

Feuille d'exercices 3

1. Systèmes différentiels linéaires

On sait (Cours) que les solutions maximales des systèmes différentiels linéaires et des équations différentielles linéaires sont globales. Par la suite, le mot solution désignera toujours une solution globale.

1.1. On considère le système différentiel :

$$(S) \quad \begin{cases} x' &= x & -2z \\ y' &= 6x & +4y & -6z \\ z' &= 6x & +3y & -7z \end{cases}$$

1. Montrer que la matrice du système est diagonalisable, calculer ses valeurs propres et déterminer une base de vecteurs propres.
2. En déduire l'ensemble des solutions de (S) .
3. Quelle est la solution de (S) telle que $x(0) = 0$, $y(0) = -1$ et $z(0) = -1$?
4. Déterminer l'ensemble des solutions de (S) telles que $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ tendent toutes les trois vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$.

1.2. On considère le système différentiel

$$(S) \quad \begin{cases} x'(t) = x(t) - 4y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + 5y(t) \end{cases}$$

1. La matrice du système est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$?
2. Déterminer les solutions à valeurs complexes de (S) , puis les solutions à valeurs réelles.

1.3. On considère le système différentiel défini sur $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (S)$$

1. Résoudre le système homogène associé à (S) .
2. En remarquant que $(5, 1)$ est un vecteur propre de la matrice du système correspondant à la valeur propre 2, chercher une solution particulière de (S) de la forme

$$X(t) = \alpha(t)e^{2t} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

où la fonction α est à déterminer.

3. Déterminer l'ensemble des solutions de (S) .

1.4. On considère le système différentiel sur $\mathbb{R}$

$$(S) \quad \begin{cases} x'(t) = 2x(t) + 3y(t) + 2e^t \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

1. Déterminer les solutions du système homogène associé à (S) .
2. Trouver une solution particulière de (S) en appliquant la méthode de variation des constantes.
3. Donner l'ensemble des solutions de (S) .

1.5. Mêmes questions pour le le système différentiel sur $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.6. On considère le système différentiel

$$(S) \quad \begin{cases} x'' = 2x - y' \\ y'' = -y + 2x' \end{cases}$$

1. En introduisant les fonctions inconnues auxiliaires $z = x'$ et $w = y'$, transformer (S) en un système différentiel 4×4 du premier ordre

$$(S') \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

2. Montrer que le polynôme caractéristique de A est $P_A(x) = (x+1)(x-1)(x^2+2)$.
La matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$?
3. Déterminer les solutions à valeurs réelles de (S') . En déduire celles de (S) .

1.7.

On considère le système différentiel sur l'intervalle $]0, +\infty[$

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2/t^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (S)$$

1. Montrer que les fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par

$$Z_1(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Z_2(t) = \begin{pmatrix} 1/t \\ -1/t^2 \end{pmatrix}$$

sont solutions de (SH) , le système homogène associé à (S) .
En déduire l'ensemble des solutions de (SH) .

2. Utiliser la méthode de variation des constantes pour déterminer une solution particulière de (S) .
Déterminer l'ensemble des solutions de (S) .

3. Préciser le lien entre l'équation différentielle sur $]0, +\infty[$

$$u''(t) - \frac{2}{t^2}u(t) = 3 \quad (E)$$

et le système (S) . En déduire l'ensemble des solutions de (E) .

2. Méthode de variation des constantes pour une équation différentielle linéaire

3.1. On considère l'équation différentielle sur l'intervalle $]0, +\infty[$

$$x''(t) - 6x'(t) + 9x(t) = \frac{e^{3t}}{t^2} \quad (E)$$

1. Résoudre l'équation homogène associée à (E) .
2. Utiliser la méthode de variation des constantes pour déterminer une solution particulière de (E) .
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E) .

3.2. Utiliser la méthode de variation des constantes pour résoudre sur l'intervalle $] -\pi/2, \pi/2 [$ l'équation différentielle

$$x''(t) + x(t) = b(t)$$

1. Si $b(t) = \frac{1}{\cos t}$.
2. Si $b(t) = \tan t$.

Indication : on sera amené dans les calculs à déterminer une primitive de $-\frac{\sin^2 t}{\cos t}$. On se ramènera à celle de $\frac{1}{\cos(t)} = \frac{\cos(t)}{1-\sin(t)^2}$ et on utilisera alors le changement de variable $u = \sin t$.