

Feuille d'exercices 4

1. Systèmes différentiels linéaires dans le plan

1.1. Pour chacune des matrices suivantes

$$\text{a) } M = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{b) } M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{c) } M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{d) } M = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e) } M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on considère le système différentiel linéaire $(S) : \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

1. Tracer le champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (pour a), b) et e)).
2. Déterminer les solutions du système.
3. Déterminer les points d'équilibre et les trajectoires rectilignes de (S) . *On travaillera à partir des solutions du système et (pour a), b) et e)) on fera aussi le lien avec la question 1.*
4. Étudier l'allure des autres trajectoires.
5. Tracer le portrait de phases du système et préciser son type (« col », « nœud répulsif »...). Donner la nature (*) des points d'équilibre (stable, instable, attractif, répulsif).
(*) *On ne demande pas de justification, mais on doit comprendre intuitivement la réponse.*

1.2. Soit le système différentiel

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad (S)$$

Montrer que dans l'identification de $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ donnée par $(x, y) \longleftrightarrow z = x + iy$ on a

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longleftrightarrow (2 - i3)z$$

en déduire que (S) s'écrit $z'(t) = (2 - i3)z(t)$, où $z(t) = x(t) + iy(t)$.

Résoudre cette équation, en déduire le portrait de phases du système (S) et ses solutions.

1.3. Pour les matrices suivantes

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{c) } A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

on considère le système différentiel linéaire (S) de matrice A .

1. Déterminer les valeurs propres de A et une base de chaque espace propre.
2. En déduire le type de portrait de phases du système (S) .
3. Dessiner les trajectoires rectilignes du système et compléter l'allure du portrait de phases à partir de la question précédente et de l'étude générale du cours.

1.4 Donner l'allure du portrait de phases du système différentiel de matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$.

2. Familles à un paramètre de systèmes différentiels linéaires

2.1. Pour tout $\alpha \geq 0$ soit

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1-\alpha^2}{4} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Considérons le système différentiel

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A_\alpha \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad (S_\alpha)$$

1. Calculer $\text{trace}(A_\alpha)$, $\det(A_\alpha)$, ainsi que P_{A_α} (le polynôme caractéristique de A_α) et $\Delta(\alpha)$ (son discriminant).
2. Déterminer le type de portrait de phase du système (S_α) en fonction de α .
Préciser la nature (stable, instable, attractif, répulsif) de l'origine comme point d'équilibre de (S_α) .
3. Donner l'allure du portrait de phases du système dans les cas $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ et $\alpha = 3$.

2.2. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on considère le système différentiel

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\alpha & \alpha^2 + 1 \\ -\alpha^2 - 1 & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad (S_\alpha)$$

1. Soit A_α la matrice de (S_α) . Calculer $\text{trace}(A_\alpha)$, $\det(A_\alpha)$, ainsi que P_{A_α} et $\Delta(\alpha)$ (son discriminant).
2. En déduire le type de portrait de phase du système (S_α) en fonction de α .
3. Pour quelles valeurs de α le système (S_α) admet-il des trajectoires rectilignes ?
des trajectoires périodiques non réduites à un point ?
4. Pour quelles valeurs de α l'origine est-il asymptotiquement stable ?
stable mais non asymptotiquement stable ? instable ?
5. Donner l'allure du portrait de phases de (S_α) pour le cas $\alpha = 0$.

2.3. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ soit (S_α) le système différentiel de matrice

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha + 1 & 1 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $\text{trace}(A_\alpha)$, $\det(A_\alpha)$ et $\Delta(\alpha)$ (le discriminant du polynôme caractéristique de A_α).
2. En déduire le type de portrait de phase du système (S_α) en fonction de α , pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. Portraits de phases en dimension 1

Un système différentiel autonome en dimension 1 est une équation différentielle autonome.

3.1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction $f(x) = 7x$. On considère l'équation différentielle autonome

$$x'(t) = f(x(t)) = 7x(t) \quad (E)$$

1. Déterminer les solutions maximales $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ de (E) . Tracer leurs graphes sur le plan Otx .
2. Déterminer les trajectoires $x(I) = \{x(t) \mid t \in I\}$. Dessiner le portrait de phases de (E) sur l'axe Ox .
Quelle est la nature du point d'équilibre ?

Mêmes questions si $f(x) = -3x$.

3.2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction $f(x) = x^2 - 2x$. Considérons l'équation différentielle autonome

$$x'(t) = f(x(t)) \quad (E)$$

1. Déterminer les solutions maximales constantes de (E) . Préciser les points d'équilibre de (E) .
2. Soit $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ une solution maximale non constante. Montrer que
 - (a) Ou bien la trajectoire $x(I) \subset]-\infty, 0[$.
 - (b) Ou bien la trajectoire $x(I) \subset]0, 2[$.

(c) Ou bien la trajectoire $x(I) \subset]2, +\infty[$.

3. Les inclusions ci-dessus sont-elles des égalités? Justifier! Quelle est l'orientation de la trajectoire $x(I)$? Dessiner alors sur l'axe Ox le portrait de phases de (E) et préciser la nature des points d'équilibre de l'équation.

Sans faire de calculs, esquisser l'allure des graphes des solutions de l'équation dans le plan Otx .

4. Soit $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ une solution maximale non constante de (E) . Préciser dans quel cas le Th. des bouts implique $I = \mathbb{R}$. Dans quel cas est-ce que I est non borné à droite? Non borné à gauche?
5. Retrouver le portrait de phases de (E) à partir du tableau de signes de f .

3.3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction $f(x) = (\exp(-x^3) - 1) \arctan(x - 2)$.

Considérons l'équation différentielle autonome

$$x'(t) = f(x(t)) \quad (E)$$

1. Déterminer le tableau de signes de la fonction f . En déduire le portrait de phases de (E) et préciser la nature des points d'équilibre de l'équation.
2. Dresser le portrait de phases de (E) sur l'axe Ox . Sans calculs supplémentaires esquisser l'allure des solutions de (E) dans le plan Otx .
3. Soit $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ une solution maximale non constante de (E) . Préciser dans quel cas le Th. des bouts implique $I = \mathbb{R}$, I est non borné à droite ou I est non borné à gauche.

3.4. Pour les familles à un paramètre d'équations autonomes (E_μ) suivantes

a) $x'(t) = \mu$ ($\mu \in \mathbb{R}$)

b) $x'(t) = \mu x(t)$ ($\mu \in \mathbb{R}$)

c) $x'(t) = x^2(t) - \mu x(t)$ ($\mu \in \mathbb{R}$)

d) $x'(t) = x^3(t) - \mu x(t)$ ($\mu \in \mathbb{R}$)

1. Préciser pour chaque valeur du paramètre μ les points d'équilibre de (E_μ) et leur nature.
2. Préciser les valeurs de μ où il y a un changement qualitatif du portrait de phases (bifurcation).

4. Linéarisation autour d'un point d'équilibre

4.1. Soit le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = -2x(t) - y^2(t) \\ y'(t) = -x^2(t) - y(t) \end{cases} \quad (S)$$

Linéariser (S) au point d'équilibre $(0, 0)$. Appliquer le Th. de Liapounov pour déterminer sa nature.

4.2. Déterminer les points d'équilibre du système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) \\ y'(t) = x^2(t) - 1 \end{cases} \quad (S)$$

1. Linéariser le système autour de chaque point d'équilibre.
2. Déterminer grâce au Th. de Liapounov la nature des points d'équilibre de (S) .

4.3. Étudier la stabilité de l'origine pour le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = \exp(-x(t) - 3y(t)) - 1 \\ y'(t) = -x(t)(1 - y^2(t)) \end{cases}$$

4.4. On donne dans cet exercice un exemple en dimension 2 qui montre que la linéarisation ne conserve pas toujours la nature des points d'équilibre :

Soit λ un réel non nul. Considérons le système différentiel

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y(t) \\ x(t) \end{pmatrix} + \lambda(x^2(t) + y^2(t)) \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad (S_\lambda)$$

1. Montrer que l'origine est un point d'équilibre du système.
Montrer que le système linéarisé de (S_λ) au point $(0, 0)$ est

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y(t) \\ x(t) \end{pmatrix} \quad (L)$$

Quel est le type de portrait de phases du système (L) ?
 Quelle est la nature de $(0, 0)$ comme point d'équilibre de (L) ?
 Le Th. de Liapounov s'applique-t-il ici ?

2. Décrire géométriquement les champs de vecteurs

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} + \lambda(x^2 + y^2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Que peut-on conjecturer sur le portrait de phases de (S_λ) et la nature de son point d'équilibre en fonction du signe de λ ?

3. A partir des coordonnées polaires $(\rho, \theta) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}$, on introduit les inconnues $\rho(t)$ et $\theta(t)$ par

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \rho(t) \begin{pmatrix} \cos \theta(t) \\ \sin \theta(t) \end{pmatrix} \quad (P)$$

Exprimer $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ dans la base $\left(\begin{pmatrix} \cos \theta(t) \\ \sin \theta(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin \theta(t) \\ \cos \theta(t) \end{pmatrix} \right)$ à partir de (P) , puis à partir de (S_λ) .
 En déduire que les solutions de (S_λ) autres que la solution nulle sont données par

$$\begin{cases} \rho'(t) = \lambda \rho^3(t) \\ \theta'(t) = 1 \end{cases}$$

4. Déterminer le portrait de phases de (S_λ) et la nature de son point d'équilibre.
Il n'est pas nécessaire de calculer explicitement ρ , il suffit d'étudier le portrait de phases de l'équation $\rho'(t) = \lambda \rho^3(t)$.

5. Systèmes conservatifs

5.1. On considère l'équation différentielle

$$x''(t) = \frac{1}{2}x^2(t) - x(t) \quad (E)$$

Déterminer une fonction $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\text{grad } \varphi(x) = \varphi'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x$$

Si $v(t) = x'(t)$, l'équation (E) équivaut alors au système différentiel conservatif

$$\begin{cases} x'(t) = v(t) \\ v'(t) = -\text{grad } \varphi(x(t)) = \frac{1}{2}x^2(t) - x(t) \end{cases} \quad (SC)$$

1. Soit $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction

$$H(x, v) = \frac{v^2}{2} + \varphi(x)$$

Montrer que H est constante le long des trajectoires du système (SC) (on dit alors que H est une *intégrale première* du système).

2. Déterminer les points d'équilibre du système.
Préciser leur nature à l'aide des Théorèmes de Lejeune-Dirichlet et de Liapounov.
3. Donner l'allure des courbes de niveau de la fonction H .
En déduire le portrait de phases du système (SC) .

5.2. Étudier de la même manière les équations suivantes

1. $x''(t) = x^3(t) - x(t)$
2. $x''(t) = -4x^3(t) + 2x(t)$

5.3.

1. On considère l'équation différentielle linéaire (oscillateur harmonique non amorti)

$$x''(t) = -2x(t) \quad (E)$$

- (a) Soit $v(t) = x'(t)$. Écrire le système différentiel linéaire (S) équivalent à (E) .
Mettre en évidence que (S) rentre dans le cadre des systèmes conservatifs du cours : préciser les fonctions φ et H (énergie mécanique du système).
- (b) Dessiner les courbes de niveau de H , en déduire le portrait de phases de (S) .
Retrouver le type de portrait de phases à partir de la matrice du système.
- (c) Déterminer les solutions de (E) à partir des racines du polynôme caractéristique de l'équation.

2. On étudie maintenant l'équation différentielle linéaire (oscillateur harmonique amorti)

$$x''(t) = -2x(t) - 3x'(t) \quad (E')$$

- (a) Soit $v(t) = x'(t)$. Écrire le système différentiel linéaire (S') équivalent à (E') .
- (b) Montrer que la fonction H de 1.(a) (qui représente toujours l'énergie) est décroissante le long des trajectoires de (S') (système dissipatif).
Quel est alors le lien entre ces trajectoires et les courbes de niveau de (H) ?
Que peut-on conjecturer sur la nature du point d'équilibre?
- (c) Déterminer le type de portrait de phases de (S') à partir de sa matrice et valider la conjecture.
- (d) Préciser les solutions de (E') (amortissement fort).

5.4. (Oscillateur harmonique plan)

Soit $X(t) = (x_1(t), x_2(t)) \in \mathbb{R}^2$ la position d'un point matériel de masse m évoluant dans le champ de forces $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ défini par $F(X) = -kX$ ($k > 0$). On a alors

$$X''(t) = -\frac{k}{m}X(t) \quad (E)$$

Soit $V(t) = (v_1(t), v_2(t)) = X'(t)$.

1. Déterminer une fonction $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que l'équation (E) soit équivalente au système différentiel conservatif dans $\mathbb{R}^4$

$$\begin{cases} X'(t) = V(t) \\ V'(t) = -\text{grad } \varphi(X(t)) \end{cases} \quad (SC)$$

2. Écrire explicitement les quatre équations de (SC) .
3. Soit $H : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$H(x_1, x_2, v_1, v_2) = H(X, V) = \frac{\|V\|^2}{2} + \varphi(X)$$

Déterminer $H(x_1, x_2, v_1, v_2)$ et montrer que la fonction H est une intégrale première de (SC) .

4. Déterminer les points d'équilibre du système (SC) , préciser leur nature.

5.5. Soit le système différentiel

$$\begin{cases} x'_1(t) = v_1(t) \\ x'_2(t) = v_2(t) \\ v'_1(t) = -x_1(t) - 2x_1(t)x_2(t) \\ v'_2(t) = -x_2(t) - x_1^2(t) + x_2^2(t) \end{cases} \quad (S)$$

1. Montrer que (S) s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} X'(t) = V(t) \\ V'(t) = -\text{grad } \varphi(X(t)) \end{cases}$$

où $X(t) = (x_1(t), x_2(t))$, $V(t) = (v_1(t), v_2(t))$ et $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction que l'on déterminera.

2. En déduire une intégrale première du système (S) .
3. Déterminer les points d'équilibre de (S) . Étudier la nature de l'origine.

Exercices supplémentaires : systèmes hamiltoniens

5.6. On rappelle qu'un système Hamiltonien dans $\mathbb{R}^2$ est un système différentiel de la forme

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{\partial H}{\partial y}(x(t), y(t)) \\ y'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), y(t)) \end{cases} \quad (SH)$$

où $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

1. Quels sont les points d'équilibre du système ?
2. Montrer que H est une intégrale première de (SH) .
3. Montrer que tout système de la forme (SC) dans $\mathbb{R}^2$ est Hamiltonien.

5.7. Montrer que le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) - y^2(t) \\ y'(t) = y(t) + x^2(t) \end{cases}$$

est un système Hamiltonien avec $H(x, y) = -xy - \frac{x^3 + y^3}{3}$.

1. Déterminer les points d'équilibre du système.
2. Utiliser le Th. de Liapounov pour déterminer la nature du point d'équilibre $(0, 0)$.
3. Montrer que $(-1, -1)$ est un minimum local strict de H . Que peut-on en déduire ?
4. Tracer les courbes de niveau de H et en déduire le portrait de phases du système.

6. Exercices supplémentaires : trajectoires périodiques, bifurcation de Hopf

6.1. Considérons le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{1}{2}x(t) - y(t) - \frac{1}{2}(x^3(t) + y^2(t)x(t)) \\ y'(t) = x(t) + \frac{1}{2}y(t) - \frac{1}{2}(y^3(t) + x^2(t)y(t)) \end{cases} \quad (S)$$

1. Étudier la nature du point d'équilibre $(0, 0)$.
2. Montrer que, en coordonnées polaires, le système (S) s'écrit

$$\begin{cases} \rho'(t) = \frac{1}{2}\rho(t)(1 - \rho^2(t)) \\ \theta'(t) = 1 \end{cases}$$

(procéder comme dans la question 3 de l'exercice 3.4).

3. Étudier le portrait de phases de l'équation $\rho'(t) = \frac{1}{2}\rho(t)(1 - \rho^2(t))$.
En déduire l'allure du portrait de phases de (S) .

6.2. Bifurcation de Hopf.

Pour tout $\mu \in \mathbb{R}$ considérons le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = \mu x(t) - y(t) - x(t)(x^2(t) + y^2(t)) \\ y'(t) = x(t) + \mu y(t) - y(t)(x^2(t) + y^2(t)) \end{cases} \quad (S_\mu)$$

1. Linéariser (S_μ) au point d'équilibre $(0, 0)$. En déduire sa nature si $\mu \neq 0$.
2. Montrer que, en coordonnées polaires, le système (S_μ) s'écrit

$$\begin{cases} \rho'(t) = \mu\rho(t) - \rho^3(t) \\ \theta'(t) = 1 \end{cases}$$

3. Tracer le diagramme de bifurcation de la famille d'équations $\rho'(t) = \mu\rho(t) - \rho^3(t)$.
4. Donner l'allure des portraits de phases de la famille (S_μ) .
Que remarque-t-on lorsque le paramètre μ traverse la valeur $\mu = 0$?