \text{signe } \det(d\nu(p)) = \\ \sum_{p \mid \nu(p)=\pm v} \text{signe } \det(dn(p)) &= \sum_{p=(x,y,z) \mid \nu(p)=\pm v} \text{signe } \det(d^2 f(x, y)) \end{aligned}$$

□

Remarques 2.1. (A) La véritable portée du théorème de Gauss-Bonnet, s'obtient lorsqu'on calcule l'intégrale de $K(x)$ sur un domaine de M bordé par une courbe. On montre que pour un domaine bordé par un triangle géodésique, la somme des angles du triangle diffère de π par l'intégrale de $K(x)$ sur l'intérieur du triangle (cf. exercice). C'est le théorème originellement démontré par Gauss, qui remarqua que pour la sphère de rayon 1, $K(x) = 1$ et donc la somme des angles d'un triangle diffère de π par l'aire du triangle. Il existe donc des géométries telles que la somme des angles d'un triangle ne vaut pas π , et se demanda en précurseur de l'astrophysique moderne, si la géométrie naturelle (i.e. celle pour laquelle les géodésiques sont des rayons lumineux) ne serait pas de ce type, plutôt qu'euclidienne. Le théorème que nous avons énoncé se déduit facilement de la version que nous citons en découpant la surface en triangles. On montre que la somme du nombre de triangles moins le nombre d'arêtes plus le nombre de sommets vaut encore $\chi(M)$, quel que soit le découpage de M en triangles. Ces idées sont à la base de la topologie algébrique moderne et de nombreuses autres théories reliant des propriétés géométriques à des propriétés topologiques (i.e. invariantes par bijection continue) de ces objets.

(B) La topologie différentielle est l'étude des propriétés topologiques des variétés différentiables. Elle fut initiée par Riemann, puis par Poincaré. L'utilisation de formes différentielles et la définition des groupes de cohomologie, autrefois appelés groupes de Betti est due à ces mêmes auteurs, mais sans utiliser la notion de formes différentielles. L'idée que la topologie de la variété puisse s'étudier en considérant les propriétés des formes différentielles est habituellement attribuée à Élie Cartan et Georges deRham, mais il semble que Vito Volterra ait joué un rôle de précurseur. Enfin l'analogue de la forme différentielle T_2 sur l'espace des vecteurs tangents unitaires d'une variété orientable quelconque s'appelle la classe de Thom. Elle a été

découverte par Thom en 1952 dans sa thèse. L'existence d'une telle classe vérifiant $dT = p^*\alpha$ (ici α est une forme fermée définie sur M , qui n'est plus liée à la courbure de Gauss) a de nombreuses conséquences.

3 exercices

Topologie et géométrie différentielle

- (A) Soit M, N deux variétés orientables de même dimension mais non compactes. Montrer que l'on peut construire une théorie du degré pour les applications **propres** de M dans N .
- (B) Soit M est une variété compacte orientable et P une variété compacte orientable de bord M . Montrer que si l'application $f : M \rightarrow N$ s'étend à P , alors $\deg(f) = 0$.
- (C) Montrer qu'une application qui renverse l'orientation ne peut être homotope à l'identité.
- (D) Montrer que si f_0 et f_1 sont deux applications homotopes de M dans N (de dimensions respectives, m et n), il existe une application linéaire $K : \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^*(M)$ telle que $f_1^*(\alpha) - f_0^*(\alpha) = dK(\alpha) + Kd\alpha$.
 - (a) Commencer par le cas $j_t : M \rightarrow M \times [0, 1]$ donnée par $j_t(x) = (x, t)$. On note X le champ de vecteurs sur $M \times \mathbb{R}$ donné par $\frac{\partial}{\partial t}$ de flot $\varphi^s(x, t) = (x, t + s)$, et, utilisant le fait que $j_t = \phi^t \circ j_0$ on utilise la formule de Lie-Cartan (proposition 6.11)

$$\begin{aligned} (\varphi^1)^*(\alpha) - (\varphi^0)^*(\alpha) &= \int_0^1 \frac{d}{ds} (\varphi^s)^*(\alpha) ds = \int_0^1 (\varphi^s)^*(L_X \alpha) ds = \\ &= \int_0^1 (\varphi^s)^*(di_X + i_X d\alpha) ds = d\left(\int_0^1 (\varphi^s)^*(i_X \alpha) ds\right) + \int_0^1 (\varphi^s)^*(i_X(d\alpha)) ds \end{aligned}$$

On pose alors $K\alpha = \int_0^1 (\varphi^s)^*(i_X(\alpha)) ds$

- (b) Traiter le cas général
- (c) En déduire que si α est fermée, $f_1^*(\alpha) - f_0^*(\alpha)$ est exacte, et en particulier son intégrale sur toute sous-variété est nulle.
- (E) Montrer que pour une surface dans $\mathbb{R}^3$, il existe toujours un point où $K(x) > 0$. Plus précisément montrer que si S est contenue dans une sphère de rayon R , il existe un point où la courbure vérifie $K(x) > 1/R$. Indication : On pourra chercher le point à distance maximale de l'origine.
La formule de Gauss-Bonnet n'est donc pas la seule contrainte que doit satisfaire une fonction $K(x)$ pour être la courbure de Gauss d'un plongement de S dans $\mathbb{R}^3$.
- (F) Montrer que si une variété est de dimension impaire, $\chi(M) = 0$. On pourra montrer que $\text{ind}(-X, z) = -\text{ind}(X, z)$ et appliquer la formule de Poincaré-Hopf.

- (G) On considère une courbe $\gamma(t)$ tracée sur $\mathbb{R}^3$ de classe C^∞ . On peut reparamétriser la courbe afin que $\dot{\gamma}(t)$ soit de norme un. On appelle alors courbure de la courbe, la quantité $|\ddot{\gamma}(t)|$. Si la courbe est tracée sur la surface S , la projection de $\ddot{\gamma}(t)$ sur l'espace tangent à S en $\gamma(t)$ est orthogonal à $\dot{\gamma}(t)$. On appelle courbure géodésique la coordonnée de $\ddot{\gamma}(t)$ le long du vecteur $\nu \wedge \dot{\gamma}(t)$ contenu dans $T_x S$ et orthogonal direct de $\dot{\gamma}(t)$. On la note $k_g(t)$.

(a) Montrer que

$$k_g(t) = \det(\nu(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t))$$

(b) (Gauss-Bonnet, cas à bord)

- i. Reprendre la démonstration de Gauss-Bonnet pour montrer que si γ est un courbe fermée telle que $\gamma(0) = \gamma(1)$, $\dot{\gamma}(0) = \dot{\gamma}(1)$, bordant un domaine U contenu dans S on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_U K(x) \sigma = \int_0^1 k_g(t) dt + \chi(U)$$

où $\chi(U)$ est la somme des indices des zéros contenus dans U d'un champ de vecteurs tangent à S et à ∂U (i.e. on pourra supposer $X(\gamma(t)) = \dot{\gamma}(t)$).

- ii. Montrer que si γ possède des coins, i.e. est C^∞ par morceaux, et sa dérivée ayant des discontinuités en $\tau \in \{t_1, \dots, t_k\}$ avec $\alpha_\tau = \text{angle}(\lim_{t \rightarrow \tau^+} \dot{\gamma}(t) - \lim_{t \rightarrow \tau^-} \dot{\gamma}(t))$ ⁴

$$\frac{1}{2\pi} \int_U K(x) \sigma = \int_0^1 k_g(t) dt + \sum_{j=1}^n \alpha_j + \chi(U)$$

où on note $\alpha_j = \alpha_{t_j}$.

- iii. En déduire que pour un triangle T dont les côtés ont une courbure géodésique nulle, et dont les angles sont $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, on a

$$\pi - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = \int_T K(x) \sigma$$

- (H) (Géodésiques) Soit γ une courbe tracée sur une surface S . On suppose $\dot{\gamma}(t)$ de norme un, et on note $k_g(t)b(t)$ la projection de $\ddot{\gamma}(t)$ sur l'orthogonal au vecteur tangent à la courbe dans le plan tangent à S .

On appelle énergie de γ la quantité

$$E(\gamma) = \int_0^1 |\dot{\gamma}(t)|^2 dt$$

Montrer que si X est un champ de vecteurs tangent à S et s'annulant en $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$, et de flot φ^t ,

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \int_0^1 \left| \frac{d}{dt} \varphi^s(\gamma(t)) \right|^2 dt = \int_0^1 \langle k_g(t)b(t), X(\gamma(t)) \rangle dt$$

En déduire que si γ minimise $E(\gamma)$ parmi les courbes à extrémités fixées, on a $k_g = 0$.

4. les dérivées à droite et à gauche étant supposées non nulles.

- (I) (a) Montrer que si v est un vecteur unitaire tangent à S en x_0 , l'équation

$$\dot{\gamma}(0) = v, \quad \gamma(t) \in S, \quad \ddot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}S^\perp$$

possède une solution définie sur $[0, \varepsilon]$, avec ε indépendant de v .

- (b) Montrer que l'application qui à v associe $\gamma(t)$ définie pour $|t| \leq \varepsilon$ et notée $\exp(tv)$ est telle que $D\exp(0) = Id$. En déduire que si x, y sont deux points suffisamment proches, on a une unique courbe $\gamma(t)$ reliant x à y et de longueur minimale (parmi toutes les courbes reliant x à y).
- (J) (**Teorema Egregium de Gauss**) On appelle métrique Riemannienne sur une sous-variété M la donnée en chaque point de $T_x M$ d'une forme quadratique dont les coefficients varient de manière C^∞ avec x . La norme euclidienne sur $\mathbb{R}^3$ induit sur toute surface une métrique Riemannienne. Déduire des deux exercices précédents que $K(x)$ ne dépend que de la métrique induite par $\mathbb{R}^3$ et non du plongement. En d'autres termes, s'il existe un difféomorphisme φ entre deux surfaces plongées, S_1, S_2 , préservant la métrique, c'est-à-dire tel que

$$\langle h_2, h_1 \rangle = \langle d\varphi(x)h_2, d\varphi(x)h_1 \rangle$$

Alors $K_2(\varphi(x)) = K_1(x)$.

- (K) Montrer qu'il n'existe pas de plongement d'une surface compacte dans $\mathbb{R}^3$ de courbure partout nulle. On montrera d'abord que si x est un point de la surface de distance maximale à 0, on a $K(x) > 0$.

Chapitre 6

Calcul différentiel de Lie

1 Les champs de vecteurs vus comme dérivations

Soit $D : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ un opérateur linéaire, c'est-à-dire tel que $D(\lambda f + \mu g) = \lambda D(f) + \mu D(g)$ pour $f, g \in C^\infty(M)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Définition 6.1. L'opérateur D est une dérivation si et seulement si $D(f \cdot g) = D(f) \cdot g + f \cdot D(g)$.

Remarque 1.1. (A) La définition entraîne que $D(1) = 0$ car $1 = 1 \cdot 1$ et donc $D(1) = 1 \cdot D(1) + D(1) \cdot 1 = 2 \cdot D(1)$ et donc $D(1) = 0$. On en déduit par linéarité que D s'annule sur les fonctions constantes.

(B) Si $\varphi : M \longrightarrow N$ est un difféomorphisme, et D une dérivation sur M , $\varphi_* D(f) = D(f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}$ est une dérivation sur N .

Exemple 1.1. Si X est un champ de vecteurs sur M , l'opérateur $L_X : f \rightarrow X \cdot f$ donné par $X \cdot f(x) = Df(x)X(x)$ est une dérivation, notée D_X .

Proposition 6.2. Toute dérivation est de la forme D_X pour un champ de vecteurs X sur M .

Démonstration. Par partition de l'unité subordonnée à un recouvrement par des cartes, si D est une dérivation, $D = \sum_j \rho_j D$ et $\rho_j D = D_j$ est une dérivation. En effet, $D_j(f \cdot g) = \rho_j D(f \cdot g) = \rho_j D(f) \cdot g + f \rho_j D(g) = f D_j(g) + g D_j(f)$. Il suffit donc de montrer que D_j est donné par un champ de vecteurs X_j . Or on a le

Lemme 6.3 (Hadamard). Soit f une fonction C^∞ sur $B(0, 1)$. Il existe alors des fonctions f_j telles que

$$f(x) = f(y) + \sum_{j=1}^n (x_j - y_j) \cdot f_j(x; y)$$

Démonstration. On écrit la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre un pour $t \mapsto f(tx)$ qui donne

$$f(x) = f(y) + \int_0^1 df(y + t(x - y)) \cdot (x - y) dt = \sum_{j=1}^n (x_j - y_j) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(y + t(x - y)) dt$$

et la fonction $f_j(x; y) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(y + t(x - y)) dt$ répond à la question. $\square$

Nous pouvons maintenant terminer la démonstration. Tout d'abord que f est un opérateur local, c'est-à-dire que $D(f)(y)$ ne dépend que de la restriction de f à un voisinage (arbitrairement petit) de y . En effet, il suffit de montrer que si $f = 0$ dans un voisinage V de y on a $D(f)(y) = 0$. Mais l'hypothèse entraîne que $f(x) = \rho(x)f(x)$ où ρ est nulle au voisinage de y et vaut 1 hors de V , on a

$$D(f)(y) = D(\rho \cdot f)(y) = \rho(y)D(f)(y) + D(\rho)(y)f(y) = 0$$

On a donc $D(f)(0) = D(f(0))(0) + \sum_{j=1}^n D(x_j)(0) \cdot f_j(0)$ mais comme $x_j(0) = 0$ et $f_j(0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(0)$, on a $D(f)(0) = \sum X_j(0) \frac{\partial f}{\partial x_j}(0) = df(0)X(0)$ en posant $X(0) = (X_1(0), \dots, X_n(0))$. De même en remplaçant 0 par y , on a $Df(y) = df(y)X(y)$ et l'application $y \mapsto X(y)$ est de classe C^∞ , car si $f = x_j$, on obtient que $D(x_j)(y) = X_j(y)$ qui doit être C^∞ . $\square$

Remarque 1.2. Si on essaye de faire la théorie dans le cas de différentiabilité finie, on rencontre des difficultés, car $y \mapsto df(y)X(y)$ est au mieux C^{k-1} si f est C^k .

Certaines opérations sur les champs de vecteurs deviennent plus naturelles lorsqu'elles sont vues comme dérivations.

Exemple 1.2. On verra que le commutateur de deux dérivations, D, E défini comme $[D, E] = D \circ E - E \circ D$ est une dérivation. Si D, E sont associés à X, Y , $[D, E]$ est associé à un champ de vecteurs noté $[X, Y]$. On vérifie que sur $\mathbb{R}^n$,

$$[X, Y](x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[X_i(x) \frac{\partial Y_j(x)}{\partial x_i}(x) - Y_i(x) \frac{\partial X_j(x)}{\partial x_i}(x) \right] \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Pour la démonstration, il suffit de montrer que $\left[\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k} \right] = 0$ et ensuite que

$$\left[f(x) \frac{\partial}{\partial x_j}, g(x) \frac{\partial}{\partial x_k} \right] = f(x)g(x) \left[\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k} \right] + f(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} g(x) \right) \frac{\partial}{\partial x_k} - g(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_k} f(x) \right) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

1.1 Flot d'un champ de vecteurs

Soit $X(t, x)$ un champ de vecteurs. Notons que dire que X est localement Lipschitzien dans une carte a bien un sens, vu que les changements de carte sont C^1

donc localement Lipschitziens. On en déduit qu'il existe localement un flot $\varphi_{t_0}^{t_1}$ tel que $\frac{d}{dt}\varphi^t(x)|_{t=\tau} = X(\tau, \varphi^\tau(x))$ pour $t \in [t_0, t_1]$ et $x \in U$, où U est un ouvert. Notons que $\frac{d}{dt}\varphi^t(x)|_{t=\tau}$ est par définition un vecteur tangent à M . L'unicité locale entraîne l'unicité de φ^t . Mais comme dans le cas de $\mathbb{R}^n$ se pose la question du temps de vie de la solution. On va montrer que comme dans le cas de $\mathbb{R}^n$, on a

Proposition 6.4. *Soit $x(t)$ une solution de $\dot{x}(t) = X(t, x(t))$ où X est un champ de vecteurs Lipschitzien en x et continu en t . Soit $]t_0, t_+[$ un intervalle de définition de x qui soit maximal à droite, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'extension de x à un intervalle $]t_0, t'_+[$ avec $t_+ < t'_+$. Alors x sort définitivement de tout compact, c'est-à-dire que quel que soit le compact K de M , il existe $t_K < t_+$ tel que $x([t_K, t_+]) \cap K = \emptyset$.*

Démonstration. La démonstration est la même que dans $\mathbb{R}^n$ en utilisant une carte. Si il existait une suite t_n convergeant vers t_+ telle que $x(t_n) \in K$ on aurait en prenant une sous-suite convergente $\lim_n x(t_n) = x \in K$. On utilise alors une carte en x pour montrer à un champ $Y(t, y)$ et une solution $y(t)$ définie sur $\mathbb{R}^n$. On aura alors $\lim_n y(t_n) = y$ et on sait que le problème de Cauchy $\dot{y}(t) = Y(t, y(t)), y(t_n) = y_n$ possède une unique solution définie sur un intervalle ouvert centré en t_n et de longueur au moins $\alpha > 0$. On en déduit que pour n assez grand, $y(t)$ est définie sur un intervalle contenant strictement t_+

□

Corollaire 6.5. *Le flot d'un champ de vecteurs sur une variété compacte est défini pour tout t .*

2 Crochets de Lie

Soient X et Y deux champs de vecteurs définis sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, φ^t et ψ^t leurs flots respectifs, supposés définis pour tout temps. Ces flots ne commutent généralement pas, $\varphi^t \circ \psi^s \neq \psi^s \circ \varphi^t$, comme on le voit sur l'exemple suivant :

$$X(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y(x, y) = x^2 \frac{\partial}{\partial y}$$

Alors $\varphi^t(x, y) = (x + t, y)$ et $\psi^s(x, y) = (x, y + sx^2)$ d'où $\varphi^t \circ \psi^s(x, y) = (x + t, y + sx^2)$ tandis que $\psi^s \circ \varphi^t(x, y) = (x + t, y + s(x + t)^2)$

On veut en général mesurer cette « non-commutativité » au premier ordre. Posons pour deux champs de vecteurs X, Y définis sur une variété M ,

Définition 6.6. On pose $[X, Y] = \frac{d}{dt}(\psi^t)_*(X) |_{t=0}$.

On appelle le champ de vecteurs $[X, Y]$ le **crochet de Lie** de X et Y .

Proposition 6.7 (Propriétés des crochets de Lie). .

(A) Si D_X est la dérivation associée à X , on a $D_X D_Y - D_Y D_X = D_{[X, Y]}$

- (B) $[X, Y] = 0$ si et seulement si les flots de X et de Y commutent
 (C) $[X, Y] = -[Y, X]$, $[X, Y + Z] = [X, Y] + [X, Z]$ (antisymétrie et bilinéarité)
 (D) $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$ (identité de Jacobi)
 (E) Si X et Y sont tangents à une sous-variété V , alors $[X, Y]$ l'est aussi.

Démonstration. ¹

Pour le premier point,

supposons $[X, Y] = 0$, alors

$$\frac{d}{dt}(\psi^t)_*(X) \big|_{t=t_0} = \frac{d}{dt}(\psi^{t+t_0})_*(X) \big|_{t=0} = (\psi^{t_0})_* \frac{d}{dt}(\psi^t)_*(X) \big|_{t=0} = (\psi^{t_0})_*([X, Y]) = 0$$

Cela montre que $(\psi^t)_*(X)$ est indépendant de t , donc égal à Y . L'égalité de leurs flots s'écrit $\psi^t \circ \varphi^s \circ (\psi^t)^{-1} = \varphi^s$ ce qui signifie que les flots de X et Y commutent. Inversement si X et Y commutent, $\psi^t \circ \varphi^s \circ (\psi^t)^{-1} = \varphi^s$, et l'égalité des générateurs infinitésimaux de ces flots s'écrit $(\psi^t)_*(X) = Y$. Il est alors clair que $[X, Y] = 0$.

Montrons maintenant le deuxième point.

Tout d'abord, en utilisant $\psi^0 = Id$ et $\varphi^t \circ \varphi^{-t} = Id$ on obtient

$$\frac{d}{ds}(\psi^t \circ \varphi^s \circ \psi^{-t} \circ \varphi^{-s})(x) \big|_{s=0} = \frac{d}{ds}(\psi^t \circ \varphi^s \circ \psi^{-t}) \big|_{s=0} \varphi^0 - d(\psi^t \circ \varphi^0 \circ \psi^{-t}) \left(\frac{d}{ds} \varphi^s \right)_{s=0} = (\psi^t)_*(X) - X$$

et en prenant la dérivée par rapport à t

$$[X, Y] = \frac{d}{dt} \frac{d}{ds} (\psi^t \circ \varphi^s \circ \psi^{-t} \circ \varphi^{-s})(x) \big|_{s=0, t=0}$$

Par symétrie, et parce que les dérivations en s et t commutent, on peut écrire

$$[Y, X] = \frac{d}{dt} \frac{d}{ds} (\varphi^s \circ \psi^t \circ \varphi^{-s} \circ \psi^{-t})(x) \big|_{s=0, t=0}$$

Comme $\varphi^s \circ \psi^t \circ \varphi^{-s} \circ \psi^{-t} = (\psi^t \circ \varphi^s \circ \psi^{-t} \circ \varphi^{-s})^{-1}$ et que si $h_{s,t}$ est une famille de difféomorphismes telle que $h_{0,0} = Id$, on a

$$\frac{d}{dt} \frac{d}{ds} (h_{s,t}^{-1}) \big|_{s=t=0} = -h_{0,0}^{-1} \left(\frac{d}{dt} \frac{d}{ds} (h_{s,t}) \right) h_{0,0}^{-1} = -\frac{d}{dt} \frac{d}{ds} (h_{s,t}) \big|_{s=t=0} \text{ on en déduit que } [Y, X] = -[X, Y].$$

1. Toutes les étapes sont faciles si on sait dériver une fonction composée de plusieurs variables $\frac{d}{dt}(F(t, g(t, x))) = (\frac{d}{dt}F)(t, g(t, x)) + \frac{d}{dx}F(t, g(t, x)) \frac{d}{dt}g(t, x)$ et si on n'oublie pas que le flot $\varphi^t(x)$ est en fait une fonction des deux variables (t, x) .

Puisque $(\psi^t)_*$ est linéaire, sa dérivée par rapport à t l'est aussi, d'où $[X, Y + Z] = [X, Y] + [X, Z]$.

L'identité de Jacobi résulte de l'exercice (A).

Enfin, supposons que X et Y soient tangents à V . Alors, ψ^t préserve V , et donc $d\psi^t$ envoie l'espace tangent à V en x sur l'espace tangent à V en $\psi^t(x)$. Puisque X est partout tangent à V , $(\psi^t)_*(X)(x)$ est une courbe de l'espace tangent à V en x , et donc la dérivée de ce chemin est encore contenue dans cet espace tangent. $\square$

Remarque 2.1. Il ne suffit pas que X et Y soient tangents à V en x_0 pour que $[X, Y]$ le soit. Plus généralement, $[X, Y](x_0)$ **ne dépend pas seulement** des valeurs de X et Y en x_0 mais aussi de leurs dérivées (comme cela résultera clairement de la proposition 6.8). Par exemple, si on note par abus de langage les champs de vecteurs constants égaux au vecteur de base e_i , par e_i , on a $[e_3, x_3 e_2] = e_2$, pourtant les champs e_3 et $x_3 e_2$ sont tangents en 0 à $\{x_2 = x_3 = 0\}$ mais ce n'est pas le cas de leur crochet, e_2 .

Par contre, si X et Y sont tangents à V au voisinage de x , alors $[X, Y](x)$ est tangent à V en x .

La proposition suivante permet le calcul aisé des crochets de Lie, sans qu'il soit nécessaire d'intégrer des flots.

Proposition 6.8 (Calcul des crochets de Lie). *On a*

(A) *Si f est une fonction C^∞*

$$[X, f \cdot Y](x) = f(x) \cdot [X, Y](x) + (df(x)X(x))Y(x)$$

(B) *Si X, Y sont des champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$, on a*

$$[X, Y] = dY(x)X(x) - dX(x)Y(x)$$

Démonstration : La première égalité équivaut à montrer que

$$[f \cdot X, \cdot Y](x) = f(x) \cdot [X, Y](x) - (df(x)Y(x))X(x)$$

En effet, $(\psi^t)_*(f \cdot X) = f(\psi^{-t}(x))(\psi^t)_*(X)$ donc en dérivant par rapport à t , et utilisant que $\frac{d}{dt}f(\psi^t(x))|_{t=0} = -df(x)Y(x)$ l'identité en résulte.

Pour la deuxième formule, si elle est vraie pour X et Y elle le sera pour X et $f \cdot Y$ car le terme de gauche devient

$$df(X)Y + f \cdot [X, Y] = df(X)Y + f(dY(X) - dX(Y)) = d(f \cdot Y)X - dX(f \cdot Y)$$

Par antisymétrie on peut aussi remplacer X par $g \cdot X$ et enfin par bilinéarité des deux termes, il suffit de le vérifier pour X et Y champs de vecteurs constants, car tout champ de vecteurs est combinaison linéaire à coefficients $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, des vecteurs de base e_i .

Or $[e_i, e_j] = 0$ car les flots des champs de vecteurs constants commutent, et comme $de_i = 0$, l'égalité est évidente dans ce cas. $\square$

Exercice 2.1 (Exercice corrigé). Démontrer la proposition directement, en utilisant la définition de $[X, Y]$ et le fait que $L(t, x) = d\psi^t(x)$ et que l'application

$$L : \mathbb{R} \times M \rightarrow \mathcal{L}(T_x M, T_{\varphi^t(x)} M)$$

vérifie

$\frac{d}{dt}L(t, x) = dY(\psi^t(x))L(t, x)$, comme on le voit en différenciant par rapport à x la relation $\frac{d}{dt}\psi^t(x) = Y(\psi^t(x))$.

$$\text{En effet, } (\psi^t)_*X(x) = L(t, \psi^{-t}(x))X(\psi^{-t}(x))$$

et donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\psi^t)_*X(x) \big|_{t=0} &= \frac{d}{dt}(L(t, \psi^{-t}(x))X(\psi^{-t}(x))) \big|_{t=0} = \\ &= \frac{d}{dt}(L(t, x)) \big|_{t=0} X(x) + dL(t, x) \frac{d}{dt}\psi^{-t}(x) \big|_{t=0} X(x) + L(t, x) \frac{d}{dt}X(\psi^{-t}(x)) \big|_{t=0} = \\ &= dY(x)X(x) - dL(0, x)(Y(x), X(x)) - dX(x)Y(x) \end{aligned}$$

Comme $L(0, x) = Id$, on a $dL(0, x) = 0$ et le deuxième terme est nul, ce qui conduit à la formule annoncée

Exemple 2.1. (A) Soit $GL(n, \mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathbb{R}^n$. C'est un ouvert de l'ensemble des matrices, qui forment un espace vectoriel de dimension n^2 . L'espace tangent à $GL(n)$ est donc égal à $M(n, \mathbb{R})$.

Il existe alors des champs de vecteurs particuliers sur $GL(n, \mathbb{R})$, appelés invariants à gauche, donnés par $X_A(M) = MA$ où A est une matrice fixée², et ces champs engendrent sur $C^\infty(GL(n, \mathbb{R}))$ tous les champs de vecteurs³ sur $GL(n, \mathbb{R})$.

Quel est alors le crochet $[X_A, X_B]$?

En utilisant le calcul ci-dessus, $dX_A(M)(H) = MHA$, et donc

$$[X_A, X_B] = dX_B(X_A)(M) - dX_A(X_B)(M) = M(AB - BA) = X_{AB-BA}(M) \text{ On pose alors } [A, B] = AB - BA$$

Exercice : Faire le calcul en utilisant le flot de X_A

Le flot est donné par $\frac{d}{dt}M(t) = X_A(M(t)) = M(t)A$ dont la solution est d'après le chapitre ??, $M(t) = M(0)e^{tA}$.

Les flots de X_A et X_B commutent si et seulement si $e^{tA}e^{tB} = e^{tB}e^{tA}$. Or il résulte des propriétés du crochet de Lie, que cela ne peut arriver pour tout t que si A et B commutent.

2. La terminologie « invariant à gauche » vient de ce qu'ils vérifient $X_A(UM) = UX_A(M)$.

3. On fera attention à ne pas confondre combinaisons linéaires sur $C^\infty(M)$ et sur $\mathbb{R}$.

- (B) Soit $SO(n)$ le groupe des rotations de $\mathbb{R}^n$, identifié aux matrices carrées de $GL(n, \mathbb{R})$ telles que $MM^* = I$ et $\det(M) > 0$

L'espace tangent en M s'obtient en dérivant l'équation $MM^* = I$ (prescrire le signe de $\det(M)$ ne sert qu'à se limiter à la composante connexe des isométries préservant l'orientation), et est donné par l'équation $MA^* + AM^* = 0$. Ce sont donc les matrices telles que $M^{-1}A$ soit antisymétrique.

Un champ de vecteurs sur $SO(n)$ peut donc s'identifier à une application de $SO(n)$ dans l'ensemble des matrices antisymétriques : on associe à $A(M)$, la matrice antisymétrique $M^{-1}A(M)$. Les champs de vecteurs invariants à gauche sont ceux pour lesquels cette matrice est constante, sont ceux de la forme $A(M) = MA = X_A(M)$, où X_A a été défini dans l'exemple précédent.

Parmi les champs de vecteurs X_A de $GL(n, \mathbb{R})$ invariants à gauche, ceux tangents à $SO(n)$ sont ceux correspondant à une matrice A antisymétrique. Et clairement tout champ de vecteurs sur $SO(n)$ est combinaison linéaire de ceux-ci.

Quel est alors le crochet de X_A et X_B ? En remarquant que le crochet de Lie de deux champs de vecteurs ne dépend pas de la sous-variété sur laquelle on le considère, donc on a encore $[X_A, X_B] = X_{BA-AB}$. On vérifie que si A et B sont antisymétriques, $BA - AB$ l'est aussi !

- (C) En particulier si $n = 3$, les matrices antisymétriques forment un espace de dimension 3. Le produit vectoriel identifie ces espaces :

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^3 &\longrightarrow M(3, \mathbb{R}) \\ v &\longrightarrow L_v\end{aligned}$$

où $L_v(x) = v \wedge x$. L'application L_v est bien linéaire et antisymétrique, et de plus on vérifie que $L_v L_w - L_w L_v = L_{v \wedge w}$ (il suffit de le vérifier si v, w sont colinéaires, où sur les vecteurs $v, w, v \wedge w$).

On a ainsi identifié les champs de vecteurs tangents à $SO(3)$ aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^3$.

Si $R(t)$ est un chemin dans $SO(3)$, on a alors $\dot{R}(t) = \Omega(t)R(t)$ et $\Omega(t) = L_{\omega(t)}$. Le vecteur $\omega(t)$ est porté par l'axe instantané de rotation et sa norme est la vitesse instantanée de rotation autour de cet axe.

On renvoie au chapitre sur les théorèmes de Frobenius et Chow, pour des applications de crochets de Lie.

On a aussi la formule suivante, liant crochets et différentielle extérieure. Celle-ci jouera un rôle important dans le calcul de la cohomologie des groupes de Lie.

Proposition 6.9. Soient $X_1, \dots, X_p$ des champs de vecteurs sur M et ω une p -forme différentielle sur M . On a alors

$$\begin{aligned}d\omega(X_0, \dots, X_p) = \\ \sum_{j=0}^p (-1)^j X_j \omega(X_0, \dots, \widehat{X_j}, \dots, X_p) + \sum_{j < k} (-1)^{j+k} \omega([X_j, X_k], X_0, \dots, \widehat{X_j}, \dots, \widehat{X_k}, \dots, X_p)\end{aligned}$$

3 Dérivée de Lie

L'idée de dériver un objet le long d'un flot peut s'appliquer à autre chose qu'un champ de vecteurs.

Définition 6.10. Soit α une forme différentielle, et X un champ de vecteurs. On note $L_X\alpha$ la forme différentielle de même degré donnée par

$$L_X\alpha = \frac{d}{dt}(\varphi^t)^*\alpha \big|_{t=0}$$

Démonstration. Il est important de noter que le terme de gauche est un tenseur (c'est-à-dire que sa valeur en x_0 ne dépend que des $X_j(x_0)$) alors que les termes de droite n'en sont pas : ni $[X_j, X_k](x_0)$ ni $X_j\omega(X_0, \dots, \widehat{X_j}, \dots, X_k)(x_0)$ ne peuvent se calculer si on ne connaît que les $X_j(x_0)$ et $\omega(x_0)$, mais bien entendu leur somme est un tenseur,. $\square$

Exemple 3.1. (A) Si f est une fonction, $(\varphi^t)^*f(x) = f(\varphi^t(x))$ et donc

$$\frac{d}{dt}(\varphi^t)^*f(x) \big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(f(\varphi^t(x))) \big|_{t=0} = df(x)X(x)$$

Remarques 3.1. (A) L_X commute à d car $(\varphi^t)^*d\alpha = d(\varphi^t)^*\alpha$ et $\frac{d}{dt}$ et d commutent donc,

$$\frac{d}{dt}(\varphi^t)^*d\alpha \big|_{t=0} = \frac{d}{dt}d(\varphi^t)^*\alpha \big|_{t=0} = d\frac{d}{dt}(\varphi^t)^*\alpha \big|_{t=0} = dL_X\alpha$$

Donc

$$(1) \quad L_X \circ d = d \circ L_X$$

(B) On a de plus

$$(2) \quad L_X(\alpha \wedge \beta) = L_X\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge L_X\beta$$

En effet

$$(\varphi^t)^*(\alpha \wedge \beta) = (\varphi^t)^*\alpha \wedge (\varphi^t)^*\beta$$

donc par multilinéarité de la dérivation

$$\frac{d}{dt}[(\varphi^t)^*\alpha \wedge (\varphi^t)^*\beta] = \frac{d}{dt}(\varphi^t)^*\alpha \big|_{t=0} \wedge \beta + \alpha \wedge \frac{d}{dt}(\varphi^t)^*\beta \big|_{t=0}$$

De ce qui précède, on voit qu'il suffit pour calculer $L_X\alpha$ de décomposer α en somme de produits de formes de degré 1. Chaque forme de degré 1 est elle-même somme de termes de la forme $f dg$. Or $L_X(f dg)(x) = df(x)X(x)dg(x) + f d(L_X g) = X \cdot f dg + f d(X \cdot g)$ où on note $X \cdot f(x) = df(x)X(x)$

La proposition suivante joue un rôle fondamental en topologie algébrique :

Proposition 6.11 (Formule de Lie-Cartan).

$$L_X = di_X + i_X d$$

où i_X est l'application linéaire des formes de degré $p+1$ vers celles de degré p donnée par

$$(i_X \alpha)(x)(X_1, \dots, X_p) = \alpha(X, X_1, \dots, X_p)$$

Démonstration. Montrons que le terme de droite vérifie aussi les propriétés (1) et (2). En effet, il est facile de vérifier que $i_X(\alpha \wedge \beta) = i_X \alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge i_X \beta$. Donc

$$\begin{aligned} (di_X + i_X d)(\alpha \wedge \beta) &= d(i_X \alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge i_X \beta) + i_X(d\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge d\beta) = \\ &= (di_X \alpha) \wedge \beta + (-1)^{\deg(i_X \alpha)} i_X \alpha \wedge d\beta + (-1)^{\deg \alpha} d\alpha \wedge i_X \beta + (-1)^{\deg \alpha} (-1)^{\deg \alpha} \alpha di_X \beta + \\ &+ (i_X d\alpha) \wedge \beta + (-1)^{\deg(d\alpha)} d\alpha \wedge i_X \beta + (-1)^{\deg \alpha} i_X \alpha \wedge d\beta + (-1)^{\deg \alpha} (-1)^{\deg \alpha} \alpha i_X d\beta \end{aligned}$$

Comme $\deg(d\alpha)$ et $\deg(i_X \alpha)$ ont le même parité qui est toujours différente de celle de $\deg(\alpha)$ on voit aisément que la somme ci-dessus se réduit à

$$(di_X + i_X d)\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge (di_X + i_X d)\beta$$

Pour ce qui est de (1), on a

$$d(di_X + i_X d) = d^2 i_X + di_X d = di_X d$$

alors que

$$(di_X + i_X d)d = di_X d + i_X d^2 = di_X d$$

Maintenant, deux opérateurs vérifiant (1) et (2), et qui coïncident sur les fonctions sont égaux en vertu de la remarque précédant l'énoncé de la proposition.

□

La formule ci-dessus se généralise aisément au cas suivant : soit $r_t : M \rightarrow M$ une famille lisse d'applications C^∞ . On pose $X(t_0, x) = \frac{d}{dt} r_t(x) |_{t=t_0}$. Alors

$$\frac{d}{dt} r_t^* \alpha |_{t=t_0} = r_{t_0}^* (di_X \alpha + i_X d\alpha)$$

Le lemme de Poincaré en découle aisément :

Proposition 6.12. Soit U un domaine tel qu'il existe un point x_0 de U et une famille continue d'applications C^∞ telle que $r_0 = \text{Id}$ et r_1 est constante égale à x_0 . Alors toute forme fermée sur U de degré non nul est exacte.

Démonstration. On va supposer que la famille r_t est en fait lisse, le cas général se traitant par approximation. Comme dr_1 est nulle, $r_1^*\alpha = 0$ dès que α est de degré non nul.

Or

$$\alpha = r_0^*\alpha = r_0^*\alpha - r_1\alpha = - \int_0^1 \frac{d}{dt} r_t^* \alpha \big|_{t=s} ds = - \int_0^1 r_s^*(di_X\alpha + i_X d\alpha) ds$$

Puisque α est fermée le second terme s'annule et il nous reste

$$- \int_0^1 r_s^*(di_X\alpha) ds = d \left(\int_0^1 -r_s^*(di_X\alpha) ds \right)$$

On a donc trouvé une forme $\beta = - \int_0^1 r_s^*(di_X\alpha) ds$ telle que $d\beta = \alpha$. □

Remarque 3.1. La plupart des résultats topologiques obtenus ne nécessitent pas la lissité des fonctions. Ce sont des résultats d'approximation des fonctions C^0 par des fonctions lisses, qui permettent de se débarrasser de ces hypothèses ; Par exemple dans Brouwer, s'il existe une application continue de B dans elle-même sans point fixe, on peut trouver une application C^∞ ayant la même propriété. De même dans le lemme de Poincaré, l'existence d'une famille r_t continue entraîne qu'il existe une famille lisse ayant les mêmes propriétés.

4 Exercices

(A) Soit $D : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ une application linéaire vérifiant $D(fg) = D(f)g + fD(g)$. On dit alors que D est une **dérivation**.

- (a) Montrer que si $f(x_0) = g(x_0) = 0$ alors $D(fg)(x_0) = 0$
- (b) Montrer en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral que $R(x) = f(x) - df(x_0)(x - x_0)$ est somme de produits de fonctions s'annulant en x_0 .
- (c) En déduire que $D(f)(x_0) = df(x_0)X(x_0)$. Montrer que X qui ne dépend pas de f , (mais est déterminé par D) est un champ de vecteurs C^∞ . On note $D = D_X$.
- (d) Montrer que si D_{X_1}, D_{X_2} sont des dérivations, alors $D_{X_1}D_{X_2} - D_{X_2}D_{X_1}$ est une dérivation, égale à $D_{[X_1, X_2]}$
- (e) En déduire une démonstration de l'identité de Jacobi.

(B) (**Théorème de Smale**)

Dans tout le problème, on dira qu'un espace topologique X est contractile sur $x_0 \in X$ s'il existe une famille continue d'applications $h_s : X \rightarrow X$, $s \in [0, 1]$ telles que

- (a) $h_0 = Id_X$
- (b) $\forall x \in X, h_1(x) = x_0$
- (c) $\forall s \in [0, 1], h_s(x_0) = x_0$

On dit que h_s est l'homotopie réalisant la déformation de X sur x_0 .

Enfin une application $\varphi : f \mapsto g$ de l'espace des fonctions C^∞ dans lui-même est continue si et seulement si les dérivées partielles de $\varphi(f)$ dépendent continûment de celles de f (pas nécessairement au même ordre). Par exemple la restriction d'une application continue pour toutes les topologies C^k ($\forall k \geq 1$) et l'application $f \mapsto df$ sont continues en topologie C^∞ .

Le but de ce problème est de montrer que l'espace

$$D = \{f \in C^\infty(I^2, I^2) \mid f \text{ est un difféo et } f = id \text{ au voisinage de } \partial I^2 - \{1\} \times [0, 1]\}$$

est contractile.

I. Espace d'applications à valeurs dans S^1 (une autre démonstration du théorème de relèvement dans le cas C^∞).

Soit I l'intervalle $[0, 1]$, on définit $\partial I = \{0, 1\}$, $\partial I^2 = \{0, 1\} \times [0, 1] \cup [0, 1] \times \{0, 1\}$. On dira qu'une application définie sur I^2 est C^∞ si elle a des dérivées partielles à tous les ordres, continues sur I^2 . Soit f une application C^∞ de I^2 à valeurs dans S^1 . On se propose de montrer que $F = \{f \in C^\infty(I^2, S^1) \mid f(0, 0) = 1\}$ est contractile sur $f_0 \equiv 1$. On pose

$$\xi_1(x_1, x_2, \theta) = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2)), \quad \xi_2(x_1, x_2, \theta) = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2))$$

- (a) Montrer que les trajectoires de ξ_1 partant de $(x_1, x_2, f(x_1, x_2))$ sont données par l'équation $t \mapsto (x_1 + t, x_2, f(x_1 + t, x_2))$, tant que $t + x_1 \in [0, 1]$. De même la trajectoire de ξ_2 est donnée par $t \mapsto (x_1, x_2 + t, f(x_1, x_2 + t))$.
- (b) Soit p la projection de R sur S^1 donnée par $p(u) = \exp(iu)$, et π la projection de $I^2 \times R$ sur $I^2 \times S^1$ donnée par $id_{I^2} \times p$. Calculer $d\pi$, et montrer qu'il existe deux champs de vecteurs $\tilde{\xi}_1$ et $\tilde{\xi}_2$ sur $I^2 \times R$ tels que $d\pi(z)\tilde{\xi}_j(z) = \xi_j(\pi(z))$ pour $j = 1, 2$.
- (c) Montrer que $[\xi_j, \xi_k] = 0$ et en déduire que $[\tilde{\xi}_j, \tilde{\xi}_k] = 0$.
- (d) Montrer en utilisant les champs de vecteur construits ci-dessus que l'on peut construire $\tilde{f} : I^2 \rightarrow R$ telle que $p \circ \tilde{f} = f$ et $\tilde{f}(0, 0) = 0$.
- (e) Montrer que $f \mapsto \tilde{f}$ est continue pour la topologie C^∞ .
- (f) Montrer que

$$\tilde{F} = \{f \in C^\infty(I^2, R) \mid f(0, 0) = 0\}$$

est contractile sur $\tilde{f}_0 \equiv 1$. En déduire que F est contractile sur f_0 .

- (g) Montrer de même que $G = \{f \in C^\infty(I^2, S^1) \mid f(x, y) = 1 \text{ au voisinage de } \partial I^2\}$ est contractile en f_0 .

II. Un théorème de S. Smale.

On se propose de montrer que

$$\mathcal{D}_k = \{f \in C^\infty(I^k, I^k) \mid f \text{ est un difféomorphisme, et } f = id \text{ au voisinage de } \partial I^k\}$$

est contractile en l'identité si $k = 1, 2$.

- (a) Montrer le résultat si $k = 1$.

On suppose dorénavant $k = 2$. On pose $\mathcal{D} = \mathcal{D}_2$.

Notons que pour $f \in \mathcal{D}$ on a tout de même $f(\{1\} \times [0, 1]) = \{1\} \times [0, 1]$. On note X_1 le champ constant $\frac{\partial}{\partial x}$, et Z l'ensemble des champs de vecteurs C^∞ sur I^2 tels que

- i. $X = X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ au voisinage de ∂I^2
- ii. X n'a pas de zéro sur I^2 .

- (b) Montrer que Z est contractile en X_0 (on utilisera les coordonnées polaires pour se ramener à la question I.5).

Soit $\varphi : \mathcal{D} \rightarrow Z$ l'application définie par $\varphi(f)(x, y) = df(f^{-1}(x, y))X_0(x, y)$.

- (c) Montrer que les trajectoires de $\varphi(f)$ sont données par $f([0, 1] \times \{y\})$.
- (d) On note h_s l'homotopie obtenue en 2, et $u \mapsto P_s(f)(u, x_0, y_0)$ le flot de $h_s\varphi(f)$, avec condition initiale $P_s(f)(0, x_0, y_0) = (x_0, y_0)$. On pose $Q_s(f)(x, y) = P_s(f)(x, 0, y)$. Représenter sur un dessin l'application $Q_s(f)$ (en fonction des trajectoires de $X_s = h_s\varphi(f)$). Montrer que $Q_s(x, y)$ (lorsqu'il est défini) a sa différentielle de rang maximal.
- (e) Montrer qu'une trajectoire de $P_s(f)(u, 0, y_0)$ sort nécessairement de I^2 , et que cela a lieu en un point de $\{1\} \times [0, 1]$ (on pourra utiliser le corollaire de Poincaré-Bendixson ??).
- (f) Soit $\bar{u}(s, f, y)$ un instant où la trajectoire partant de $(0, y)$ atteint $\{1\} \times [0, 1]$. Montrer que $\bar{u}(s, f, y)$ est unique, et que $(s, f, y) \mapsto \bar{u}(s, f, y)$ est C^∞ en (s, y) continue en f et strictement positive.
- (g) Montrer que Q_s est un difféomorphisme de son domaine de définition (que l'on déterminera) sur I^2 .
- On pose $g(f) = \min\{\frac{\bar{u}(s, f, y)}{1 - \bar{u}(s, f, y)}, 1 \mid s, x \in I, \bar{u} < 1\}$. On admettra que si g est semi-continue inférieurement sur $\mathcal{D}$ et partout strictement positive il existe alors $\eta : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ continue telle que $0 < \eta < g$ et $\gamma : \mathcal{D} \times [0, 1] \rightarrow R$ telle que $t \mapsto \gamma(f, t)$ soit C^∞ et vérifie $\frac{d\gamma}{dt} < 1 + \eta(f)$, et $\gamma(f, 0) = 0$, $\gamma(f, 1) = 1$.
- (h) On pose $H_s(f)(x, y) = Q_s(f)(x + \gamma(f, x)(\bar{u}(s, f, y) - 1), y)$. Montrer que H_s envoie I^2 sur lui même. En écrivant H_s comme la composée de deux applications, montrer que c'est un élément de $\mathcal{D}$. En conclure que $\mathcal{D}$ est contractile en l'identité.

Pour d'autres conséquences de ce résultat, se référer à l'article de S. Smale « Diffeomorphisms of the 2-sphere », Proceedings of the A.M.S., vol 10 (1959) pp. 621-626. Pour le cas de $\mathcal{D}_3$ voir J. Cerf « Sur $\Gamma_4 = 0$ », Lectures notes in Math. Springer-Verlag. Enfin si $k > 6$, $\mathcal{D}_k$ n'est même plus connexe en général (cf. les travaux de J. Milnor).

Chapitre 7

Cohomologie de deRham

Définition 7.1. On dit que la forme ω est fermée si elle vérifie $d\omega = 0$, elle est exacte si il existe α telle que $\omega = d\alpha$. Comme $d \circ d = 0$, toute forme exacte est fermée. On appelle k -ième groupe de cohomologie de de Rham de M et on note $H^k(M)$ le quotient de l'espace des k -formes fermées par les k -formes exactes.

Le corollaire suivant s'obtient en appliquant la formule de Stokes au cas d'une variété à bord vide.

Corollaire 7.2. Soit V une sous-variété orientable sans bord contenue dans M , et ω une forme exacte. Alors

$$\int_V \omega = 0$$

La formule de Stokes permet d'affirmer que si V est une sous-variété orientable sans bord de dimension n contenue dans M , l'application $\int_V$ définit une application linéaire de $H^n(M)$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 0.1. Montrer que la forme $\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est fermée mais n'est pas exacte. On pourra calculer son intégrale sur le cercle.

Montrer que si $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ alors $f(z)dz$ est fermée, mais n'est exacte que si pour chaque pôle ζ de f , le résidu de f en ζ est nul.

Définition 7.3. On définit $H^k(M)$ comme le quotient de l'espace des k -formes fermées sur M par l'espace des formes exactes. On l'appelle k -ième espace de cohomologie de M . Si α est une forme fermée on note $[\alpha]$ sa classe. On note $H^*(M) = \bigoplus_{k=0}^n H^k(M)$. Si f est une application différentiable $f : M \rightarrow N$, on définit une plication $f^* : H^k(N) \rightarrow H^k(M)$ donnée par $f^*([\alpha]) = [f^*(\alpha)]$.

Remarque 0.1. Le fait que $f^*(d\alpha) = df^*(\alpha)$ montre que f^* est bien définie.

Avant de calculer ces objets, montrons que f^* est invariante par homotopie.

Théorème 7.4. Soit $f : M \times [0, 1] \longrightarrow N$ une application C^∞ . On note $f_t(x) = f(x, t)$. On a alors $[f_0^*] = [f_1^*]$.

Démonstration. Soit $j_t : M \longrightarrow M \times [0, 1]$ donnée par $j_t(x) = (x, t)$, montrons que $j_1^* \alpha - j_0^* \alpha = dK(\alpha) + K(d\alpha)$ où K est une application linéaire de $\Omega^*(M \times [0, 1]) \longrightarrow \Omega^{*-1}(M \times [0, 1])$ donnée par

$$K(\alpha(x, t) + \beta(x, t) \wedge dt) = \int_0^1 \beta(x, t) dt = \int_0^1 (j_t)^* i_{\frac{\partial}{\partial t}} \omega dt.$$

En effet, si $\varphi^s(x, s) = (x, s + t)$ est le flot de $\frac{\partial}{\partial t}$ défini sur $M \times \mathbb{R}$, on a $\varphi^t \circ j_0 = j_t$ et donc

$$\begin{aligned} j_1^*(\omega) - j_0^*(\omega) &= j_0^*[(\varphi^1)^* - (\varphi^0)^*](\omega) = j_0^* \int_0^1 \frac{d}{dt} (\varphi^t)^*(\omega) dt = \int_0^1 (\varphi^t)^*(L_{\frac{\partial}{\partial t}} \omega) dt = \\ &= \int_0^1 j_0^*(\varphi^t)^* di_{\frac{\partial}{\partial t}} \omega dt + \int_0^1 j_0^*(\varphi^t)^* i_{\frac{\partial}{\partial t}} d(\omega) dt = d \int_0^1 j_t^* i di_{\frac{\partial}{\partial t}} \omega dt + \int_0^1 j_t^* i di_{\frac{\partial}{\partial t}} d\omega dt = \\ &= dK\omega + Kd\omega \end{aligned}$$

On a alors $f_t = f \circ j_t$ et donc

$$f_1^*(\omega) - f_0^*(\omega) = (j_1)^* - (j_0^*(f^*(\omega))) = dK(f^*(\omega)) + Kd(f^*(\omega))$$

Il en résulte que si ω est fermée, $f_1^*(\omega) - f_0^*(\omega) = d(K(f^*(\omega)))$ et donc $[f_1^*(\omega)] = [f_0^*(\omega)]$ ce qui signifie que $[f_1^*] = [f_0^*]$. $\square$

En utilisant un résultat d'approximation, on en déduit que $[f^*]$ est bien défini même si f n'est que continue (attention à l'abus de notation, car f^* n'est alors pas définie).

Proposition 7.5. Soit f une application continue de M dans N . Alors pour ε assez petit, si g est C^∞ et $d(g(x), f(x)) < \varepsilon$ on a que $[g^*] : H^*(N) \longrightarrow H^*(M)$ ne dépend pas du choix de g . On la note $[f^*]$.

Démonstration. Au vu du théorème précédent, il suffit de prouver que si g_0, g_1 sont deux telles applications, elles sont homotopes. $\square$

0.1 Suites exactes en cohomologie. Suites relatives et de Mayer-Vietoris

L'objet de cette section est de calculer la cohomologie d'un espace à partir d'une décomposition de cet espace en morceaux. Le cas le plus simple est bien sûr celui d'un ouvert contractile.

Proposition 7.6. Soit U un ouvert contractile, c'est-à-dire tel qu'il existe une famille continue r_t tel que $r_0 = \text{Id}$ et $r_1(U) = \{x_0\}$. Alors $H^0(U) = \mathbb{R}$ et $H^k(U) = \{0\}$ pour $k \geq 1$.

Ce cas particulier se généralise

Proposition 7.7. Soit U, V des ouverts on a alors une suite exacte (i.e. telle que le noyau de chaque application est l'image de la précédente)

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & H^0(U \cup V) & \longrightarrow & H^0(U) \oplus H^0(V) & \longrightarrow & H^0(U \cap V) \\
 & & & & \delta^0 & & \\
 & \searrow & & & & & \\
 & & H^1(U \cup V) & \longrightarrow & H^1(U) \oplus H^1(V) & \longrightarrow & H^1(U \cap V) \\
 & & & & \delta^1 & & \\
 & \searrow & & & & & \\
 & & H^2(U \cup V) & \longrightarrow & \dots & & \dots \\
 & & & & & & \\
 & & \dots & & \dots & & H^{n-1}(U \cap V) \\
 & & & & \delta^{n-1} & & \\
 & \dashrightarrow & H^n(U \cup V) & \longrightarrow & H^n(U) \oplus H^n(V) & \longrightarrow & H^n(U \cap V) \\
 & & & & \delta^n & & \\
 & \dashrightarrow & H^{n+1}(U \cup V) & \longrightarrow & & &
 \end{array}$$

Démonstration. Soit ρ_U, ρ_V une partition de l'unité associée à U, V . Nous allons définir une suite

$$0 \longrightarrow \Omega^*(U \cup V) \longrightarrow \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \longrightarrow \Omega^*(U \cap V) \longrightarrow 0$$

Si $\alpha \in \Omega^*(U \cup V)$ on lui associe leur restriction à U et V ce qui définit la première application. La deuxième application est la différence des restrictions. La seule exactitude posant problème est pour montrer que toute forme sur $U \cap V$ est différence d'une forme sur U et d'une forme sur V . Or si ρ_U, ρ_V est une partition de l'unité associée à la partition U, V de $U \cup V$ (attention $U \cup V$ n'est pas nécessairement compacte) i.e. ρ_U est dans $C^\infty(U \cup V)$ et à support¹ dans U , ρ_V à support dans V et ρ_U à support dans U

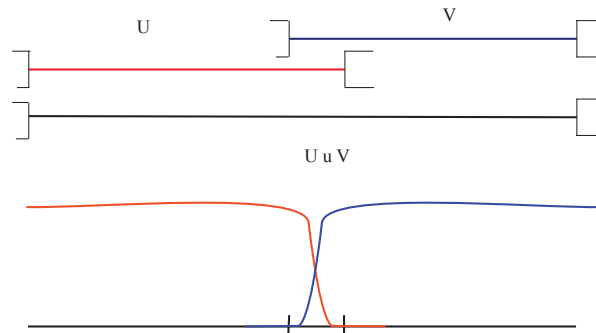


FIGURE 7.1 – Partition de l'unité de $U \cup V$

1. Attention, ici on considère le support d'une fonction f dans $U \cup V$, c'est-à-dire la fermeture dans $U \cup V$ de $\{x \mid f(x) \neq 0\}$.



Chapitre 8

Quelques propriétés des champs de sous-espaces

Il arrive souvent que des contraintes naturelles sur l'évolution d'un système s'expriment comme des contraintes infinitésimales, mais en nombre insuffisant pour déterminer cette évolution. C'est le cas de tous les systèmes « commandés », voitures, robots, etc... En général, nous pouvons faire évoluer un tel système à notre guise, pourvu de respecter certaines contraintes. Le cas le plus simple est celui d'une voiture : on peut la faire avancer ou reculer, et tourner le volant, mais le mouvement doit se faire dans la direction prescrite par les roues. De même, on peut agir sur un bras articulé, pourvu de respecter les contraintes de ses articulations.

Commençons par le cas le plus simple : celui du monocycle. Un modèle simplifié consiste à le repérer par la position de son centre de gravité dans le plan (x, y) et l'angle θ entre la direction de la roue et celle de l'axe Ox . Le mouvement doit alors vérifier l'équation $\sin(\theta)\dot{x} - \cos(\theta)\dot{y} = 0$.

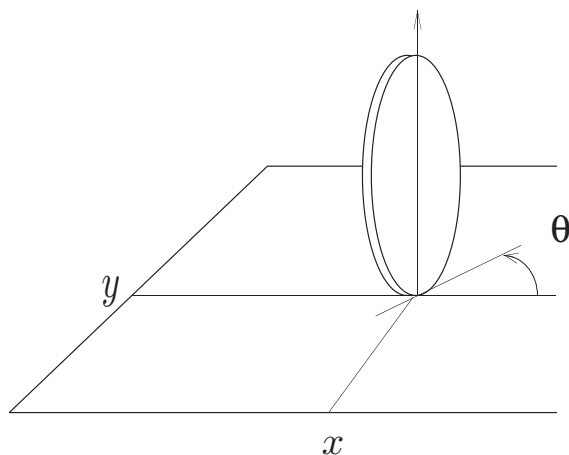


FIGURE 8.1 – Monocycle et ses coordonnées (d'après le chapitre 4 de [Bellaïche-Jean-Risler])

Dit autrement, le vecteur vitesse $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta})$ est contenu dans le plan $D(x, y, \theta) = \{(u, v, w) \mid \sin(\theta)u - \cos(\theta)v = 0\}$. On dit alors que l'on a deux degrés de liberté, et on peut se demander quels sont les points de l'espace que l'on peut rejoindre à partir d'un point donné, en suivant un chemin qui reste partout tangent au plan $D(x, y, \theta)$.

On verra que l'on peut atteindre n'importe quel point du plan et n'importe quelle direction de la roue, ce qui peut sembler surprenant, puisque l'espace a trois dimensions, alors que le mouvement est « limité à deux dimensions ».

La conduite d'une voiture est un problème analogue, ainsi que celui d'un semi-remorque. On a le même type de résultat, ce qui a pour conséquence théorique la possibilité de garer sa voiture. Les questions pratiques, que nous n'abordons pas ici (combien de manœuvres faut-il pour cela, quelle est la manœuvre optimale) sont encore l'objet de recherches actives.

1 Théorème de Frobenius

Soit M^n une sous-variété de $\mathbb{R}^N$. Supposons donné en chaque point $x \in M^n$ un sous-espace vectoriel, $D(x)$ de $T_x M$.

On suppose, en un sens que l'on va préciser, que $D(x)$ est C^∞ en x . On appelle la donnée de $x \rightarrow D(x)$ un champ de sous-espaces¹.

Définition 8.1. Le champ D est C^∞ s'il vérifie l'une des deux conditions équivalentes :

- (A) au voisinage de chaque point x , $D(x)$ est engendré par p champs de vecteurs C^∞ linéairement indépendants $X_1, \dots, X_p$
- (B) au voisinage de chaque point x , $D(x)$ est définie par $(n - p)$ formes différentielles (de degré 1), linéairement indépendantes en chaque point. En d'autres termes,

$$D(x) = \bigcap_{1 \leq j \leq n-p} \ker(\alpha_j)$$

On rappelle qu'une forme différentielle de degré un est la donnée en chaque point de $x \in M$ d'une forme linéaire sur $T_x M$, dont les coefficients dépendent de manière C^∞ du point. On notera que le procédé d'orthonormalisation de Schmidt conservant la propriété d'être C^∞ , on peut supposer que les X_i forment une famille orthonormée.

Pour montrer que (A) entraîne (B), considérons $Y_1, \dots, Y_{n-p}$ complétant la famille $(X_1, \dots, X_p)$ en une base de $T_x M$.

On peut encore supposer que $(X_1, \dots, X_p, Y_1, \dots, Y_{n-p})$ est orthonormée et C^∞ .

Alors $\alpha_i(x).h = \langle Y_i(x), h \rangle$ est une forme différentielle C^∞ sur M . Ces formes sont linéairement indépendantes sur $T_x M$ (car $\langle Y_i(x), Y_j(x) \rangle = \delta_{ij}$), et $D(x) = \bigcap_{1 \leq j \leq n-p} \ker(\alpha_j)$.

1. Souvent appelé dans la littérature « distribution » terminologie que nous avons évitée.

Étant donné un tel champ, il est naturel de considérer les sous-variétés tangentes à $D(x)$.

Définition 8.2. Une sous-variété V de M est dite tangente à D si et seulement si

$$\forall x \in V, T_x V \subset D(x)$$

On dit que V est une sous-variété intégrale de D si

$$\forall x \in V, T_x V = D(x)$$

Outre les sous-variétés intégrales, on s'intéresse surtout au cas des courbes tangentes ($\dim V = 1$).

Notons qu'il existe toujours des courbes tangentes à D : il suffit de prendre les trajectoires de champs de vecteurs X tels que $X(x) \in D(x)$. Par contre il n'existe pas toujours de sous-variété intégrales (sauf si $\dim D(x) = 1$!). Si une telle sous-variété V existe, on voit aisément que toute courbe tangente à D rencontrant V est entièrement contenue dans V . En effet, comme dans la démonstration de la proposition 2.7, il suffit de démontrer que si $\gamma(0) \in V$ alors $\gamma([0, \varepsilon]) \subset V$ pour ε assez petit. Or soient $X_1(x), \dots, X_p(x)$ des champs de vecteurs formant une base de $D(x)$. On peut alors écrire de manière unique

$$\dot{\gamma}(t) = \alpha_1(t)X_1(\gamma(t)) + \dots + \alpha_p(t)X_p(\gamma(t))$$

Posons $X(t, x) = \alpha_1(t)X_1(x) + \dots + \alpha_p(t)X_p(x)$, alors X vérifie les hypothèses de la Proposition 2.7, et donc, si $\gamma(0) \in V$, $\gamma([0, \varepsilon]) \subset V$.

Étant donné un champ D , les questions suivantes se posent naturellement, et sont étroitement liées

- soit $x \in M$. Quels sont les points que l'on peut atteindre par des courbes tangentes à D ? En d'autres termes, décrire

$$\mathcal{A}_x = \{\gamma(1) | \gamma(0) = x, \dot{\gamma}(t) \in D(\gamma(t)) \forall t \in [0, 1]\}$$

ensemble des points « accessibles » à partir de x .

- existe-t-il des sous-variétés intégrales pour D ?

- si $y \in \mathcal{A}_x$, décrire un chemin γ tangent à D reliant x à y ?

Théorème 8.3 (Frobenius). *Soit D un champ de sous-espaces. Pour chaque point de M passe une sous-variété intégrale si et seulement si quels que soient les champs de vecteurs X et Y tangents à D , $[X, Y]$ est aussi tangent à D .*

Démonstration : La nécessité est évidente d'après la proposition 2.7.

Pour l'existence, plaçons nous dans un ouvert assez petit, sur lequel $D(x) = \langle X_1(x), \dots, X_p(x) \rangle$. Traitons d'abord le cas simple où $[X_i, X_j] = 0$. Soit φ_t^j le flot de X_j , l'application

$$\begin{aligned} \psi : [-\varepsilon, \varepsilon]^p &\longrightarrow M \\ (t_1, \dots, t_p) &\longrightarrow \varphi_{t_1}^1 \circ \dots \circ \varphi_{t_p}^p(x_0) \end{aligned}$$

a pour image une sous-variété intégrale de D . En effet $(\frac{\partial}{\partial t_j} \psi)(t_1, \dots, t_p) =$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_j}(\varphi_{t_1}^1 \circ \dots \circ \varphi_{t_p}^p(x_0)) &= \frac{\partial}{\partial t_j}(\varphi_j^{t_j} \circ \varphi_1^{t_1} \circ \dots \circ \varphi_{j-1}^{t_{j-1}} \circ \varphi_{j+1}^{t_{j+1}} \circ \dots \circ \varphi_p^{t_p}(x_0)) \\ &= X_j(\varphi_j^{t_j} \circ \varphi_1^{t_1} \circ \dots \circ \varphi_{j-1}^{t_{j-1}} \circ \varphi_{j+1}^{t_{j+1}} \circ \dots \circ \varphi_p^{t_p}(x_0)) \end{aligned}$$

comme les X_j sont linéairement indépendants, $d\psi(t_1, \dots, t_p)$ est injective et a son image dans $D(\psi(t_1, \dots, t_p))$, qui est donc une sous-variété tangente à D . Comme elle a même dimension que D , c'est une sous-variété intégrale.

Montrons que l'on peut ramener le cas général à ce cas. Comme X_1 ne s'annule pas, d'après le théorème de redressement, on peut, quitte à restreindre U trouver un système de coordonnées où $X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$.

En soustrayant à X_2 un multiple de X_1 il s'écrit comme combinaison linéaire de $\frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ et en permutant les coordonnées, on peut supposer le coefficient de $\frac{\partial}{\partial x_2}$ non nul. Divisant par ce coefficient (ce qui oblige éventuellement à réduire encore U), on peut supposer qu'en x_0

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + \sum_{j \geq 3} a_2^j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

et ainsi de suite

$$X_k = \frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{j \geq k+1} a_k^j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

En retirant de X_2 successivement des multiples de $X_3, X_4, \dots, X_p$, on obtient

$$X'_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + \sum_{k \geq p+1} b_2^k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

et de même avec $X_3, \dots, X_p$.

Pour finir on a

$$X'_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{k \geq p+1} b_j^k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

On a toujours $[X'_j, X'_\ell] \in \langle X'_1, \dots, X'_p \rangle$ et $D(x) = \langle X'_1, \dots, X'_p \rangle$. Mais $[X'_j, X'_\ell] \in \langle \frac{\partial}{\partial x_{p+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \rangle$ et vu que $\langle X'_1, \dots, X'_p \rangle \cap \langle \frac{\partial}{\partial x_{p+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \rangle = \{0\}$ on a finalement $[X'_i, X'_j] = 0$. Comme les X'_i sont linéairement indépendants et tangents à D , $\langle X'_1, \dots, X'_p \rangle(x) = D(x)$, et donc les X'_j commutent entre eux. $\square$

Lorsque les hypothèses du théorème de Frobenius sont satisfaites, on dit que le champ de sous-espaces D est **intégrable**. L'ensemble d'accessibilité, $\mathcal{A}_x$ est alors égal à la « sous-variété intégrale » passant par x . On appelle « feuilletage » la décomposition de M^n en réunion des $\mathcal{A}_x$, appelées « feuilles ».

2 Les théorèmes de Chow et Sussmann

Que se passe-t-il si les conditions du théorème de Frobenius ne sont pas vérifiées ? À quoi ressemble alors l'ensemble $\mathcal{A}_x$?

Un premier élément de réponse est donné par le

Théorème 8.4 (Sussmann). *L'ensemble $\mathcal{A}_x$ est l'image d'une variété par une immersion.*

Démonstration : On rappelle qu'une immersion est une application de différentielle injective. Être une sous-variété immergée est une propriété locale : il suffit de montrer que $\mathcal{A}_x$ est réunion d'images d'ouverts par des immersions.

Soit $E = L^1([0, 1], \mathbb{R}^p)$, et si $u = (u_1, \dots, u_p) \in E$ on note γ_u la solution de

$$\begin{cases} \dot{\gamma}(t) &= X_u(\gamma(t)) = u_1(t)X_1(\gamma(t)) + \dots + u_p(t)X_p(\gamma(t)) \\ \gamma(0) &= x \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi : E &\rightarrow M \\ u &\mapsto \gamma_u(1) \end{aligned}$$

On vérifie que cette application est différentiable en u est bien définie d'après Cauchy-Lipschitz à paramètres (nous la calculerons ultérieurement) et de rang évidemment inférieur à la dimension de M .

Soit r le maximum du rang $D\varphi(u)$ lorsque u parcourt E , et u_0 un élément de E tel que $D\varphi(u_0)$ soit de rang r .

On prétend qu'il existe un ouvert $\mathcal{U}$ d'un espace de Banach F , et

$$\Psi : \mathcal{U} \rightarrow M$$

telle que

$$1) \forall v, \text{rang } D\Psi(v) = r$$

$$2) \Psi(\mathcal{U}) = \varphi(E)$$

En effet par semi-continuité inférieure du rang, $\text{rang } D\varphi(u) = r$ pour u dans un voisinage $\mathcal{W}$ de u_0 .

Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble des chemins u de $[0, 1]$ dans E , de la forme :

$$\begin{cases} u(t) = u_1(3t) \text{ pour un } u_1 \in \mathcal{W}, t \in [0, \frac{1}{3}] \\ u(t) = u_2(2 - 3t) \text{ pour } u_2 \in \mathcal{W}, t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ u(t) = v(3t - 2) \text{ pour } v \in E, t \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

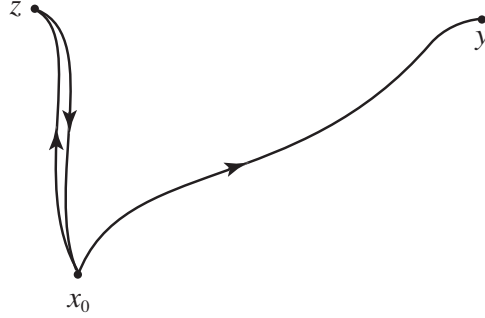


FIGURE 8.2 – Démonstration du théorème de Sussmann

On note alors $u = u_1 * u_2^{-1} * v$ et $\Psi(u_1, u_2, v) = \varphi(u_1 * u_2^{-1} * v)$.

On a bien que $u \in E$, et que $\Psi(u_1 * u_1 * v) = \varphi(v)$.

Montrons que $D\Psi$ est surjective. Or $\frac{\partial \Psi}{\partial u_1}(u_1, u_1, v)$ calcule la variation de $x(1)$ lorsque u_1 varie, pour x solution de

$$\begin{aligned} \dot{x} &= X_{u_1}(x(t))t \in [0, \frac{1}{3}] \\ &= -X_{u_2}(x(t))t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ &= X_v(x(t))t \in [\frac{2}{3}, 1] \end{aligned}$$

Or lorsqu'on varie u_1 , de δu_1 ,

$$\begin{aligned} \delta x(\frac{1}{3}) &= D\varphi(u_1)\delta u_1, \\ x(\frac{2}{3}) &= \varphi_2^{-1}(x(\frac{1}{3})) \text{ donc } \delta x(\frac{2}{3}) = d\varphi_2(x(\frac{1}{3}))\delta x(\frac{1}{3}) \end{aligned}$$

où $\varphi_1, \varphi_2, \psi$ sont les flots de X_{u_1}, X_{u_2}, X_v et $x(1) = \psi(x(\frac{2}{3}))$ d'où

$$\delta x(1) = d\psi(x(\frac{2}{3}))d\varphi_2(x(\frac{1}{3}))D\varphi(u_1)\delta u_1$$

Comme les flots sont des difféomorphismes, et que par hypothèse $D\varphi(u_1)$ est de rang r , on voit que

$$\frac{\partial}{\partial u_1}\varphi(u_1 * u_1^{-1} * v) = \frac{\partial}{\partial u_1}\psi(u_1, u_2, v)$$

est de rang r .

Nous pouvons maintenant conclure en utilisant le

Théorème 8.5 (Théorème du rang constant). *Soient E un espace de Banach, et F un espace de dimension finie. Soit $f : E \rightarrow F$ une application C^k ($k \geq 1$), telle que le rang de $df(x)$ soit constant au voisinage de x_0 et égal à p . Alors il existe g et h difféomorphismes locaux au voisinage de x_0 et $f(x_0)$ tels que, si $\pi = df(0) : E \rightarrow F$,*

$$h \circ f \circ g : x \longmapsto \pi(x)$$

En particulier si U est un voisinage assez petit de x_0 dans E , $f(U)$ est une sous-variété².

Corollaire 8.6. *Si X est une sous-variété, et $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue telle que pour tout $x \in X$, il existe Ω voisinage de x dans X , et il existe U voisinage de 0 dans un espace de Banach E , W voisinage de z dans $\mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow V$ tels que $df(x)$ est de rang constant au voisinage de 0 , $f(0) = z$, et $f(U) = V \cap W$. Alors $\varphi(X)$ est une « sous-variété immergée ».*

Démonstration du théorème du rang constant. Pour simplifier on suppose $x_0 = 0$ et $f(x_0) = 0$. Séparons les variables à la source et au but, afin que, écrivant

$$f(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) \in F_1 \oplus F_2$$

où $(x, y) \in E_1 \oplus E_2$, $\frac{\partial u}{\partial x}(0, 0)$ soit inversible.

Notons que l'on peut prendre $E_2 = \ker df(0)$, et pour E_1 un supplémentaire de E_2 , engendré par r vecteurs indépendants de E dont les images par $df(0)$ engendrent l'image de $df(x_0)$. On prendra $F_1 = \text{Im } df(0)$ et pour F_2 un supplémenaire de F_1 .

Alors par le théorème d'inversion locale, $g : (x, y) \longmapsto (u(x, y), y)$ est un difféomorphisme, et $f \circ g^{-1}(x, y) = (x, w(x, y))$. Mais $(x, y) \longmapsto (x, w(x, y))$ est de rang r au voisinage de 0 , si et seulement si $\frac{\partial w}{\partial y}$ est identiquement nulle au voisinage de 0 . On peut alors écrire $w(x, y) = \rho(x)$, et $f \circ g^{-1}(x, y) = (x, \rho(x))$.

Le difféomorphisme local $h : (u, v) \mapsto (u, v - \rho(u))$, vérifie $h \circ f \circ g^{-1}(x, y) = (x, 0)$ ce qui donne la réduction cherchée.

□

Démonstration du Corollaire. Ψ définit une topologie sur son image : celle dont les ouverts sont les images d'ouverts de X . Muni de cette topologie, on voit que chaque point possède un voisinage, pour cette topologie, qui est l'image d'un voisinage de $x \in X$. Mais $\varphi(\Omega)$ est une sous-variété, d'après le théorème du rang constant.

□

□

2. et si nous avons défini les sous-variétés d'un Banach, nous pourrions dire que $f^{-1}(x) \cap U$ est aussi une sous-variété.

Exercice 2.1. Montrer que l'on peut remplacer L^1 par C^0 dans la démonstration ci-dessus.

Remarque 2.1. Dans le cas d'un champ de vecteurs, une orbite est « plus » que l'image d'une immersion. L'immersion est injective, même si ce n'est pas nécessairement une sous-variété. L'explication détaillée nécessiterait de définir la notion de variété immergée, ce que nous ne souhaitons pas faire ici. Par contre, on voit que pour une immersion, j , la condition suivante nous assure que l'image n'a pas de « croisements » :

si $j(x) = j(y) = p$, il existe un voisinage U de x et V de y , U , un point z et un voisinage W de z tels que $j(z) = p$ et $j(U) \cup j(V) \subset j(W)$.

Pour voir que $\mathcal{A}_x$ vérifie cette condition, il suffit de montrer que si $x \in \Psi(\mathcal{U}) \cap \Psi(\mathcal{U}')$ où $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ sont deux ouverts, alors $\Psi(\mathcal{U}) \cap \Psi(\mathcal{U}')$ est un voisinage de x dans $\Psi(\mathcal{U})$.

Or si u_0, u'_0 sont les préimages de x dans $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$, on peut considérer $u'' = u * u^{-1} * u'$ qui a aussi pour image par ψ le point x . De plus l'image par Ψ d'un voisinage de u'' contient à la fois $\Psi(\mathcal{U})$ (image de $v \mapsto v * u^{-1} * u'$ pour v voisin de u) et $\Psi(\mathcal{U}')$ (image de $v' \mapsto u * u^{-1} * v'$ pour v' proche de u'). Quitte à restreindre les voisinages $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$, on voit que $\Psi(\mathcal{U}) \cup \Psi(\mathcal{U}') \subset \Psi(\mathcal{U}'')$.

Le théorème précédent nous permet de donner une condition suffisante pour que $\mathcal{A}_x$ soit égal à l'espace tout entier.

Théorème 8.7 (Chow). *Si M est connexe et les crochets itérés $[X_1, [X_2 \dots [X_{k-1}, X_k] \dots]$ de vecteurs tangents à D engendrent en chaque point tout l'espace, alors $\mathcal{A}_x = M$.*

Démonstration. D'après le théorème de Sussmann $\mathcal{A}_x$ est une sous-variété immergée. Comme les vecteurs tangents à une sous variété sont stables par crochets de Lie, que les X_i tangents à D sont évidemment tangents à $\mathcal{A}_x$, les crochets itérés sont tangents à $\mathcal{A}_x$. Il en résulte que l'espace tangent à $\mathcal{A}_x$ en z est égal à $T_z M$. Comme la sous-variété est immergée, on en conclut que $\mathcal{A}_x$ est ouverte dans M . Ce raisonnement montre que toutes les feuilles sont ouvertes, donc la réunion des feuilles distinctes de $\mathcal{A}_x$ est aussi ouvert. On conclut que $\mathcal{A}_x$ est à la fois ouvert et fermé, et par connexité $\mathcal{A}_x = M$. $\square$

Exemples 2.1. (A) Le monocycle

Dans ce cas $X_1(x, y, \theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$ et $X_2((x, y, \theta) = (0, 0, 1)$. On a donc $[X_1, X_2] = (\sin(\theta), -\cos(\theta), 0)$ et X_1, X_2, X_3 engendrent $\mathbb{R}^3$. On conclut d'après le théorème de Chow que l'on peut atteindre n'importe quelle position.

(B) L'entropie (C. Caratheodory).

On considère un système « thermodynamique » décrit par un certain nombre de paramètres (pression, volume, température, etc...). On considère aussi avoir fixé l'énergie totale du système, et nous considérons les « transformations adiabatiques réversibles ». Il n'est pas nécessaire de savoir ce que cela signifie dans la pratique. Il suffit de savoir que, pour un chemin (différentiable) dans l'espace des états, la

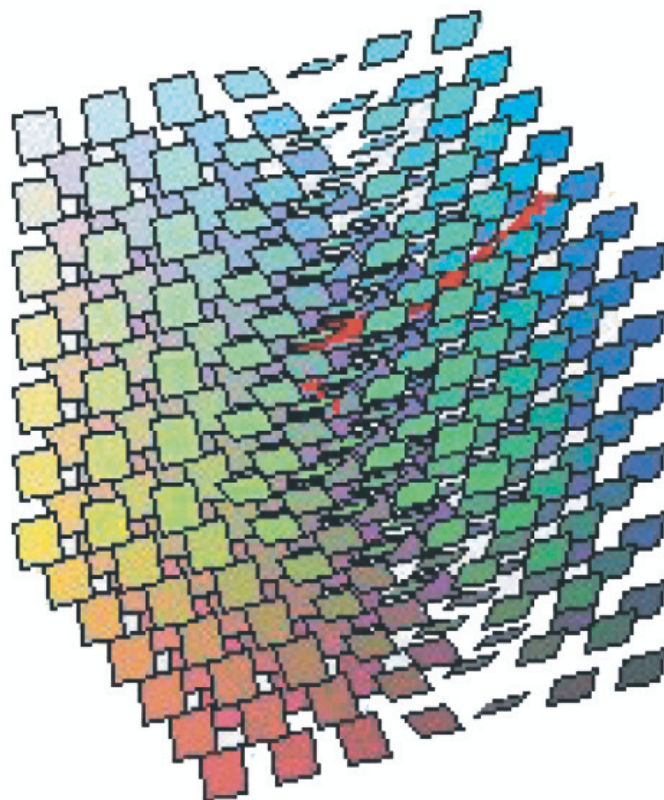


FIGURE 8.3 – Champ de plans non-intégrable et courbe tangente

propriété d'être un chemin « de transformations adiabatiques réversibles » est une propriété qui se vérifie à chaque instant, de manière infinitésimale³.

En d'autres termes, en chaque point x de l'espace des phases, il existe un sous-espace vectoriel $D(x)$, tel que le chemin d'états $\gamma(t)$ est « adiabatique réversible » si et seulement si γ est en chaque point tangent à $D(x)$.

La question se pose alors de savoir si on peut passer de n'importe quel état du système à n'importe quel autre par une telle transformation. Et si ce n'est pas le cas, que peut-on dire ?

Or si $D(x)$ est un champ d'hyperplans, et si on suppose une certaine « homogénéité » on a deux cas possibles⁴ :

- soit les crochets de champs de vecteurs de $D(x)$ engendrent l'espace, auquel cas on peut aller de n'importe quel point à n'importe quel autre par une transformation « adiabatique réversible »,
- soit les crochets de champs de $D(x)$ restent dans $D(x)$, auquel cas il existe un feuilletage dont les feuilles sont tangentes à $D(x)$.

3. Le lecteur pourra se convaincre que les « périphrases » des cours de physique de taupe pour définir de telles transformations se résument au fait que c'est une propriété du vecteur vitesse d'un chemin.

4. cette partie de l'argumentation n'est pas rigoureuse, comme le lecteur est invité à le vérifier.

Dans le cas décrit par la thermodynamique usuelle, le principe de Clausius⁵ nous dit que ce n'est pas le cas. Il y a des états qui ne peuvent être obtenus l'un de l'autre par une transformation « adiabatique réversible ».

Dans ce cas, supposons comme cela se produit en thermodynamique, que la condition infinitésimale d'adiabaticité soit donnée par une forme différentielle⁶, que l'on notera bien sûr δQ . Cela signifie que

$$\delta Q(x)h = 0 \Leftrightarrow h \in D(x)$$

Alors si S une fonction qui décrit localement les feuilles du feuilletage : $\mathcal{A}_x = \{y \mid S(y) = S(x)\}$. alors comme $T_x \mathcal{A}_x = \{h \mid \delta Q(x)h = 0\} = \{h \mid dS(x)h = 0\}$, et puisque $dS(x)$ et $\delta Q(x)$ ont même noyau elles sont proportionnelles : il existe donc une fonction que l'on notera $T(x)$, telle que $dS(x) = \frac{1}{T(x)}\delta Q(x)$.

On aura reconnu l'entropie S , et la température T .

(C) Boule roulant sans glissement

Nous allons maintenant traiter l'exemple de la contrainte de **roulement sans glissement** d'une boule sur un plan, qui s'exprime ainsi :

Soit $R(t)$ la matrice de rotation qui décrit la position de la boule à l'instant t , et $(x(t), y(t))$ les coordonnées de son centre.

Un point e de la boule, sera à l'instant t en

$$(x(t), y(t), 0) + R(t).e$$

La condition de roulement sans glissement nous dit que le point de contact avec la table, qui correspond à $(x(t), y(t), -1)$ et donc sur la boule à

$$R(t)e = (0, 0, -1) = v$$

a une vitesse nulle, c'est à dire

$$(\dot{x}(t), \dot{y}(t), 0) + \dot{R}(t)R(t)^{-1}v = 0.$$

Soit $\Omega(t)$ la matrice antisymétrique telle que $\dot{R}(t) = \Omega(t)R(t)$. La condition ci-dessus s'exprime par $(\dot{x}(t), \dot{y}(t), 0) = -\Omega(t)v$

La position de la boule, qui est décrite par un point d'une sous-variété de dimension 5, $\mathbb{R}^2 \times SO(3)$ dans l'espace $\mathbb{R}^2 \times M_3(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{11}$, et la condition de « roulement sans glissement » s'exprime par la relation satisfaite par le vecteur vitesse $(\dot{Z}(t), \dot{R}(t))$:

$$\dot{Z}(t) - \dot{R}(t)R(t)^{-1}v = 0.$$

Il s'agit de deux conditions, qui déterminent en chaque point de $\mathbb{R}^2 \times SO(3)$ un sous-espace de dimension 3 de son espace tangent.

5. il s'agit d'un fait expérimental, irréductible à une démonstration mathématique : il n'existe pas de chemin adiabatique réversible dont le seul effet est de refroidir un corps isolé en produisant du travail mécanique.

6. Ici ce n'est rien d'autre qu'une forme linéaire définissant $D(x)$ en x , et dépendant de manière C^∞ de x .

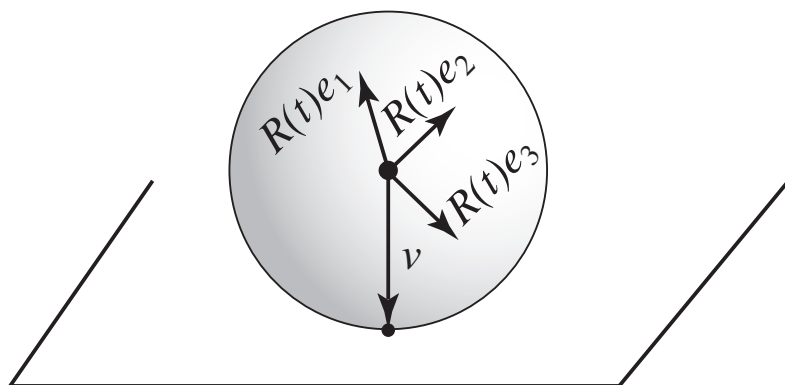


FIGURE 8.4 – Boule roulant sans glisser sur un plan

Si on pose $\Omega(t) = \dot{R}(t)R(t)^{-1}$ qui est une matrice antisymétrique, et s'identifie donc à un vecteur $\omega(t)$ ($\Omega(t) = L_{\omega(t)}$), appelé le vecteur instantané de rotation.

L'espace $D(Z, R)$ est alors engendré par

$X_1 = (0, 1, e_1)$, générateur du roulement sans glissement dans la direction e_1

$X_2 = (1, 0, e_2)$, générateur du roulement sans glissement dans la direction e_2

$X_3 = (0, 0, e_3)$, générateur du roulement sans glissement autour de l'axe vertical e_3

On a alors que $[X_1, X_2] = (0, 0, e_1 \wedge e_2) = X_3$, et $[X_1, X_3] = (0, 0, e_1 \wedge e_3) = (0, 0, -e_2)$, $[X_2, X_3] = (0, 0, e_2 \wedge e_3) = (0, 0, e_1)$. Comme les vecteurs $X_1, X_2, X_3 = [X_1, X_2], [X_3, X_1], [X_3, X_2]$ forment en chaque point une base de $\mathbb{R}^2 \times T_R SO(3)$ on voit que D vérifie la condition de Chow. La connexité de l'espace des positions permet de dire que tout point peut-être atteint par un chemin tangent au champ de sous-espaces : on peut joindre deux positions quelconques de la boule par un roulement sans glissement sur le plan.

On peut d'ailleurs constater que les champs X_1, X_2 suffisent pour que leurs crochets itérés engendrent l'espace tangent tout entier. Il faut noter que les roulements dans la direction e_1 et e_2 préservent la composante verticale du moment cinétique. Ces mouvements peuvent en fait être réalisés sans force extérieure à la boule (autre que les forces de frottement du plan).

Cependant le théorème de Chow nous permet de réaliser une rotation quelconque autour de l'axe vertical en composant de tels roulements. Donc, bien que la composante verticale du moment cinétique de la boule soit de dérivée constante, cette composante verticale peut varier. L'explication est que si α_v est la forme différentielle mesurant cette composante verticale, $\ker(\alpha_v)$ qui contient $D(Z, R)$ mais est non intégrable (en effet, $X_1, X_2 \in \ker(\alpha_v)$ mais $\alpha_v(X_3) = 1$).

Un phénomène analogue explique pourquoi un chat lâché tête en bas, peut retomber sur ses pattes malgré la conservation du moment cinétique.

Une autre manière de revoir la dualité « intégrabilité/non-intégrabilité » est en termes de **formes différentielles** et leurs **facteurs intégrants**.

Soit alors α une forme différentielle de degré un sur M ne s'annulant pas. Cherchons la condition pour que $D(x) = \{h \mid \alpha(x)h = 0\}$ soit intégrable.

Définissons pour cela⁷

$$d\alpha(x)(X(x), Y(x)) = d(\alpha(x)X(x))Y(x) - d(\alpha(x)Y(x))X(x) - \alpha(x)[X, Y](x)$$

L'objet ainsi défini est bilinéaire alterné en les champs de vecteurs X et Y . Comme les différents termes ne dépendent pas seulement de la valeur de X et Y en x , mais aussi de leur dérivée, on pourrait penser que le résultat aussi. Or un miracle se produit

Proposition 8.8.

$$d\alpha(X, Y)(x) = D(\alpha(x)X(x))Y(x) - D(\alpha(x)Y(x))X(x) - \alpha(x)([X, Y](x))$$

ne dépend que de la valeur de X et Y en x . Cela définit donc une forme bilinéaire antisymétrique sur l'espace tangent à x , que l'on note encore $d\alpha$.

De plus le champ $D\alpha$ défini par α est intégrable, si et seulement si $d\alpha$ s'annule sur $\ker \alpha(x)$. Dans ce cas il existe des fonctions, f, g telles que $\alpha = f \cdot dg$

Démonstration. En utilisant une carte de la sous-variété, il suffit de le démontrer dans $\mathbb{R}^n$, pour $x = 0$. Soient X_0 et X_1 des champs de vecteurs qui coïncident en 0. Pour montrer que $d\alpha(X_0, Y)(0) = d\alpha(X_1, Y)(0)$, il suffit de montrer par linéarité que si $X(0) = 0$, alors $d\alpha(X, Y)(0) = 0$.

$$\begin{aligned} & [D(\alpha)(0)X(0) + \alpha(0)dX(0)]Y(0) - [D(\alpha)(0)Y(0) + \alpha(0)dY(0)]X(0) - \\ & (\alpha(0)(dX(0)Y(0) - dY(0)X(0))) = D\alpha(0)(X(0), Y(0)) - D\alpha(0)(Y(0), X(0)) \end{aligned}$$

On voit donc que $d\alpha$ ne dépend que de $X(0), Y(0)$ et est égale à la partie antisymétrique de $D\alpha$ ⁸.

On appelle $d\alpha$ la différentielle extérieure de α .

□

3 Exercices

- (A) Soient $X_1, \dots, X_n$ des champs de vecteurs sur V formant en chaque point x de V une base de $T_x V$. Montrer que tout champ de vecteurs X sur V s'écrit comme combinaison linéaire à coefficients $C^\infty(V)$ des X_j .

7. Attention, dans ce qui suit d n'est pas la différentielle usuelle, mais un « opérateur » associant à une un-forme différentielle une deux-forme. La différentielle usuelle est maintenant notée D , afin d'éviter toute confusion. Nous sommes là encore tributaires des **notations standard**.

8. Dans $\mathbb{R}^n$, car $D\alpha$ n'a pas de sens intrinsèque dans une sous-variété.

Montrer que tout champ de vecteurs sur $SO(n)$ est combinaison linéaire à coefficients C^∞ des X_A , où A est antisymétrique.

- (B) Soit $\mathfrak{X}^\infty(M)$ l'ensemble des champs de vecteurs C^∞ sur M et $X \in \mathfrak{X}^\infty(M)$ φ_t^X son flot.

Soit $\Psi : M \times \mathfrak{X}^\infty \rightarrow M$ l'application donnée par $\Psi(x_0, X) = \varphi_1^X(x_0)$

Calculer $D\Psi$. Indication : après avoir montré que Ψ est différentiable, on pourra utiliser les résultats de la théorie des perturbations pour calculer les différentielles partielles de Ψ par rapport à x_0 et X .

- (C) Soit G le groupe des difféomorphismes d'une variété connexe M contenant le flot de $Y_1, \dots, Y_p$ où les Y_j engendrent l'espace tangent à M .

- (a) Montrer que G agit transitivement sur M (i.e. $\forall x, y \in M, \exists g \in G \mid gx = y$).
 (b) Soit $D(x)$ une distribution sur une variété M de dimension 3, engendrée (localement) par les champs de vecteurs X_1, X_2 .

Montrer (sans utiliser le théorème de Chow !) que si $X_1, X_2, [X_1, X_2]$ engendrent $T_x M$, alors deux points voisins de x sont toujours joints par une courbe tangente à D . On pourra au choix

- i. Calculer la différentielle de :

$$(1) \quad (t_1, t_2, t_3) \mapsto \exp(t_1 X_1) \exp(t_2 X_2) \exp(-|t_3|^{1/2} X_1) \exp(\epsilon(t_3) X_2) \exp(-|t_3|^{1/2} X_1) \exp(-\epsilon(t_3) X_2) x_0$$

où $\epsilon(t) = \text{signe}(t)(|t|)^{1/2}$

- ii. Raisonner sur le groupe G des difféomorphismes engendré par les flots des X_j , et montrer que si φ^t est le flot de X_i , G contient les difféomorphismes $(\varphi^t)_* X_j$, donc le flot de $Z_\epsilon = X_i + \epsilon[X_i, X_j] + \epsilon^2 \dots$ et utiliser l'exercice (C).
 iii. Estimer le temps maximal nécessaire pour atteindre un point (supposant tous les champs de vecteurs de norme 1).
 Commencer par le cas $n = 3, k = 2$, et montrer que l'on peut joindre deux points suffisamment proches, v et v' par une courbe de longueur au plus $d(v, v')^{1/2}$.
 (c) Soit D un champ de sous-espaces différentiable, et $\mathcal{A}_x$ une feuille du feuilletage donné par le théorème de Sussmann. On veut déterminer la dimension de cette feuille et plus précisément son espace tangent.
 i. On note G_D le groupe engendré par les flots de champs de vecteurs tangents à D , et G_{D, x_0} le sous-groupe des éléments qui fixent x_0 (i.e. $\{\varphi \in G_D \mid \varphi(x_0) = x_0\}$). Montrer que $G_D(x)$ agit sur $T_x M$ par sa différentielle.
 ii. Montrer que $T_x \mathcal{A}_x$ est invariant par $G_D(x)$. En déduire que $T_x \mathcal{A}_x$ contient le plus petit sous-espace invariant par $G_D(x)$ contenant $D(x)$, noté $\Delta_D(x)$. On veut montrer que $T_x \mathcal{A}_x$ est égal à ce sous-espace $\Delta_D(x)$.

- iii. Utiliser l'exercice (B) pour montrer que $T_x\mathcal{A}_x$ est contenu dans $\Delta_D(x)$
- iv. Montrer en utilisant le théorème de Frobenius que $\Delta(x)$ est stable par crochet de Lie et donc contient les crochets itérés d'éléments de D (i.e. les $[X_1, [X_2, \dots [X_{k-1}, X_k] \dots]]$)
- (d) Étudier le problème de la manœuvre d'une voiture, les roues avant faisant un angle de φ avec l'axe de la voiture, celle-ci faisant un angle égal à θ avec l'axe Ox . On note ℓ la distance entre les essieux. Écrire les équations du mouvement et des champs de vecteurs engendrant le champ de sous-espaces associé.
- (e) Étudier de même le problème de la manœuvrabilité d'un semi-remorque à deux remorques.

Avertissement : La lecture de chapitres des ouvrages ci-dessous fait partie intégrante du cours. Il est illusoire de croire que l'on peut acquérir une culture mathématique raisonnable en se limitant à la lecture des polycopiés des cours suivis.

Bibliographie

Sur variétés et sous-variétés : les indispensables

- [Do Carmo] M. Do Carmo *Differential Geometry of curves and surfaces* Prentice-Hall, 1976.
- [Milnor] J. Milnor *Topology from the differentiable viewpoint*. The University Press of Virginia. Charlottesville, 1965.
- [Milnor 2] J. Milnor *Morse Theory*. Princeton University Press, 1966.
- [Munkres] J. Munkres *Elementary differential Topology*. Princeton University Press, 1966.

Ouvrages plus avancés

- [Chavel] I. Chavel *Introduction to riemannien Geometry*. Cambridge University Press, 2006 (2nd édition)
- [Dieudonné] J. Dieudonné *Éléments d'Analyse*. Gauthier-Villars, 1974.
- [Gallot-Hulin-Lafontaine] S. Gallot, D. Hulin et J. Lafontaine *VRiemannian Geometry*. Springer, 2004 (3rd édition)
- [deRham] G. deRham *Variétés différentiables*. Hermann, Paris, 1960
- [Sternberg] S. Sternberg, *Lectures on Differential Geometry*. Prentice Hall, 1962

Sur Frobenius, Chow et la robotique :

- [Bellaïche-Risler] A. Bellaïche, J.J. Risler. *Sub-Riemannian Geometry*. Birkhäuser, 1996.
- [Bellaïche-Jean-Risler] A. Bellaïche, F. Jean, J.-J. Risler. *The Geometry of nonholonomic systems*.
[ftp ://ftp.laas.fr/pub/ria/promotion/chap2.pdf](ftp://ftp.laas.fr/pub/ria/promotion/chap2.pdf)
- [Godbillon] C. Godbillon *Géométrie différentielle et Mécanique analytique* Hermann, 1985.

Articles de recherche

[Kervaire-Milnor]

Michel A. Kervaire ; John W. Milnor. *Groups of Homotopy Spheres : I* The Annals of Mathematics, 2nd Ser., Vol. 77, No. 3. (May, 1963), pp. 504-537.