

Feuille d'exercices 1

1. Algèbre linéaire : généralités

Ces exercices de révision ne seront pas traités systématiquement en TD, et pas nécessairement lors du premier TD

1.1. Les vecteurs suivants forment-ils une famille libre ? Génératrice ? Quelle est la dimension de l'espace vectoriel engendré par les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix}$$

et déterminer des équations définissant ce sous-espace.

Mêmes questions pour les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

ainsi que pour les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

1.2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y, z) = (2x + y - z, 3x - 2y + 4z)$$

Trouver la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$, puis lorsque dans $\mathbb{R}^3$ on utilise à la place de la base canonique la base $B' = (v_1, v_2, v_3)$ où

$$v_1 = (1, 1, 1)$$

$$v_2 = (1, 1, 0)$$

$$v_3 = (1, 0, 0)$$

1.3. Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

et f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ associée. Déterminer une base, donner des équations et préciser la dimension de $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$.

Mêmes questions pour l'application linéaire $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ associée à la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 7 & -4 & 11 \end{pmatrix}$$

1.4. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme défini par

$$f(1, 0, 0) = (-1, -6, 9)$$

$$f(0, 1, 0) = (2, 6, -6)$$

$$f(0, 0, 1) = (1, 2, -1)$$

1. Déterminer une base de $\ker(f)$.
2. Montrer que l'ensemble $E = \{ u, f(u) = 2u \}$ est un plan dont on donnera l'équation et une base.
3. Montrer que $\ker(f)$ et E sont supplémentaires.
4. Donner la matrice de f dans une base formée de bases de $\ker(f)$ et de E .

1.5. On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

1. Quel est le rang de (v_1, v_2)
2. Donner une équation du sous-espace vectoriel V engendré par ces vecteurs.
3. Trouver v_3 tel que (v_1, v_2, v_3) forme une base.

1.6. On note $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par la donnée des images des vecteurs de la base :

$$u(e_1) = -2e_1 + 2e_3, u(e_2) = 3e_2, u(e_3) = -4e_1 + 4e_3$$

1. Écrire la matrice de u dans la base B
2. Déterminer une base de $\text{Ker } u$
3. u est-il injectif? peut-il être surjectif? Pourquoi?
4. Déterminer une base de $\text{Im } u$
5. Quel est le rang de u ?

1.7. Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Parmi tous les sous-ensembles suivants, déterminer lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

- a) Les fonctions continues.
- b) Les fonctions croissantes.
- c) Les fonctions vérifiant $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 2$.
- d) Les fonctions dérivables.

1.8. Soient les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_1(t) = \cos t$$

$$f_2(t) = e^t$$

$$f_3(t) = \sin t$$

Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3) est libre dans $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1.9. Pour $x, y \in \mathbb{K}^n$ on note $(x, y) = x_1 \cdot y_1 + \dots + x_n \cdot y_n$ le produit scalaire canonique. Soit $(w_1, \dots, w_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$. On considère l'espace V défini par les équations $(w_j, z) = 0$:

$$V = \{ z \in \mathbb{K}^n \mid \forall j \in [1, p], (w_j, z) = 0 \}$$

On dit que ces équations sont indépendantes si la famille de vecteurs $(w_1, \dots, w_p)$ est libre. On veut montrer que si ces équations sont indépendantes alors $\dim(V) = n - p$.

On note $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^p$ l'application $z \mapsto ((w_1, z), \dots, (w_p, z))$.

1. Montrer que f est linéaire
2. Montrer en utilisant le théorème du rang que $\dim(V) \geq n - p$.
On suppose à partir de maintenant les équations indépendantes
3. Montrer que si $p = n$, $(w_1, \dots, w_n)$ est une base

4. En déduire (toujours si $p = n$) que $\text{Ker}(f) = 0$: on pourra écrire z comme combinaison linéaire des w_j et montrer que si $z \in \text{ker}(f)$ on a $(z, z) = 0$
5. Montrer (toujours si $p = n$) que f est bijective
6. En utilisant que si $(w_1, \dots, w_p)$ est libre elle se complète en une base, montrer que f est surjective
7. En déduire que V est de dimension $n - p$
8. Dans $\mathbb{R}^4$ quelle est la dimension de l'espace donné par les équations

$$\{2x + y - t = 0, x - 3t = 0, 2y - 2z + t = 0\}$$

1.10. Soit $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (5, -2, 2)$, $v_3 = (-1, 1, 2)$.

1. Montrer que $B = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et écrire la matrice de passage de la base canonique B_{can} à la base B , puis celle de B à B_{can} .
2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme dont la matrice dans B_{can} est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice M de f dans la base B . Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis A^n .

2. Déterminants

2.1. Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 8 & 6 & 21 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 3 & 3 \\ 7 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

2.2. Factoriser sur $\mathbb{R}$ le polynôme

$$P(x) = \begin{vmatrix} -2 & x & 1 & 3 \\ x & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & x \\ 1 & -2 & x & 3 \end{vmatrix}$$

2.3. Sachant que les nombres 1067, 1455, 582, 9700 sont divisibles par 97, montrer sans le calculer que le déterminant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 8 & 2 \\ 9 & 7 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

est un nombre entier divisible par 97.

2.4. La famille $(0, -1, 1, 0)$, $(1, 2, -1, 1)$, $(0, 1, 7, -2)$, $(3, -1, 2, 0)$, formée de vecteurs de $\mathbb{R}^4$, est-elle une base ?

2.5. Considérons les vecteurs $u = (1, -2, 3, 0)$, $v = (0, 2, -1, 1)$ et $w = (-1, 0, 1, -2)$ de $\mathbb{R}^4$. Démontrer qu'ils forment une famille libre, en déduire qu'ils engendrent un hyperplan et donner une équation cartésienne de cet hyperplan.

2.6. Pour quelles valeurs du nombre réel a le système linéaire

$$\begin{cases} ax & - & y & + & z & = & 1 \\ -x & + & ay & + & z & = & 2 \\ x & + & y & + & az & = & 3 \end{cases}$$

admet-il une solution unique ?

2.7. Soit λ un paramètre réel. Considérons la matrice

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \lambda+3 & -2 \\ 1 & -\lambda-2 & 0 & -1 \\ \lambda+3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda+2 \end{pmatrix}$$

1. Factoriser le polynôme $P(\lambda) = \det(M_\lambda)$.
2. Déterminer les nombres réels λ pour lesquels la matrice M_λ est inversible.
3. Calculer le rang de M_λ en fonction des valeurs de λ .

2.8. Soient n un entier impair supérieur ou égal à 3, A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et I_n la matrice identité d'ordre n .

1. Exprimer $\det(-A)$ en fonction de $\det(A)$.
2. Montrer que $A^T = -A$ implique $\det(A) = 0$.
3. Montrer qu'il n'existe pas de matrice A telle que $A^2 = -I_n$.

2.9.* Calculer les inverses des matrices suivantes

1.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercices supplémentaires.

2.10. On considère les déterminants de Vandermonde

$$D(a, b, c) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad D(a, b, c, d) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

1. Montrer que $D(a, b, c) = (b-a)(c-a)(c-b)$.
2. Montrer que sans changer la valeur de $D(a, b, c, d)$, on peut remplacer sa dernière ligne par $f(a), f(b), f(c), f(d)$ où f est un polynôme de la forme $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.
3. En choisissant astucieusement f de sorte que dans la dernière ligne figurent trois termes nuls, et en développant, exprimer $D(a, b, c, d)$ en fonction de $D(a, b, c)$. En déduire la valeur de $D(a, b, c, d)$.
4. Peut-on généraliser ?

2.11 Posons $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ et

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

1. Calculer Δ_2 et Δ_3 .
2. Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a $\Delta_{n+2} = 2\Delta_{n+1} - \Delta_n$.
3. Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a $\Delta_n = n + 1$.

3. Diagonalisation

3.1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Factoriser P_f , le polynôme caractéristique de f .
2. Déterminer les valeurs propres de f et une base de chaque espace propre de f .
3. Donner une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f .
4. Diagonaliser la matrice A sur $\mathbb{R}$: on précisera les matrices D (diagonale) et P (invertible) ainsi que la formule qui relie A , D et P .

Mêmes questions pour chacune des matrices suivantes à la place de A :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 6 & 4 & -6 \\ 6 & 3 & -7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

3.2. Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables sur $\mathbb{R}$? (Réfléchir pour éviter les calculs).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$
$$E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.3*. Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 2 . Soit f l'application qui à $P(x)$ associe $P(x+1)$.

1. Écrire la matrice de f dans une base de votre choix.
2. L'application f est-elle diagonalisable ? Calculer ses espaces propres.

3.4. Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables sur $\mathbb{R}$? Sur $\mathbb{C}$? Si oui, les diagonaliser. On précisera les matrices D (diagonale) et P (invertible) ainsi que la formule qui relie A_i , D et P .

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.5. Discuter suivant la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$ la possibilité de diagonaliser sur $\mathbb{R}$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$$

3.6. À quelle condition sur $a \in \mathbb{R}$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1-a \\ -1 & 1 & a-1 \\ a-1 & 0 & 2a \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

3.7. Pour quelles valeurs de $a, b, c \in \mathbb{R}$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

3.8. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Démontrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et diagonaliser A sur $\mathbb{C}$.

La matrice A est à coefficients réels : utiliser le lien entre E_λ et $E_{\bar{\lambda}}$ pour calculer moins.

Exercices supplémentaires.

3.9. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$a_{ii} = \alpha \text{ pour tout } i, \text{ et } a_{ij} = 1 \text{ pour tout } i \neq j$$

1. On écrit $A = (\alpha - 1)I_n + B$ (où I_n est la matrice identité d'ordre n et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).
Montrer, avec très peu de calculs, que B est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Diagonaliser B sur $\mathbb{R}$.
2. Diagonaliser A sur $\mathbb{R}$.

3.10. Soit $n \geq 2$, λ_0 un réel donné et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que

$$\text{rang}(A - \lambda_0 I_n) = 1$$

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé à A .

1. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ telle $T = \mathcal{M}(f, \mathcal{B})$ est une matrice triangulaire supérieure.
2. Préciser le lien entre $\text{trace}(A)$ et $\text{trace}(T)$.
Déterminer les éléments de la diagonale de T en fonction de λ_0 et $\text{trace}(A)$.
3. Déterminer le polynôme caractéristique de A .
Donner une condition nécessaire et suffisante (portant sur $\text{trace}(A)$) pour que A soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$.