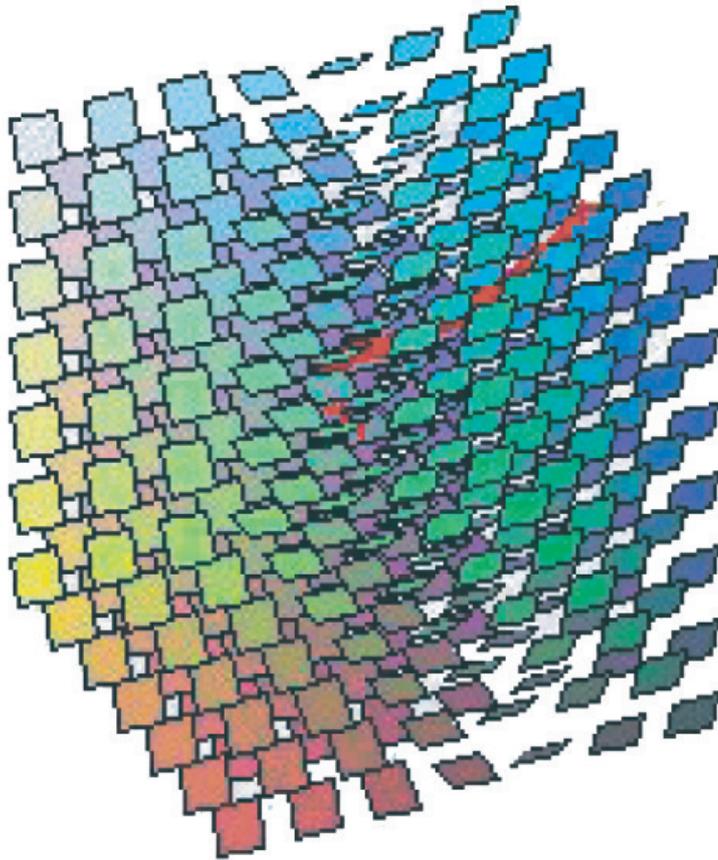


Claude VITERBO

Systemes Dynamiques



Majeure de Mathématiques 2005-2006

Table des matières

1	Rappels, systèmes hyperboliques, stabilité structurelle	7
1	Théorèmes de Picard et de Cauchy-Lipschitz	7
2	Théorème des fonctions implicites, et définition des sous-variétés	8
2	Théorème de Grobman-Hartman et des variétés stable et instable	11
1	Théorème de linéarisation de Grobman-Hartman	11
2	Exercices	17
3	Chow, Frobenius et l'accessibilité.	23
1	Notations	23
2	Flots sur les sous-variétés, crochets de Lie	23
2.1	Champs de vecteurs sur les sous-variétés	23
3	Crochets de Lie	25
4	Propriétés géométriques des champs de sous-espaces	30
5	Théorème de Frobenius et Chow	31
6	Les théorème de Chow et Sussmann	34
7	Exercices	42
4	Théorie des perturbations, solutions périodiques : Lotka-Volterra, bifurcation de Hopf	47
1	Étude de l'équation de Lotka-Volterra	47
2	Exercices	51
5	Théorie des perturbations non-linéaire	55
1	Méthode de base	55
2	La méthode de Lindstedt	58
2.1	Programmes Maple	60
3	Le pendule non-linéaire de longueur variable avec frottement : un exemple d'hystérésis	61
4	Programmes Maple	62
5	Théorie des perturbations singulières	64
6	Programmes Maple	71
6.1	Équation de Van der Pol : $\dot{x} = y, \varepsilon \dot{y} = y - y^3/3 - x$	71

Table des figures

1.1	Carte pour une sous-variété de dimension 1 du plan	8
3.1	Monocycle et ses coordonnées (d'après le chapitre 4 de [B-J-R])	31
3.2	Démonstration du théorème de Sussmann	36
3.3	Sous-variété immergée qui ne peut être un \mathcal{A}_x	37
3.4	Champ de plans non-intégrable et courbe tangente	38
3.5	Boule roulant sans glisser sur un plan	40
4.1	Champ de vecteurs de l'équation de Lotka-Volterra perturbée :premier cas	49
4.2	Champ de vecteurs de l'équation de Lotka-Volterra perturbée : second cas	49
4.3	Champ de vecteurs de l'équation de Lotka-Volterra perturbée : application de Poincaré Bendixson	50
5.1	Amplitudes des solutions périodiques au voisinage de la résonance paramé- trique : le rouge correspond aux solutions périodiques instables, le vert aux solutions périodiques stables.	64
5.2	En vert : $g(x, y) = 0$. En bleu : trajectoires couche-limite. En rouge : trajectoires proches de l'équation limite	71

Chapitre 1

Rappels, systèmes hyperboliques, stabilité structurelle

Le théorie des systèmes dynamiques explore les propriétés globales des équations différentielles ordinaires, c'est à dire du type

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x} = X(t, x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

On supposera dans la suite, sauf mention explicite du contraire, que l'équation vérifie les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz, et que les solutions sont définies pour tout temps. Les démonstration des théorèmes rappelés se trouvent par exemple dans les premiers chapitres de [Viterbo].

1 Théorèmes de Picard et de Cauchy-Lipschitz

Théorème 1.1 (Picard , version à paramètres). *Si $T : E \times F \rightarrow F$ donnée par $(\lambda, x) \rightarrow T_\lambda(x)$ est une famille C^p de contractions C^p de rapport $k < 1$, alors le point fixe unique de T_λ , $x(\lambda)$ est tel que $\lambda \rightarrow x(\lambda)$ est C^p .*

Soit $\dot{x} = X(t, x)$ une équation différentielle où $X : I \times \Omega \rightarrow E$ est définie sur un ouvert Ω d'un espace de Banach, E . On veut résoudre l'équation $\dot{x} = X(t, x)$ avec condition initiale $x(0) = x_0 \in \Omega$.

Théorème 1.2 (Théorème de Cauchy-Lipschitz). *Supposons X continue et Lipschitzienne en la seconde variable. Alors, pour tout $\tau \in I$, $u_0 \in \Omega$ il existe $\delta > 0$ $\alpha > 0$ tel que*

le système

$$\begin{cases} \dot{x} &= X(t, x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

possède une unique solution définie sur $]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$ quel que soit $x_0 \in B(u_0, \delta)$, $t_0 \in]\tau - \delta, \tau + \delta[$

Pour les démonstrations on renvoie à [Viterbo] chapitre 2.

2 Théorème des fonctions implicites, et définition des sous-variétés

Théorème 1.3 (Fonctions implicites). Soit U, V des ouverts dans des espaces de Banach E_1, E_2 et $f : U \times V \rightarrow F$ une application C^k ($k \geq 1$). On suppose $D_2f(x_0, y_0) \in \mathcal{L}(E_2, F)$ inversible (où $f(x_0, y_0) = 0$). Alors il existe des voisinages U' de x_0 et V' de y_0 et une application $\varphi \in C^k(U', V')$ telle que

$$\forall (x, y) \in U' \times V' \quad , \quad f(x, y) = 0 \iff y = \varphi(x)$$

Théorème 1.4 (Théorème d'inversion locale). Si $\varphi : U \rightarrow V$ est C^k et $d\varphi(x_0)$ est un isomorphisme, alors il existe des ouverts U', V' contenant x_0 et $y_0 = \varphi(x_0)$ et une application $\psi \in C^k(V', U')$ telle que $\varphi \circ \psi = id$.

Définition 1.1. Un sous-ensemble M de \mathbb{R}^n est une sous-variété si en tout point x_0 de M , il existe un voisinage U de x_0 dans \mathbb{R}^n et un difféomorphisme φ , défini sur U , d'image un voisinage V de 0, tel que

$$\begin{aligned} \varphi : W_1 &\longrightarrow W_2 \\ \varphi(W_1 \cap M) &= \varphi(W_1) \cap \mathbb{R}^p \times \{0\} . \end{aligned}$$

Le nombre p est unique et appelé dimension de M en x .

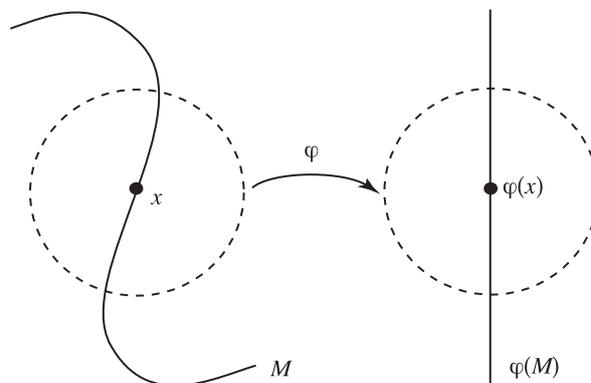


FIGURE 1.1 – Carte pour une sous-variété de dimension 1 du plan

cf. [Viterbo] chapitres 2 et 6.

Théorème 1.5 (Théorème du rang constant). *Soient E un espace de Banach, et F un espace de dimension finie. Soit $f : E \rightarrow F$ une application C^k ($k \geq 1$), telle que le rang de $df(x)$ soit constant au voisinage de x_0 . Alors il existe g et h difféomorphismes locaux au voisinage de x_0 et $f(x_0)$ tels que*

$$h \circ f \circ g : (x_1, \dots, x_n) \longmapsto (x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0)$$

En particulier si U est un voisinage assez petit de x_0 dans E , $f(U)$ et $f^{-1}(x) \cap U$ sont des sous-variétés.

Démonstration du théorème du rang constant. Pour simplifier on suppose $x_0 = 0$ et $f(x_0) = 0$. On notera r le rang de $df(0)$. Séparons les variables à la source et au but, afin que, écrivant

$$f(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) \in F_1 \oplus F_2$$

où $(x, y) \in E_1 \oplus E_2$, $\frac{\partial u}{\partial x}(0, 0)$ soit inversible.

Notons que l'on peut prendre $E_2 = \ker df(0)$, et pour E_1 un supplémentaire de E_2 , engendré par r vecteurs indépendants de E dont les images par $df(0)$ engendrent l'image de $df(x_0)$.

Alors par le théorème d'inversion locale, $g : (x, y) \longmapsto (u(x, y), y)$ est un difféomorphisme, et $f \circ g^{-1}(x, y) = (x, w(x, y))$. Mais $(x, y) \longmapsto (x, w(x, y))$ est de rang r au voisinage de 0, si et seulement si $\frac{\partial w}{\partial y}$ est identiquement nulle au voisinage de 0. On peut alors écrire $w(x, y) = \rho(x)$, et $f \circ g^{-1}(x, y) = (x, \rho(x))$.

Le difféomorphisme local $h : (u, v) \mapsto (u, v - \rho(u))$, vérifie $h \circ f \circ g^{-1}(x, y) = (x, 0)$ ce qui donne la réduction cherchée.

□

Chapitre 2

Théorème de Grobman-Hartman et des variétés stable et instable

1 Théorème de linéarisation de Grobman-Hartman

Soit $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un endomorphisme inversible n'ayant pas de valeur propre de module 1. Il existe alors une décomposition de \mathbb{R}^n en somme directe de E^+ et E^- , et une norme sur \mathbb{R}^n , dite adaptée¹, pour laquelle $\|A_{E^+}^{-1}\| < k < 1$ et $\|A_{E^-}\| < k < 1$. On dit alors que A est **hyperbolique**.

Soit h une application C^1 sur \mathbb{R}^n telle que $\|h\|_1 < \delta$, où $\|\cdot\|_1$ désigne la norme C^1 .

Théorème 2.1 (Grobman-Hartman). *Pour δ assez petit, il existe un homéomorphisme ϕ , de la forme $I + \rho$ avec $\|\rho\|_0 < +\infty$, tel que $(A + h) = \phi^{-1} \circ A \circ \phi$*

Lemme 1.1. *Soit A une application linéaire inversible, et $\epsilon > 0$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que si $\|h\|_1 \leq \delta$, $A + h$ est un difféomorphisme de \mathbb{R}^n , et $(A + h)^{-1} = A^{-1} + g$ avec $\|g\|_1 < \epsilon$.*

Démonstration. L'équation $Ax + h(x) = y$ est équivalente à $x = A^{-1}(y) - A^{-1}h(x)$. Il s'agit de trouver un point fixe de $T_y : x \mapsto A^{-1}(y) - A^{-1}h(x)$ qui est contractante si $\delta < \|A\|^{-1}$. Son point fixe $x(y)$ dépend de manière C^1 de y et définit donc une application

$$y \mapsto A^{-1}y - A^{-1}h(x(y))$$

inverse de $A + h$. Cette application est bien de la forme $y \mapsto A^{-1}y + g(y)$. L'application g dépend bien sûr de h . Si on la note g_h , et si on regarde h comme un paramètre dans $C_b^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, espace des applications de norme C^1 finie, muni de la norme C^1 , on voit que

1. cf. exercice 1

$h \mapsto A^{-1} + g_h$ dépend continûment de h en topologie C^1 (car $h \mapsto x_h$ est continue par Picard à paramètres, et $g = h \circ x_h$) et donc pour δ assez petit, on aura $\|g_h\| < \varepsilon$. \square

Lemme 1.2. *Pour δ assez petit, et $\|h_1\|_1, \|h_2\|_1 \leq \delta$, il existe une application unique ϕ de la forme $I + \rho$ avec $\|\rho\|_0 < +\infty$, tel que $\phi \circ (A + h_1) = (A + h_2) \circ \phi$*

Démonstration. On cherche ρ tel que

$$(I + \rho) \circ (A + h_1) = (A + h_2) \circ (I + \rho)$$

soit

$$(A + h_1) + \rho \circ (A + h_1) = A + A \circ \rho + h_2 \circ (I + \rho)$$

ou encore en multipliant par $(A + h_1)^{-1}$ à droite,

$$\rho = [A \circ \rho + h_2 \circ (I + \rho) - h_1] \circ (A^{-1} + g_1)$$

ou multipliant par A^{-1} à gauche,

$$\rho = A^{-1}[\rho \circ (A + h_1) - h_2 \circ (I + \rho) + h_1]$$

On prend alors la projection de la première égalité sur E^- et de la seconde sur E^+ et on obtient

$$(1) \quad \begin{cases} \rho^+ = A^{-1}[\rho^+ \circ (A + h_1) - h_2^+ \circ (I + \rho) + h_1^+] \\ \rho^- = [A \circ \rho^- + h_2^- \circ (I + \rho) - h_1^-] \circ (A^{-1} + g_1) \end{cases}$$

Or l'application Φ de $C^0(\mathbb{R}^n, E^+ \oplus E^-)$ dans lui-même donnée par

$$\Phi : (\rho^+, \rho^-) \mapsto (A^{-1}[\rho^+ \circ (A + h_1) - h_2^+ \circ (I + \rho) + h_1^+], [A \circ \rho^- + h_2^- \circ (I + \rho) - h_1^-] \circ (A^{-1} + g_1))$$

est contractante.

En effet, la norme de la différence des premières composantes correspondant à ρ et σ est donnée par

$$\|A^{-1}[(\rho^+ - \sigma^+) \circ (A + h_1) - h_2^+ \circ (I + \rho) - h_2^+ \circ (I + \sigma)]\| \leq k\|\rho^+ - \sigma^+\| + \|dh_2^+\|\|\rho - \sigma\|$$

et pour les secondes composantes,

$$\| [A \circ (\rho^- - \sigma^-) + h_2^- \circ (I + \rho) - h_2^- \circ (I + \sigma)] \circ (A^{-1} + g_1) \| \leq k \|\rho^- - \sigma^-\| + \|dh_2^-\| \|\rho - \sigma\|$$

En ajoutant les deux composantes,

$$\|\Phi(\rho^+, \rho^-) - \Phi(\sigma^+, \sigma^-)\| \leq (k + \delta) \|\rho - \sigma\|$$

On en déduit que pour δ assez petit, Φ est contractante, et a donc un point fixe unique \square

Démonstration du théorème de Grobman-Hartman. Soit ϕ l'application associée par le lemme précédent à $h_1 = 0, h_2 = h$ et ψ celle associée à $h_1 = h, h_2 = 0$.

On a donc $\phi \circ A = (A + h) \circ \psi$ et $A \circ \psi = \psi \circ (A + h)$, d'où il résulte que $\psi \circ \phi \circ A = \psi \circ (A + h) \circ \phi = A \circ \psi \circ \phi$, et $\psi \circ \phi$ commute à A . De même on montre que $\psi \circ \phi$ commute à $(A + h)$. Mais d'après le lemme, appliqué à $h_1 = h_2$, il existe une unique application² commutant à A , ou à $A + h$, qui est donc nécessairement égale à l'identité. Il en résulte que $\phi \circ \psi = \psi \circ \phi = I$, ce qui termine la démonstration. \square

Corollaire 1 (Linéarisation de germes hyperboliques). *Soit f une application différentiable de E dans E telle que $f(0) = 0$ et $df(0)$ soit hyperbolique. Alors il existe un homéomorphisme ϕ d'un voisinage de 0 préservant l'origine et tel que $\phi \circ f \circ \phi^{-1} = df(0)$.*

Démonstration. Posons $A = df(0)$. Au voisinage de 0 on peut écrire $f(x) = Ax + R(x)$ où $\lim_{x \rightarrow 0} |R(x)|/|x| = 0$. On a donc $\|R|_{B(0,r)}\|$ tend vers 0 avec r . Soit alors r assez petit pour que cette norme soit inférieure au δ donné par le théorème de Grobman-Hartman. On peut alors étendre R en \tilde{R} à E tout entier, pour que $\|\tilde{R}\| < \delta$, et alors on a un ϕ qui conjugue $\tilde{f} : x \mapsto Ax + \tilde{R}(x)$ et A . Comme $\phi(0) = \phi(\tilde{f}) = A\phi(0)$, on a $\phi(0) = 0$ (car 1 n'est pas valeur propre de A). On en conclut puisque $f = \tilde{f}$ au voisinage de 0 que le germe de f en 0 est conjugué à A . \square

Remarque 1.1. Attention, l'unicité dans Grobman-Hartman, n'est vraie que parmi les applications de la forme $I + \rho$ avec ρ bornée. Par exemple si $h_1 = h_2 = 0$, on peut prendre pour h n'importe quelle homothétie. Mais une homothétie distincte de l'identité, n'est pas de la forme $I + \rho$ avec ρ bornée.

Dans le cadre du corollaire, après "localisation", le germe de ϕ n'est plus unique.

2. parmi celles de la forme $I + \rho$, avec ρ bornée, mais il est clair qu'une composée de telles applications est de ce type.

Si on cherche à résoudre le problème analogue de conjugaison pour un flot de champ de vecteur ψ_t , flot X , tel que $dX(0) = C$ il faut que C ait ses valeurs propres de partie réelle non nulle, afin que e^{tC} soit hyperbolique.

Corollaire 2. *Soit X un champ de vecteurs autonome, tel que $X(0) = 0, dX(0) = C$ soit hyperbolique. Alors il existe un ϕ , homéomorphisme d'un voisinage de zéro, tel que $\psi_t \circ \phi = \phi \circ e^{tC}$.*

Démonstration. On peut supposer, sans modifier le germe de X en 0, que $X = C$ hors d'un compact. On aura alors que si ψ_t est le flot de X , pour t fixé, $\psi_t(x) - e^{tC}$ est borné sur \mathbb{R}^n . On résout d'abord le cas $\psi = \psi_1$, qui est de la forme $\psi(x) = e^C x + R(x)$ ce qui fournit, d'après Grobman-Hartman un homéomorphisme local, ϕ , tel que $\psi \circ \phi = \phi \circ e^C$.

Posant $\phi_t = \psi_{-t} \circ \phi \circ e^{tC}$, on a

$$\psi_1 \circ \phi_t = \psi_1 \circ \psi_{-t} \circ \phi \circ e^{tC} = \psi_{-t} \psi_1 \circ \phi \circ e^{tC} = \psi_{-t} \circ \phi \circ e^C \circ e^{tC} = \phi_t e^C$$

Si ϕ est de la forme $I + \rho$ avec ρ borné, on a que ϕ_t est de la même forme, car

$$\psi_{-t} \circ (I + \rho) \circ e^{tC} = \psi_{-t} e^{tC} + \psi_{-t} \rho \circ e^{tC}$$

Or $\psi_t - e^{tC}$ est borné sur \mathbb{R}^n , et en appliquant ψ_{-t} , on voit que $\psi_{-t} e^{tC} - I$ est aussi borné. Comme $\psi_{-t} \rho \circ e^{tC}$ est borné puisque ρ l'est, on conclut que $\phi_t = I + \rho_t$ avec ρ_t borné. On peut alors appliquer l'unicité du théorème de Grobman-Hartman, et conclure que $\phi = \phi_t = \psi_{-t} \circ \phi \circ e^{tC}$, c'est-à-dire que ϕ conjugue ψ_t et e^{tC} . \square

Soit x_0 un point fixe hyperbolique d'un difféomorphisme. Notons que si E^+ et E^- sont les sous-espaces invariants par A , ils sont invariants par e^{tA} . La conjugaison avec ρ permet de dire que $\rho(E^+)$ et $\rho(E^-)$ sont invariants par ψ .

De plus, il est facile de voir que si x est dans un voisinage de x_0 , on a que $\psi^k(x)$ tend vers x_0 si et seulement si $x \in \rho(E^-)$.

On en déduit que l'ensemble

$$W^s(x_0) = \bigcup_{k \geq 1} \psi^{-k}(\rho(E^-))$$

est exactement l'ensemble des points x tels que $\psi^k(x)$ tend vers x_0 . On l'appelle la **variété stable**. La variété stable de ψ^{-1} s'appelle **variété instable** de x_0 , et se note $W^u(x_0)$. Ces deux variétés sont invariantes par ψ .

Nous avons seulement montré que $W^u(x_0), W^s(x_0)$ sont localement des images par un homéomorphisme d'un disque ouvert (des sous-variétés topologiques immergées).

En fait, si ψ est C^k , les sous-variétés stables et instables sont C^k , bien que ρ ne soit pas en général C^k (cf. exercice 4).

Nous allons voir que contrairement à la linéarisation, les variétés stables et instables existent même si A a des valeurs propres de module 1. Dans ce cas, en plus d'une variété stable et une instable, on a une **variété centrale**, qui est invariante mais sur laquelle la dynamique est indéterminée (i.e. on ne peut ni dire qu'elle est contractante ni dilatante).

Nous allons simplement montrer :

Théorème 2.2 (Théorème des variétés stables, instables, centrales). *Soit f un difféomorphisme tel que $f(x_0) = x_0$ et $df(x_0) = L$. Il existe alors des sous-variétés immergées de classe C^k , $W^u(x_0), W^s(x_0)$ telles que $W^s(x_0)$ est l'ensemble des points dont les itérés positifs tendent vers x_0 , alors que $W^u(x_0)$ est l'ensemble des points dont les itérés négatifs tendent vers x_0 . $W^u(x_0)$ et $W^s(x_0)$ sont les variétés stables et instables. Elles sont tangentes à E^+, E^- espaces engendré par les espaces caractéristiques de L de valeur propres de module respectivement supérieures et inférieures à 1. De plus si E^0 est engendré par les espaces caractéristiques associés à des valeurs propres de module 1, il existe une variété centrale $W^0(x_0)$, invariante et tangente à E^0 .*

Démonstration. Supposons d'abord L hyperbolique. On peut bien entendu se placer dans un espace euclidien, et poser $x_0 = 0$.

Considérons l'espace de Banach

$$\mathfrak{b}(\mathbb{N}, \mathbb{R}^n) = \{x = (x_k)_{k \geq 0} \mid \sup |x_k| < \infty\}$$

muni de la norme naturelle et S, \bar{f} de \mathfrak{b} dans \mathfrak{b} données par $S(x)_k = x_{k+1}$ et $(\bar{f}(x))_k = f(x_k)$.

Considérons l'application $F(x) = S(x) - \bar{f}(x)$.

L'application F est de classe C^k dès que f est de classe C^k et la différentielle de F en 0 est surjective.

En effet, F est la différence de S , une application linéaire continue (c'est même une contraction) et \bar{f} qui est évidemment continue. Bien évidemment, si $df(0) = A$, on aura $dF(0) = S - \bar{A}$ (vérification laissée au lecteur). Si (h_k) est une suite de \mathfrak{b} , on doit résoudre $dF(u) = h$. Soit $A = df(0)$ et E^\pm les sous espaces sur lesquels $df(0)$ est contractante ou dilatante. Alors résolvons $u_{k+1} - Au_k = h_k$ en décomposant u, h sur E^\pm .

$$u_{k+1}^+ - Au_k^+ = h_k^+ \quad u_{k+1}^- - Au_k^- = h_k^-$$

d'où on peut tirer

$$u_k^- = \sum_{j=0}^k A^{j-1} h_{k-j}^- + A^k u_0^-$$

$$u_k^+ = \sum_{j=k}^N A^{-j} h_j^+ + A^{-N} u_N^+$$

et comme $A^{-N} u_N^+$ tend vers 0 avec N , et la série de terme général $A^{-j} h_j^+$ converge, on aura

$$u_k^+ = \sum_{j=k}^{+\infty} A^{-j} h_j^+$$

Il est donc clair que $DF(0)$ est surjective, et son noyau est donné par les suites du type $(A^k u_0^-)_k$.

Le théorème des fonctions implicites nous permet alors d'affirmer que $F = 0$ est une sous variété W de même classe de différentiabilité que f , au voisinage de 0. Il faut encore montrer que $e_0 : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ donnée par $e_0(u) = u_0$ est une immersion. Il suffit pour cela que l'intersection du noyau de $dF(0)$ et de $de_0(0)$ soit réduite à zéro. Or les suites du type $(A^k u_0^-)$ telles que $u_0 = 0$ sont réduites à zéro. Reste à montrer que $W_{loc}^s(0) = e_0(F^{-1}(0))$ est tangente à E^- , ce que nous laissons au lecteur.

Supposant que A n'a pas de valeur propre égale à α , la même démonstration avec l'espace de Banach

$$\mathfrak{b}_\alpha(\mathbb{N}, \mathbb{R}^n) = \{(x_k)_{k \geq 0} \mid \sup_k e^{k\alpha} |x_k| < \infty\}$$

muni de la norme

$$|x|_\alpha = \sup_k e^{k\alpha} |x_k|$$

donne deux variétés locales, $W_{loc}^{\geq \alpha}$ et $W_{loc}^{\leq \alpha}$, la première tangente à $E^{\geq \alpha}$, somme des espaces caractéristiques engendrés par les valeurs propres de module supérieur à e^α et $E^{\leq \alpha}$, somme des espaces caractéristiques engendrés par les valeurs propres de module inférieur à α .

De même on définit les espaces $W_{loc}^{\alpha \leq \bullet \leq \beta}$ tangent à $E^{\alpha \leq \bullet \leq \beta}$, engendré par les espaces caractéristiques associés aux valeurs propres dont le logarithme du module est dans $[\alpha, \beta]$. En particulier, si

$$\sup\{\log |\lambda| \mid \lambda \text{ est valeur propre de } L, \text{ et } \log |\lambda| < 0\} < \alpha < 0$$

et

$$0 < \beta < \inf\{\log |\lambda| \mid \lambda \text{ est valeur propre de } L, \text{ et } \log |\lambda| < 0\}$$

on obtient la variété centrale de f .

□

Remarque 1.2. Cette démonstration est due à Abbondandolo et Majer³. De nombreuses

3. Alberto Abbondandolo et Pietro Majer, On the global stable manifold, *Studia Mathematica* (2006), vol.177(2), pp. 113-131.

autres démonstrations se trouvent dans la littérature, pour les difféomorphismes comme pour les flots.

Exercice 1.1. Soit ϕ^t le flot du champ de vecteurs X donné par $X(x) = Ax + g(x)$.

- (A) Montrer que pour t assez petit, ϕ^t est un difféomorphisme hyperbolique.
- (B) Montrer que pour τ choisi assez petit conformément à la question précédente, la variété stable (resp. instable, centrale) de ϕ^τ est égale à la variété stable du flot, c'est à dire $W_{loc}^s(X) = \{x \in U \mid \forall t \geq 0, \phi^t(x) \in U \text{ et } \lim_{t \rightarrow \infty} \phi^t(x) = 0\}$
- (C) Énoncer et démontrer le théorème de la variété stable (resp. instable, centrale) pour les flots.

Exercice 1.2. Soit ϕ^t un flot hyperbolique. On considère un voisinage de 0 de la forme $U = U^+ \times U^-$ et on pose $\mathfrak{b}^+ = C^0(\mathbb{R}, U^+)$, $\mathfrak{b}^- = C^0(\mathbb{R}, U^-)$, et $\mathfrak{b} = C^0(\mathbb{R}, U) = \mathfrak{b}^+ \oplus \mathfrak{b}^-$. Si x est solution de $\dot{x}(t) = X(x(t)) = Ax(t) + g(x(t))$, on peut écrire $x(t) = x_+(t) + x_-(t)$

$$\dot{x}_-(t) = Ax_-(t) + g_-(x_-(t) + x_+(t))$$

$$\dot{x}_+(t) = Ax_+(t) + g_+(x_-(t) + x_+(t))$$

La première équation se réécrit, en utilisant la variation de la constante

$$x_-(t) = e^{tA}x_-(0) + \int_0^t e^{(t-s)A}g_-(x_-(s) + x_+(s))ds$$

- (A) En utilisant le théorème de Picard à paramètres, montrer que pour tout $x_-(0) \in E^-$ suffisamment petit, et $x_+ \in \mathfrak{b}^+$, l'équation ci-dessus possède une solution $x_- \in \mathfrak{b}^-$. Montrer aussi que si g est de classe C^k , x_- dépend de manière C^k de $(x_-(0), x_+)$.

2 Exercices

- (A) Étendre le théorème du rang constant à des espaces de Banach. Étudier en particulier le cas où E est de dimension infinie et F de dimension finie (ce cas sera utilisé dans la démonstration du théorème de Sussmann).
- (B) Montrer que deux matrices hyperboliques sont topologiquement conjuguées dès que les dimensions des espaces E^+ et E^- coïncident. On pourra se ramener au cas où l'un des deux espaces est réduit à zéro. Que dire pour la conjugaison C^1 ?
- (C) Montrer qu'en dimension finie, l'existence de E^+ , E^- et d'une norme adaptée est équivalente à l'hypothèse que A n'ait pas de valeur propre de module 1.

Lorsque E est un Banach, il faut supposer que $A - zI$ a un inverse continu pour tout z de module 1 (On appelle spectre de A l'ensemble $\text{Spec}(A) = \{z \in \mathbb{C} \mid A - zI \text{ n'a pas d'inverse continu}\}$).

- (D) Examiner le cas $(x, y, z) \mapsto (ax, ac(y + \epsilon xz), cz)$ avec $0 < c < 1 < a, ac > 1$ et dire pourquoi en général l'homéomorphisme de linéarisation trouvé dans Grobman-Hartman ne peut être un difféomorphisme.
- (E) Montrer que si A est une contraction ($|A| < 1$) et h est C^1 , il existe ϕ de classe C^1 telle que $\phi^{-1}(A + h)\phi = A$.
- (F) Montrer que si A est une contraction dont les valeurs propres $A, (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ vérifient la condition dite de **non-résonance**

$$(NR) \quad \forall (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n, 1 < \sum_j m_j \leq n \implies \alpha_j \neq \alpha_1^{m_1} \cdot \dots \cdot \alpha_n^{m_n}$$

et si $A + h$ est C^n , alors il existe ϕ , difféomorphisme local de classe C^n tel que $(A + h) \circ \phi = \phi \circ A$.

- (G) Montrer le résultat suivant :

Théorème 2.3 (Anosov-Moser). *Soit A hyperbolique dans $SL_n(\mathbb{Z})$. Alors A définit un difféomorphisme du tore tel que tout difféomorphisme C^1 voisin de A lui est conjugué (i.e. il existe un homéomorphisme $\phi : T^n \rightarrow T^n$ tel que $\phi \circ A = (A + h) \circ \phi$.*

Indication : adapter la démonstration de Grobman-Hartman dans le cas où tout est \mathbb{Z}^n -périodique.

Ce phénomène s'appelle stabilité structurelle : tout champ de vecteurs proche du champ linéaire lui est conjugué : les portraits de phase sont donc difféomorphes. Si Grobman-Hartman donne une stabilité structurelle locale, elle est globale dans le théorème d'Anosov.

- (H) Montrer le théorème de la variété stable pour des difféomorphismes C^k , analytiques.
- (I) **Nombre de rotation**

Soit f un difféomorphisme du cercle \mathbb{S} , et $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un relèvement de f .

- (a) Montrer qu'il existe un unique entier n , tel que $\tilde{f}(x + 1) = \tilde{f}(x) + n_f$.
- (b) Montrer que nécessairement $n_f = 1$ et que \tilde{f} est montone.

On considère l'ensemble $\mathcal{H}(\mathbb{S}^1)$ constitué des h tels que $n_h = 1$ et \tilde{h} est croissante.

- (c) Montrer que $\alpha = \lim_n \tilde{h}^n(x)/n$ existe, et plus précisément que $\frac{\tilde{h}^n(x) - x}{n}$ converge uniformément vers une constante.

Indication : montrer que si $(a_n)_{n \geq 1}$ est une suite qui vérifie $a_{p+q} \leq a_p + a_q$ alors $\lim_n a_n/n$ existe et est égale à $\inf_n a_n/n$. Appliquer ce lemme à $u_n = (\tilde{h}^n(x) - x)$.

On note $\rho(h) = [\alpha] \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ qui est bien défini (le montrer) et s'appelle nombre de rotation de h .

- (d) Montrer que $R_\alpha : x \mapsto x + \alpha$ a comme nombre de rotation α .

- (e) Montrer que si h_1 et h_2 sont semi-conjugués, c'est à dire $gh_1 = h_2g$, avec g projection de \tilde{g} (pas nécessairement monotone) vérifiant $\tilde{g}(x+1) = \tilde{g}(x) + 1$ alors $\rho(h_1) = \rho(h_2)$.
- (f) Montrer que $\rho(h^n) = n\rho(h)$
- (g) Montrer que $\rho(h)$ est rationnel, si et seulement si h a un point périodique.

En vertu de la remarque précédente il suffit de montrer que si $\rho(h) = 0$, h a un point fixe.

Avec $u_1(x) = \tilde{h}(x) - x$, on montrera que

$$u_n(x) = \tilde{h}^n(x) - x = \sum_{j=0}^{n-1} u_1(\tilde{h}^j(x))$$

et donc que si cette somme converge uniformément vers 0, on aura

$$\min u_1 \leq 0 \leq \max u_1$$

- (h) Montrer que si μ est un mesure de probabilité invariante par h , c'est - à -dire $\mu(h(U)) = \mu(U)$, et si h a un nombre de rotation irrationnel alors μ ne possède pas d'atomes (i.e. de point de mesure non-nulle).

Le théorème de Denjoy, affirme que si \tilde{h} est C^1 avec une dérivée à variation bornée, et si $\rho(h)$ est irrationnel, alors h est topologiquement conjugué à une rotation. Cela est faux si on affaiblit les hypothèses sur \tilde{h} . Des théorèmes de V.I. Arnold, M. Herman et J.-C. Yoccoz, précisent la régularité de la conjugaison.

Bibliographie

- [Hartman] P. Hartman *Ordinary Differential Equations*. John Wiley and Sons, New-York, 1964.
- [Laudenbach] F. Laudenbach *Calcul Différentiel et Intégral*. Éditions de l'École Polytechnique, Palaiseau, 2000.
- [Lefschetz] S. Lefschetz *Differential equations : geometric theory*. Dover, New-York 1977.
- [Viterbo] C. Viterbo *Equations différentielles et systèmes dynamiques* Cours de l'École Polytechnique, Palaiseau, 2009.

Chapitre 3

Chow, Frobenius et l'accessibilité.

1 Notations

Soit E un espace vectoriel, et (x_1, \dots, x_n) un système de coordonnées. On regarde les x_j comme des applications de E dans \mathbb{R} .

On pose alors dx_j pour l'application linéaire, différentielle de x_j , qui projette x_1e_1, \dots, x_ne_n sur x_je_j . On pose aussi $\frac{\partial}{\partial x_j}$ pour le vecteur e_j . On a donc $dx_i(\frac{\partial}{\partial x_j}) = \delta_i^j$.

On suppose les solutions d'équations différentielles définies pour tout temps. On rappelle qu'un champ de vecteurs est par définition une équation différentielle indépendante du temps, c'est à dire $\dot{x}(t) = X(x(t))$.

Soit h un difféomorphisme et $X(t, x)$ une équation différentielle. On pose

$$h_*X(t, x) = dh(h^{-1}(x))X(t, h^{-1}(x))$$

Si le flot de $X(t, x)$ est $\phi_{t_0}^t(x)$ celui de $Y(t, x) = h_*X(t, x)$ est

$$h \circ \psi_{t_0}^t \circ h^{-1}$$

2 Flots sur les sous-variétés, crochets de Lie

2.1 Champs de vecteurs sur les sous-variétés

Il est utile de caractériser simplement les équations différentielles dont les solutions restent sur une sous-variété :

Proposition 3.1. Soit V une sous-variété fermée de \mathbb{R}^n , et X une équation différentielle telle que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \forall v \in V, \quad X(t, v) \in T_v V$$

Soit γ une solution de $\dot{\gamma}(t) = X(t, \gamma(t))$ définie sur $[0, 1]$. Alors si $\gamma(0) \in V$, $\gamma([0, 1]) \subset V$

Démonstration : Soit $\tau = \sup\{t \in [0, 1] \mid \gamma([0, t]) \subset V\}$, on veut montrer que $\tau = 1$.

Tout d'abord, V étant fermée, $\gamma(\tau) \in V$. Il suffit alors de montrer que $\gamma([\tau, \tau + \varepsilon]) \subset V$ pour ε assez petit.

Soit ϕ une carte de V autour de $\gamma(\tau)$

$$\varphi : V \cap U \rightarrow \varphi(U) \cap \mathbb{R}^p \times \{0\}$$

On a alors que $\sigma(t) = \varphi(\gamma(t))$ vérifie

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{\sigma}(t) = Y(t, \sigma(t)) \\ \sigma(t_0) \in \mathbb{R}^p \times \{0\} \end{cases}$$

où $Y(t, \varphi(x)) = d\varphi(x)X(t, x)$. Puisque si $z \in \mathbb{R}^p \times \{0\}$, $Y(t, z) \in \mathbb{R}^p \times \{0\}$, en posant $\sigma(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ l'équation (1) équivaut à

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A(t, x(t), y(t)) \\ \dot{y}(t) = B(t, x(t), y(t)) \\ x(t_0) = x_0, y(t_0) = 0 \end{cases}$$

où $B(t, x, 0) = 0$. La seconde équation a pour solution $y = 0$, et si x est la solution de $\dot{x}(t) = A(t, x(t), 0)$, $x(t_0) = x_0$, dont l'existence nous est garantie par le théorème de Cauchy-Lipschitz, on en déduit que $(x(t), 0)$ est solution de (1), qui est unique d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Donc y reste nul tant qu'il est défini, c'est à dire sur $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$, et

$$\sigma(t) \in \varphi^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{0\}) = U \cap V$$

pour $t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$. □

Exercice : Si $X(0, x) \notin T_x V$ pour un $x \in V$, il existe une solution de $\dot{\gamma} = X(t, \gamma)$ qui est sur V en $t = 0$ et quitte V pour $t > 0$.

- Exemples 2.1.* (A) un champ de vecteurs X tel que $X(x)$ soit orthogonal à x reste sur une sphère.
- (B) Si $H(q, p)$ est un Hamiltonien sur \mathbb{R}^{2n} , et $X_H = (\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q})$ vu que $dH(q, p)X_H(q, p) = 0$, X_H est tangent aux hypersurfaces $\{H(q, p) = C\}$, le flot préserve ces hypersurfaces. En fait dans ce cas, il suffit de dire que la fonction $t \mapsto H(q(t), p(t))$ a sa dérivée identiquement nulle.
- (C) La fermeture de la sous-variété V est essentielle. En effet, si $V = \mathbb{R}^2 - \mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$, on aura que le champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial y}$ est tangent à V , mais $\phi_1(0, -1) = (0, 0) \notin V$.

3 Crochets de Lie

Soient X et Y deux champs de vecteurs, φ_t et ψ_t leurs flots respectifs. Ces flots ne commutent généralement pas, c'est-à-dire que $\varphi_t \circ \psi_s \neq \psi_s \circ \varphi_t$, comme on le voit sur l'exemple suivant :

$$X(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}, Y(x, y) = x^2 \frac{\partial}{\partial y}$$

Alors $\varphi_t(x, y) = (x + t, y)$ et $\psi_s(x, y) = (x, y + sx^2)$ d'où $\varphi_t \circ \psi_s(x, y) = (x + t, y + sx^2)$ alors que $\psi_s \circ \varphi_t(x, y) = (x + t, y + s(x + t)^2)$

On veut en général mesurer cette « non-commutativité » au premier ordre.

Définition 3.1. Soient X, Y deux champs de vecteurs C^∞ . On appelle **crochet de Lie** de X et de Y le champ de vecteurs $[X, Y]$ donné par la formule $[X, Y] = \frac{d}{dt}(\psi_t)_*(X) |_{t=0}$.

Les propriétés fondamentales du crochet font l'objet de la proposition suivante.

Proposition 3.2 (Propriétés des crochets de Lie). .

- (A) $[X, Y] = 0$ si et seulement si les flots de X et de Y commutent
- (B) $[X, Y] = -[Y, X]$, $[X, Y + Z] = [X, Y] + [X, Z]$ (bilinéarité et antisymétrie)
- (C) $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$ (identité de Jacobi)
- (D) Si X et Y sont tangents à une sous-variété V , c'est à dire si

$$x \in V \implies X(x), Y(x) \in T_x V$$

alors $[X, Y]$ l'est aussi.

Démonstration. ¹

1. Toutes les étapes sont faciles si on sait dériver une fonction composée de plusieurs variables $\frac{d}{dt}(F(t, g(t, x))) = (\frac{d}{dt}F)(t, g(t, x)) + D_x F(t, g(t, x)) \frac{d}{dt}g(t, x)$ et ne pas oublier que le flot $\varphi_t(x)$ est en fait une fonction des deux variables (t, x) .

Pour le premier point, supposons $[X, Y] = 0$,

$$\frac{d}{dt}(\psi_t)_*(X) \Big|_{t=t_0} = \frac{d}{dt}(\psi_{t+t_0})_*(X) \Big|_{t=0} = (\psi_{t_0})_* \frac{d}{dt}(\psi_t)_*(X) \Big|_{t=0} = (\psi_{t_0})_*([X, Y]) = 0$$

Cela montre que $(\psi_t)_*(X)$ est indépendant de t , donc égal à Y . L'égalité de leurs flots s'écrit $\psi_t \circ \varphi_s \circ \psi_t^{-1} = \varphi_s$ ce qui signifie que les flots de X et Y commutent. Inversement si X et Y commutent, $\psi_t \circ \varphi_s \circ \psi_t^{-1} = \varphi_s$, et l'égalité des générateurs infinitésimaux de ces flots s'écrit $(\psi_t)_*(X) = Y$. Il est alors clair que $[X, Y] = 0$

Montrons maintenant le deuxième point.

Tout d'abord, en utilisant $\psi_0 = Id$ et $\psi_t \circ \psi_{-t} = Id$ on obtient

$$\frac{d}{ds}(\psi_t \circ \varphi_s \circ \psi_{-t} \circ \varphi_{-s})(x) \Big|_{s=0} = \frac{d}{ds}(\psi_t \circ \varphi_s \circ \psi_{-t}) \Big|_{s=0} \varphi_0 - d(\psi_t \circ \varphi_0 \circ \psi_{-t}) \left(\frac{d}{ds} \varphi_s \Big|_{s=0} \right) = (\psi_t)_*(X) - X$$

et en prenant la dérivée par rapport à t

$$[X, Y] = \frac{d}{dt} \frac{d}{ds} (\psi_t \circ \varphi_s \circ \psi_{-t} \circ \varphi_{-s})(x) \Big|_{s=0, t=0}$$

Par symétrie, et parce que les dérivations en s et t commutent, on peut écrire

$$[Y, X] = \frac{d}{dt} \frac{d}{ds} (\varphi_s \circ \psi_t \circ \varphi_{-s} \circ \psi_{-t})(x) \Big|_{s=0, t=0}$$

Mais comme $\varphi_s \circ \psi_t \circ \varphi_{-s} \circ \psi_{-t} = (\psi_t \circ \varphi_s \circ \psi_{-t} \circ \varphi_{-s})^{-1}$ et que si $h_{s,t}$ est une famille de difféomorphismes telle que $h_{0,0} = Id$, on a

$$\frac{d}{dt} \frac{d}{ds} (h_{s,t}^{-1}) \Big|_{s=t=0} = -h_{0,0}^{-1} \left(\frac{d}{dt} \frac{d}{ds} (h_{s,t}) \right) h_{0,0}^{-1} = - \frac{d}{dt} \frac{d}{ds} (h_{s,t}) \Big|_{s=t=0}$$
 on en déduit que

$$[Y, X] = -[X, Y].$$

Comme $(\psi_t)_*$ est linéaire, on voit immédiatement que sa dérivée par rapport à t l'est aussi, d'où $[X, Y + Z] = [X, Y] + [X, Z]$.

L'identité de Jacobi résulte de l'exercice B.

Enfin, supposons que X et Y soient tangents à V . Alors, on a vu que φ_t préserve V , et donc $d\psi_t$ envoie l'espace tangent à V en x sur l'espace tangent à V en $\psi_t(x)$. Puisque X est partout tangent à V , $(\psi_t)_*(X)(x)$ est un chemin de vecteurs contenus dans l'espace tangent à V en x , et donc la dérivée de ce chemin est encore contenue dans cet espace tangent. \square

Remarque 3.1. Il ne suffit pas que X et Y soient tangents à V en x_0 pour que $[X, Y]$ le soit. Plus généralement, $[X, Y](x_0)$ **ne dépend pas seulement** des valeurs de X et Y

en x_0 mais aussi de leurs dérivées (comme cela résultera clairement de la proposition 3.3). Par exemple $[e_3, x_3 \cdot e_2] = e_2$, pourtant les deux champs sont tangents en 0 à $x_2 = x_3 = 0$ mais ce n'est pas le cas de leur crochet.

Par contre, si X, Y sont tangents à V **au voisinage** de x , alors $[X, Y](x)$ est tangent à V en x .

La proposition suivante permet le calcul aisé des crochets de Lie, sans qu'il soit nécessaire d'intégrer les champs de vecteurs.

Proposition 3.3 (Calcul des crochets de Lie). *On a*

(A) *Si f est une fonction C^∞*

$$[X, f \cdot Y](x) = f(x) \cdot [X, Y](x) + (df(x)X(x))Y(x)$$

(B) *Pour deux champs de vecteurs de \mathbb{R}^n ,*

$$[X, Y] = dY(x)X(x) - dX(x)Y(x)$$

Démonstration : La première égalité équivaut à montrer que

$$[f \cdot X, \cdot Y](x) = f(x) \cdot [X, Y](x) - (df(x)Y(x))X(x)$$

En effet, $(\psi_t)_*(f \cdot X) = f(\psi_{-t}(x))(\psi_t)_*(X)$ donc en dérivant par rapport à t , et utilisant que $\frac{d}{dt}f(\psi_{-t}(x))|_{t=0} = -df(x)Y(x)$ l'identité en résulte.

Pour la deuxième formule, si elle est vraie pour X et Y elle le sera pour X et $f \cdot Y$ car le terme de gauche devient

$$df(X)Y + f \cdot [X, Y] = df(X)Y + f(dY(X) - dX(Y)) = d(f \cdot Y)X - dX(f \cdot Y)$$

Par antisymétrie on peut aussi remplacer X par $g \cdot X$ et enfin par bilinéarité des deux termes, il suffit de le vérifier pour X et Y champs de vecteurs constants, car tout champ de vecteurs est combinaison linéaire à coefficients $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ des vecteurs de base e_i .

Or $[e_i, e_j] = 0$ car les flots des champs de vecteurs constants commutent, et comme $de_i = 0$ égalité est évidente dans ce cas. \square

Exercice 3.1. Démontrer la proposition directement, en utilisant la définition de $[X, Y]$ et le fait que si $L(t, x) = d\psi_t(x)$, l'application

$$L : \mathbb{R} \times M \rightarrow \mathcal{L}(T_x M, T_{\phi_t(x)} M)$$

vérifie

$$\frac{d}{dt}L(t, x) = dY(\psi_t(x))L(t, x)$$

comme on le voit en différentiant par rapport à x la relation $\frac{d}{dt}\psi_t(x) = Y(\psi_t(x))$.

En effet, $(\psi_t)_*X(x) = L(t, \psi_{-t}(x))X(\psi_{-t}(x))$

et donc

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(\psi_t)_*X(x) \Big|_{t=0} = \\ & \frac{d}{dt}(L(t, \psi_{-t}(x))X(\psi_{-t}(x))) \Big|_{t=0} = \\ & \frac{d}{dt}(L(t, x)) \Big|_{t=0} X(x) + dL(t, x) \frac{d}{dt}\psi_{-t}(x) \Big|_{t=0} X(x) + L(t, x) \frac{d}{dt}X(\psi_{-t}(x)) \Big|_{t=0} = \\ & dY(x)X(x) - dL(0, x)(Y(x), X(x)) - dX(x)Y(x) \end{aligned}$$

Comme $L(0, x) = Id$, on a $dL(0, x) = 0$ et le deuxième terme est nul, ce qui conduit à la formule annoncée

Exemples 3.1. (A) $X(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}$, $Y(x, y) = x^2 \frac{\partial}{\partial y}$

$$[X, Y](x, y) = \left[\frac{\partial}{\partial x}, x^2 \frac{\partial}{\partial y} \right] = x^2 \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial x}(x^2) \frac{\partial}{\partial y} = 2x \frac{\partial}{\partial y}$$

On vérifie que cette quantité coïncide avec $\frac{d}{ds} \frac{d}{dt} [\psi_s \phi_t(x, y) - \phi_t \psi_s(x, y)] \Big|_{s=t=0}$

(B) Soit $GL(n, \mathbb{R})$ identifié au groupe des matrices inversibles de \mathbb{R}^n .

C'est un ouvert de l'ensemble des matrices, qui forment un espace vectoriel de dimension n^2 . L'espace tangent à $GL(n)$ est donc égal à $M(n, \mathbb{R})$.

Il existe alors des champs de vecteurs particuliers sur $GL(n, \mathbb{R})$, appelés invariants à gauche, donnés par $X_A(M) = MA$ où A est une matrice fixée², et ces champs engendrent par combinaisons linéaires à coefficients dans $C^\infty(GL(n, \mathbb{R}))$ tous les champs de vecteurs³ sur $GL(n, \mathbb{R})$.

Quel est alors le crochet $[X_A, X_B]$?

En utilisant le calcul ci-dessus, $dX_A(M)(H) = MHA$, et donc

$[X_A, X_B] = dX_B(X_A)(M) - dX_A(X_B)(M) = M(AB - BA) = X_{AB-BA}(M)$ On pose alors $[A, B] = AB - BA$

2. invariant à gauche car $X_A(MN) = MX_A(N)$

3. On fera attention à ne pas confondre combinaisons linéaires à coefficients $C^\infty(M)$ et à coefficients \mathbb{R}

Exercice : Faire le calcul en utilisant le flot de X_A

Le flot est donné par

$$\frac{d}{dt}M(t) = X_A(M(t)) = M(t)A$$

dont la solution est $M(t) = M(0)e^{tA}$.

Dire que les flots de X_A et X_B commutent signifie que $e^{tA}e^{tB} = e^{tB}e^{tA}$, et on a démontré parmi les propriétés du crochet de Lie, que cela ne peut arriver pour tout t que si A et B commutent.

(C) Soit $SO(n)$ le groupe des rotations de \mathbb{R}^n . On l'identifie aux matrices carrées de $GL(n, \mathbb{R})$ telles que $MM^* = I$ et $\det(M) > 0$

L'espace tangent en M s'obtient en dérivant l'équation $MM^* = I$ (prescrire le signe de $\det(M)$ ne sert qu'à se limiter à la composante connexe des isométries préservant l'orientation), et est donné par $MA^* + AM^* = 0$. Ce sont donc les matrices telles que $M^{-1}A$ soit antisymétrique.

Un champ de vecteurs sur $SO(n)$ peut donc s'identifier à une application de $SO(n)$ dans l'ensemble des matrices antisymétriques : on associe à $A(M)$, la matrice antisymétrique $M^{-1}A(M)$. Ceux pour lesquels cette matrice est constante, sont ceux de la forme $A(M) = MA = X_A(M)$, où X_A a été défini dans l'exemple précédent.

Parmi les champs de vecteurs X_A de $GL(n, \mathbb{R})$ invariants à gauche, ceux tangents à $SO(n)$ sont ceux correspondant à une matrice A antisymétrique. Et clairement tout champ de vecteurs sur $SO(n)$ est combinaison linéaire de ceux-ci.

Quel est alors le crochet de X_A et X_B ?

en remarquant que le crochet de Lie de deux champs de vecteurs ne dépend pas de la sous-variété sur laquelle on le considère, donc on a encore $[X_A, X_B] = X_{AB-BA}$. On vérifie que si A et B sont antisymétriques, $AB - BA$ l'est aussi !

En particulier si $n = 3$, les matrices antisymétriques forment un espace de dimension 3. Le produit vectoriel identifie ces espaces :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 &\longrightarrow M(3, \mathbb{R}) \\ v &\longrightarrow L_v \end{aligned}$$

où $L_v(x) = v \wedge x$.

L_v est bien une application linéaire antisymétrique, et de plus on vérifie que $L_v L_w - L_w L_v = L_{v \wedge w}$ (il suffit de le vérifier si v, w sont colinéaires, et sur les vecteurs $v, w, v \wedge w$).

On a ainsi identifié les champs de vecteurs tangents à $SO(3)$ aux fonctions à valeurs dans \mathbb{R}^3 .

Si $R(t)$ est un chemin dans $SO(3)$, on a alors $\dot{R}(t) = \Omega(t)R(t)$ et $\Omega(t) = L_{\omega(t)}$. Le vecteur $\omega(t)$ est porté par l'axe instantané de rotation et sa norme est la vitesse instantanée de rotation autour de cet axe.

- (D) L'exemple ci-dessus s'étend au groupe des déplacements de \mathbb{R}^3 , sous-ensemble des transformations affines. Les champs de vecteurs s'identifient alors aux "torseurs", transformations affines dont la partie linéaire est antisymétrique, donc de la forme L_v .

On renvoie à la section sur les théorèmes de Frobenius et Chow, pour des applications de crochets de Lie.

4 Propriétés géométriques des champs de sous-espaces

Il arrive souvent que des contraintes naturelles sur l'évolution d'un système s'expriment comme des contraintes infinitésimales, mais en nombre insuffisant pour déterminer cette évolution. C'est le cas de tous les systèmes « commandés », voitures, robots, etc... En général, nous pouvons faire évoluer un tel système à notre guise, pourvu de respecter certaines contraintes. Le cas le plus simple est celui d'une voiture : on peut la faire avancer ou reculer, et tourner le volant, mais le mouvement doit se faire dans la direction prescrite par les roues. De même, on peut agir sur un bras articulé, pourvu de respecter les contraintes de ses articulations.

Commençons par le cas le plus simple : celui du monocycle. Un modèle simplifié consiste à le repérer par la position de son centre de gravité dans le plan (x, y) et la direction de la roue par rapport à l'axe Ox , θ . Le mouvement doit alors vérifier l'équation $\sin(\theta)\dot{x} - \cos(\theta)\dot{y} = 0$.

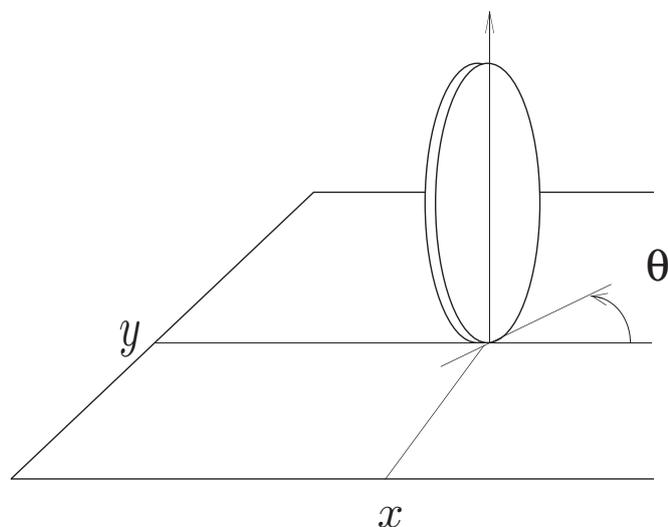


FIGURE 3.1 – Monocyclus et ses coordonnées (d’après le chapitre 4 de [B-J-R])

Dit autrement, le vecteur vitesse $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta})$ est contenu dans le plan $D(x, y, \theta) = \{(u, v, w) \mid \sin(\theta)u - \cos(\theta)v = 0\}$. On dira alors que l’on a deux degrés de liberté. On peut se demander quels sont les points de l’espace que l’on peut atteindre à partir d’un point donné, en suivant un chemin qui reste partout tangent au plan $D(x, y, \theta)$.

On verra que l’on peut atteindre n’importe quel point du plan et dans n’importe quelle position, ce qui peut sembler surprenant, puisque l’espace possède trois dimensions, alors que le mouvement est limité à deux dimensions.

La conduite d’une voiture ou d’un semi-remorque sont des problèmes analogues. On a le même type de résultat, ce qui a pour conséquence théorique la possibilité de garer sa voiture. Les questions pratiques, que nous n’aborderons pas ici (combien de manoeuvres faut-il pour cela, quelle est la manoeuvre optimale) sont encore l’objet de recherches actives.

5 Théorème de Frobenius et Chow

Soit M^n une sous-variété de \mathbb{R}^N . Supposons donné en chaque point $x \in M^n$ un sous-espace vectoriel, $D(x)$ de $T_x M$.

On suppose, en un sens qui sera précisé dans un instant, que $D(x)$ est C^∞ en x . On appelle la donnée de $x \rightarrow D(x)$ un champ de sous-espaces⁴

Définition 3.2. Le champ D est C^∞ s’il vérifie l’une des deux conditions équivalentes :

- (A) au voisinage de chaque point x , $D(x)$ est engendré par p champs de vecteurs C^∞ linéairement indépendants X_1, \dots, X_p

4. Souvent appelé dans la littérature “distribution” terminologie que nous avons évitée.

(B) au voisinage de chaque point x , $D(x)$ est défini par $(n - p)$ formes différentielles (de degré 1), linéairement indépendantes en chaque point.

On rappelle qu'une forme différentielle de degré un est la donnée en chaque point de $x \in M$ d'une forme linéaire sur $T_x M$, dont les coefficients dépendent de manière C^∞ du point. On notera que le procédé d'orthonormalisation de Schmidt conservant la propriété d'être C^∞ , on peut supposer que les X_i forment une famille orthonormée.

Pour montrer que (3) entraîne (B), considérons Y_1, \dots, Y_{n-p} complétant la famille (X_1, \dots, X_p) en une base de $T_x M$.

On peut encore supposer que $(X_1, \dots, X_p, Y_1, \dots, Y_{n-p})$ est orthonormée et C^∞ .

Alors $\alpha_i(x).h = \langle Y_i(x), h \rangle$ est une forme différentielle C^∞ sur M . Ces formes sont linéairement indépendantes sur $T_x M$ (car $\langle Y_i(x), Y_j(x) \rangle = \delta_{ij}$).

La réciproque est laissée en exercice.

étant donné un tel champ, il est naturel de considérer les sous-variétés tangentes à $D(x)$.

Définition 3.3. Une sous-variété V de M est dite tangente à D si et seulement si

$$\forall x \in V, T_x V \subset D(x)$$

On dit que V est une sous-variété intégrale si $T_x V = D(x)$.

Outre les sous-variétés intégrales, on s'intéressera surtout au cas des courbes tangentes ($\dim V = 1$).

Notons qu'il existe toujours des courbes tangentes à D : il suffit de prendre les trajectoires de champs de vecteurs X tels que $X(x) \in D(x)$.

Par contre il n'existe pas toujours de sous-variété intégrales (sauf si $\dim D(x) = 1$!). Si une telle sous-variété V existe, on voit aisément que toute courbe tangente à D coupant V est entièrement contenue dans V .

En effet, comme dans la démonstration de la proposition 3.1, il suffit de démontrer que si $\gamma(0) \in V$ alors $\gamma([0, \varepsilon]) \subset V$ pour ε assez petit. Or soient $X_1(x), \dots, X_p(x)$ des champs de vecteurs formant une base de $D(x)$. On peut alors écrire de manière unique

$$\dot{\gamma}(t) = \alpha_1(t)X_1(\gamma(t)) + \dots + \alpha_p(t)X_p(\gamma(t))$$

Posons $X(t, x) = \alpha_1(t)X_1(x) + \dots + \alpha_p(t)X_p(x)$, alors X vérifie les hypothèses de la Proposition 3.1, et donc, si $\gamma(0) \in V$, $\gamma([0, \varepsilon]) \subset V$.

étant donné un champ D , les questions suivantes se posent naturellement, et sont étroitement liées

- soit $x \in M$. Quels sont les points que l'on peut atteindre par des courbes tangentes à D . En d'autres termes, décrire

$$\mathcal{A}_x = \{\gamma(1) \mid \gamma(0) = x, \dot{\gamma}(t) \in D(\gamma(t)) \forall t \in [0, 1]\}$$

ensemble des points "accessibles" à partir de x .

- existe-t-il des sous-variétés intégrales pour D

- si $y \in \mathcal{A}_x$, décrire un chemin γ tangent à D reliant x à y .

Théorème 3.4 (Frobenius). *Soit D un champ de sous-espaces. Pour chaque point de M passe une sous-variété intégrale si et seulement si quels que soient X, Y champs de vecteurs tangents à D , alors $[X, Y]$ est aussi tangent à D .*

Démonstration : La nécessité est évidente d'après la proposition 3.1. Pour l'existence, plaçons nous dans un ouvert assez petit, sur lequel $D(x) = \langle X_1(x), \dots, X_p(x) \rangle$. Traitons d'abord le cas simple où $[X_i, X_j] = 0$.

Soit φ_t^j le flot de X_j , l'application

$$\begin{aligned} \psi : [-\varepsilon, \varepsilon]^p &\longrightarrow M \\ (t_1, \dots, t_p) &\longrightarrow \varphi_{t_1}^1 \circ \dots \circ \varphi_{t_p}^p(x_0) \end{aligned}$$

a pour image une sous-variété intégrale de D .

En effet $(\frac{\partial}{\partial t_j} \psi)(t_1, \dots, t_p) =$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_j} (\varphi_{t_1}^1 \circ \dots \circ \varphi_{t_p}^p)(x_0) &= \frac{\partial}{\partial t_j} (\varphi_{t_j}^j \circ \varphi_{t_1}^1 \circ \dots \circ \varphi_{t_{j-1}}^{j-1} \circ \varphi_{t_{j+1}}^{j+1} \circ \dots \circ \varphi_{t_p}^p)(x_0) \\ &= X_j(\varphi_{t_j}^j \circ \varphi_{t_1}^1 \circ \dots \circ \varphi_{t_{j-1}}^{j-1} \circ \varphi_{t_{j+1}}^{j+1} \circ \dots \circ \varphi_{t_p}^p(x_0)) \end{aligned}$$

comme les X_j sont linéairement indépendants, $d\psi(t_1, \dots, t_p)$ est injective et a son image dans $D(\psi(t_1, \dots, t_p))$, qui est donc une sous-variété tangente à D . Comme elle a même dimension que D , c'est une sous-variété intégrale.

Montrons que l'on peut ramener le cas général à ce cas.

Or X_1 ne s'annulant pas, d'après le théorème de redressement, on peut, quitte à restreindre U trouver un système de coordonnées où $X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$.

En soustrayant à X_2 un multiple de X_1 il s'écrira comme combinaison linéaire de $\frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ et en permutant les coordonnées, on peut supposer le coefficient de $\frac{\partial}{\partial x_2}$ non nul. Divisant par ce coefficient (ce qui oblige éventuellement à réduire encore U), on peut supposer qu'en x_0

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + \sum_{j \geq 3} a_2^j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

et ainsi de suite

$$X_k = \frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{j \geq k+1} a_k^j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

En retirant de X_2 successivement des multiples de X_3, X_4, \dots, X_p , on obtient

$$X'_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + \sum_{k \geq p+1} b_2^k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

et de même avec X_3, \dots, X_p .

Pour finir on a

$$X'_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{k \geq p+1} b_j^k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

On a toujours $[X'_j, X'_\ell] \in \langle X'_1, \dots, X'_p \rangle$ et $D(x) = \langle X'_1, \dots, X'_p \rangle$. Mais $[X'_j, X'_\ell] \in \langle \frac{\partial}{\partial x_{p+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \rangle$ et vu que $\langle X'_1, \dots, X'_p \rangle \cap \langle \frac{\partial}{\partial x_{p+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \rangle = \{0\}$ on a finalement $[X'_i, X'_j] = 0$. Comme les X'_i sont linéairement indépendants et tangents à D , $\langle X'_1, \dots, X'_p \rangle(x) = D(x)$, et donc les X'_j commutent entre eux. \square

Lorsque les hypothèses du théorème de Frobenius sont satisfaites, on dit que le champ de sous-espaces D est **intégrable**. L'ensemble d'accessibilité, \mathcal{A}_x est alors égal à la "sous-variété intégrale" passant par x . On appelle "feuilletage" la décomposition de M^n en réunion des \mathcal{A}_x , appelées "feuilles".

6 Les théorème de Chow et Sussmann

Que se passe-t-il si les conditions du théorème de Frobenius ne sont pas vérifiées? À quoi ressemble alors l'ensemble \mathcal{A}_x ?

Un premier élément de réponse est donné par le

Théorème 3.5 (Sussmann). *L'ensemble \mathcal{A}_x est l'image par une immersion d'une variété.*

Démonstration : On rappelle qu'une immersion est une application de différentielle injective. Une sous-variété immergée est un sous-ensemble X de \mathbb{R}^n munie d'une topologie pour laquelle les ouverts de \mathbb{R}^n induisent des ouverts (mais certains ouverts ne sont pas du type $U \cap X$ avec U ouvert de \mathbb{R}^n), et que tout point ait un voisinage qui est une sous-variété.

Être une sous-variété immergée est une propriété locale : il suffit de montrer que \mathcal{A}_x est réunion d'images de $j(U)$ où j est une immersion, et U un ouvert.

Soit $E = L^1([0, 1], \mathbb{R}^p)$, et si $u = (u_1, \dots, u_p) \in E$ on note γ_u la solution de

$$\begin{cases} \dot{\gamma}(t) &= X_u(\gamma(t)) = u_1(t)X_1(\gamma(t)) + \dots + u_p(t)X_p(\gamma(t)) \\ \gamma(0) &= x \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi : E &\rightarrow M \\ u &\mapsto \gamma_u(1) \end{aligned}$$

On vérifie que cette application est différentiable en u est bien définie d'après Cauchy-Lipschitz à paramètres (nous calculerons cette différentielle ultérieurement) et de rang inférieur à la dimension de M .

Soit r le maximum du rang $D\varphi(u)$ lorsque u parcourt E , et u_0 un élément de E tel que $D\varphi(u_0)$ soit de rang r .

On prétend qu'il existe un ouvert \mathcal{U} d'un espace de Banach F , et

$$\Psi : \mathcal{U} \rightarrow M$$

telle que

- 1) $\forall v, \text{rang } D\Psi(v) = r$
- 2) $\Psi(\mathcal{U}) = \varphi(E)$

En effet par semi-continuité inférieure du rang, $\text{rang } D\varphi(u) = r$ pour u dans un voisinage \mathcal{W} de u_0 .

Soit \mathcal{U} l'ensemble des chemins u tels qu'il existe $u_1, u_2 \in \mathcal{W}, v \in E$, vérifiant

$$\begin{cases} u(t) &= u_1(3t) \text{ pour un } u_1 \in \mathcal{W}, t \in [0, \frac{1}{3}] \\ u(t) &= u_2(2 - 3t) \text{ pour } u_2 \in \mathcal{W}, t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ u(t) &= v(3t - 2) \text{ pour } v \in E, t \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

Alors, si on note $u = u_1 * u_2^{-1} * v, u \in E$ et $\Psi(u_1, u_2, v) = \varphi(u_1 * u_2^{-1} * v)$.

Notons que $\Psi(u_1 * u_1 * v) = \varphi(v)$.

Mais $\frac{\partial \Psi}{\partial u_1}(u_1, u_1, v)$ calcule la variation de $x(1)$ lorsque u_1 varie, pour x solution de

$$\begin{aligned} \dot{x} &= X_{u_1}(x(t))t \in [0, \frac{1}{3}] \\ &= -X_{u_2}(x(t))t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ &= X_v(x(t))t \in [\frac{2}{3}, 1] \end{aligned}$$

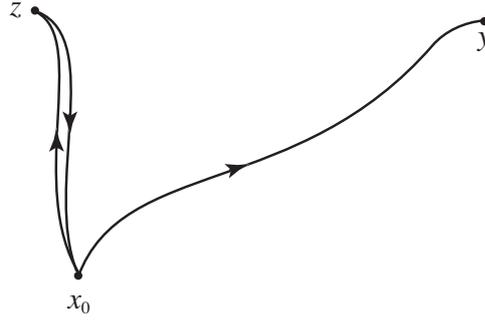


FIGURE 3.2 – Démonstration du théorème de Sussmann

Or lorsqu'on varie u_1 , de δu_1 ,

$$\delta x\left(\frac{1}{3}\right) = D\varphi(u_1)\delta u_1,$$

$$x\left(\frac{2}{3}\right) = \varphi_2^{-1}\left(x\left(\frac{1}{3}\right)\right) \text{ donc } \delta x\left(\frac{2}{3}\right) = d\varphi_2\left(x\left(\frac{1}{3}\right)\right)\delta x\left(\frac{1}{3}\right)$$

où $\varphi_1, \varphi_2, \psi$ sont les flots de X_{u_1}, X_{u_2}, X_v et $x(1) = \psi\left(x\left(\frac{2}{3}\right)\right)$ d'où

$$\delta x(1) = d\psi\left(x\left(\frac{2}{3}\right)\right)d\varphi_2\left(x\left(\frac{1}{3}\right)\right)D\varphi(u_1)\delta u_1$$

Comme les flots sont des difféomorphismes, et que par hypothèse $D\varphi(u_1)$ est de rang r , on voit que

$$\frac{\partial}{\partial u_1}\varphi(u_1 * u_1^{-1} * v) = \frac{\partial}{\partial u_1}\psi(u_1, u_2, v)$$

est de rang r . □

Exercice 6.1. Montrer que l'on peut remplacer L^1 par C^0 dans la démonstration ci-dessus.

Remarque 6.1. Dans le cas d'un champ de vecteurs, une orbite est « plus » que l'image d'une immersion. L'immersion est injective, même si ce n'est pas nécessairement une sous-variété. L'explication détaillée nécessiterait de définir la notion de variété immergée, ce que nous ne souhaitons pas faire ici. Par contre, on voit que pour une immersion, j , la condition suivante évite les « croisements » :

si $j(x) = j(y) = p$, il existe un voisinage U de x et V de y , U , un point z et un voisinage W de z tels que $j(z) = p$ et $j(U) \cup j(V) \subset j(W)$, ou encore si $p \in j(U) \cap j(V)$ on a que $j(U) \cap j(V)$ est un voisinage de p dans $j(U)$

Pour voir que \mathcal{A}_x vérifie cette condition, il suffit de montrer que si $x \in \Psi(\mathcal{U}) \cap \Psi(\mathcal{U}')$ où \mathcal{U} et \mathcal{U}' sont deux ouverts, alors $\Psi(\mathcal{U}) \cap \Psi(\mathcal{U}')$ est un voisinage de x dans $\Psi(\mathcal{U})$.

Or si u_0, u'_0 sont les préimages de x dans \mathcal{U} et \mathcal{U}' , on peut considérer $u'' = u * u^{-1} * u'$ qui a aussi pour image par ψ le point x . De plus l'image par Ψ d'un voisinage de u'' contient à la fois $\Psi(\mathcal{U})$ (image de $v \mapsto v * u^{-1} * u'$ pour v voisin de u) et $\Psi(\mathcal{U}')$ (image de $v' \mapsto u * u^{-1} * v'$ pour v' proche de u'). Quitte à restreindre les voisinages \mathcal{U} et \mathcal{U}' , on voit que $\Psi(\mathcal{U}) \cup \Psi(\mathcal{U}') \subset \Psi(\mathcal{U}'')$.

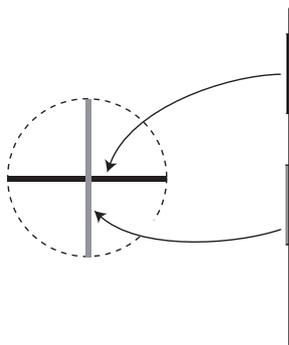


FIGURE 3.3 – Sous-variété immergée qui ne peut être un \mathcal{A}_x

Le théorème précédent nous permet de donner une condition suffisante pour que \mathcal{A}_x soit égal à l'espace tout entier.

Théorème 3.6 (Chow). *Si M est connexe et les crochets itérés $[X_1, [X_2 \dots [X_{k-1}, X_k] \dots]]$ de vecteurs tangents à D engendrent en chaque point tout l'espace, alors $\mathcal{A}_x = M$.*

Démonstration. D'après le théorème de Sussmann \mathcal{A}_x est une sous-variété immergée. Comme les vecteurs tangents à une sous variété sont stables par crochets de Lie, que les X_i tangents à D sont évidemment tangents à \mathcal{A}_x , les crochets itérés sont tangents à \mathcal{A}_x . Il en résulte que l'espace tangent à \mathcal{A}_x en z est égal à $T_z M$. Comme la sous-variété est immergée, on en conclut que \mathcal{A}_x est ouverte dans M . Ce raisonnement montre que toutes les feuilles sont ouvertes, donc la réunion des feuilles distinctes de $\text{fl}\sqrt{\mathcal{A}_x}$ est aussi ouvert. On conclut que \mathcal{A}_x est à la fois ouvert et fermé, et par connexité $\text{fl}\sqrt{\mathcal{A}_x} = M$. \square

Exemples 6.1. (A) **Le monocycle**

Dans ce cas $X_1(x, y, \theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$ et $X_2(x, y, \theta) = (0, 0, 1)$. On a donc $[X_1, X_2] = (\sin(\theta), -\cos(\theta), 0)$ et X_1, X_2, X_3 engendrent \mathbb{R}^3 . On conclut d'après le théorème de Chow que l'on peut atteindre n'importe quelle position.

(B) **L'entropie**(C. Caratheodory).

On considère un système "thermodynamique" décrit par un certain nombre de paramètres (pression, volume, température, etc...). On considère aussi avoir fixé l'énergie totale du système, et nous considérons les "transformations adiabatiques réversibles". Il n'est pas nécessaire de savoir ce que cela signifie dans la pratique. Il suffit de savoir que pour un chemin (différentiable) dans l'espace des états la propriété d'être un chemin "de transformations adiabatiques réversibles" est une propriété qui se vérifie à chaque instant, de manière infinitésimale⁵.

En d'autres termes, en chaque point x de l'espace des phases, il existe un sous-espace vectoriel $D(x)$, tel que le chemin d'états $\gamma(t)$ est "adiabatique réversible" si et seulement si γ est en chaque point tangent à $D(x)$.

5. Le lecteur pourra se convaincre que les "périphrases" des cours de physique de taupe pour définir de telles transformations, se résument au fait que c'est une propriété du vecteur vitesse d'un chemin.

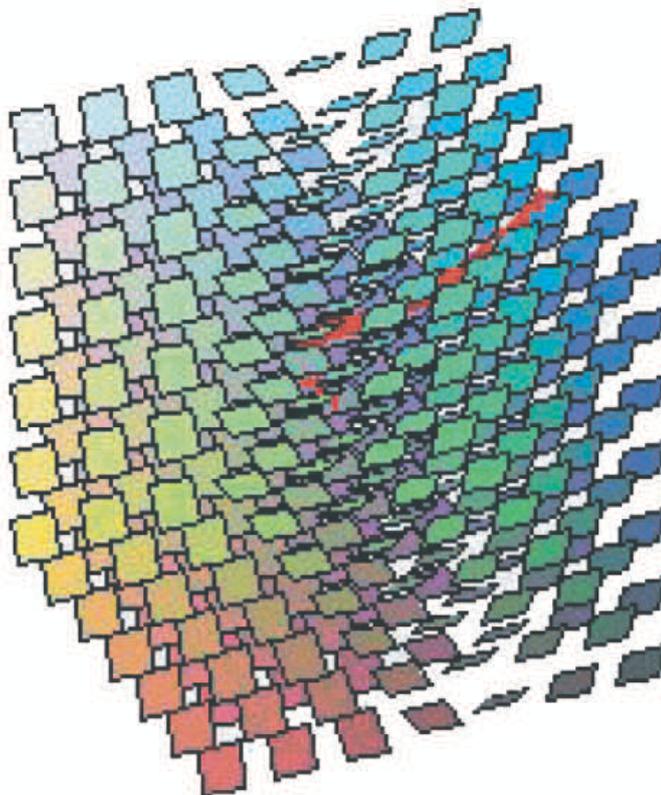


FIGURE 3.4 – Champ de plans non-intégrable et courbe tangente

La question se pose alors de savoir si on peut passer de n'importe quel état du système à n'importe quel autre par une telle transformation. Et si ce n'est pas le cas, que peut on dire ?

Or si $D(x)$ est un champ d'hyperplans, et si on suppose une certaine "homogénéité" on a deux cas possibles⁶ :

-soit les crochets de champs de vecteurs de $D(x)$ engendrent l'espace, auquel cas on peut aller de n'importe quel point à n'importe quel autre par une transformation "adiabatique réversible",

-soit les crochets de champs de $D(x)$ restent dans $D(x)$, auquel cas il existe un feuilletage dont les feuilles sont tangentes à $D(x)$.

Dans le cas décrit par la thermodynamique usuelle, le principe de Clausius⁷

6. on traduira cette propriété physique d'homogénéité en l'alternative mathématique énoncée dans la suite

7. il s'agit d'un fait expérimental, irréductible à une démonstration mathématiques : il n'existe pas de chemin adiabatique réversible dont le seul effet est de refroidir un corps isolé en produisant du travail

nous dit que ce n'est pas le cas. Il y a des états qui ne peuvent être obtenus l'un de l'autre par une transformation "adiabatique réversible".

Dans ce cas, supposons comme cela se produit en thermodynamique, que la condition infinitésimale d'adiabaticité soit donnée par une forme différentielle⁸, que l'on notera bien sûr δQ . Cela signifie que

$$\delta Q(x)h = 0 \Leftrightarrow h \in D(x)$$

Alors si S une fonction qui décrit localement les feuilles du feuilletage : $\text{fl}\sqrt{\S}A_x = \{y \mid S(y) = S(x)\}$. alors comme $T_x\text{fl}\sqrt{\S}A_x = \{h \mid \delta Q(x)h = 0\} = \{h \mid dS(x)h = 0\}$, et puisque $dS(x)$ et $\delta Q(x)$ ont même noyau elles sont proportionnelles : il existe donc une fonction que l'on notera $T(x)$, telle que $dS(x) = \frac{1}{T(x)}\delta Q(x)$.

On aura reconnu l'entropie S , et la température T .

(C) Boule roulant sans glissement

Nous allons maintenant traiter l'exemple de la contrainte de **roulement sans glissement** d'une boule sur un plan, qui s'exprime ainsi :

Soit $R(t)$ la matrice de rotation qui décrit la position de la boule à l'instant t , et $(x(t), y(t))$ les coordonnées de son centre.

Un point e de la boule, sera à l'instant t en

$$(x(t), y(t), 0) + R(t).e$$

La condition de roulement sans glissement nous dit que le point de contact avec la table, qui correspond à $(x(t), y(t), -1)$ et donc sur la boule à

$$R(t)e = (0, 0, -1) = v$$

a une vitesse nulle, c'est à dire

$$(\dot{x}(t), \dot{y}(t), 0) + \dot{R}(t)R(t)^{-1}v = 0.$$

Soit $\Omega(t)$ la matrice antisymétrique telle que $\dot{R}(t) = \Omega(t)R(t)$. La condition ci-dessus s'exprime par $(\dot{x}(t), \dot{y}(t), 0) = -\Omega(t)v$

La position de la boule, qui est décrite par un point d'une sous-variété de dimension 5, $\mathbb{R}^2 \times S0(3)$ dans l'espace $\mathbb{R}^2 \times M_3(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{11}$, et la condition de "roulement sans glissement" s'exprime par la relation satisfaite par le vecteur vitesse $(\dot{Z}(t), \dot{R}(t))$:

$$\dot{Z}(t) - \dot{R}(t)R(t)^{-1}v = 0 .$$

mécanique

8. Ici ce n'est rien d'autre qu'une forme linéaire définissant $D(x)$ en x , et dépendant de manière C^∞ du point x

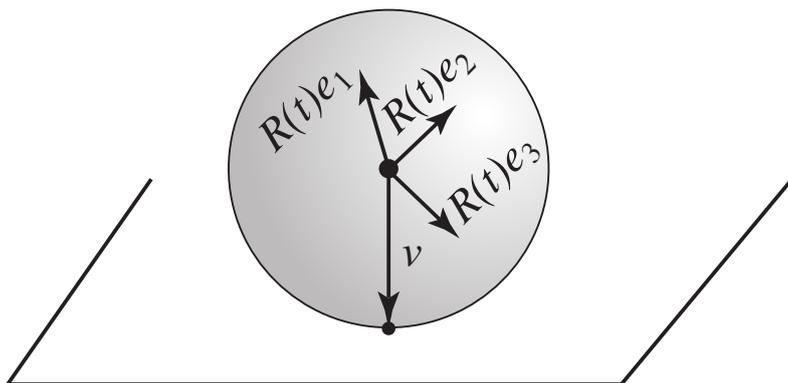


FIGURE 3.5 – Boule roulant sans glisser sur un plan

Il s'agit de deux conditions, qui déterminent en chaque point de $\mathbb{R}^2 \times SO(3)$ un sous-espace de dimension 3 de son espace tangent.

Si on pose $\Omega(t) = \dot{R}(t)R(t)^{-1}$ qui est une matrice antisymétrique, et s'identifie donc à un vecteur $\omega(t)$ ($\Omega(t) = L_{\omega(t)}$), appelé le vecteur instantané de rotation.

L'espace $D(Z, R)$ est alors engendré par

$X_1 = (0, 1, e_1)$, générateur du roulement sans glissement dans la direction e_1

$X_2 = (1, 0, e_2)$, générateur du roulement sans glissement dans la direction e_2

$X_3 = (0, 0, e_3)$, générateur du roulement sans glissement autour de l'axe vertical e_3

On a alors que $[X_1, X_2] = (0, 0, e_1 \wedge e_2) = X_3$, et $[X_1, X_3] = (0, 0, e_1 \wedge e_3) = (0, 0, -e_2)$, $[X_2, X_3] = (0, 0, e_2 \wedge e_3) = (0, 0, e_1)$. Comme les vecteurs $X_1, X_2, X_3 = [X_1, X_2], [X_3, X_1], [X_3, X_2]$ forment en chaque point une base de $\mathbb{R}^2 \times T_R SO(3)$ on voit que D vérifie la condition de Chow. La connexité de l'espace des positions permet de dire que tout point peut-être atteint par un chemin tangent au champ de sous-espaces : on peut joindre deux positions quelconques de la boule par un roulement sans glissement sur le plan.

On peut d'ailleurs constater que les champs X_1, X_2 suffisent pour que leurs crochets itérés engendrent l'espace tangent tout entier. Il faut noter que les roulements dans la direction e_1 et e_2 préservent la composante verticale du moment cinétique. Ces mouvements peuvent en fait être réalisés sans force extérieure à la boule (autre que les forces de frottement du plan).

Cependant le théorème de Chow nous permet de réaliser une rotation quelconque autour de l'axe vertical en composant de tels roulements. Donc, bien que la composante verticale du moment cinétique de la boule soit de dérivée constante, cette composante verticale peut varier. L'explication est que si α_v est la forme différentielle mesurant cette composante verticale, $\ker(\alpha_v)$ qui contient $D(Z, R)$ mais

est non intégrable (en effet, $X_1, X_2 \in \ker(\alpha_v)$ mais $\alpha_v(X_3) = 1$).

C'est un phénomène analogue qui explique pourquoi un chat lâché tête en bas, peut retomber sur ses pattes malgré la conservation du moment cinétique.

Une autre manière de revoir la dualité "intégrabilité/non-intégrabilité" est en termes de **formes différentielles** et leurs **facteurs intégrants**.

Une **forme différentielle** de degré un est l'objet dual d'un champ de vecteurs : en chaque point x de M , $\alpha(x)$ est une forme linéaire sur $T_x M$. Soit alors α une forme différentielle de degré un sur M ne s'annulant pas. Cherchons la condition pour que $D(x) = \{h \mid \alpha(x)h = 0\}$ soit intégrable.

Définissons pour cela⁹

$$d\alpha(x)(X(x), Y(x)) = d(\alpha(x)X(x))Y(x) - d(\alpha(x)Y(x))X(x) - \alpha(x)[X, Y](x)$$

L'objet ainsi défini est bilinéaire alterné en les champs de vecteurs X et Y . Comme les différents termes ne dépendent pas seulement de la valeur de X et Y en x , mais aussi de leur dérivée, on pourrait penser que le résultat aussi. Or un miracle se produit

Proposition 3.7.

$$d\alpha(X, Y)(x) = D(\alpha(x)X(x))Y(x) - D(\alpha(x)Y(x))X(x) - \alpha(x)[X, Y](x)$$

ne dépend que de la valeur de X et Y en x . Cela définit donc une forme bilinéaire antisymétrique sur l'espace tangent à x , que l'on note encore $d\alpha$.

De plus le champ $D\alpha$ défini par α est intégrable, si et seulement si $d\alpha$ s'annule sur $\ker \alpha(x)$. dans ce cas il existe des fonctions, f, g telles que $\alpha = f \cdot dg$

Démonstration. En utilisant une carte de la sous-variété, il suffit de le démontrer dans \mathbb{R}^n , pour $x = 0$. Soient X_0 et X_1 des champs de vecteurs qui coïncident en 0. Pour montrer que $d\alpha(X_0, Y)(0) = d\alpha(X_1, Y)(0)$, il suffit de montrer par linéarité que si $X(0) = 0$, alors $d\alpha(X, Y)(0) = 0$.

$$\begin{aligned} & [D(\alpha)(0)X(0) + \alpha(0)dX(0)]Y(0) - [D(\alpha)(0)Y(0) + \alpha(0)dY(0)]X(0) - \\ & (\alpha(0)(dX(0)Y(0) - dY(0)X(0))) = D\alpha(0)(X(0), Y(0)) - D\alpha(0)(Y(0), X(0)) \end{aligned}$$

On voit donc que $d\alpha$ ne dépend que de $X(0), Y(0)$ et est égale à la partie antisymétrique de $D\alpha$ ¹⁰.

9. Attention, dans ce qui suit d n'est pas la différentielle usuelle, mais un "opérateur" associant à une un-forme différentielle une deux-forme. La différentielle usuelle est maintenant notée D , afin d'éviter toute confusion. Nous sommes là encore tributaires des **notations standard**.

10. Dans \mathbb{R}^n , car $D\alpha$ n'a pas de sens intrinsèque dans une sous-variété.

On appelle $d\alpha$ la différentielle extérieure de α .

□

7 Exercices

- (A) Soient X_1, \dots, X_n des champs de vecteurs sur V formant en chaque point x de V une base de $T_x V$. Montrer que tout champ de vecteurs X sur V s'écrit comme combinaison linéaire à coefficients $C^\infty(V)$ des X_j .

Montrer que tout champ de vecteurs sur $SO(n)$ est combinaison linéaire à coefficients C^∞ des X_A , où A est antisymétrique.

- (B) Soit $D : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ une application linéaire vérifiant $D(fg) = D(f)g + fD(g)$. On dit alors que D est une **dérivation**.

- (a) Montrer que si $f(x_0) = g(x_0) = 0$ alors $D(fg)(x_0) = 0$
 (b) Montrer en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral que $R(x) = f(x) - df(x_0)(x - x_0)$ est somme de produits de fonctions s'annulant en x_0 .
 (c) En déduire que $D(f)(x_0) = df(x_0)X(x_0)$. Montrer que X qui ne dépend pas de f , (mais est déterminé par D) est un champ de vecteurs C^∞ . On note $D = D_X$.
 (d) Montrer que si D_{X_1}, D_{X_2} sont des dérivations, alors $D_{X_1}D_{X_2} - D_{X_2}D_{X_1}$ est une dérivation, égale à $D_{[X_1, X_2]}$
 (e) En déduire une démonstration de l'identité de Jacobi.

- (C) Plus généralement, si G est un sous-groupe de $M_n(\mathbb{R})$ ou $M_n(\mathbb{C})$, on associe à tout vecteur A de $T_I G$, espace tangent en Id à G , le champ de vecteurs invariant à gauche $X_A(M)$.

a) Montrer que ce champ est tangent à G (i.e. $X_A(M) \in T_M G$).

b) Montrer que le crochet de deux champs invariants à gauche est aussi invariant à gauche.

On appelle **algèbre de Lie** de G , notée \mathcal{G} l'espace $T_I G$ muni du **crochet de Lie** défini par $X_{[A, B]} = [X_A, X_B]$.

c) Montrer que G est abélien si et seulement si le crochet est nul sur \mathcal{G} .

- (D) Soit X un champ de vecteurs et φ_t^X son flot.

Soit $\Psi : M \times \mathfrak{X}^\infty \rightarrow M$ l'application donnée par $\Psi(x_0, X) = \varphi_1^X(x_0)$

Calculer $D\Psi$ (indication : après avoir montré que Ψ est différentiable, on pourra utiliser les résultats de la théorie des perturbations pour calculer les différentielles partielles de Ψ par rapport à x_0 et X)

- (E) Soit G le groupe des difféomorphismes de M contenant le flot de Y_1, \dots, Y_p où les Y_j engendrent l'espace tangent à M .

- (a) Montrer que G agit transitivement sur M .
 (b) Soit $D(x)$ une distribution dans une variété M de dimension 3, engendrée (localement) par les champs de vecteurs X_1, X_2 .

Montrer (sans utiliser le théorème de Chow!) que si $X_1, X_2, [X_1, X_2]$ engendrent $T_x M$, alors deux points voisins de x sont toujours joints par une courbe tangente à D . On pourra au choix

— Calculer la différentielle de :

$$(3) \quad (t_1, t_2, t_3) \mapsto$$

$$\text{fl}\sqrt{\S} \exp(t_1 X_1) \exp(t_2 X_2) \exp(-|t_3|^{1/2} X_1) \exp(\epsilon(t_3) X_2) \exp(-|t_3|^{1/2} X_1) \exp(-\epsilon(t_3) X_2) x_0$$

$$\text{où } \epsilon(t) = \text{signe}(t)(|t|)^{1/2}$$

- Raisonner sur le groupe G des difféomorphismes engendré par les flots des X_j , et montrer que si ϕ_t est le flot de X_i , G contient les difféomorphismes $(\phi_t)_* X_j$, donc le flot de $Z_\epsilon = X_i + \epsilon[X_i, X_j] + \epsilon^2 \dots$ et utiliser l'exercice E.
 (c) Estimer le temps maximal nécessaire pour atteindre un point (supposant tous les champs de vecteurs de norme 1).

Commencer par le cas $n = 3, k = 2$, et montrer que l'on peut joindre deux points suffisamment proches, v et v' par une courbe de longueur au plus $d(v, v')^{1/2}$.

- (F) Soit D un champ de sous-espaces différentiable, et $\text{fl}\sqrt{\S} A_x$ une feuille du feuilletage donné par le théorème de Sussmann. On veut déterminer la dimension de cette feuille et plus précisément son espace tangent.
 (a) On note G_D le groupe engendré par les flots de champs de vecteurs tangents à D , et G_{D, x_0} le sous-groupe des éléments qui fixent x_0 (i.e. $\{\varphi \in G_D \mid \varphi(x_0) = x_0\}$). Montrer que $G_D(x)$ agit sur $T_x M$ par sa différentielle.
 (b) Montrer que $T_x \text{fl}\sqrt{\S} A_x$ est invariant par $G_D(x)$. En déduire que $T_x \text{fl}\sqrt{\S} A_x$ contient le plus petit sous-espace invariant par $G_D(x)$ contenant $D(x)$, noté $\Delta_D(x)$.

On veut montrer que $T_x \text{fl}\sqrt{\S} A_x$ est égal à ce sous-espace $\Delta_D(x)$.

- (c) Utiliser l'exercice D pour montrer que $T_x \text{fl}\sqrt{\S} A_x$ est contenu dans $\Delta_D(x)$
 (d) Montrer en utilisant le théorème de Frobenius que $\Delta(x)$ est stable par crochet de Lie et donc contient les crochets itérés d'éléments de D (i.e. les $[X_1, [X_2, \dots [X_{k-1}, X_k] \dots]]$)
 (G) étudier le problème de la manoeuvre d'une voiture, les roues avant faisant un angle de ϕ avec l'axe de la voiture, celle-ci faisant un angle égal à θ avec l'axe Ox . On note ℓ la distance entre les essieux. écrire les équations du mouvement et des champs de vecteurs engendrant le champ de sous-espaces associé.

- (H) étudier de même le problème de la manoeuvrabilité d'un semi-remorque à deux remorques.

Bibliographie

- [Godbillon] C. Godbillon *Géométrie différentielle et Mécanique analytique* Hermann, 1985.
- [Bellaïche-Risler] A. Bellaïche, J.J. Risler. *Sub-Riemannian Geometry*. Birkhäuser, 1996.
- [B-J-R] A. Bellaïche, F. Jean, J.-J. Risler.
The Geometry of nonholonomic systems.
[ftp ://ftp.laas.fr/pub/ria/promotion/chap2.pdf](ftp://ftp.laas.fr/pub/ria/promotion/chap2.pdf)

Chapitre 4

Théorie des perturbations, solutions périodiques : Lotka-Volterra, bifurcation de Hopf

1 Étude de l'équation de Lotka-Volterra

On considère deux populations, dont les effectifs sont notés x et y . On suppose que y représente les "prédateurs" et x les "proies". On suppose aussi que le nombre de "rencontres" entre proie et prédateur est proportionnelle à xy . Il y a d'autre part une cause naturelle de décès des prédateurs, et donc leur effectif est donné par l'équation

$$\dot{y} = Cxy - Dy$$

où C et D sont des constantes positives.

Quant à la population des proies, elle croît naturellement en l'absence de prédateurs, et donc on peut supposer que

$$\dot{x} = Ax - Bxy$$

où A et B sont des constantes positives.

On arrive donc à l'équation

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax - Bxy \\ \dot{y} = Cxy - Dy \end{cases}$$

Il y a deux équilibres, $(0, 0)$ et $(D/C, A/B)$.

Toutes ses autres solutions sont périodiques :

La fonction $H(x, y) = Cx + By - D \log(x) - A \log(y)$ est constante sur les trajectoires. Comme ses niveaux sont bornés, les solutions sont sur des courbes fermées.

On voit donc que les populations des deux espèces vont osciller. Ce qu'avait constaté Volterra, c'est que la pêche, qui a pour effet de diminuer x et y d'une quantité ϵx , donc de remplacer A par $A - \epsilon$, D par $D + \epsilon$, fait varier la valeur moyenne de x et y .

Cela est clair pour le point d'équilibre, et on voit que les valeurs moyennes de proies diminue et celle de prédateurs augmente.

C'est ce que l'on avait constaté après la guerre de 1918, pendant laquelle la pêche fut interrompue. Les proportions entre proies et prédateurs avaient été modifiées.

Parmi les nombreux défauts du modèle ci-dessus, on peut noter que celui-ci suppose en l'absence de prédateurs, la croissance illimitée des proies, ou en présence de suffisamment de proies, la croissance illimitée de prédateurs. On peut introduire un terme limitant les populations. Le plus simple est un terme quadratique, et donc l'équation est maintenant

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax - Bxy - \lambda x^2 \\ \dot{y} = Cxy - Dy - \mu y^2 \end{cases}$$

On considère alors les droites $L := \{A - By - \lambda x = 0\}$ et $M := \{Cx - D - \mu y = 0\}$.

Les points d'équilibre sont $(0, 0)$, $(A/\lambda, 0)$, $(0, D/C)$. auquel on ajoute éventuellement le point d'intersection des droites L et M . Celui-ci n'a évidemment de sens que si il est situé dans le cadran positif (i.e. l'ensemble $\{(x, y) \mid x > 0, y > 0\}$). On peut vérifier qu'une solution partant du cadran positif y reste indéfiniment.

Par ailleurs, le champ de vecteurs traverse la droite L vers le bas, et M vers la gauche.

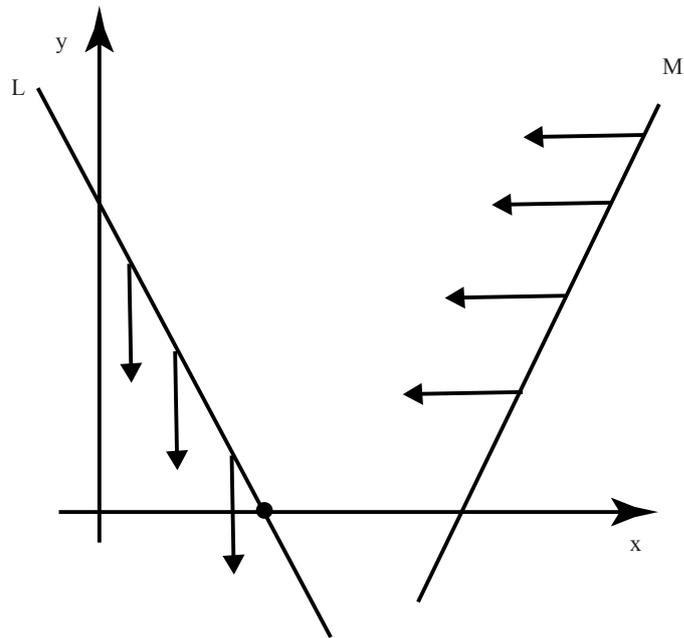


FIGURE 4.1 – Champ de vecteurs de l'équation de Lotka-Volterra perturbée : premier cas

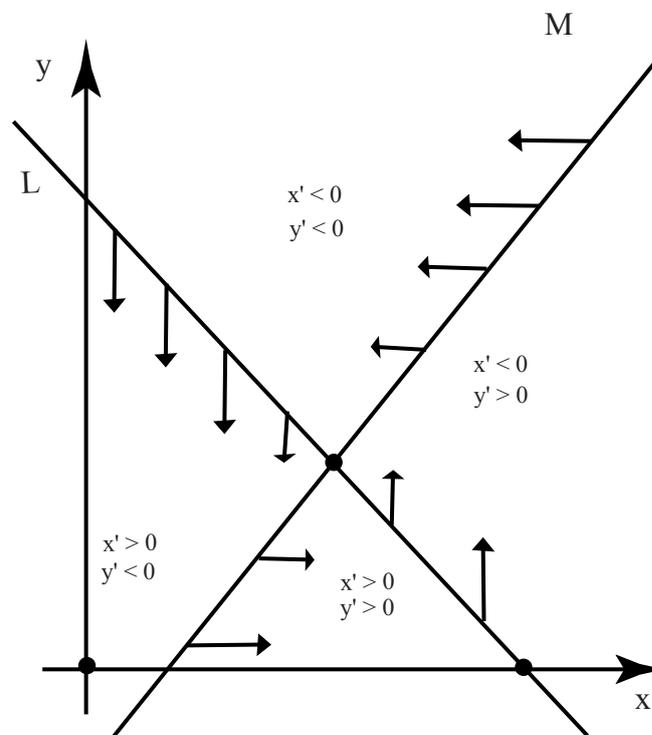


FIGURE 4.2 – Champ de vecteurs de l'équation de Lotka-Volterra perturbée : second cas

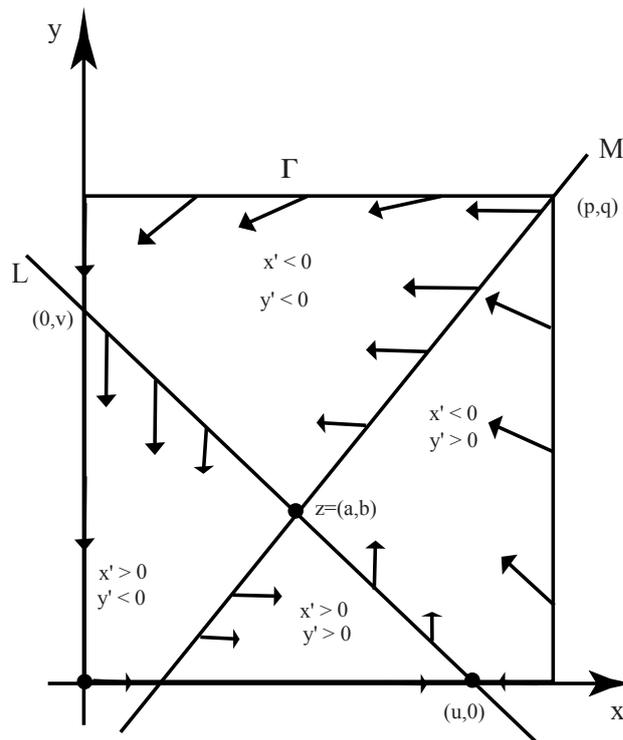


FIGURE 4.3 – Champ de vecteurs de l'équation de Lotka-Volterra perturbée : application de Poincaré Bendixson

Lorsque les droites L et M ne se rencontrent pas, on voit que toute solution finit soit sur $(A/\lambda, 0)$, ou se retrouve dans le domaine délimité par le premier cadran et la droite M . Un point entre L et M finit soit dans le domaine délimité par L et le premier cadran, et converge vers $(A/\lambda, 0)$. Dans ce cas, il n'y a pas de solution périodique, et $(A/\lambda, 0)$ est un centre, dont le **bassin d'attraction** est le plan tout entier.

Cela signifie que les prédateurs finissent par disparaître, les proies se stabilisent à une population A/λ . Notons que ce phénomène est bien connu. Lorsque les proies passent sous un certain seuil, leurs prédateurs disparaissent. Par exemple l'utilisation d'insecticides a provoqué la disparition de certaines espèces d'oiseaux. Cependant la population d'insectes se stabilise à un certain niveau.

Lorsque les droites L et M se croisent en un point $z = (a, b)$, la partie linéaire du champ de vecteurs est

$$\begin{pmatrix} -\lambda a & -Ba \\ Cb & -\mu b \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique est $t^2 + (\lambda a + \mu b)t + (\lambda \mu ab + CBab)$ est à coefficients positifs, et donc ses racines ont leur partie réelle négative. Il s'agit donc d'un point d'équilibre asymptotiquement stable. On voit par ailleurs que le point $(A/\lambda, 0)$ est un point selle.

Soit alors Γ le carré représenté sur la figure 4.3. On suppose que $p > u$ et $q > v$, c'est-à-dire que le Γ contient les points d'intersection de L et M avec les axes $0x$ et $0y$.

On vérifie aisément que le champ de vecteurs est rentrant sur le bord de Γ . Pour un point quelconque, le théorème de Poincaré-Bendixson nous dit que $L_\omega(x, y)$ est soit l'un des points d'équilibre $(0, u)$ ou (a, b) , soit une orbite périodique¹.

Un cas écologiquement peu naturel est celui où λ et μ sont négatifs, car dans ce cas (a, b) a ses valeurs propres de partie réelle positive, et donc $L_\omega(x, y)$ est nécessairement un cycle-limite.

On a donc

Proposition 4.1. *Soit l'équation*

$$(3) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax - Bxy - \lambda x^2 \\ \dot{y} = Cxy - Dy - \mu y^2 \end{cases}$$

Alors tout ensemble ω -limite est non-vide, et égal soit à (a, b) , soit à une orbite périodique.

En particulier lorsque λ et μ sont négatifs, (a, b) est instable, et donc il existe nécessairement (d'après Poincaré-Birkhoff) un cycle-limite.

2 Exercices

(A) Soit f un difféomorphisme de \mathbb{R}^n préservant l'orientation (i.e. $\det(df(x)) > 0$). On veut montrer qu'il existe un champ de vecteurs $X(t, x)$ dont le flot au temps un, φ_1 soit égal à f .

a) Montrer que s'il existe une famille continue f_t de difféomorphismes de \mathbb{R}^n telle que $f_0 = Id$ et $f_1 = f$ alors f_t est le flot d'un champ de vecteurs.

Montrer qu'il en est de même si on suppose simplement que f_0 est flot au temps un de champ de vecteurs.

b) En posant $f_0(x) = df(0)x$ et $f_t(x) = \frac{1}{t}f(t \cdot x)$, montrer en utilisant a) qu'il suffit de trouver un chemin de difféomorphismes entre Id et un élément quelconque de $GL^+(n) = \{A \in GL(n) \mid \det(A) > 0\}$

c) Que dire dans le cas où f renverse l'orientation.

(B) **G.B.Schiapparelli**² : Regarder dans un ouvrage sur la science hellénistique (par exemple [?]) la méthode d'approximation des trajectoires des planètes par des épicycloïdes. De quel type d'approximation s'agit-il ?

(C) Soit $X(x) = \nabla f(x)$

1. Ce ne peut-être $(0, u)$ que si $y = 0$

2. cf Storia dell'Astronomia Antica, voll1 t2 p.11

- (a) Montrer que X n'a pas d'orbites périodiques non constantes
 (b) Montrer que les seules trajectoires bornées de X sont soit constantes en les points critiques de f , soit celles reliant deux points critiques de f .

(D) Indice d'un champ de vecteurs le long d'une courbe

Soit γ une courbe fermée de \mathbb{R}^2 paramétrée par $[0, 2\pi]$, et X un champ de vecteurs autonome défini sur γ et ne s'y annulant pas. On note $\varphi(\theta)$ la détermination continue de l'angle que fait $X(\gamma(\theta))$ avec l'axe Ox (utiliser un théorème de relèvement). On pose alors $I(\gamma, X) = (\varphi(2\pi) - \varphi(0))/2\pi$

- a) Montrer que $I(\gamma, X)$ est un entier
 b) Montrer que si $X_s(x)$ est une famille continue de champs de vecteurs vérifiant les conditions de définition de I pour toutes les valeurs de s , alors $I(\gamma, X_s)$ ne dépend pas de s .
 c) Montrer de même que si $\gamma_s, X_s(t, x)$ sont respectivement une famille de courbes et de champ de vecteurs, pour lesquels $I(\gamma_s, X_s(x))$ soit définie, alors celle-ci est constante.
 d) Montrer que si une région entourée par une courbe γ ne contient aucun zéro d'un champ de vecteur X , alors $I(\gamma, X) = 0$.
 e) Montrer que si γ est le cercle unité et X pointe toujours intérieurement, alors $I(\gamma, X) = 1$ (on peut déformer $X|_\gamma$ en le champ $X(e^{i\theta}) = -e^{i\theta}$, et montrer que ce champ a indice 1)
 f) (théorème de Brouwer)

Montrer que si f est une application du disque dans lui-même, elle possède au moins un point fixe (calculer l'indice de $X(x) = f(x) - x$ sur le cercle unité et conclure).

- (E) (a) Soit X un champ de vecteurs défini sur un disque, et x_0 un point tel que $\{\varphi_t(x) \mid t \geq 0\}$ soit contenu dans le disque. Montrer que X possède un zéro à l'intérieur du carré. On pourra regarder "le plus petit" cycle limite (au sens de l'inclusion des domaines délimités) défini par X et utiliser Poincaré-Bendixson pour contredire sa minimalité.
 (b) Que dire pour un champ de vecteurs défini sur un anneau?
 (F) **(théorème de Smale)**

Dans tout le problème, on dira qu'un espace topologique X est contractile en $x_0 \in X$ s'il existe une famille continue d'applications $h_s : X \rightarrow X$, $s \in [0, 1]$ telles que

- $h_0 = Id_X$
- $\forall x \in X, h_1(x) = x_0$
- $\forall s \in [0, 1], h_s(x_0) = x_0$

On dit que h_s est l'homotopie réalisant la déformation de X sur x_0 . Enfin une application $\varphi : f \mapsto g$ de l'espace des fonctions C^∞ dans lui-même est continue si et seulement si les dérivées partielles de $\varphi(f)$ dépendent continûment de celles de f (pas nécessairement au même ordre). Par exemple la restriction d'une application continue pour toutes les topologies C^k ($\forall k \geq 1$) et l'application $f \mapsto df$ sont continues en topologie C^∞ .

I. Espace d'applications à valeurs dans S^1 (une autre démonstration du théorème de relèvement).

Soit I l'intervalle $[0, 1]$, on définit $\partial I = \{0, 1\}$, $\partial I^2 = \{0, 1\} \times [0, 1] \cup [0, 1] \times \{0, 1\}$. On dira qu'une application définie sur I^k est C^∞ si elle a des dérivées partielles à tous les ordres, continues sur I^k . Soit f une application C^∞ de I^2 à valeurs dans S^1 . On se propose de montrer que $F = \{f \in C^\infty(I^2, S^1) \mid f(0, 0) = 1\}$ est contractile en $f_0 \equiv 1$. On pose

$$\xi_1(x_1, x_2, \theta) = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2)), \quad \xi_2(x_1, x_2, \theta) = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2))$$

- Montrer que les trajectoires de ξ_1 partant de $(x_1, x_2, f(x_1, x_2))$ sont données par l'équation $t \mapsto (x_1 + t, x_2, f(x_1 + t, x_2))$, tant que $t + x_1 \in [0, 1]$. De même la trajectoire de ξ_2 est donnée par $t \mapsto (x_1, x_2 + t, f(x_1, x_2 + t))$.
- Soit p la projection de R sur S^1 donnée par $p(u) = \exp(iu)$, et π la projection de $I^2 \times R$ sur $I^2 \times S^1$ donnée par $id_{I^2} \times p$. Calculer $d\pi$, et montrer qu'il existe deux champs de vecteurs $\tilde{\xi}_1$ et $\tilde{\xi}_2$ sur $I^2 \times R$ tels que $d\pi(z)\tilde{\xi}_j(z) = \xi_j(\pi(z))$ pour $j = 1, 2$.
- Montrer que $[\xi_j, \xi_k] = 0$ et en déduire que $[\tilde{\xi}_j, \tilde{\xi}_k] = 0$.
- Montrer en utilisant les champs de vecteur construits ci-dessus que l'on peut construire $\tilde{f} : I^2 \rightarrow R$ telle que $p \circ \tilde{f} = f$ et $\tilde{f}(0, 0) = 0$.
- Montrer que $f \mapsto \tilde{f}$ est continue pour la topologie C^∞ .
- Montrer que

$$\tilde{F} = \{f \in C^\infty(I^2, R) \mid f(0, 0) = 0\}$$

est contractile sur $\tilde{f}_0 \equiv 1$. En déduire le résultat annoncé.

- Montrer de même que $G = \{f \in C^\infty(I^2, S^1) \mid f(x, y) = 1 \text{ au voisinage de } \partial I^2\}$ est contractile en f_0 .

II. Un théorème de S. Smale.

On se propose de montrer que $D_k = \{f \in C^\infty(I^k, I^k) \mid f \text{ est un difféomorphisme, et } f = id \text{ au voisinage de } \partial I^k\}$ est contractile en l'identité si $k = 1, 2$.

- Montrer le résultat si $k = 1$.

On suppose dorénavant $k = 2$. On pose $D = \{f \in C^\infty(I^k, I^k) \mid f \text{ est un difféomorphisme et } id \text{ au voisinage de } \partial I^2 - \{1\} \times [0, 1]\}$.

Notons que pour $f \in D$ on a tout de même $f(\{1\} \times [0, 1]) = \{1\} \times [0, 1]$. On note X_1 le champ constant $\frac{\partial}{\partial x}$, et Z l'ensemble des champs de vecteurs C^∞ sur I^2 tels que

- i. $X = X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ au voisinage de ∂I^2
- ii. X n'a pas de zéro sur I^2 .

- (b) Montrer que Z est contractile en X_0 (on utilisera les coordonnées polaires pour se ramener à la question I.5).

Soit $\varphi : D \rightarrow Z$ l'application définie par $\varphi(f)(x, y) = df(f^{-1}(x, y))X_0(x, y)$.

- (c) Montrer que les trajectoires de $\varphi(f)$ sont données par $f([0, 1] \times \{y\})$.
- (d) On note h_s l'homotopie obtenue en 2, et $u \mapsto P_s(f)(u, x_0, y_0)$ le flot de $h_s \varphi(f)$, avec condition initiale $P_s(f)(0, x_0, y_0) = (x_0, y_0)$. On pose $Q_s(f)(x, y) = P_s(f)(x, 0, y)$. Représenter sur un dessin l'application $Q_s(f)$ (en fonction des trajectoires de $X_s = h_s \varphi(f)$). Montrer que $Q_s(x, y)$ (lorsqu'il est défini) a sa différentielle de rang maximal.
- (e) Montrer qu'une trajectoire de $P_s(f)(u, 0, y_0)$ sort nécessairement de I^2 , et que cela a lieu en un point de $\{1\} \times [0, 1]$ (on pourra utiliser les corollaires de Poincaré-Bendixson).
- (f) Soit $\bar{u}(s, f, y)$ un instant où la trajectoire partant de $(0, y)$ atteint $\{1\} \times [0, 1]$. Montrer que $\bar{u}(s, f, y)$ est unique, et que $(s, f, y) \mapsto \bar{u}(s, f, y)$ est C^∞ en (s, y) continue en f et strictement positive.
- (g) Montrer que Q_s est un difféomorphisme de son domaine de définition (que l'on déterminera) sur I^2 .

On pose $g(f) = \min\{\frac{\bar{u}(s, f, y)}{1 - \bar{u}(s, f, y)}, 1 \mid s, x \in I, \bar{u} < 1\}$. On admettra que g est semi-continue inférieurement sur D et partout strictement positive il existe alors $\eta : D \rightarrow D$ continue telle que $0 < \eta < g$ et $\gamma : D \times [0, 1] \rightarrow R$ telle que $t \mapsto \gamma(f, t)$ soit C^∞ et vérifie $\frac{d\gamma}{dt} < 1 + \eta(f)$, et $\gamma(f, 0) = 0$, $\gamma(f, 1) = 1$.

- (h) On pose $H_s(f)(x, y) = Q_s(f)(x + \gamma(f, x)(\bar{u}(s, f, y) - 1), y)$. Montrer que H_s envoie I^2 sur lui-même. En écrivant H_s comme la composée de deux applications, montrer que c'est un élément de D . En conclure que D est contractile en l'identité.
- (i) En utilisant les questions 1 et 7, montrer que D_2 est contractile en l'identité. Pour d'autres conséquences de ce résultat, se référer à l'article de S.Smale "Diffeomorphisms of the 2-sphere", Proceedings of the A.M.S., vol 10 (1959) pp. 621-626. Pour le cas de D_3 voir J. Cerf "Sur $\Gamma_4 = 0$ ", Lectures notes in Math. Springer-Verlag. Enfin si $k > 6$, D_k n'est même plus connexe en général (cf. les travaux de J. Milnor).

Chapitre 5

Théorie des perturbations non-linéaire

1 Méthode de base

Nous voulons ici déterminer de manière plus précise les solutions proches d'une solution donnée. En d'autres termes, on veut calculer $d\varphi_t(x_0)$ où φ_t est le flot de $X(t, x)$.

Or d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz à paramètres, φ_t est différentiable et vérifie

$$\frac{d}{dt}\varphi_t(x) = X(t, \varphi_t(x))$$

En différenciant, on trouve, posant $d\varphi_t(x) = L(t, x)$

$$\frac{d}{dt}L(t, x) = dX(t, \varphi_t(x))L(t, x)$$

C'est dire que $L(t, x)$ est la résolvante de l'équation linéaire

$$\dot{v} = A(t)v$$

où $A(t) = dX(t, \varphi_t(x))$.

On peut aussi, sachant que le flot est différentiable, donner les différentielles d'ordre supérieur pour φ_t . Rappelons que la méthode la plus commode, est d'écrire à priori le développement de Taylor de la solution et de la substituer dans l'équation, en identifiant les termes de même ordre.

Enfin, pour une équation d'ordre supérieur, il est en général inutile de se ramener à une équation d'ordre un pour calculer le linéarisé du flot (du moins si on se contente d'avoir le linéarisé sous forme d'équation de degré supérieur).

Exemple :

Le pendule

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin(\theta) = 0$$

avec condition initiale $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = 0$.

Son linéarisé au voisinage de la solution nulle est

$$\ddot{v}_1 + \omega^2 v_1 = 0$$

dont les solutions sont les combinaisons linéaires de $\cos(\omega t)$ et $\sin(\omega t)$.

Donc la solution avec condition initiale $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = 0$ est donné par

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + O(x_0^2)$$

On peut bien évidemment calculer les termes d'ordre supérieur :

Posons

$$x(t) = x_0 \cdot v_1(t) + x_0^2 \cdot v_2(t) + x_0^3 v_3(t) + \dots$$

avec condition initiale $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = 0$ c'est-à-dire que $v_1(0) = 0, \dot{v}_1(0) = 0, v_2(0) = \dot{v}_2(0) = 0, v_3(0) = \dot{v}_3(0) = 0$.

On a donc¹

$$x_0 \ddot{v}_1 + x_0^2 \ddot{v}_2 + x_0^3 \ddot{v}_3 + O(x_0^4) + \omega^2 \sin(x_0 v_1 + x_0^2 v_2 + x_0^3 v_3 + O(x_0^4)) = 0$$

Utilisant le développement de \sin à l'ordre 3 on obtient

$$\begin{aligned} \ddot{v}_1 + \omega^2 v_1 &= 0 \\ \ddot{v}_2 + \omega^2 v_2 &= 0 \\ \ddot{v}_3 + \omega^2 v_3 &= \frac{1}{6} v_1^3 \end{aligned}$$

La solution de la première équation a été donnée plus haut : $v_1(t) = \cos(\omega t)$. Vu que la condition initiale et l'équation sont impaires, on sait à priori que v_2 est nulle.

La troisième équation est l'équation linéaire :

$$\ddot{v}_3 + \omega^2 v_3 = \cos^3(\omega t)$$

La solution, obtenue par variation de la constante ou par la commande Maple

1. notons que nos calculs ne justifient pas le développement. Une fois obtenue l'existence de celui-ci, par le théorème de Cauchy-Lipschitz à paramètres, il est facile de voir que les calculs qui suivent fournissent nécessairement les coefficients de ces développements.

`dsolve(\{diff(diff(u(x),x),x)+a^2*u(x)=a^2*(cos(a*x)^3),
u(0)=0, D(u)(0)=0\},\{u(x)\});`

est

$$v_3(t) = -\frac{1}{32} \cdot \cos(3\omega t) + \frac{3}{8}\omega t \cdot \sin(\omega t)$$

En définitive on obtient

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{x_0^3}{6} \left(-\frac{1}{32} \cdot \cos(3\omega t) + \frac{3}{8}\omega t \cdot \sin(\omega t) \right) + O(x_0^5)$$

Exercice 1.1. Trouver le développement de la période des oscillations du pendule en fonction de l'amplitude des oscillations, x_0 .

Remarque 1.1. Dans la formule ci dessus on a un terme en $t \sin(\omega t)$ qui n'est pas périodique, bien que l'on sache à priori que si x_0 est assez petit, $x(t)$ est périodique. Cela n'a rien d'absurde, une somme de termes non-périodiques peut très bien être périodique, mais cela pose le problème de l'approximation de $x(t)$ par le développement asymptotique ci-dessus lorsque t tend vers l'infini. Ces termes, appelés **termes séculaires**, furent considérés avec beaucoup d'attention au cours de la deuxième moitié du 19^{ème} siècle. On verra dans la section B une des méthodes utilisées pour s'en débarrasser.

Considérons maintenant une équation dépendant d'un paramètre :

$$\begin{cases} \dot{x}_\mu(t) = X_\mu(t, x_\mu(t)) \\ x_\mu(0) = u_0 \end{cases}$$

On a ici pris une condition initiale indépendante de μ par souci de simplicité, en général il arrive que l'on varie à la fois l'équation et la condition initiale.

On a alors en posant $\frac{d}{d\mu}x_\mu(t)_{\mu=0} = \xi(t)$

$$\begin{cases} \xi(t) = \left(\frac{d}{d\mu}X_\mu \right)(t, x_0(t)) + dX_0(t, x_0(t))\xi(t) \\ \xi(0) = 0 \end{cases}$$

On voit que $\xi(t)$ est solution de l'équation avec second membre telle que l'équation homogène associée soit

$$\xi(t) = A(t)\xi(t) \text{ avec } A(t) = dX(t, x_0(t)).$$

Si $L(t, x_0(t))$ est la résolvante, on peut écrire

$$\xi(t) = \int_0^t L(t, x_0(t))^{-1} L(s, x_0(s)) \frac{d}{d\mu} X_\mu(s, x_0(s))_{\mu=0} ds$$

2 La méthode de Lindstedt

Dans certains cas, comme par exemple celui du pendule, on sait que les solutions sont périodiques, alors que le développement asymptotique ne l'est pas. Ceci est doublement regrettable, d'une part car une propriété simple des solutions ne se reflète pas dans le développement, d'autre part en ce que ces termes tendent à grandir avec le temps, et donc l'approximation donnée par le développement est de moins en moins bonne, ce qui ne serait pas le cas si les approximations des solutions étaient périodiques.

L'idée est que si les solutions du système perturbé sont périodiques, leur période est différente de celle du système non-perturbé.

Traitons un exemple

$$(1) \quad \begin{cases} \ddot{x}(t) + x(t) + \mu x(t)^3 = 0 \\ x(0) = 0, x'(0) = 1 \end{cases}$$

la périodicité des solutions résulte de ce que l'énergie

$$\frac{1}{2}\dot{x}(t)^2 + x(t)^2 + \frac{\mu}{4}x(t)^4$$

est constante.

Les trajectoires sont donc contenues dans la courbe

$$\{(x, p) \mid \frac{1}{2}p^2 + x^2 + \frac{\mu}{4}x^4 = C\}$$

qui est compacte. Les solutions sont donc périodiques.

Posons pour une solution $x_\mu(t) = z_\mu(\omega(\mu)t)$ d'où $x_\mu''(t) = \omega(\mu)^2 z_\mu''(\omega(\mu)t)$, et l'équation se réécrit, posant $\tau = \omega(\mu)t$

$$\omega(\mu)^2 z_\mu''(\tau) + z_\mu(\tau) + \mu z_\mu(\tau)^3 = 0$$

On applique alors le calcul classique des perturbations sur z_μ mais en choisissant $\omega(\mu)$ de manière appropriée, afin d'éviter les termes séculaires.

On a donc $z_\mu(\tau) = a \cos(\tau) + \mu z_1(\tau) + \mu^2 z_2(\tau) + \dots$, et $\omega(\mu)^2 = 1 + \alpha_1 \mu + \alpha_2 \mu^2 + \dots$

A l'ordre 1, l'équation s'écrit

$$(1 + \alpha_1 \mu)(-a \cos(\tau) + \mu z_1''(\tau)) + a \cos(\tau) + \mu z_1(\tau) + \mu(a \cos(\tau) + \mu z_1(\tau))^3 = 0$$

soit en ne gardant que les termes d'ordre 1

$$z_1''(\tau) + \alpha_1(-a\cos(\tau)) + z_1(\tau) + a^3 \cos(\tau)^3 = 0$$

ou encore

$$z_1''(\tau) + z_1(\tau) = \alpha_1(-a\cos(\tau)) + \frac{3a^3}{4} \cos(\tau) + \frac{a^3}{4} \cos(3\tau)$$

Pour que la solution en z_1 ne contienne pas de termes séculaires, il faut que le coefficient en $\cos(\tau)$ soit nul, soit $\alpha_1 = \frac{3a^2}{4}$.

Alors z_1 est donnée par $z_1(\tau) = \frac{1}{8} \cos(\tau) - \frac{3}{8} \cos(3\tau)$.

On peut alors calculer le terme suivant, et bien évidemment, un logiciel de calcul formel constitue une aide précieuse, sinon indispensable.

Notons que l'on ne s'occupe pas de la convergence des séries. En fait, comme on sait **à priori** que les solutions sont périodiques, et que la période a un développement asymptotique, on l'obtient par la méthode de Lindstedt. Mais dès que l'on passe à plusieurs variables, ou à des systèmes dépendant du temps, on ne sait pas si les solutions sont périodiques, et donc les séries de Lindstedt ne convergent pas nécessairement. En réalité, c'est le cas quasi-périodique, qui est intéressant dans ce cas, qui est nettement plus difficile. Ce problème a occupé Poincaré une grande partie de sa vie, et qui n'a été véritablement compris que beaucoup plus tard, avec les travaux de Kolmogorov, Arnold et Moser dans les années 1950, puis ceux d'Eliasson dans les années 1980.

Exercice 2.1. Calculer un développement de la période des solutions de

$$\ddot{x}(t) + x(t) + \mu x(t)^3 = 0$$

La même méthode s'applique par exemple pour

$$\ddot{x}(t) + \omega^2(1 - \nu \cos(2t))x(t) + \mu x(t)^3 = 0$$

Pour $\omega = \omega_0 = k$ et $\mu = \nu = 0$ on a une solution $x_0(t) = a \cos(\omega_0 t) + b \sin(\omega_0 t)$.

On peut alors, appliquer la méthode de Lindstedt pour trouver les solutions périodiques proches d'une solution donnée, ainsi que leur période. Mais il faut là aussi être sûr d'avoir une famille de solutions périodiques. Sinon le développement asymptotique obtenu n'a pas de signification.

Plus généralement si $\dot{x}_\mu(t) = X_\mu(\omega t, x_\mu(t))$ est telle que $X_\mu(\omega t, x_\mu(t))$ est 2π périodique en t et les solutions avec condition initiale $x_0(0) = v \in V$ sont périodiques, de période 2π , on peut calculer pour x_μ solution de condition initiale $x_\mu(0) = v$,

$$\phi(\omega, \mu, v) = x_\mu(2\pi\omega) - v$$

Alors si $\frac{\partial \phi}{\partial v}$ est surjective, par le théorème du rang constant, on peut trouver $v = v(\mu, \omega, \xi)$ (pour ξ dans un voisinage de l'origine dans \mathbb{R}^k) telle que la solution x_μ de $\dot{x}_\mu(t) = X_\mu(\omega t, x_\mu(t))$ avec condition initiale $x_\mu(0) = v(\mu, \omega, \xi)$ soit périodique de période $2\pi\omega$.

Dans d'autres situations, c'est $\frac{\partial \phi}{\partial \omega}$ qui est surjectif, et on peut développer la période $\omega(v, \mu, \xi)$ de la solution, en fonction de la condition initiale v et du paramètre μ .

Notons que la méthode de substitution des développements asymptotiques (en puissances de μ) permet immédiatement de calculer celui de $\phi(\omega, \mu, v)$ et donc de vérifier la surjectivité de $\frac{\partial \phi}{\partial v}$. Il suffit en fait que le calcul du développement de $v(\mu, \omega, \xi)$ au premier ordre, ne nécessite pas de calculs au delà du premier ordre.

Exercice 2.2. 1) Soit $f(0, 0) = 0$ et supposons que $f(x, y) = ax + by + 0(x^2 + y^2)$. Montrer que $b \neq 0$ si et seulement si le développement à l'ordre 1 de $y = y(x)$ solution de $f(x, y) = 0$ ne nécessite pas la connaissance des termes d'ordre 2 de f .

2) Généraliser au cas de plusieurs variables, avec comme condition la surjectivité de $\frac{\partial f}{\partial y}$.

2.1 Programmes Maple

Le programme suivant résout $x''(t) + k^2x(t) = f(t)$ lorsque f est donné par une série trigonométrique, après avoir éliminé les termes séculaires.

```
> restart;
> W:=proc(f,j,k); # procedure qui resout x''+k^2*x=f ,x(0)=0, x'(0)=0
> l:=array(0..j); m:=array(1..j);S:={seq(i, i=1..j)} minus {k}; ;
> for q from 1 to j do;
> l[q]:=coeff(f,cos(q*t)); m[q]:=coeff(f,sin(q*t));od;
l[0]:=f-add(l[r]*cos(r*t)+m[r]*sin(r*t), r=1..j);
>
>add(1/(k^2-r^2)*l[r]*(cos(r*t)-cos(k*t))+1/(k^2-r^2)*m[r]*(sin(r*t)-sin(k*t)),
>r=S)+1/k^2*l[0]*(1-cos(k*t));
> end proc;
```

Le programme suivant applique la méthode de Lindstedt à

$$\ddot{x}(t) + \omega^2(1 - y \cos(2t))x(t) + zx(t)^3 = 0$$

On écrit le développement asymptotique de

$$\omega^2 = \sum_{j \geq 0, l \geq 0} x_{j,l} y^j z^l$$

avec $x_{0,0} = \omega^2$ et de

$$x(t) = \sum_{j \geq 0, l \geq 0} u_{j,l}(t) y^j z^l$$

avec $u_{0,0}(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$.

On écrit alors l'équation, et on élimine à chaque étape les termes séculaires, et enfin le programme fournit le développement de ω^2 et celui de $x(t)$.

```
> Z2:=proc(k,n,a,b);
> u:=array(0..n,0..n); x:=array(0..n,0..n);
> u[0,0]:=a*sin(k*t)+b*cos(k*t); x[0,0]:=k^2;
> v:=sum(sum(u[j,l]*y^j*z^l, j=0..n),l=0..n);
> w:=sum(sum(x[j,l]*y^j*z^l, j=0..n),l=0..n)*(1-y*cos(2*t));
> Q:=mtaylor(expand(v*w+z*v^3),[y=0,z=0],2*n);
> P:=collect(Q,trig);
> for l from 0 to n do; for j from 0 to n-1 do;if [j,l]<>[0,0] then
> F:=combine(coeff(coeff(P,y,j),z,l)-k^2*u[j,l]);
> C:={coeff(F,cos(k*t)),coeff(F,sin(k*t))};
> V:=solve(C,x[j,l]);#print(V);
> V1:=subs(V,x[j,l]);x[j,l]:=V1;
> u[j,l]:=W(-F,2*(j+1)*k+2,k);#print(u[j,l]);
> end if;od;od;[eval(w/(1-y*cos(2*t))),eval(v)];
> end proc;
```

3 Le pendule non-linéaire de longueur variable avec frottement : un exemple d'hystérésis

Considérons un pendule "réel" de longueur variable. Un tel pendule correspond à une équation non-linéaire avec un terme de frottement :

$$(2) \quad \ddot{x} + f\dot{x} + \omega^2(1 - h \cos(2t))x + \gamma x^3 = 0$$

Nous avons pris γx^3 pour terme non-linéaire au lieu de $\sin(x)$, ce qui simplifie les calculs, mais la même méthode s'applique dans les deux cas.

Notons qu'ici les termes de frottement font qu'on ne s'attend pas en général à ce que toutes les solutions soient périodiques. D'ailleurs si $\gamma = 0$, nous avons une version avec frottement de l'équation de Mathieu, et la théorie générale nous dit que si le coefficient de frottement f , est strictement positif, et les paramètres (ω, h) dans la zone de stabilité (cf.

[Viterbo], page 65-66), l'origine sera solution stable. En particulier les solutions voisines de zéro ne seront pas périodiques.

Maintenant, si on suppose les paramètres f, h, γ petits, on peut faire un développement asymptotique des solutions. On va regarder les solutions de condition initiale fixée, et chercher si la solution obtenue est périodique. On pourra ensuite examiner la stabilité de telles solutions.

Pour cela on calcule le développement

$$x_{f,h,\gamma}(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) + f u_f(t) + h u_h(t) + \gamma u_\gamma(t) + o(f, h, \gamma)$$

Notons que u_h, u_f, u_γ dépendent de a et b , et que l'on suppose que la condition initiale est fixée indépendamment des paramètres, et donc $u_h(0) = u_f(0) = u_\gamma(0) = 0$, et $u'_h(0) = u'_f(0) = u'_\gamma(0) = 0$

On peut alors écrire

$$\phi_\omega(a, b) = (h u_h(\frac{2\pi}{\omega}) + f u_f(\frac{2\pi}{\omega}) + \gamma u_\gamma(\frac{2\pi}{\omega}), h u'_h(\frac{2\pi}{\omega}) + f u'_f(\frac{2\pi}{\omega}) + \gamma u'_\gamma(\frac{2\pi}{\omega}))$$

Et les solutions périodiques sont obtenues en résolvant $\phi_\omega(a, b) = 0$. Si il existe une solution pour ω_0 , telle que $d\phi_\omega(a, b)$ soit inversible, il existera, d'après le théorème des fonctions implicites, des solutions proches pour des valeurs voisines de ω .

Notons que puisque les $u = f u_f + h u_h + \gamma u_\gamma$ s'obtiennent en résolvant une équation du type $\ddot{u}(t) + \omega^2 u(t) = F_{a,b}(t)$ où $F_{a,b}(t)$ est un polynôme trigonométrique dépendant de a, b , la solution u sera périodique si et seulement si $F_{a,b}$ n'a pas de termes en $\cos(\omega t)$ et $\sin(\omega t)$. Cela impose deux conditions sur a, b , et fournit donc, en général un ensemble fini de solutions.

Le plus simple est de faire les calculs en utilisant Maple (et des modifications banales, permettent de traiter le cas de n'importe quelle non-linéarité).

Pour avoir des calculs plus simples et physiquement significatifs, nous remplacerons $a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$ par $a \cos(\omega t + \theta)$. Nous avons alors de nouveaux paramètres, a, θ , et nous ne calculerons explicitement que les valeurs de a , qui représente une approximation de l'amplitude de l'oscillation (car $x = a \cos(\omega t + \theta) + O(h, f, \gamma)$).

4 Programmes Maple

Le programme suivant résout $\ddot{x} + k^2 x = f$

```
>with(plots): with(linalg):
```

```

> R:=proc(f,k);# procedure qui resout x"+k^2*x=f
>   g:= 1/k*int(f*sin(k*(s-t)), t=0..s);
>   subs(s=t,g); end proc;

```

Dans la suite on fixe h, f, v et on prend pour petits paramètres mh, mf, mv où m tend vers 0.

Le programme suivant, étudie le cas d'un pendule avec frottement de fréquence propre 2π , soumis à une variation périodique de sa longueur, ou dont l'extrémité est soumise à une oscillation périodique de période $\frac{2\pi}{(1+mu)}$.

On cherche alors des solutions périodiques, de même période que l'excitation, que l'on écrit sous la forme la forme $x_0(t) = a \cos((1+mu)t+r) + mx_1(t)$. et effectue par un calcul de perturbations la recherche des éventuelles solutions périodiques de

$$\ddot{x}(t) + 2mf\dot{x}(t) + (1 - mh \cos(2(1 + mu)t))x(t) + mvx(t)^3 = 0$$

L'existence d'une telle solution lorsque m tend vers 0 s'exprime par des conditions sur a et r . Pour chaque valeur des paramètres, f, h, v on cherche les valeurs de m correspondantes. Pour chaque valeur de m , on a alors une valeur de a qui représente l'amplitude approximative de la solution. Le nombre de solutions pour a varie de un (auquel cas $a = 0$ est la seule solution) à trois. Les valeurs de a en fonction de m sont tracées par le programme suivant :

```

> C:=proc(x,y,z);
> x0:=t-> a*cos((1+m*u)*t+r)+m*x1(t);
> E:=expand(diff(diff(x0(t),t),t)+(1-m*h*cos(2*(1+m*u)*t))*x0(t)+
2*m*f*diff(x0(t),t)+m*v*x0(t)^3);
> H1:=simplify(1/m*convert(series(E,m,2),
>polynom)-x1(t)-diff(diff(x1(t),t),t));
> E1:=convert(series(subs(t=2*Pi/(1+m*u),R(H1,1)),m,2)
-series(subs(t=2*Pi/(1+m*u),R(H1,1)),m,1),polynom);
> E2:=expand(convert(series(subs(t=2*Pi/(1+m*u), diff(R(H1,1),t)),m,2)
-series(subs(t=2*Pi/(1+m*u), diff(R(H1,1),t)),m,1),polynom));
> P:=matrix(2,2,[[coeff(E1,cos(r)), coeff(E2,cos(r))],[coeff(E1,sin(r)),
coeff(E2,sin(r))]]);
> S:=[solve(det(P),a)];T:=subs(h=x,f=y,v=z,S);u1:=solve(T[3],u);
>u2:=solve(T[5]-T[3],u);
> u3:=solve(diff(T[3],u));
> w:=subs(u=u3,T[3]);
> plot([T[5],T[3]],u=u1-1..u2+1,
>view=[u1-1..u2+1,0..w],numpoints=1500,thickness=2);

```

```
> end proc;
```

Le résultat par exemple pour $h = 0.5, f = .1, v = .16$ est donné par le diagramme suivant :

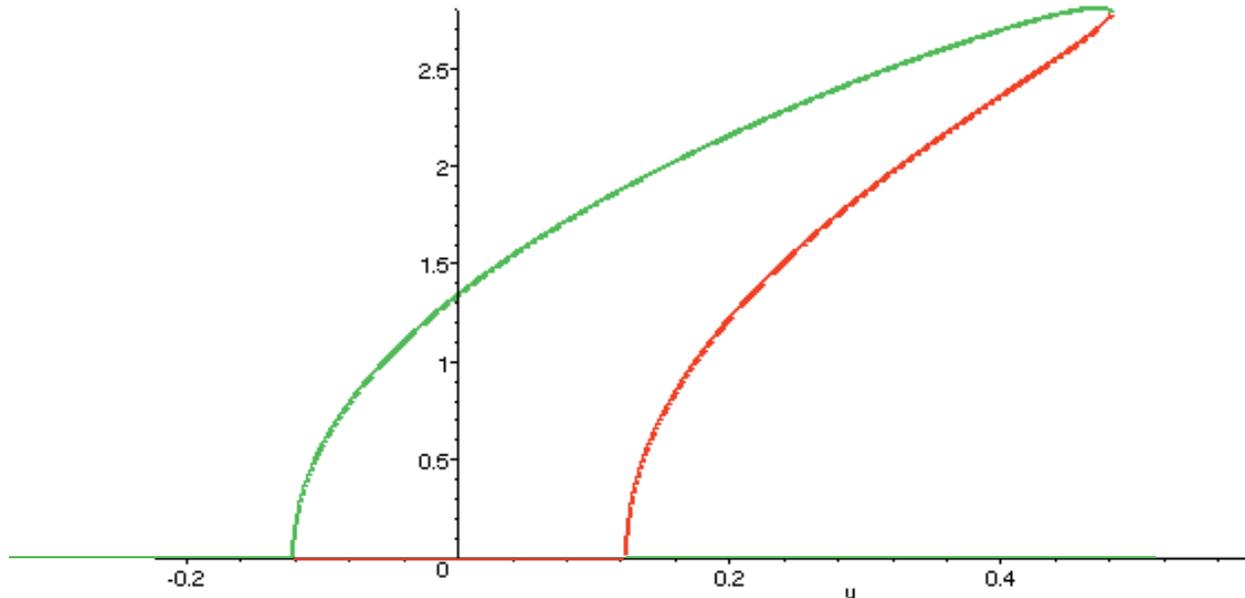


FIGURE 5.1 – Amplitudes des solutions périodiques au voisinage de la résonance paramétrique : le rouge correspond aux solutions périodiques instables, le vert aux solutions périodiques stables.

Le phénomène d'hystérésis a lieu lorsque l'on varie le paramètre m de $m = 0$ à $m = 0.6$ et de nouveau à $m = 0$. en effet en $m = 0$, la solution $a = 0$ correspond à une solution instable, donc le système est sur la solution périodique représentée par $a \simeq 1.35$ en vert. Lorsque m augmente, la courbe en vert correspond à l'amplitude d'une solution périodique stable, et donc l'amplitude des oscillations suit la courbe verte. Lorsque l'on dépasse la valeur limite de l'abscisse correspondant à la courbe verte, la seule solution sera la solution d'amplitude nulle. Donc les oscillations passent brusquement à une amplitude nulle. Lorsque m décroît maintenant jusqu'à la zone où la solution nulle est instable, la solution saute brusquement à l'amplitude donnée par le graphe vert. Ainsi suivant les valeurs passées du paramètre m , la solution observée sera oscillante ou non.

5 Théorie des perturbations singulières

Lorsque l'on considère une particule de masse m , emportée par un vent dont la vitesse est en chaque point de l'espace donnée par la fonction $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, cette particule satisfait l'équation

$$m\ddot{x}(t) + \eta(\dot{x} - F(x)) = 0$$

où η le coefficient de frottement de l'air.

Quelle est la trajectoire asymptotique de la particule, lorsque la taille de la particule tend vers 0 ?

Si r est le rayon de la particule, sa masse est de l'ordre de r^3 et η de l'ordre de r^2 . Il s'agit de trouver la limite pour r tendant vers 0 de la solution $x_r(t)$ de

$$\begin{cases} kr\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) - F(x(t)) = 0 \\ x(0) = a, \dot{x}(0) = b \end{cases}$$

Posant $kr = \varepsilon$, cette équation se réécrit

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \frac{1}{\varepsilon}(F(x) - y) \\ x(0) = a, y(0) = b \end{cases}$$

Lorsque ε tend vers 0 la constante de Lipschitz de $(x, y) \rightarrow (y, \frac{1}{\varepsilon}(F(x) - y))$ tend vers l'infini. On ne peut donc appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz à paramètres dont on verra d'ailleurs que les conclusions ne sont pas vérifiées. On a à faire à un problème de **perturbation singulière**

Le signe de ε jouant un rôle crucial, on supposera dans la suite que ε est strictement positif.

On considère plus généralement une famille d'équations du type

$$(E_\varepsilon) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \varepsilon\dot{y} = g(x, y) \\ x(0) = a, y(0) = b \end{cases}$$

où $(x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$.

Nous noterons $(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ l'unique solution définie si $\varepsilon \neq 0$.

On appelle **équation limite**

$$(E_0) \quad \begin{cases} \dot{\xi} = f(\xi, \eta) \\ 0 = g(\xi, \eta) \\ \xi(0) = a, \eta(0) = \beta, g(a, \beta) = 0 \end{cases}$$

Il s'agit d'une équation différentielle sur l'ensemble $\Gamma = \{(x, y) \mid g(x, y) = 0\}$. On supposera que $dg(x, y)$ est surjective en tous les points (x, y) de Γ , auquel cas Γ est une sous-variété ([Viterbo], chapitre 6, proposition 1.1). On se placera de plus dans un domaine Ω dans lequel Γ est définie comme un graphe² $\{(x, y) \mid y = \phi(x)\}$.

On appelle enfin **équation couche limite**

$$(C_a) \quad \begin{cases} \dot{\eta} = g(a, \eta) \\ \eta(0) = b \end{cases}$$

On supposera que les solutions de (C_a) sont définies pour tout $t > 0$. Dans ce cas, si $\eta(t)$ a une limite η_∞ en $+\infty$, c'est nécessairement un point tel que $g(a, \eta_\infty) = 0$, c'est-à-dire $\eta_\infty = \phi(a)$.

On renvoie au chapitre ??, définition 6.1 pour la définition de la stabilité asymptotique de η_∞ . On a ici besoin d'une uniformité en fonction du paramètre a , qui s'exprime ainsi :

Définition 5.1. On dira que la stabilité asymptotique de (C_a) est uniforme en a si

$$\forall a \in \Omega_x, \exists \delta > 0 \forall \rho > 0 \exists \mu > 0 \text{ tel que}$$

$$|a - a_0| < \delta \text{ et } |\eta(0) - \phi(a)| < \mu \implies \forall t > 0 \quad |\eta(t) - \phi(a)| < \rho$$

$$\text{et } \lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t) = \phi(a)$$

On supposera les hypothèses suivantes satisfaites

- (H1) f, g sont Lipschitz, et les solutions de E_ε, E_0 sont définies sur $[0, T]$ celles de C_a sont définies pour tout temps.
- (H2) il existe $\phi : \Omega_x \rightarrow \mathbb{R}^q$ telle que $y = \phi(x)$ est l'unique solution de $g(x, y) = 0$ pour $(x, y) \in \Omega$
- (H3) (a, b) est contenue dans Ω
- (H4) quel que soit a dans Ω_x , la solution de (C_a) est asymptotiquement stable uniformément en a

2. sans se poser trop de questions sur les conditions pour que cela soit réalisé. Voir cependant l'exercice?

(H5) b est dans le bassin d'attraction de $\eta(\infty) = \phi(a)$, c'est à dire que la solution de (C_a) de condition initiale $\eta(0) = b$ vérifie $\lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t) = \phi(a)$

Théorème 5.1 (de Tikhonov). *Sous les hypothèses (H1) – (H5), on a*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_\varepsilon(t) = \xi(t) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y_\varepsilon(t) = \phi(\xi(t))$$

où $(\xi(t), \eta(t)) = (\xi(t), \phi(\xi(t)))$ est solution de (E_0) avec condition initiale $\xi(0) = a, \eta(0) = \beta = \phi(a)$. La convergence est uniforme sur $[0, T]$ pour x_ε et sur $[t_0, T]$ pour y_ε quel que soit $t_0 > 0$.

De plus si η est la solution de (C_a) , on a $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y_\varepsilon(\varepsilon t) = \eta(t)$, et $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_\varepsilon(\varepsilon t) = a$ uniformément sur tout intervalle borné.

Remarque 5.1. Cela signifie que pour ε assez petit, le mouvement est constitué de deux parties : le mouvement **rapide**, dure un temps $0(\varepsilon)$ pendant lequel $x(t)$ est presque constante et reste proche de a , et $y(t)$ varie de la condition initiale, b , à une valeur proche de $\phi(a)$, puis le mouvement **lent**, durant lequel on suit approximativement la trajectoire de (E_0) . Une telle dynamique s'appelle souvent **dynamique lent-rapide**.

Pour chaque $\rho > 0$ nous noterons W_ρ le voisinage $W_\rho = \{(x, y) \in \Omega \mid |y - \phi(x)| < \rho\}$.

Nous allons tout d'abord montrer que pour tout voisinage W_{ρ_0} du graphe Γ , de ϕ , et tout ε assez petit, il existe un second voisinage W_ρ de Γ tel que si une trajectoire de (E_ε) rentre dans W_ρ , elle ne sort plus de W_{ρ_0} .

Lemme 5.1. *Sous les hypothèses (H1) – (H5), on a*

$$\forall \rho_0 > 0 \exists \rho, \varepsilon_0 > 0 \text{ tel que } \forall \varepsilon < \varepsilon_0, \forall \tau_0 \in]0, T[$$

$$(x_\varepsilon(\tau_0), y_\varepsilon(\tau_0)) \in W_\rho \implies \forall \tau > \tau_0 \quad (x_\varepsilon(\tau), y_\varepsilon(\tau)) \in W_{\rho_0}$$

Démonstration. Soit en effet μ associé à $\rho_0/2$ par la définition de la stabilité asymptotique. Quitte à diminuer μ on peut le supposer inférieur à ρ_0 .

Montrons tout d'abord que si $(x(\tau_0), y(\tau_0)) \in W_\mu$, alors pour ε assez petit, il existe un $\tau_1(\varepsilon) > \tau_0$ tel que

$$-(x_\varepsilon, y_\varepsilon)([\tau_0, \tau_1(\varepsilon)]) \subset W_{\rho_0}$$

$$-(x_\varepsilon(\tau_1(\varepsilon)), y_\varepsilon(\tau_1(\varepsilon))) \in W_\mu$$

En effet, faisons le changement de variable $t = (\tau - \tau_0)/\varepsilon$ et posons $u(t) = x(t\varepsilon + \tau_0), v(t) = y(t\varepsilon + \tau_0)$. Alors $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ vérifie l'équation

$$\begin{cases} u'_\varepsilon = \varepsilon f(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \\ v'_\varepsilon = g(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \\ u(0) = x(\tau_0), v(0) = y(\tau_0) \end{cases}$$

Lorsque ε tend vers 0 la solution converge, d'après Cauchy-Lipschitz à paramètres, vers une solution $(a, \eta(t))$ de (C_a) (avec $a = x(\tau_0)$). La stabilité asymptotique de $(a, \phi(a))$ comme équilibre de (C_a) permet de dire puisque par hypothèse $(u(0), v(0)) \in W_\mu$, on a pour tout $t > 0$, $|\eta(t) - \phi(a)| < \rho_0/2$, et pour \bar{t} assez grand, et $t > \bar{t}$, on a $|\eta(t) - \phi(a)| < \mu/2$.

La convergence uniforme sur tout intervalle borné de $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ vers $(a, \eta(t))$ lorsque ε tend vers 0, et la continuité de ϕ permettent d'affirmer, que pour ε assez petit, et $t \in [0, \bar{t}]$, on a $|u_\varepsilon(t) - a| + |v_\varepsilon(t) - \eta(t)| < \mu/2$.

On en déduit que sur $[0, \bar{t}]$, $|v_\varepsilon(t) - \phi(a)| < \mu/2 + \rho_0/2 < \rho_0$ et que

$$|u_\varepsilon(\bar{t}) - a| + |v_\varepsilon(\bar{t}) - \phi(a)| < \mu/2 + \mu/2 < \mu.$$

On retraduit cela en termes de $(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ ce qui donne

pour $t \in [0, \bar{t}]$

$$|x(\tau_0 + \varepsilon t) - a| + |y(\tau_0 + \varepsilon t) - \phi(a)| < \rho_0$$

et

$|x(\tau_0 + \varepsilon \bar{t}) - a| + |y_\varepsilon(\tau_0 + \varepsilon \bar{t}) - \phi(a)| < \mu$ Il suffit alors de poser $\tau_1(\varepsilon) = \tau_0 + \varepsilon \bar{t}$ pour montrer notre assertion.

Pour conclure la démonstration du lemme, il suffit de montrer que si ε_0 est déterminé par l'assertion précédente, on a pour $\varepsilon < \varepsilon_0$ que $(x_\varepsilon(\tau_0), y_\varepsilon(\tau_0)) \in W_\mu$ entraîne que pour tout $\tau \in [\tau_0, T]$, $(x_\varepsilon(\tau), y_\varepsilon(\tau)) \in W_{\rho_0}$.

Soit en effet pour $t_1 > T$ $\bar{\tau}(\varepsilon)$ le plus grand $\tau \in [0, T_1]$ tel que $(x_\varepsilon(\tau), y_\varepsilon(\tau)) \in W_\mu$, et $(x_\varepsilon([0, \bar{\tau}]), y_\varepsilon([0, \bar{\tau}])) \in W_{\rho_0}$.

Nous venons de montrer que $\bar{\tau}(\varepsilon) + \varepsilon \bar{t}$ vérifie la même propriété que $\bar{\tau}(\varepsilon)$. Or pour ε assez petit, $T_1 + \varepsilon \bar{t} < T$ et donc $\tau(\varepsilon) = T_1$. On en déduit que $(x_\varepsilon(\tau), y_\varepsilon(\tau)) \in W_{\rho_0}$ pour $\tau \in [0, T]$.

□

Démonstration du théorème de Tikhonov. Tout d'abord quel que soit $\mu > 0$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, la solution atteint W_μ en un temps de l'ordre de $0(\varepsilon)$. En effet, posant encore $\tau = \varepsilon t$, $u_\varepsilon(t) = x_\varepsilon(\varepsilon t)$, $v_\varepsilon(t) = y_\varepsilon(\varepsilon t)$ vérifient

$$\begin{cases} u'_\varepsilon = \varepsilon f(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \\ v'_\varepsilon = \varepsilon g(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \\ u(0) = x(0) = a, v(0) = y(0) = b \end{cases}$$

Par continuité des solutions en fonction des paramètres, on aura sur tout intervalle

$[0, t_0]$, que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(t) = a$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v_\varepsilon(t) = \eta(t)$. Comme (a, b) est dans le bassin d'attraction de $(a, \phi(a))$, on aura pour $t \geq t_0$ assez grand $(a, \eta(t)) \in W_{\mu/2}$ et donc par convergence uniforme de $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ vers $(a, \eta(t))$ sur $[0, t_0]$, que pour ε assez petit, $(u(t_0), v(t_0)) \in W_\mu$. Ceci démontre la dernière assertion du théorème.

Mais cela signifie que $(x_\varepsilon(\varepsilon t_0), y_\varepsilon(\varepsilon t_0)) \in W_\mu$ et d'après le lemme précédent, $(x_\varepsilon(\tau), y_\varepsilon(\tau)) \in W_{\rho_0}$ pour tout $\tau > \varepsilon t_0$.

Comme ρ_0 est arbitraire, on peut donc écrire

$$(3) \quad y_\varepsilon(\tau) = \phi(x_\varepsilon(\tau)) + r_\varepsilon(t)$$

où r_ε tend uniformément vers 0 avec ε sur tout intervalle de la forme $[\varepsilon t_0, T]$.

Réécrivant l'équation satisfaite par x_ε on obtient

$$\dot{x}_\varepsilon(t) = f(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t)) = f(x_\varepsilon(t), \phi(x_\varepsilon(t))) + w_\varepsilon(t)$$

où $w_\varepsilon(t)$ tend vers 0 avec ε uniformément sur $[\varepsilon t_0, T]$.

Or on a montré que $x_\varepsilon(\varepsilon t_0)$ tend vers a , donc lorsque ε tend vers 0, $x_\varepsilon(t)$ tend vers $\xi(t)$, solution de

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = f(\xi(t), \phi(\xi(t))) \\ \xi(0) = a \end{cases}$$

et la convergence est uniforme sur $[\varepsilon t_0, T]$. Mais la convergence uniforme de u_ε vers a sur tout intervalle borné, signifie que sur l'intervalle $[0, \varepsilon t_0]$, $x_\varepsilon(t)$ tend uniformément vers a . La convergence de x_ε vers $\xi(t)$ est donc uniforme sur $[0, T]$ tout entier.

En ce qui concerne y_ε , on déduit de (3) que sur $[\varepsilon t_0, T]$, y_ε converge uniformément vers $\phi(x_0(t))$. Ceci termine la démonstration. \square

Exercice 5.1.

- (A) — Montrer que lorsque $q = 1$, (i.e. $y \in \mathbb{R}$) l'hypothèse de stabilité asymptotique uniforme est (H4) satisfaite sur tout domaine borné si $\frac{\partial g}{\partial y}(x, \phi(x)) < 0$
 — Montrer que si $\frac{\partial g}{\partial y}(x, \phi(x)) < 0$ l'hypothèse (H2) est aussi vérifiée.
- (B) Montrer que la trajectoire d'une particule soumise à un vent $F(x)$ tend vers la trajectoire de $\dot{x} = F(x)$. Quelle est la difficulté pour prédire la position initiale d'une telle particule, connaissant sa position à l'instant t .

Remarque 5.2. Le terme couche-limite vient de ce que dans cette région, le mouvement n'est pas donné par l'équation limite, et cette couche est en général en x de l'ordre de $1/\varepsilon$. En d'autres termes, dans la couche $|x - a| < 1/\varepsilon$, c'est l'équation couche limite qui est satisfaite, au delà, c'est l'équation limite. De tels phénomènes sont fréquents en mécanique des fluides, lorsque la viscosité tend vers 0. La couche limite est en général au voisinage de la paroi, sur laquelle la vitesse du liquide est nulle, mais augmente très vite dès que l'on s'en éloigne.

La méthode ne s'applique à priori pas si la sous-variété $\Gamma = \{(x, y) \mid g(x, y) = 0\}$ n'est pas un graphe au dessus des x . Par exemple, si on considère l'équation de Van der Pol,

$$\varepsilon \ddot{y} + (1 - x^2)\dot{x} + x = 0$$

l'équation se réécrit

$$(VdP_\varepsilon) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \varepsilon \dot{y} = (x^2 - 1)y - x \\ x(0) = a, y(0) = b \end{cases}$$

l'équation limite sera

$$(VdP_0) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ 0 = (x^2 - 1)y - x \\ x(0) = a, y(0) = b \end{cases}$$

et la courbe ainsi définie ne sera plus un graphe au voisinage de $x = \pm 1$, où y tend vers $\pm\infty$.

Enfin l'équation couche limite sera

$$(CVdP_a) \quad \begin{cases} \dot{y} = (a^2 - 1)y - a \\ y(0) = b \end{cases}$$

dont les solutions sont asymptotiquement stables pour $|a| < 1$, de limite $y(\infty) = \frac{a}{a^2-1}$. Le bassin d'attraction est le plan tout entier.

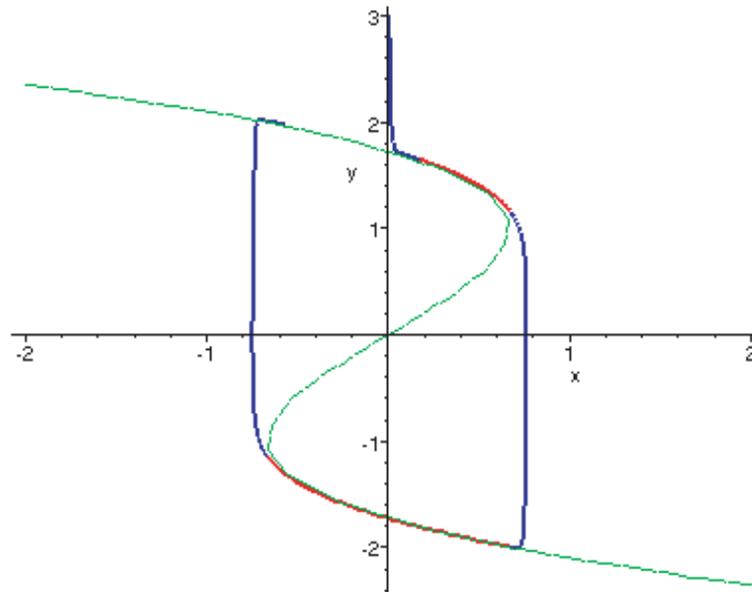


FIGURE 5.2 – En vert : $g(x, y) = 0$.
En bleu : trajectoires couche-limite.
En rouge : trajectoires proches de l'équation limite

Exercice 5.2. 1) Donner une autre démonstration du théorème de Tikhonov en supposant qu'il existe une fonction de Lyapounov "uniforme" en a , $V_a(y)$, pour l'équation couche-limite. étudier le cas de l'équation de Van der Pol pour $-1 < a < 1$.

2) en étudiant le sens des variations de $x_\varepsilon(t)$, montrer que pour ε assez petit, la figure 3.2 décrit les solutions de l'équation de Van der Pol. En particulier il existe une orbite périodique.

6 Programmes Maple

6.1 Équation de Van der Pol : $\dot{x} = y, \varepsilon \dot{y} = y - y^3/3 - x$

```
> with(plots);
> e:=.01; e := .1e-1;
> ode1:={D(x)(t)=y(t), e*D(y)(t)=y(t)-1/3*y(t)^3-x(t), x(0)=0, y(0)=3};
> ode1 := {.1e-1*D(y)(t) = y(t)-1/3*y(t)^3-x(t), y(0) = 3, x(0) = 0, D(x)(t) = y(t)};
> ans1:=dsolve(ode1,{x(t),y(t)}, type=numeric );
>a:=implicitplot(x=y-y^3/3, x=-5..2, y=-2..2, color=green):
>b:=odeplot(ans1,[x(t),y(t)], 0..0.1, numpoints=100, color=blue):
```

```
>c:=odeplot(ans1,[x(t),y(t)], 0.1..4, numpoints=1000, color=red):
>display([a,b,c]);
```

Exercices

- (A) (a) écrire l'équation d'une particule, de masse m et coefficient de frottement f , dans un vent $V(t, x)$
- (b) Montrer que lorsque m/f tend vers 0, la solution de l'équation ci-dessus tend vers la solution de $\dot{x}(t) = V(t, x)$ sur tout intervalle fermé ne contenant pas l'instant initial.
- (c) Quelle est la trajectoire couche-limite ?
- (B) **Séries de Lindstedt.**³

La théorie des perturbations élémentaires appliquée à une solution périodique, $x_0(t)$ de période T , telle que les solutions périodiques voisines soient aussi périodiques de période T_μ , ignore cette périodicité en introduisant des termes séculaires. Ce phénomène n'a rien de surprenant : le développement de Taylor de la fonction périodique $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$ est aussi une approximation d'une fonction périodique par une série dont les termes sont non-périodiques. Bien que la série soit convergente, le nombre de termes nécessaire pour avoir une approximation sur un intervalle de longueur L augmente avec L .

a) Estimer le nombre de termes nécessaire pour calculer $\sin(x)$ sur $[0, L]$ à 10^{-2} près. Donner une méthode plus pratique pour calculer $\sin(100)$ à 10^{-2} près.

La méthode de Lindstedt consiste à approcher la solution par des fonctions périodiques.

On va étudier cette méthode sur l'exemple de $\ddot{x} + x + \mu x^3 = 0$. On note $x_\mu(t)$ la solution de cette équation avec condition initiale $x_\mu(0) = a, \dot{x}_\mu(0) = 0$. On a donc $x_0(t) = a \cos(t)$

On pose comme nouvelle variable $\tau = \Omega(\mu) \cdot t$ et $z_\mu(\tau) = x_\mu(t)$.

L'équation en z_μ est alors

$$\Omega(\mu)^2 z_\mu''(\tau) + z_\mu(\tau) + \mu z_\mu(\tau)^3 = 0$$

On suppose que $z_\mu(\tau) = a \cos(\tau) + a_1 \mu z_1(\tau) + a_2 \mu^2 z_2(\tau) + \dots$ et $\Omega(\mu) = 1 + \alpha_1 \mu + \alpha_2 \mu^2 + \dots$

b) Écrire la relation entre α_1 et z_1 , et montrer que l'on peut choisir α_1 pour que z_1 soit périodique

3. A. Lindstedt, Mém. de l'Acad. Impér. de St Petersburg, vol 31, 1883. Voir aussi [?].

c) Montrer que l'on peut choisir $\alpha_2, \dots, \alpha_k$ pour que z_2, \dots, z_k soient périodiques.

On a donc éliminé les termes séculaires.

d) Justifier les développements asymptotiques de $z_\mu, \Omega(\mu)$ et $x_\mu(t) = z_\mu(\Omega(\mu)t)$ ainsi obtenus

e) Calculer un développement asymptotique de la période $T(\mu) = \frac{2\pi}{\Omega(\mu)}$.

f) Comment varie la période des oscillations d'un pendule en fonction de l'amplitude (on remplacera u par μx dans $\ddot{u} + \sin(u) = 0$).

Remarque 6.1. Nous avons étudié un cas particulièrement simple, où les solutions sont toutes périodiques (car l'énergie $|\dot{x}|^2 + |x|^2 + \frac{\mu}{2}|x|^4$ est constant et les lignes de niveau sont fermées). Les solutions sont alors réellement de période T_μ . Mais la méthode s'applique dans le cas de dimension supérieure, où les différentes fréquences du système linéarisé ne sont pas, en général égales. On a alors des solutions quasi-périodiques, et si les séries de Lindstedt dans ce nouveau cadre fournissent un développement asymptotique, la question de leur convergence est un sujet difficile, commencé par Poincaré, qui les pensait généralement divergentes, poursuivi par Kolmogorov, Arnold et Moser, dont le célèbre théorème KAM, affirme au contraire qu'elles peuvent être assez souvent convergentes, dans certaines circonstances. Ces questions sont encore le thème de travaux de recherche actuels, de H. Eliasson, G. Gallavotti, etc...

