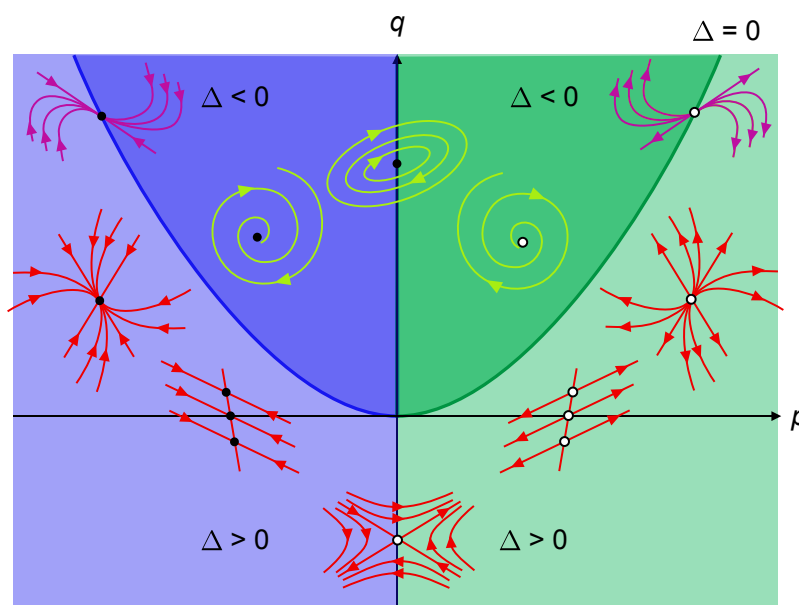


Algèbre linéaire et équations différentielles

Claude Viterbo

LMO-Université de Paris-Saclay



$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + By & p &= A + D \\ \frac{dy}{dt} &= Cx + Dy & q &= AD - BC \\ & & \Delta &= p^2 - 4q \end{aligned}$$

13 février 2026

Illustration : Oleg Alexandrov, Wikimedia Commons — CC BY-SA 2.5

Table des matières

Chapitre 1. Rappels d'algèbre linéaire	7
1. Motivation	7
2. Définition d'un espace vectoriel	7
3. Exemples classiques d'espaces vectoriels	8
4. Sous-espaces vectoriels	9
5. Combinaisons linéaires, familles libres et génératrices	11
6. Applications	17
7. Méthode pratique : Pivot ou réduction échelonnée	19
8. Applications Linéaires	23
9. Somme directe	26
Chapitre 2. Déterminants	29
1. Motivation	29
2. Déterminants	29
3. Propriétés du déterminant	31
4. Cas de la dimension 3	32
5. Cas de la dimension n	34
6. Propriétés générales	35
7. Propriétés fondamentales	35
8. Quelques applications des déterminants	37
9. Démonstration de $\det(A) = \det({}^t A)$	40
Chapitre 3. Diagonalisation	43
1. Motivations	43
2. Définitions et Propriétés	44
3. Polynôme Caractéristique	46
4. Théorème de d'Alembert-Gauss	47
5. Condition nécessaire et suffisante pour être diagonalisable	48
6. Exemples	49
7. Valeurs Propres Complexes	51
8. Applications de la diagonalisation	51
9. Exemples	54

10. Conclusion	55
11. Récapitulatif : comment décider si une matrice est diagonalisable?	56
12. Appendice 1 : comment décider si une matrice triangulaire est diagonalisable	57
13. Appendice 2 : Calculs pour l'élevage des lapins	61
14. Exercices	64
Chapitre 4. Formes quadratiques	65
1. Introduction, généralités	65
2. Diagonalisation des matrices symétriques	66
3. Applications géométriques	69
4. Classification par signature	74
5. Trouver la signature d'une forme quadratique à trois variables	75
6. Appendice : Les paraboloides	76
7. Appendice : Critère de Sylvester généralisé (Cet Appendice est hors programme)	77
Chapitre 5. Fonctions de plusieurs variables	81
1. Fonctions continues, dérivées partielles	81
2. Formule de Taylor et applications aux extréma	83
3. Extrema de fonctions de plusieurs variables réelles	84
4. Appendice : Polygone convexe extrémal inscrit dans un cercle	87
Chapitre 6. Équations différentielles d'ordre 1	89
1. Généralités	89
2. Définition et propriétés générales	91
3. Équations à variables séparables	92
4. Problème de Cauchy	93
5. Conséquences de Cauchy-Lipschitz	95
6. Explosion en temps fini (ou le Théorème des bouts)	95
7. Appendice : valeurs asymptotiques des solutions dans le cas autonome	98
Chapitre 7. Équations Différentielles Linéaires	101
1. Équations différentielles linéaires en dimension 1.	101
2. Équations différentielles linéaires en dimension quelconque	104
3. Equations à coefficients constants	106
4. Équations d'ordre n	108
5. Exercices	111
Chapitre 8. Théorie qualitative des équations différentielles	113
1. Résultats fondamentaux	114
2. Portrait de phase d'un système linéaire	116

Table des matières	5
1. Linéarisation et Notions de stabilité	125
2. Stabilité asymptotique : cas non-linéaire	129
3. Appendice : théorème de Dirichlet	133
Index	137
Bibliographie	139

Chapitre 1

Rappels d'algèbre linéaire

L'Algèbre est généreuse, elle
donne souvent plus qu'on ne
lui demande.

Jean le Rond d'Alembert

1. Motivation

L'algèbre linéaire est un outil fondamental en mathématiques. Une grande partie des mathématiques essaye de ramener des phénomènes compliqués, souvent non-linéaires, à des problèmes linéaires qui sont à peu près les seuls (avec les problèmes combinatoires) pour lesquels on puisse faire des calculs à la fois fiables et en grande dimension. Nous verrons l'utilisation de l'algèbre linéaire pour la résolution d'équations différentielles, qui apparaissent sans cesse dans les modèles physiques. Mais l'algèbre linéaire apparaît dans de très nombreux autres domaines de la modélisation mathématique, y compris dans les modèles de "big data" : l'algorithme Google qui a révolutionné les moteurs de recherche est un algorithme de recherche de vecteurs propres, et l'intelligence artificielle fait un usage massif d'opérations linéaires -en particulier via les réseaux de neurones- qui sont particulièrement adaptées à des calculs parallèles sur ordinateur.

2. Définition d'un espace vectoriel

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

DÉFINITION 1.1 (espace vectoriel). Un $\mathbb{K}$ -**espace vectoriel** est un ensemble E muni :

- d'une **loi interne** d'addition $+: E \times E \rightarrow E$,
 $(x, y) \mapsto x + y$,
telle que $(E, +)$ soit un **groupe abélien** (commutatif) :
 - associativité : $(x + y) + z = x + (y + z)$;
 - commutativité : $x + y = y + x$.
 - élément neutre : il existe $0 \in E$ tel que $x + 0 = x$;

- opposé : pour tout $x \in E$, il existe $-x \in E$ tel que $x + (-x) = 0$;
- d'une **action de $\mathbb{K}$ sur E** appelée **multiplication scalaire** :
 $\cdot : \mathbb{K} \times E \rightarrow E, \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x,$
 vérifiant les cinq propriétés suivantes, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $x, y \in E$:
 - $1 \cdot x = x$
 - $0 \cdot x = 0$ (vecteur nul de E)
 - $\lambda \cdot (x + y) = \lambda x + \lambda y$
 - $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda x + \mu x$
 - $(\lambda \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu x)$

REMARQUE 1.2. Les vecteurs sont ici notés $x, v, \dots$ sans flèche comme dans tout texte mathématique avancé, mais vous pouvez continuer à utiliser la notation fléchée $\vec{x}, \vec{v}, \dots$

3. Exemples classiques d'espaces vectoriels

(1) L'espace $\mathbb{K}^n$

On considère l'ensemble $\mathbb{K}^n$ des n -uplets réels :

$$(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$$

on écrira aussi souvent les vecteurs en colonne, i.e.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

— **Addition** :

Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ dans $\mathbb{K}^n$, alors :

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

— **Multiplication par un scalaire** :

Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x = (x_1, \dots, x_n)$:

$$\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

Ainsi, $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

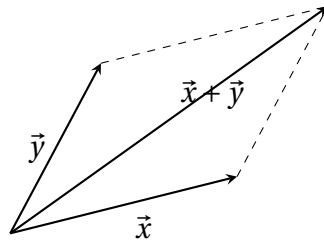


FIGURE 1.1 – Addition de deux vecteurs à l'aide de la règle du parallélogramme

(2) Les vecteurs du plan réel $\mathcal{P}$

Les vecteurs du plan peuvent être représentés géométriquement par des flèches dans le plan.

L'addition des vecteurs correspond à la "règle du parallélogramme".

La multiplication par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$:

- dilate ou contracte le vecteur d'un facteur λ si $\lambda > 0$;
- renverse le sens si $\lambda < 0$;
- donne le vecteur nul si $\lambda = 0$.

(3) Les vecteurs de l'espace $\mathcal{E}$

Même définition que pour le plan, mais en trois dimensions.

Les vecteurs ont une représentation géométrique comme des flèches dans l'espace, avec longueur et direction.

REMARQUE 1.3. dans les cas 2) et 3), un **choix de coordonnées** permettra d'identifier un espace vectoriel comme le plan ou l'espace $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

(4) L'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ L'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, noté $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, est un espace vectoriel avec :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$$

Les propriétés de la définition se vérifient sans difficulté.

(5) Plus généralement l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n)$ des applications de $\mathbb{K}^m$ dans $\mathbb{K}^n$.

4. Sous-espaces vectoriels

Il n'est évidemment pas pratique de devoir vérifier à chaque fois les 9 propriétés de la définition pour montrer qu'on a à faire à un espace vectoriel. On a en fait un procédé qui partir d'un espace vectoriel permet de créer facilement de nouveaux espaces vectoriels

DÉFINITION 1.4. Un **sous-espace vectoriel** d'un espace vectoriel E est une partie $F \subset E$ qui est elle-même un espace vectoriel pour les lois induites de E . En d'autres termes F est un sous-espace vectoriel de E si

$$\forall x, y \in F, \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \lambda x + \mu y \in F$$

DÉMONSTRATION. Les propriétés sont vérifiées pour F puisqu'elles sont vérifiées pour E . Le seul point à vérifier c'est que les opérations restent dans F : si $x, y \in F$ alors $x + y \in F$ et si $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\lambda x \in F$. Cela résulte de la définition de sous-espace vectoriel en prenant $\lambda = \mu = 1$ et $\mu = 0$ respectivement. $\square$

REMARQUES 1.5. (1) Il est parfois plus simple au lieu de vérifier d'un seul coup que $\lambda x + \mu y \in F$ de vérifier successivement

(a) Si $x, y \in F$ alors $x + y \in F$

(b) Si $x \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\lambda \cdot x \in F$

(2) La méthode la plus simple de montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel est de le voir comme sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu. On a alors une seule propriété à vérifier au lieu de 9!

En pratique, un sous-espace vectoriel est souvent défini comme un ensemble de vecteurs vérifiant une relation (par exemple des équations) linéaires.

EXEMPLES 1.6.

(1) Dans $\mathbb{R}^3$:

— Le plan défini par l'équation linéaire :

$$ax + by + cz = 0$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

— La droite passant par l'origine et définie par un système linéaire de deux équations non-proportionnelles $ax + by + cz = 0, a'x + b'y + c'z = 0$ est aussi un sous-espace vectoriel

(2) L'espace $\mathbb{R}_2[X]$

L'ensemble $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2 :

$$P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2, \quad a_i \in \mathbb{R}$$

est un espace vectoriel.

— L'addition est l'addition des polynômes : $(P + Q)(X) = P(X) + Q(X)$:

$$(a_0 + a_1 X + a_2 X^2) + (b_0 + b_1 X + b_2 X^2) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + (a_2 + b_2)X^2$$

— La multiplication par un scalaire λ est définie par : $(\lambda P)(X) = \lambda P(X)$:

$$\lambda \cdot (a_0 + a_1 X + a_2 X^2) = \lambda a_0 + \lambda a_1 X + \lambda a_2 X^2$$

(3) L'espace des solutions stationnaires de l'équation des ondes

Les fonctions $u(t, x)$ solutions de l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - c(t, x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0$$

forment également un espace vectoriel :

- La somme de deux solutions est encore solution ;
- Le produit d'une solution par une constante est encore solution.

(4) L'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire.

Soit une équation différentielle linéaire d'ordre n :

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

L'ensemble des solutions (sur un intervalle donné) forme un espace vectoriel de dimension n :

- La somme de deux solutions est encore solution ;
- Le produit d'une solution par une constante est encore solution.

REMARQUE 1.7. L'espace $\mathbb{R}_2[X]$ (voir exemple (2)) correspond à l'ensemble des solutions de l'équation différentielle :

$$f^{(3)}(x) = 0$$

car tout polynôme de degré au plus 2 est annulé par la dérivée d'ordre 3.

5. Combinaisons linéaires, familles libres et génératrices

Soit maintenant E un espace vectoriel, et $a_1, \dots, a_p \in E$ des vecteurs.

DÉFINITION 1.8. — On appelle **combinaison linéaire** des vecteurs $a_1, \dots, a_p$ toute expression de la forme :

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_p a_p, \quad \text{avec } \lambda_i \in \mathbb{K}$$

On note $\langle a_1, \dots, a_p \rangle$ l'ensemble des combinaisons linéaires des a_i :

$$\langle a_1, \dots, a_p \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^p \lambda_i a_i : \lambda_i \in \mathbb{K} \right\}$$

- **Famille libre** : On dit que la famille $(a_1, \dots, a_p)$ est **libre** si la seule combinaison linéaire donnant le vecteur nul est la combinaison triviale :

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$$

On dit aussi que les vecteurs $(a_1, \dots, a_p)$ sont **linéairement indépendants**

- **Famille génératrice de E** : La famille $(a_1, \dots, a_p)$ est **génératrice** de E si tout vecteur $x \in E$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de ces vecteurs :

$$\forall x \in E, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}, \quad x = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p$$

PROPOSITION 1.9. Si $a_1, \dots, a_p$ sont des vecteurs de E , $\langle a_1, \dots, a_p \rangle$ est un sous-espace vectoriel de E .

DÉMONSTRATION. Il faut vérifier que

- (1) Si $x = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p$ et $y = \mu_1 a_1 + \dots + \mu_p a_p$ alors $x + y = (\lambda_1 + \mu_1) a_1 + \dots + (\lambda_p + \mu_p) a_p \in \langle a_1, \dots, a_p \rangle$
- (2) Si $x = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p$ alors $\alpha \cdot x = \alpha \lambda_1 a_1 + \dots + \alpha \lambda_p a_p \in \langle a_1, \dots, a_p \rangle$

Les deux énoncés sont évidents. □

REMARQUE 1.10. Il faut parler de « famille libre » et pas d'« ensemble de vecteurs libre » car :

$$\{a_1, a_1, a_2, a_3\} = \{a_1, a_2, a_3\}$$

mais (a_1, a_1, a_2, a_3) n'est jamais libre car $1 \cdot a_1 + (-1) \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 = 0$.

Par contre, qu'une famille soit génératrice ne dépend que de l'ensemble associé.

Rappel : le symbole « $\exists!$ » signifie « il existe un et un seul ».

DÉFINITION 1.11. On dit que la famille $(a_1, \dots, a_p)$ est une **base** de E si

$\forall x \in E, \exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tels que

$$x = \sum_{i=1}^p \lambda_i a_i$$

PROPOSITION 1.12. La famille $(a_1, \dots, a_p)$ est une **base** de E si et seulement si elle est à la fois libre et génératrice de E :

$$\forall x \in E, \exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \text{ tels que } x = \sum_{i=1}^p \lambda_i a_i$$

DÉMONSTRATION. Supposons que la famille soit une base. Elle est alors évidemment génératrice. Qu'elle soit libre résulte de l'unicité de l'écriture de 0 dans cette base : comme $0 = 0 \cdot a_1 + \dots + 0 \cdot a_p$ il ne peut y avoir d'autre p -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ tel que $\lambda_1 \cdot a_1 + \dots + \lambda_p \cdot a_p = 0$. Inversement si la famille est génératrice, tout x s'écrit sous la forme $x = \lambda_1 \cdot a_1 + \dots + \lambda_p \cdot a_p$. Si cette écriture n'était pas unique on aurait $x = \lambda_1 \cdot a_1 + \dots + \lambda_p \cdot a_p =$

$\mu_1 \cdot a_1 + \dots + \mu_p a_p$ et en soustrayant $0 = (\lambda_1 - \mu_1) \cdot a_1 + \dots + (\lambda_p - \mu_p) a_p$ donc si la famille est libre $\lambda_j = \mu_j$ pour tout j , et donc l'écriture est unique. $\square$

EXERCISE 1.13. Montrer que « libre et génératrice » est bien équivalent à

$$\forall x \in E, \quad \exists! \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K} \text{ tels que } x = \sum_{i=1}^p \lambda_i a_i$$

EXEMPLES 1.14. (1) Les $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ où le 1 est en i -ème position. Les e_i forment une base de $\mathbb{K}^n$; dite **base canonique** de $\mathbb{K}^n$. Si $a = (a_1, \dots, a_n)$ s'écrit alors :

$$a = \sum_{i=1}^n a_i e_i$$

(2) Dans le plan $\mathcal{P}$:

- (v_1) est libre ssi $a_1 \neq 0$
- (v_1, v_2) est libre ssi v_1, v_2 ne sont pas colinéaires. C'est alors une famille génératrice, donc une base.
- $(v_1, \dots, v_p)$ est génératrice ssi les v_i ne sont pas colinéaires.
- $(v_1, \dots, v_p)$ n'est jamais libre si $p \geq 3$

(3) Dans l'espace géométrique tridimensionnel $\mathcal{E}$:

- (a) (a_1) est libre ssi $a_1 \neq 0$
- (b) (a_1, a_2) est libre ssi a_1, a_2 ne sont pas colinéaires
- (c) (a_1, a_2, a_3) est libre ssi a_1, a_2, a_3 ne sont pas coplanaires. C'est alors une base.
- (d) La famille $(a_1, \dots, a_p)$ est génératrice ssi $p \geq 3$ et $a_1, \dots, a_p$ ne sont pas coplanaires.

(4) Dans $\mathbb{R}[X]$: $(1, X, X^2)$ est une base.

Plus généralement, si $\deg P_i = i$ pour $i = 0, 1, 2$, alors (P_0, P_1, P_2) est une base.

(5) Les solutions de l'équation différentielle

$$y'' + 2y' = 0$$

Une base est constituée de (y_1, y_2) où :

$$y_1(x) = \cos x$$

$$y_2(x) = \sin x$$

REMARQUE 1.15. Dire que $(a_1, \dots, a_p)$ est libre, c'est dire que

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p = 0$$

a pour unique solution $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$.

Si on est dans $\mathbb{K}^n$, $a_i = \begin{pmatrix} a_{1,i} \\ \vdots \\ a_{n,i} \end{pmatrix}$, cela se réécrit :

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 a_{1,1} + \dots + \lambda_p a_{1,p} = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1 a_{n,1} + \dots + \lambda_p a_{n,p} = 0 \end{cases}$$

Dire que $(a_1, \dots, a_p)$ est génératrice, c'est dire que pour tout $b \in \mathbb{K}^n$, le système

$$\begin{cases} \lambda_1 a_{1,1} + \dots + \lambda_p a_{1,p} = b_1 \\ \vdots \\ \lambda_1 a_{n,1} + \dots + \lambda_p a_{n,p} = b_n \end{cases}$$

a une solution. Dire que c'est une base, c'est dire que de plus cette solution est unique.

DÉFINITION 1.16. On appelle **pivot sur les colonnes** d'une famille de vecteurs $(a_1, \dots, a_p)$ le fait

- (1) Soit d'échanger deux vecteurs
- (2) Soit de remplacer a_i par $a_i + \lambda a_j$ avec $i \neq j$.

PROPOSITION 1.17 (Effet du Pivot de Gauss sur les colonnes). Si $(a_1, \dots, a_p)$ est une famille de vecteurs de E

- (1) L'espace $\langle a_1, \dots, a_p \rangle$ ne change pas après avoir effectué un pivot sur les colonnes. En particulier son rang ne change pas et si la famille est génératrice elle reste génératrice.
- (2) De même si la famille $(a_1, \dots, a_p)$ est libre, elle reste libre après pivot sur les colonnes.

DÉMONSTRATION. On peut supposer en renumérotant que $i = 1, j = 2$. Pour la première assertion, on va montrer que $\langle a_1, \dots, a_p \rangle \subset \langle a_1 + \lambda a_2, a_2, \dots, a_p \rangle \subset \langle a_1, \dots, a_p \rangle$. Pour la première inclusion, il suffit de montrer que $a_i \in \langle a_1 + \lambda a_2, a_2, \dots, a_p \rangle$ pour tous les i . Si $i \neq 1$ c'est évident et on a $a_1 = (a_1 + \lambda a_2) - \lambda a_2 \in \langle a_1 + \lambda a_2, a_2, \dots, a_p \rangle$. La seconde inclusion est évidente.

Pour la seconde assertion, supposons que $a_1, a_2, \dots, a_p$ soit libre et que l'on a une combinaison linéaire $\lambda_1(a_1 + \lambda a_2) + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_p a_p = 0$. on réécrit $\lambda_1(a_1 + \lambda a_2) + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_p a_p = \lambda_1 a_1 + \lambda_1 \lambda a_2 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_p a_p = 0$ ce qui entraîne $\lambda_1 = \lambda_1 \lambda + \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_p = 0$ ce qui entraîne $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$ donc la famille est libre. Comme si on pose $a'_1 = a_1 + \lambda a_2, a'_2 = a_2, \dots, a'_p = a_p$ on a $a_1 = a'_1 - \lambda a'_2, a_2 = a'_2, \dots, a_p = a'_p$ le même

argument montre que si $(a'_1, \dots, a'_p)$ est libre alors $(a_1, \dots, a_p)$ est libre et les deux familles sont simultanément libres ou liées.

□

REMARQUE 1.18. Dire que $(a_1, \dots, a_p)$ est libre/génératrice équivaut à dire que $(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + \lambda a_j a_{i+1}, \dots, a_p)$ pour $i \neq j$ est libre/génératrice. D'où la méthode d'échelonnement/pivot de Gauss : opérer sur les colonnes, pivot sur les colonnes (réduction à un système échelonné).

On note $\langle a_1, \dots, a_p \rangle$ l'ensemble des combinaisons linéaires des a_i :

$$\langle a_1, \dots, a_p \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^p \lambda_i a_i : \lambda_i \in \mathbb{K} \right\}$$

Si $(a_1, \dots, a_p)$ est libre, on dit que $(a_1, \dots, a_p)$ sont linéairement indépendants.

REMARQUE 1.19. Il faut parler de famille libre et pas d'« ensemble de vecteurs libres » car :

$$\{a_1, a_1, a_2, a_3\} = \{a_1, a_2, a_3\}$$

mais (a_1, a_1, a_2, a_3) n'est jamais libre car $1 \cdot a_1 + (-1) \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 = 0$.

Par contre, qu'une famille soit génératrice ne dépend que de l'ensemble associé.

Dire que $(a_1, \dots, a_p)$ est génératrice, c'est dire que pour tout $b \in \mathbb{K}^n$, le système

$$\begin{cases} \lambda_1 a_{1,1} + \dots + \lambda_p a_{1,p} = b_1 \\ \vdots \\ \lambda_1 a_{n,1} + \dots + \lambda_p a_{n,p} = b_n \end{cases}$$

a une solution. Dire que c'est une base, c'est dire que cette solution est unique.

PROPOSITION 1.20 (Théorème fondamental de l'algèbre linéaire). *Soit E un espace vectoriel ayant une base finie. Alors toutes les bases de E ont le même cardinal, appelé dimension de E et noté $\dim(E)$. De plus :*

- *Toute famille libre est de cardinal $\leq \dim(E)$ et peut se compléter en une base (donc si elle est de cardinal $\dim(E)$, c'est déjà une base).*
- *Toute famille génératrice est de cardinal $\geq \dim(E)$, et on peut en extraire une base (donc si elle est de cardinal $\dim(E)$, c'est une base).*

DÉMONSTRATION. Montrons tout d'abord que :

- (1) Une famille libre maximale pour l'inclusion (i.e. qui n'est pas strictement contenue dans une famille libre) est une base.
- (2) Toute famille génératrice minimale pour l'inclusion est une base.

(1) Soit $(a_1, \dots, a_p)$ la famille et soit $x \in E$. Comme $(a_1, \dots, a_p, x)$ n'est pas libre, on a des λ_i et μ non tous nuls tels que

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p + \mu x = 0$$

On a $\lambda_{p+1} \neq 0$ sinon la famille $(a_1, \dots, a_p)$ ne serait pas libre. Donc :

$$x = -\frac{\lambda_1}{\mu} a_1 - \dots - \frac{\lambda_p}{\mu} a_p$$

et $(a_1, \dots, a_p)$ est génératrice, donc c'est une base.

(2) Soit $(a_1, \dots, a_p)$ la famille génératrice minimale. Si elle n'est pas libre :

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p = 0$$

et un des λ_i est non nul. Alors :

$$a_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} a_1 - \dots - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} a_{i-1} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} a_{i+1} - \dots - \frac{\lambda_p}{\lambda_i} a_p$$

donc a_i est combinaison linéaire des a_j pour $j \neq i$, et $(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_p)$ est aussi génératrice.

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base génératrice et $(a_1, \dots, a_p)$ une famille libre, et supposons $p > n$. Montrons alors que $(a_1, \dots, a_p)$ ne peut être génératrice, ce qui signifie que a_p est combinaison linéaire des $a_1, \dots, a_{p-1}$, et $(a_1, \dots, a_p)$ ne pouvait être libre.

Pour cela, on va remplacer successivement les e_i par les a_i en restant génératrice :

Tout d'abord, a_1 est combinaison linéaire des e_i , et on peut supposer (quitte à permuter) que le coefficient de e_1 est non nul.

le coefficient de e_1 est non nul. Donc :

$$a_1 = \lambda_1 e_1 + \sum_{j=2}^n \lambda_j e_j, \quad \lambda_1 \neq 0$$

et :

$$e_1 = \frac{1}{\lambda_1} a_1 - \frac{1}{\lambda_1} \sum_{j=2}^n \lambda_j e_j$$

est combinaison linéaire de $a_1, e_2, \dots, e_n$, donc $(a_1, e_2, \dots, e_n)$ est génératrice.

Supposons avoir montré que $(a_1, \dots, a_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ est génératrice. On écrit a_{r+1} comme combinaison linéaire des $a_1, \dots, a_r, e_{r+1}, \dots, e_n$, et le coefficient de l'un des e_i (quitte à permuter les e_i , c'est e_{r+1}) est non nul, sinon $(a_1, \dots, a_{r+1})$ ne serait pas libre. Donc :

$$a_{r+1} = \sum_{i=1}^r \mu_i a_i + \mu_{r+1} e_{r+1} + \sum_{j=r+2}^n \mu_j e_j$$

donc :

$$e_{r+1} = \frac{1}{\mu_{r+1}} a_{r+1} - \frac{1}{\mu_{r+1}} \sum_{i=1}^r \mu_i a_i - \frac{1}{\mu_{r+1}} \sum_{j=r+2}^n \mu_j e_j$$

et donc $(a_1, \dots, a_{r+1}, e_{r+2}, \dots, e_n)$ est génératrice.

On a donc montré que le cardinal d'une famille libre est toujours inférieur à celui d'une famille génératrice. Comme une base est à la fois libre et génératrice, deux bases ont toujours même cardinal.

Si $(a_1, \dots, a_p)$ est une famille libre, on peut lui rajouter des vecteurs jusqu'à en faire une base (au plus $\dim(E) - p$ vecteurs par ce qui précède), donc $p \leq \dim(E)$. Si $(a_1, \dots, a_p)$ est génératrice, on peut lui retirer des vecteurs (éventuellement 0!) jusqu'à en faire une base, donc $p \geq \dim(E)$.

□

REMARQUE 1.21 (Remarque importante). Il est en général plus facile de montrer qu'une famille est libre plutôt que de montrer qu'elle est génératrice. L'un des intérêts de ce théorème, c'est que dans certains cas

DÉFINITION 1.22. On appelle **rang** d'une famille de vecteurs $(a_1, \dots, a_p)$ la dimension de l'espace $\langle a_1, \dots, a_p \rangle$.

- EXEMPLE 1.23. (1) Le rang de (x) vaut 1 si $x \neq 0$ et 0 sinon
 (2) Le rang de (x, y) est 2 si les vecteurs sont indépendants, 1 s'ils sont dépendants mais au moins un des deux est non nul et 0 si $x = y = 0$.
 (3) Le rang de $(a_1, \dots, a_p)$ est p si et seulement si la famille $(a_1, \dots, a_p)$ est libre. En effet d'après le Théorème $(a_1, \dots, a_p)$ engendre un espace de dimension p si et seulement si elle est libre.

6. Applications

PROPOSITION 1.24. Si $E \subset F$ sont des espaces vectoriels, alors $\dim E \leq \dim F$.

DÉMONSTRATION. Une base de E est une famille libre dans E donc dans F , et a $\dim E$ éléments, donc $\dim E \leq \dim F$. □

PROPOSITION 1.25. Si $(a_1, \dots, a_p)$ est une famille libre et $(e_1, \dots, e_n)$ génératrice, on peut compléter $(a_1, \dots, a_p)$ avec des e_i pour obtenir une base.

DÉMONSTRATION. Considérons les sous-familles de $(a_1, \dots, a_p, e_1, \dots, e_n)$ contenant $(a_1, \dots, a_p)$ et qui sont génératrices. Parmi celles-ci, considérons en une de cardinal minimal. On la notera (quitte à renuméroter les e_i), $(a_1, \dots, a_p, e_1, \dots, e_q)$. On prétend que si on lui retire un vecteur quelconque, elle n'est plus génératrice. En effet si le vecteur retiré est un e_i , notre famille n'est pas minimale parmi celles contenant $(a_1, \dots, a_p)$. Si le vecteur retiré est un a_i , alors

$$a_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j a_j + \sum_{k=1}^q \mu_k e_k$$

Si tous les μ_k sont nuls a_i est combinaison linéaire des a_j , et cela contredit la liberté de $(a_1, \dots, a_p)$. On peut donc écrire (quitte à renuméroter les e_i)

$$e_q = - \sum_{j \neq i} \frac{\lambda_j}{\mu_q} a_j + \sum_{k=1}^q \frac{\mu_k}{\mu_q} e_k$$

mais alors $(a_1, \dots, a_p, e_1, \dots, e_{q-1})$ est encore génératrice, ce qui contredit sa minimalité. $\square$

Le résultat suivant avec la Proposition 1.17 est à la base de la méthode du pivot/réduction échelonnée

PROPOSITION 1.26. *Les vecteurs de $\mathbb{R}^n$*

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ a_{3,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ a_{2,2} \\ a_{3,2} \\ \vdots \\ a_{n,2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_{k,k} \\ \vdots \\ a_{n,k} \end{pmatrix},$$

forment

- (1) *Une famille libre si $k \leq n$ et les $a_{j,j}$ sont tous non-nuls.*
- (2) *Une base si $k = n$ et tous les $a_{j,j}$ sont non nuls.*
- (3) *Si $k = n$ ET l'un des $a_{j,j}$ est nul alors la famille est liée.*

DÉMONSTRATION. En effet Supposons les $a_{j,j}$ non nuls et écrivons une combinaison linéaire nulle des vecteurs : $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k = 0$. en développant :

- (1) la première ligne donne $\lambda_1 a_{1,1} = 0$ donc comme $a_{1,1} \neq 0$ on doit avoir $\lambda_1 = 0$
- (2) Alors la deuxième ligne s'écrit $\lambda_1 a_{2,1} + \lambda_2 a_{2,2} = 0$ or $\lambda_1 = 0$ et $a_{2,2} \neq 0$ donc $\lambda_2 = 0$

On conclut par récurrence que $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$ et la famille est donc libre.

Comme $\mathbb{R}^n$ est de dimension n , une famille libre de n vecteurs est une base.

- (3) Enfin si $a_{j,j} = 0$, on peut toujours supposer que j est le plus petit indice tel que $a_{j,j} = 0$. Alors on ne peut engendrer le vecteur

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

où le premier 1 est sur la j -ème ligne. En effet $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k = v$ va s'écrire ligne par ligne

$$\begin{aligned}
\lambda_1 a_{1,1} &= 0 \text{ donc } \lambda_1 = 0 \\
\lambda_1 a_{2,1} + \lambda_2 a_{1,1} &= 0 \text{ donc } \lambda_2 = 0 \\
&\vdots \\
\lambda_1 a_{j-1,1} + \dots + \lambda_{j-1} a_{j-1,j-1} &= 0 \text{ donc } \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{j-1} = 0
\end{aligned}$$

La dernière équation sera alors $\lambda_1 a_{j,1} + \dots + \lambda_j a_{j,j} = 1$. Mais comme seul λ_j est éventuellement non nul et que par ailleurs $a_{j,j} = 0$, la somme de gauche ne peut être égale à 1.

□

REMARQUE 1.27. Il en est de même pour la famille

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{k,k} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

7. Méthode pratique : Pivot ou réduction échelonnée

Pour tester si une famille est libre, ou pour extraire une base à partir d'une famille génératrice, on utilise :

- la méthode du **pivot de Gauss**;
- la **réduction aux systèmes échelonnés**.

Cela consiste à organiser les vecteurs en colonnes d'un tableau et effectuer des opérations élémentaires : échange de colonnes et remplacement du vecteur a_i par $a_i + \lambda a_j$ (avec $i \neq j$!) jusqu'à obtenir une matrice échelonnée, ce qui permet d'identifier une base.

PROPOSITION 1.28. *Soit A une matrice. Par pivot de Gauss elle peut se ramener à un système échelonné. Si tous les $a_{j,j}$ sont non nuls, on peut même se ramener à*

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ a_{k+1,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ a_{2,2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ a_{k+1,2} \\ \vdots \\ a_{n,2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{k,k} \\ a_{k+1,k} \\ \vdots \\ a_{n,k} \end{pmatrix},$$

En particulier pour une matrice carrée, on se ramène à

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ a_{2,2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{pmatrix},$$

DÉMONSTRATION. Pour la première réduction cela a été vu en première année. Pour la seconde, on part de la première réduction et on soustrait de la première colonne un multiple de la seconde pour annuler $a_{1,2}$. Puis on soustrait de la deuxième colonne et de la première colonne des multiples (a priori différents) de la troisième colonne pour annuler $a_{3,2}$ et $a_{3,1}$. En continuant on arrive à la forme désirée. $\square$

EXEMPLE 1.29. Compléter une famille en une base de $\mathbb{R}^3$:

Soit le vecteur $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On veut compléter la famille (v) en une base de $\mathbb{R}^3$.

On peut utiliser la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$, où :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On peut essayer (v, e_1, e_2) . Mais $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas linéairement indépendants : sinon, comme nous sommes en dimension 3 ils formeraient une base, mais il est clair que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'est pas dans $\langle v, e_1, e_2 \rangle$.

Par contre la famille (v, e_2, e_3) est libre, car les vecteurs sont échelonnés (et les éléments diagonaux non nuls)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a trois vecteurs indépendants dans un espace de dimension 3, c'est donc une base.

EXEMPLES 1.30. Base d'un plan et extension à $\mathbb{R}^3$.

(1) Vérifier que la famille suivante est libre et la compléter en une base de $\mathbb{R}^3$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle \xrightarrow{C_2 \rightarrow C_2 - 4C_1} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \right\rangle$$

C'est donc une famille libre. On construit alors la famille suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Cette famille est libre, donc c'est une **base de** $\mathbb{R}^3$.

On aurait pu aussi utiliser directement :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

car ces vecteurs sont également linéairement indépendants.

(2) Trouver la base d'un plan.

Considérons le plan d'équation :

$$x + 2y + 3z = 0$$

Pour trouver une base du plan, on exprime une variable en fonction des autres. Par exemple :

$$x = -2y - 3z$$

On peut choisir librement y et z , puis calculer x . En général on prend $y = 1, z = 0$ puis $y = 0, z = 1$.

Par exemple :

$$\text{— Si } y = 1, z = 0, \text{ alors } x = -2 \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{— Si } y = 0, z = 1, \text{ alors } x = -3 \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc, une base du plan est donnée par :

$$\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

(3) Compléter la base du plan en une base de $\mathbb{R}^3$

Pour compléter cette base en une base de $\mathbb{R}^3$, il suffit d'ajouter un vecteur non contenu dans le plan (c'est-à-dire, non combinaison linéaire des deux précédents).

Par exemple, on peut choisir :

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

et vérifier qu'il n'appartient pas au plan (il ne vérifie pas $x + 2y + 3z = 0$, car $1 + 4 + 9 = 14 \neq 0$).

Alors la famille :

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

est une base de $\mathbb{R}^3$.

Pour trouver l'espace engendré par une famille de vecteurs, on fera **toujours** le pivot sur les colonnes. Le pivot sur les lignes est utilisé pour résoudre les systèmes d'équations. On verra au chapitre suivant que dans un certain nombre de cas on peut faire indistinctement le pivot sur les lignes ou les colonnes, mais c'est un point délicat. Les principes de base sont :

- On fait le pivot sur les colonnes pour les vecteurs.
- On fait le pivot sur les lignes pour les équations.
- On explicite TOUJOURS les opérations effectuées lors du pivot.

EXEMPLE 1.31. Soit le système d'équations

$$\begin{cases} 3x + 2y + 5z = 2 \\ -2x + y - z = 1 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y + 5z = 2 \\ -2x + y - z = 15 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases} \xLeftrightarrow[L_1 \rightarrow L_1 - 3L_3][L_2 \rightarrow L_2 + 2L_3] \begin{cases} -y - z = -7 \\ 3y + 3z = 21 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

Les deux premières lignes sont équivalentes. Il reste donc deux équations indépendantes

$$\begin{cases} y + z = +7 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases} \xLeftrightarrow[L_2 \rightarrow L_2 - L_1] \begin{cases} y + z = -7 \\ x + z = -4 \end{cases}$$

Donc en prenant comme variable auxiliaire z , on trouve $y = 7 - z, x = -z - 4$: c'est une droite affine (elle ne passe pas par 0!)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

8. Applications Linéaires

DÉFINITION 1.32. Une application linéaire entre les espaces vectoriels E et F est une application $f : E \rightarrow F$ telle que

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall u, v \in E \quad f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$$

i.e. l'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images. La composée de deux applications linéaires est une application linéaire.

Lorsqu'on s'est donné une base $(u_1, \dots, u_n)$ de E et $(v_1, \dots, v_p)$ de F , on peut écrire

$$f(u_j) = \sum_{i=1}^p a_{ij} v_i$$

i.e. $f(u_j)$ est le vecteur dans la base $(v_1, \dots, v_p)$ donné par

$$a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{pj} \end{pmatrix}$$

et f est déterminée par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}$$

Si $u = x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n$, $f(u)$ est donné par $A \cdot X$ où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

sont les coordonnées de u dans la base $(u_1, \dots, u_n)$. On a alors si $f(u) = y_1 v_1 + \cdots + y_p v_p$, la relation $Y = AX$.

Inversement toute matrice A à p lignes et n colonnes fournit une application linéaire de E dans F (une fois défini les bases $(u_1, \dots, u_n)$, $(v_1, \dots, v_p)$). En particulier, en choisissant les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^p$, A définit une appⁿ linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

DÉFINITION 1.33. Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. On note $\text{Ker}(f) = f^{-1}(0)$ et $\text{Im}(f) = f(E)$. Ce sont des sous-espaces vectoriels de E et F respectivement.

EXEMPLE 1.34. La rotation du plan d'angle θ est une application linéaire : l'image de $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est $e_1 = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$ celle de $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$ et sa matrice est donc

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

PROPOSITION 1.35. Soit $f : E \rightarrow F$.

- (1) f est injective ssi $\text{Ker}(f) = 0$
- (2) f est surjective ssi $\text{Ker}(f) = 0$ et $\text{Im}(f) = F$. Dans ce cas f^{-1} est aussi une application linéaire.
- (3) (Théorème du rang) $\dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f) = \dim(E)$
(on pose souvent $\dim(\text{Im}(f)) = \text{rang}(f)$)

DÉMONSTRATION. (1) $f(x) = f(y) \Leftrightarrow f(x - y) = 0 \Leftrightarrow x - y \in \text{Ker}(f)$

donc $\text{Ker}(f) = 0 \Rightarrow x = y$ i.e f injective et inversement si f est injective $\text{Ker}(f) = 0$

(2) Les hypothèses impliquent évidemment que f est bijective. Montrons la linéarité de f^{-1} : si $x' = f^{-1}(x)$ $y' = f^{-1}(y)$ on a

$$f(\lambda x' + \mu y') = \lambda x + \mu y$$

donc

$$f^{-1}(\lambda x + \mu y) = \lambda f^{-1}(x) + \mu f^{-1}(y)$$

(3) Soit $e_1, \dots, e_p$ une base de $\text{Ker}(f)$ et complétons la en une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E . Alors $f(e_{p+1}), \dots, f(e_n)$ sont linéairement indépendants car si

$$0 = \sum_{j=p+1}^n \lambda_j f(e_j) = f\left(\sum_{j=p+1}^n \lambda_j e_j\right)$$

mais alors $\sum_{j=p+1}^n \lambda_j e_j \in \text{Ker}(f)$ donc $\sum_{j=p+1}^n \lambda_j e_j = \sum_{j=1}^p \lambda_j e_j$ d'où

$$\sum_{j=p+1}^n \lambda_j e_j - \sum_{j=1}^p \lambda_j e_j = 0$$

ce qui donne une combinaison linéaire des e_j égale à 0. On en déduit que les λ_j sont tous nuls, donc $(f(e_{p+1}), \dots, f(e_n))$ est une famille libre.

Or $f(E) = \langle f(e_{p+1}), \dots, f(e_n) \rangle$ donc $\text{rg}(f) = n - p$ et $\dim \text{Ker}(f) = p$. $\square$

8.1. Changement de base. Si A est la matrice de f dans les bases $(u_1, \dots, u_n)$ de E $(v_1, \dots, v_p)$ de F et B la matrice de g dans les bases $(v_1, \dots, v_p)$ $(w_1, \dots, w_q)$ on a que $g \circ f$ a pour matrice $C = B \cdot A$; $c_{ik} = \sum_{j=1}^p b_{ij} a_{jk}$

DÉFINITION 1.36. Si $(u_1, \dots, u_n)$ $(u'_1, \dots, u'_n)$ sont deux bases de E on appelle matrice de passage de u à u' et on note $P_{u',u}$ la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des u'_j dans la base u . C'est la matrice dans la base de départ u et base d'arrivée u' de l'application linéaire envoyant u'_j sur u'_j , ou encore la matrice de Id_E de (E, u') dans (E, u) .

Si on se donne un vecteur v dont les coordonnées dans la base u sont données par le vecteur colonne X et ses coordonnées dans la base u' sont données par X' . Alors on a $PX' = X$ où P est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des u'_j dans la base u . En effet si on prend le vecteur u'_1 ses coordonnées dans la nouvelle base sont

données par $X'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ et ses coordonnées dans l'ancienne base par la 1-ère colonne de

P , X_j . Or on a bien $PX'_1 = X_1$, car l'image du i -ème vecteur de la base canonique par une matrice égale sa i -ème colonne. De même en remplaçant 1 par j le résultat est vrai pour u'_j . Comme l'égalité $PX' = X$ est vérifiée pour une base de E , par linéarité ce sera vrai pour une combinaison linéaire des u'_j donc pour tout vecteur de E vu que les u'_j engendrent E .

On en déduit que si A' est la matrice de f dans les bases u', v' et A sa matrice dans les bases u, v on a, notant Q la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des v'_j dans la base v :

On a donc $PX' = X$, $QY' = Y$ et donc si $AX = Y$ on aura $Y' = Q^{-1}APX'$ et la matrice A' de f dans les coordonnées u', v' est donnée par $A' = Q^{-1}AP$.

On a donc montré

PROPOSITION 1.37. *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Soient u, u' des bases de E et v, v' des bases de F . Soit P la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des u'_j dans la base u et Q les coordonnées de v'_j dans la base v . Soit A la matrice de f dans les bases u, v et A' celle dans les bases u', v' . Alors*

$$A' = Q^{-1}AP$$

Si $E = F$, $u' = v'$, $u = v$ on a $A' = P^{-1}AP$

9. Somme directe

DÉFINITION 1.38. Soient F, G des s.e.v de E . On dit que E est la somme directe de F et G , et on note $E = F \oplus G$ si tout élément u de E s'écrit de manière unique $u = v + w$ avec $v \in F$ $w \in G$.

PROPOSITION 1.39. *On a $E = F \oplus G$ si et seulement si $E = F + G$ (i.e tout élément u de E est somme d'un élément v de F et d'un élément w de G) et $F \cap G = \{0\}$.*

DÉMONSTRATION. $\Leftarrow$ Il faut simplement montrer que l'écriture $u = v + w$ est unique. Or si $u = v_1 + w_1 = v'_1 + w'_1$ on a $v_1 - v'_1 = w'_1 - w_1$ mais $v_1 - v'_1 \in F$ $w_1 - w'_1 \in G$ et comme $F \cap G = \{0\}$ on a $v_1 - v'_1 = w'_1 - w_1 = 0$ i.e $v_1 = v'_1$ $w_1 = w'_1$

$\Rightarrow$ si $v \in F \cap G$ $v \neq 0$ $0 = v - v = 0 - 0$ et l'écriture ne serait pas unique. $\square$

PROPOSITION 1.40 (Formule de Grassmann). *Si E, F sont des sous-espaces vectoriels de E On a*

$$\dim(F_1 + F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2) - \dim(F_1 \cap F_2)$$

DÉMONSTRATION. On considère l'application linéaire $s : F_1 \times F_2 \longrightarrow F_1 + F_2$ donnée par $s(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. On a $\text{Ker}(s) = \{(x, -x) \mid x \in F_1 \cap F_2\}$ qui s'identifie à $F_1 \cap F_2$ et s est surjective. Donc le Théorème du rang nous dit que $\dim(\text{Im}(s)) + \dim(\text{Ker}(s)) = \dim(F_1 \times F_2)$ soit $\dim(F_1 + F_2) + \dim(F_1 \cap F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2)$. $\square$

De même

DÉFINITION 1.41. On dit que $E_1, \dots, E_p$ sont en somme directe si tout élément u de E s'écrit de manière unique $u = v_1 + \dots + v_p$ $v_i \in E_i$.



Il ne suffit pas de vérifier que $E_i + \cdots + E_p = E$ et que $E_i \cap E_j = \{0\}$.

Par exemple ces trois s.e.v ne sont pas en somme directe

$$V_1 = \mathbb{R} \oplus 0 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V_2 = 0 \oplus \mathbb{R} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V_3 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{car} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

PROPOSITION 1.42. Si $u_i = (u_{i,1}, \dots, u_{i,d_i})$ est une base de E_i ($u_{i,j}$ est un vecteur de E_i !) et

$$E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p \quad \text{alors}$$

$$u = (u_{1,1}, \dots, u_{1,d_1}, u_{2,1}, \dots, u_{p,1}, \dots, u_{p,d_p})$$

juxtaposition de $u_1, \dots, u_p$ est une base de E . On a donc $\dim(E_1 \oplus \cdots \oplus E_p) = \dim(E_1) + \dots + \dim(E_p)$

DÉMONSTRATION. Si $w \in E$ il s'écrit de manière unique sous la forme $w = v_1 + \cdots + v_p$ avec $v_i \in E_i$.

Chaque v_i s'écrit de manière unique comme c.l des $u_{i,j}$ $1 \leq j \leq d_i$, donc w s'écrit de manière unique comme c.l des $u_{i,j}$ i.e les $u_{i,j}$ forment une base.

□

Chapitre 2

Déterminants

1. Motivation

Le déterminant est un outil de calcul qui intervient dans plusieurs cadres. C'est la généralisation en dimension supérieure des calculs d'aires et de volumes et intervient par exemple dans la formule du changement de variable dans les intégrales. Il intervient aussi pour décider si une famille de vecteurs est libre ou liée, et si une matrice est inversible. Il intervient aussi dans le calcul de cet inverse. Même s'il faut réfléchir un peu avant de décider si on veut utiliser le déterminant ou une méthode de pivot, le déterminant reste un outil essentiel aussi bien pratique que théorique. On verra au chapitre suivant son application à la diagonalisation, et ultérieurement dans la classification des formes quadratiques.

2. Déterminants

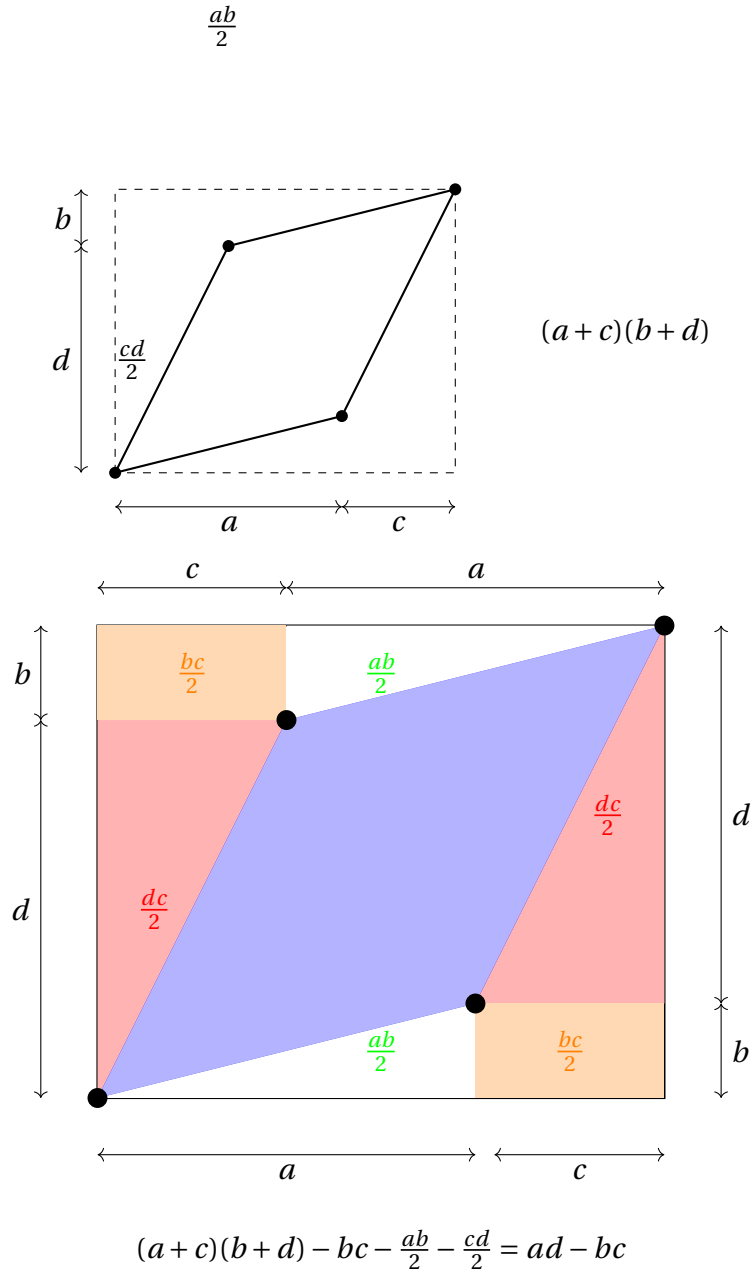
On a déjà vu le déterminant d'une matrice 2×2 : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, c'est

$$ad - bc.$$

Il intervient dans la formule générale d'inversion de la matrice :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Il représente aussi l'aire algébrique du parallélogramme engendré par les vecteurs $u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, $\mathcal{P}(u, v)$.



L'aire du parallélogramme est donnée par $(a+c)(b+d) - bc - \frac{ab}{2} - \frac{cd}{2} = ad - bc$. On a $\mathcal{P}(u, v) = |\det(u, v)|$ et le signe de $\det(u, v)$ est positif si et seulement si (u, v) est positivement orienté.

On a $\mathcal{P}(u, v) = |\det(u, v)|$ et le signe de $\det(u, v)$ est positif si et seulement si (u, v) est positivement orienté.

2.1. Calcul géométrique.

2.2. Formule de changement de variables. Pour cette même raison, le déterminant apparaît dans la formule de changement de variable pour les intégrales : si $\varphi : U \longrightarrow V$ est un difféomorphisme, c'est-à-dire une bijection différentiable d'inverse différentiable où $U, V \subset \mathbb{R}^2$, on a pour $(x, y) = (\varphi_1(s, t), \varphi_2(s, t))$:

$$\iint_V f(x, y) dx dy = \iint_U f(\varphi(s, t)) |J_\varphi(s, t)| ds dt$$

où $J_\varphi(s, t) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix}$ Le déterminant de la différentielle dit l'effet infinitésimal

de φ sur les aires en (s, t) : un carré de côté ε (et donc d'aire ε^2) en (s, t) aura pour image un domaine d'aire environ $|J_\varphi(s, t)|\varepsilon^2$.

En particulier (passage en coordonnées polaires) : si $x(r, t) = r \cos(t)$, $y(r, t) = r \sin(t)$:

$$J_\varphi(r, t) = \det \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -r \sin t & r \cos t \end{pmatrix} = r(\cos^2 t + \sin^2 t) = r$$

et donc $\varphi : [0, \mathbb{R}^+[\times[0, 2\pi[\longrightarrow \mathcal{D}(0, \mathbb{R})$ donne :

$$\iint_{\mathcal{D}(0, R)} f(x, y) dx dy = \int_0^R \int_0^{2\pi} f(r \cos t, r \sin t) r dr dt$$

3. Propriétés du déterminant

Citons quelques propriétés de $\det(u, v)$:

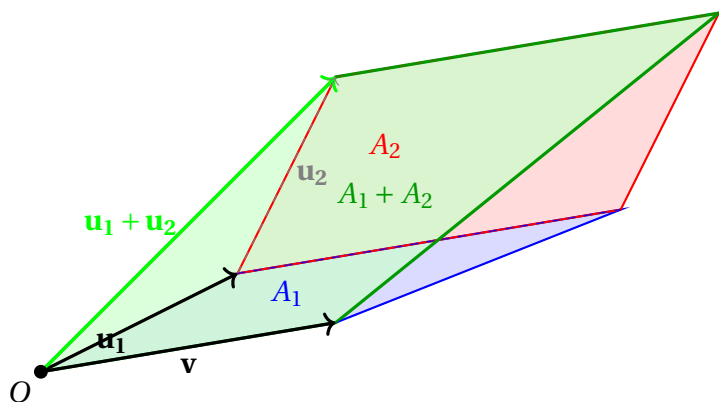
- (1) $\det(u_1 + u_2, v) = \det(u_1, v) + \det(u_2, v)$
- (2) $\det(u, v_1 + v_2) = \det(u, v_1) + \det(u, v_2)$
- (3) $\det(\lambda u, v) = \lambda \det(u, v)$ et $\det(u, \lambda v) = \lambda \det(u, v)$
- (4) $\det(u, v) = -\det(v, u)$
- (5) $\det(u + \lambda v, v) = \det(u, v)$

REMARQUE 2.1. Notons que (4) entraîne que pour tout vecteur v , on a $\det(v, v) = 0$. Et $\det(v, v) = 0$ entraîne, avec (1), que $\det(u + \lambda v, v) = \det(u, v) + \lambda \det(v, v) = \det(u, v)$, soit (5).

En fait, $\det(u, v) = 0$ ssi u et v sont colinéaires.

PROPOSITION 2.2. L'application $\det : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est :

- (1) **multilinéaire** : $\det(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v) = \lambda_1 \det(u_1, v) + \lambda_2 \det(u_2, v)$
- (2) **alternée** : $\det(u, v) = -\det(v, u)$



$$\text{Aire}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) + \text{Aire}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}) = \text{Aire}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{v})$$

De (1) et (2) résulte que $\det(u, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 \det(u, v_1) + \lambda_2 \det(u, v_2)$. Si on impose $\det(e_1, e_2) = 1$, où e_1, e_2 est la base canonique $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, une telle application est unique.

En effet, si on écrit $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2, y = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2$ on aura $\det(x, y) = \det(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2, \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2) = \lambda_1 \mu_1 \det(e_1, e_1) + \lambda_1 \mu_2 \det(e_1, e_2) + \lambda_2 \mu_1 \det(e_2, e_1) + \lambda_2 \mu_2 \det(e_2, e_2) = \lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1$.

4. Cas de la dimension 3

On insiste ici sur le point de vue intuitif, le cas général de la dimension n sera traité rigoureusement dans la section suivante.

On pose $\det(u, v, w) = \pm \text{volume } \mathcal{P}(u, v, w)$ où $\mathcal{P}(u, v, w)$ est le parallélépipède engendré par les vecteurs (u, v, w)

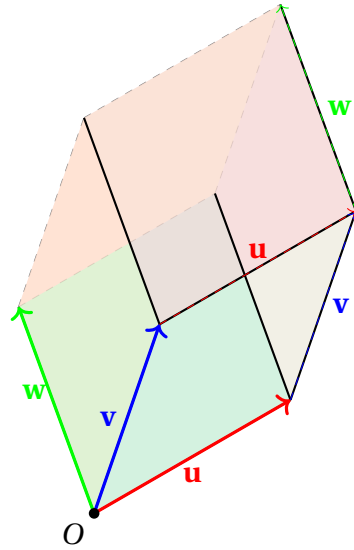
Le signe étant positif si et seulement si (u, v, w) est positivement orienté. On admettra la proposition suivante, que l'on peut justifier par des dessins pour

PROPOSITION 2.3. (1) $\det(\lambda u_1 + \mu u_2, v, w) = \lambda \det(u_1, v, w) + \mu \det(u_2, v, w)$

(2) $\det(u_1, u_2, u_3) = \det(u_2, u_3, u_1) = -\det(u_1, u_3, u_2) = -\det(u_2, u_1, u_3)$

(3) $\det$ est unique parmi les applications vérifiant (a) et (b) si on impose $\det(e_1, e_2, e_3) = 1$

Il résulte de (2) que $\det(u, u, w) = 0$ (et idem par permutation), et plus généralement $\det(u, v, w) = 0$ si (u, v, w) ne forment pas une base (car le parallélépipède est contenu dans un plan et a alors un volume nul). De même $\det(A) \neq 0$ si et seulement si A est inversible.



Volume du Parallélépipède = $|\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})|$

4.1. Exemple.

$$(2.1) \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_2 \rightarrow C_2 - 4C_1 \\ C_3 \rightarrow C_3 - 7C_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -6 \\ 3 & -6 & -12 \end{vmatrix}$$

$$(2.2) \quad \begin{matrix} C_3 \rightarrow C_3 - 2C_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$(2.3) \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} C_3 \rightarrow C_3 - 4C_1 \\ C_2 \rightarrow C_2 - 2C_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} C_1 \rightarrow C_1 - C_2 + C_3 \\ C_2 \rightarrow C_2 - 1/3 C_3 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -3$$

4.2. Développement selon la première ligne.

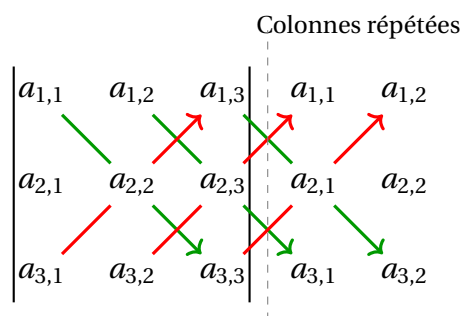
$$(2.4) \quad \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} + a_{1,2} a_{2,3} a_{3,1}$$

$$(2.5) \quad + a_{2,1} a_{3,2} a_{1,3} - a_{1,1} a_{2,3} a_{3,2}$$

$$(2.6) \quad - a_{1,2} a_{2,1} a_{3,3} - a_{1,3} a_{2,2} a_{3,1}$$

Règle de Sarrus :

$$\det(A) = a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} + a_{1,2} a_{2,3} a_{3,1} + a_{1,3} a_{2,1} a_{3,2} - a_{3,1} a_{2,2} a_{1,3} - a_{3,2} a_{2,3} a_{1,1} - a_{3,3} a_{2,1} a_{1,2}$$



+ Diagonales descendantes

- Diagonales montantes

On en déduit par exemple

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ \star & a_2 & 0 \\ \star & \star & a_3 \end{pmatrix} = a_1 a_2 a_3$$

5. Cas de la dimension n

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $(e_1, \dots, e_n)$ une base.

PROPOSITION 2.4. *Il existe une unique application $\det_e : E^n \rightarrow \mathbb{K}$ telle que :*

- (1) $\det_e$ est multilinéaire, i.e. les $u_i \mapsto \det_e(u_1, \dots, u_i, \dots, u_n)$ sont linéaires
- (2) $\det_e$ est alternée, i.e. changer u_i et u_j au même $\det_e$ annule $u_i = u_j$ ($i \neq j$)
- (3) $\det_e(e_1, \dots, e_n) = 1$

On admettra

LEMMA 2.5. *Toute permutation de $\{1, \dots, n\}$ est composée de transpositions c'est à dire de permutations qui échangent deux nombres sans changer les autres. L'écriture n'est pas unique, mais la parité p du nombre de permutations est unique. On appelle signature de la permutation le nombre $(-1)^p$ (qui vaut donc 1 si p est pair, -1 si p est impair).*

EXEMPLE 2.6. On note une permutation sous la forme suivante $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}$ est la permutation qui envoie 1 sur j_1 , 2 sur j_2 et n sur j_n . Pour abrégé on note $(j_1 j_2 \dots j_n)$ et pour simplifier, on omet les nombres qui sont fixes (i.e. $j_k = k$). Par exemple la transposition de i et j se note (i, j) . La permutation circulaire de 1, 2, 3 (qui envoie 1 sur 2, 2 sur 3 et 3 sur 1) se note donc (123). On peut décomposer $(123) = (12)(23)$ ou $(23)(31)$ mais on a toujours un nombre pair de transpositions. Donc la signature de (123) est +1.

Il est d'usage de noter σ une permutation et $\varepsilon(\sigma)$ sa signature.

DÉMONSTRATION (UNICITÉ). On développe en écrivant chaque vecteur dans la base $(e_1, \dots, e_n)$. en écrivant $u_i = \sum_{j=1}^n x_{i,j} e_j$ on obtient alors une somme $\det_e(u_1, \dots, u_n) = \sum_{1 \leq j_1 \leq n} x_{1,j_1} \dots x_{n,j_n} \det(e_{j_1}, \dots, e_{j_n})$. Un terme sera nul dès que deux indices j_k, j_l sont égaux (pour $k \neq l$). Donc les seuls termes qui apparaissent correspondent au cas où $i \mapsto j_i$ est une permutation σ de $1, \dots, n$ et $\det(e_{j_1}, \dots, e_{j_n})$ est la signature de la permutation σ . en d'autres termes

$$\det_e(u_1, \dots, u_n) = \sum_{\sigma} x_{1,j_1} \dots x_{n,j_n} \varepsilon(\sigma)$$

Pour l'existence, on peut utiliser la même formule et vérifier que cela donne bien une application vérifiant (1), (2) et (3). $\square$

6. Propriétés générales

Notons qu'une matrice $n \times n$ peut représenter :

— les n vecteurs colonnes $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = a_j$

— L'application linéaire qui envoie e_j sur a_j

On appelle déterminant d'une matrice le déterminant de ses vecteurs colonnes. Ainsi $\det(A) = \det(a_1, \dots, a_n)$ est le facteur par lequel A (vue comme application linéaire) multiplie les volumes.

On a la formule de récurrence suivante

PROPOSITION 2.7 (Développement suivant une ligne). *Soit A une matrice. On note $A_{i,j}$ la matrice obtenue en supprimant la i -ème ligne et la j -ème colonne de la matrice A . Alors on a :*

$$\det(A) = \sum (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{i,j})$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer que la formule de droite définit une application de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}$ vérifiant les propriétés (1), (2), (3) ce qui est facile par récurrence. $\square$

7. Propriétés fondamentales

PROPOSITION 2.8. (1) $\det(AB) = \det(A) \det(B)$

(2) A est inversible ssi $\det(A) \neq 0$

(3) $\det({}^t A) = \det(A)$

(4) $\det(A)$ ne change pas si on effectue le pivot sur les colonnes ou sur les lignes de A .

DÉMONSTRATION. (1) Si $u_1, \dots, u_n$ sont des vecteurs, on peut considérer l'application $f : (u_1, \dots, u_n) \mapsto \det_e(Au_1, \dots, Au_n)$. Il est facile de vérifier qu'elle satisfait aux propriétés (1) et (2) de la Proposition 2.4, mais par contre $f(e_1, \dots, e_n) = \det(Ae_1, \dots, Ae_n) = \det(A)$ car Ae_i est la i -ème colonne de la matrice A .

Mais alors si $\det(A) \neq 0$ l'application $\frac{1}{\det_e(A)} f$ vérifie (1), (2) et (3) et donc est égale à $\det_e(u_1, \dots, u_n) : \det_e(B)$. Dans tous les cas $f(u_1, \dots, u_n) = \det_e(A) \det_e(u_1, \dots, u_n)$. Maintenant si $u_1, \dots, u_n$ sont les colonnes de B , les colonnes de AB sont les $Au_1, \dots, Au_n$.

(2) si $AB = I$ on a $\det(A) \det(B) = 1$ donc $\det(A)$ est non nul. Inversement si $\det(A)$ est non nul les vecteurs colonnes de A ne sont pas dans un hyperplan, donc forment une base et A est donc inversible.

(3) Résulte de la formule (on omet les détails).

(4) On a

$$\det(u_1 + \lambda u_2, u_2, \dots, u_n) = \det(u_1, u_2, \dots, u_n) + \lambda \det u_1 + \lambda \det(u_2, u_2, \dots, u_n)$$

par multilinéarité. Par antisymétrie, $\det(u_2, u_2, \dots, u_n) = 0$ donc on a bien

$$\det(u_1 + \lambda u_2, u_2, \dots, u_n) = \det(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

le même raisonnement avec les autres indices montre qu'un pivot sur les colonnes ne change pas la valeur du déterminant. Comme le pivot sur les colonnes de la transposée correspond au pivot sur les lignes pour la matrice d'origine, on voit qu'un pivot sur les lignes ne change pas non plus la valeur du déterminant. $\square$

REMARQUE 2.9. L'énoncé (1) est évident avec l'interprétation par le volume : car pour le signe AB préserve l'orientation ssi A et B préservent ou renversent simultanément l'orientation. Ensuite si A multiplie les volumes par $|\det(A)|$ et B par $|\det(B)|$ il est clair que AB les multiplie par $|\det(A)||\det(B)| = |\det(AB)|$.

(2) dit que le volume d'un parallélépipède (en dimension n) est nul si et seulement si les vecteurs sont dans un hyperplan.

On remarque que d'après (3) on peut effectuer les opérations élémentaires sur les lignes au lieu de les faire sur les colonnes sans changer le déterminant.

Par exemple on peut développer selon une colonne au lieu d'une ligne.

7.1. Exemple.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 & 8 \\ 0 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 9 \end{vmatrix} \stackrel{L_3}{\equiv} (-4) \begin{vmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 0 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 9 \end{vmatrix} \stackrel{L_2}{\equiv} (-4)(7) \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = -28$$

8. Quelques applications des déterminants

8.1. Remarque sur les matrices semblables. On remarquera aussi que le déterminant de deux matrices semblables est le même :

$$\det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \frac{\det(A)}{\det(P)}\det(P) = \det(A)$$

8.2. Équation d'un hyperplan. Si H est engendré par $a_1, \dots, a_{n-1}$, le vecteur v est dans H ssi :

$$\det(v, a_1, \dots, a_{n-1}) = 0$$

EXEMPLE 2.10. $n = 3$, $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ y & 2 & 3 \\ z & 3 & 4 \end{vmatrix} = -x + 2y - z$$

Donc $H = \{(x, y, z) \mid x - 2y + z = 0\}$.

On vérifie que a_1, a_2 sont dans H .

Important : Il faut que $(a_1, \dots, a_{n-1})$ soient linéairement indépendants, sinon $(a_1, \dots, a_{n-1})$ n'est pas un hyperplan.

8.3. Rang d'une famille de vecteurs.

DÉFINITION 2.11. Un **mineur de taille p** d'une matrice $m \times n$ est le déterminant d'une matrice extraite de A en supprimant $m - p$ lignes et $m - p$ colonnes.

PROPOSITION 2.12. *Le rang de A est le plus grand entier p tel que A possède un mineur de taille p non nul.*

DÉMONSTRATION. Soient $(a_1, \dots, a_m)$ les vecteurs colonnes. Considérons p vecteurs, par exemple $(a_1, \dots, a_p)$. Si un mineur de ces p vecteurs est non nul, cela signifie que la projection sur les $(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$ est libre, et donc les $a_1, \dots, a_p$ sont linéairement indépendants.

Inversement, si p vecteurs sont indépendants, il existe $i_1, \dots, i_p$ tels que la projection sur $(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$ est libre. En effet, si $(a_1, \dots, a_p)$ est libre, il existe $e_{j_1}, \dots, e_{j_{n-p}}$ tels que $(a_1, \dots, a_p, e_{j_1}, \dots, e_{j_{n-p}})$ est une base (Théorème 1.25, de la base incomplète).

Alors, si $\{i_1, \dots, i_p\}$ est le complémentaire de $\{j_1, \dots, j_{n-p}\}$ dans $\{1, \dots, n\}$, la projection de $(a_1, \dots, a_p)$ sur $(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$ est libre : sinon on aurait $\sum \lambda_j a_j + \dots + \lambda_p a_p \in \langle e_{j_1}, \dots, e_{j_{n-p}} \rangle$ (λ_j non tous nuls), car dire qu'un vecteur a une projection nulle sur $(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$ c'est dire qu'il appartient à $\langle e_{j_1}, \dots, e_{j_{n-p}} \rangle$. Cela contredirait la liberté de $(a_1, \dots, a_p, e_{j_1}, \dots, e_{j_{n-p}})$. $\square$

REMARQUE 2.13. Dans la pratique on utilise le pivot de Gauss, mais le critère précédent est parfois utile.

EXEMPLE 2.14. Rang de $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$.

Mineurs :

Le rang de $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ est 2 car $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$

Pivot : Le rang de $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ égale le rang de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -4 \\ 3 & -8 \\ 4 & -12 \end{pmatrix} = 2$

8.4. Produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$. étant donné $v, w \in \mathbb{R}^3$, il existe un unique vecteur ξ tel que :

$$\forall u \in \mathbb{R}^3, \quad \langle u, \xi \rangle = \det(u, v, w)$$

Car $u \mapsto \det(u, v, w)$ est linéaire, et se représente donc comme :

$$u \mapsto au_x + bu_y + cu_z = \langle u, \xi \rangle$$

avec $\xi = (a, b, c)$.

On pose $\xi = v \wedge w$. Par définition :

$$\begin{vmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{vmatrix} = u_x(v_y w_z - w_y v_z) - u_y(v_x w_z - w_x v_z) + u_z(v_x w_y - w_x v_y)$$

donc :

$$v \wedge w = \begin{pmatrix} v_y w_z - w_y v_z \\ v_z w_x - w_z v_x \\ v_x w_y - w_x v_y \end{pmatrix}$$

REMARQUE 2.15. On pourrait aussi définir le produit vectoriel de $(n-1)$ vecteurs dans $\mathbb{R}^n$:

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1} \text{ défini par } \langle u, v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1} \rangle = \det(u, v_1, \dots, v_{n-1})$$

8.5. Formule d'inversion. Le développement suivant la 1ère ligne du déterminant dit que :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \Delta_{1j}$$

où Δ_{ij} est le déterminant du mineur $A_{i,j}$ de A .

Donc si ${}^t\text{com}(A)$ est la matrice donnée par :

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ji} \quad (\text{attention à l'inversion de } i \text{ et } j)$$

on a :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji} = \det(A)$$

En développant suivant la i -ème ligne, on obtient :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji} = \det(A)$$

Par ailleurs :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} = 0 \quad \text{pour } i \neq k$$

car par exemple si $i = 1$ et $k \neq 1$, c'est le développement du déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \vdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{k-1,1} & a_{k-1,2} & \dots & a_{k-1,n} \\ a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & \dots & a_{k+1,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

dont deux lignes sont égales. Le même raisonnement s'adapte lorsque i est différent de 1. En conclusion :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} = \begin{cases} \det(A) & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \neq k \end{cases}$$

Donc :

$$A \cdot {}^t\text{com}(A) = \det(A) \cdot I$$

et :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t\text{com}(A)$$

EXEMPLE 2.16.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 + (-6) = -10$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-10} \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -4 & 6 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

REMARQUE 2.17. Comme on va le voir, pour résoudre un système linéaire donné, on peut utiliser le pivot. Le calcul de l'inverse ne se justifie que si on doit résoudre $AX = Y$ pour de nombreux Y distincts.

8.6. Méthode de Gauss-Jordan. On peut aussi inverser A par pivot. C'est la méthode de Gauss-Jordan. Il s'agit d'appliquer les mêmes pivots sur les colonnes de droite et de gauche de la matrice $(A \mid I)$ jusqu'à se ramener à la matrice $(I \mid A^{-1})$. Notons qu'en plus des pivots proprement dits, on peut multiplier une colonne par un réel non-nul.

EXEMPLE 2.18.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_2 \rightarrow C_2 - 3C_1]{C_3 \rightarrow C_3 - C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -3 & -1 \\ -1 & 5 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_3 \rightarrow C_3 - \frac{1}{5}C_2]{C_1 \rightarrow C_1 + \frac{1}{5}C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2/5 & -3 & -2/5 \\ 0 & 5 & 0 & | & 1/5 & 1 & -1/5 \\ 0 & 0 & -2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_3 \rightarrow -\frac{1}{2}C_3]{C_2 \rightarrow \frac{1}{5}C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2/5 & -3/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1/5 & 1/5 & 1/10 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

et $A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

REMARQUE 2.19.  Lorsqu'on calcule un inverse, ne jamais mélanger pivot sur les lignes et sur les colonnes!

9. Démonstration de $\det(A) = \det({}^t A)$

Pour calculer $\det(A)$, il faut sommer (avec signe) tous les produits possibles :

$$\{\det A\} = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

On voit qu'inverser lignes et colonnes ne change rien, parce que cela revient à remplacer σ par σ^{-1} ce qui ne change pas la signature. les sommes de $\varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$

sont aussi les sommes de $\varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$, car le nombre d'inversions de σ égale le nombre d'inversions de σ^{-1} .

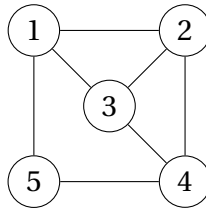
Chapitre 3

Diagonalisation

1. Motivations

Dans un certain nombre de situations, on a besoin de calculer A^k pour k grand. Le nombre d'opérations devient juste énorme, si la matrice est de taille n , il faut déjà n^2 opérations pour calculer A^2 , et en étant astucieux $\simeq n^{\ln(n)}$ opérations. Sauf si A est diagonale, car si $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ alors $A^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$. On a souvent besoin de se ramener à ce cas.

EXEMPLES 3.1. (1) On considère le graphe suivant où toutes les arêtes ont de longueur 1.



Combien y a-t-il de chemins de longueur k reliant 1 à 4 ?

Réponse : Ici $n = 5$, $a_{ij} = 0$ si $i, j \in [1, 5]$ et i, j sont reliés par une arête et $a_{i,j} = 0$ sinon.

La réponse est donnée par l'élément $(4, 1)$ de A^k . En effet le coefficient (i, k) de A^2 est $\sum_j a_{ij} a_{jk} = \#$ chemins de longueur 2 reliant i à k . Plus généralement le coefficient (i, j) de A^k est égal au nombre de chemin de longueur k allant i à j .

(2) Une population de lapins se divise en trois classes d'âge : jeunes adultes et vieux. Chaque année :

- 90% des jeunes deviennent adultes
- 80% des adultes deviennent vieux
- 10% des vieux survivent
- Chaque adulte produit 1,2 jeunes en moyenne

Question : Que devient la population à long terme ?

Modélisation : si on pose $X_n = \begin{pmatrix} \text{Nombre de jeunes l'année } n \\ \text{Nombre d'adultes l'année } n \\ \text{Nombre de vieux l'année } n \end{pmatrix}$

on aura $X_{n+1} = AX_n$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1.2 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0.1 \end{pmatrix}$$

Dans ces deux exemples la réponse serait facile si on avait une matrice A diagonale. On essaie de se ramener à ce cas.

La diagonalisation est un outil indispensable dans les cas suivants :

- Calcul de A^n (suites récurrentes)
- Classification des formes quadratiques (Chapitre 4)
- Résolution de systèmes différentiels (Chapitre 6)
- Analyse de stabilité (Chapitre 7)

2. Définitions et Propriétés

2.1. Endomorphisme Diagonalisable.

DÉFINITION 3.2. On dit qu'un endomorphisme f de E est diagonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}(f, \mathcal{B})$ soit diagonale, ou encore il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $f(e_i) = \lambda_i e_i$.

On dit que la matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ qu'elle définit est diagonalisable. En d'autres termes s'il existe $P \in M_n(\mathbb{K})$ inversible telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.



Une matrice peut être diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$ mais pas dans $M_n(\mathbb{R})$. En d'autres termes il se peut qu'il existe $P \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale mais pas de tel P dans $M_n(\mathbb{R})$.

2.2. Exemple. Soit $f \in \mathbb{Z}/\mathbb{Z}$:

$$(3.1) \quad \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\theta} \\ ie^{i\theta} \end{pmatrix} = e^{-i\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$(3.2) \quad \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} \\ -ie^{i\theta} \end{pmatrix} = e^{i\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

Or $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ est une base de $\mathbb{C}^2$

donc $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Mais A ne peut être diagonalisable sur $\mathbb{R}$; c'est la matrice d'une rotation plane $\neq \pm \text{Id}$ qui ne préserve donc aucune droite : Il n'existe donc pas de vecteur $u \neq 0$ tel que $Au = \lambda u$.

2.3. Vecteurs Propres et Valeurs Propres.

DÉFINITION 3.3. On dit que $u \in E \setminus \{0\}$ est un **vecteur propre** de l'endomorphisme f s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(u) = \lambda u$.

On dit que λ **valeur propre** et que u est un vecteur propre associé à la valeur propre λ .



Le vecteur u n'est en général pas unique! Diagonaliser f c'est trouver une base de E constituée de vecteurs propres.

EXEMPLES 3.4. 1) On a vu que $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à la valeur propre $e^{-i\theta}$.
 2) Si $u \in \text{Ker}(f)$ il est associé à la valeur propre 0.
 3) Si $f = \lambda \cdot \text{Id}$, λ est valeur propre et tout vecteur ($\neq 0$) est vecteur propre associé à la valeur propre 0.

2.4. Espace Propre.

DÉFINITION 3.5. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $f \in \text{End}(E)$.

On appelle **espace propre** associé à λ l'espace vectoriel $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id})$ constitué de 0 et des vecteurs propres associés à λ .

On le note E_λ (ou $E_\lambda(f)$ s'il y a ambiguïté sur f).

2.5. Exemples. 1) $E_0 = \text{Ker}(f)$

2) Si $f = \lambda \text{Id}$, $E_\lambda = E$.

Avant de donner d'autres exemples montrons

PROPOSITION 3.6. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres distinctes de f , d'espaces propres associés E_{λ_i} . Alors les E_{λ_i} sont en somme directe i.e.

$$E_{\lambda_1} + \dots + E_{\lambda_p} = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}$$

DÉMONSTRATION. Il s'agit de montrer que si $v_i \in E_{\lambda_i}$ et $v_1 + \dots + v_p = w$, les v_i sont uniques. Il suffit pour cela de traiter les cas $w = 0$ et de montrer que si $v_1 + \dots + v_p = 0$ alors les $v_i \in E_{\lambda_i}$ sont tous nuls.

Raisonnons par récurrence. Pour $p = 1$ le résultat est évidemment vrai. Supposons le vrai pour $p-1$ et montrons le pour p . On aura donc $v_1 + \dots + v_p = 0$ avec des $v_i \in E_{\lambda_i}$ non tous nuls. Alors $(f - \lambda_1 \text{Id})(v_1 + \dots + v_p) = 0$ et en utilisant que $f(v_i) = \lambda_i v_i$ cela s'écrit

$$(\lambda_1 - \lambda_1)v_1 + (\lambda_1 - \lambda_2)v_2 + \dots + (\lambda_p - \lambda_p)v_p = 0$$

soit

$$(\lambda_1 - \lambda_2)v_2 + \dots + (\lambda_p - \lambda_p)v_p = 0$$

On a donc obtenu une somme de $p - 1$ vecteurs propres de valeurs propres différentes égale à 0. Par hypothèse de récurrence, cela entraîne $(\lambda_i - \lambda_1)v_i = 0$ pour $2 \leq i \leq p$ et comme $\lambda_i - \lambda_1 \neq 0$ on a $v_2 = \dots = v_p = 0$. En réutilisant $v_1 + \dots + v_p = 0$ on en déduit que $v_1 = 0$ et donc finalement $v_1 = v_2 = \dots = v_p = 0$. $\square$

COROLLARY 3.7. *L'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si $\sum_{\lambda} \dim(E_{\lambda}) = \dim E$.*

DÉMONSTRATION. En effet

$$\dim(E_{\lambda_1} + \dots + E_{\lambda_p}) = \sum \dim(E_{\lambda_i})$$

d'après la Proposition. Donc $\sum E_{\lambda} = E$ (la somme est finie!) si et seulement si $\dim(\sum E_{\lambda}) = \dim(E)$ i.e. $\sum \dim(E_{\lambda}) = \dim(E)$ car les E_{λ_i} sont en somme directe. Ceci montre que A est diagonalisable puisqu'en juxtaposant des bases des E_{λ_j} on obtient une base de E dans la quelle la matrice de A est diagonale. $\square$

3. Polynôme Caractéristique

Pour trouver les valeurs propres de f on utilise

PROPOSITION 3.8. *Soit f un endomorphisme de E , A sa matrice dans une base. Les valeurs propres de f sont les racines du polynôme $P_A(x) = \det(xI - A)$.*

On appelle P le polynôme caractéristique de A . Notons que P ne dépend que de f car si M est la matrice de f dans une autre base, $A' = R^{-1}AR$ d'où

$$P_{A'}(x) = \det(xI - A') = \det(R^{-1}(xI - A)R) = \det(R^{-1})\det(xI - A)\det(R) = \det(xI - A) = P_A(x).$$

EXAMPLE 3.9. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

$P_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -2 \\ 0 & x+1 \end{vmatrix} = (x-1)(x+1)$ qui est scindé, les racines ont toutes multiplicité 1 $\Rightarrow A$ est diagonalisable.

Cherchons $E_1 = \text{Ker}(A - I)$: on veut que $Ae_1 = e_1$, donc $E_1 = \mathbb{R}e_1$.

Cherchons $E_{-1} = \text{Ker}(A + I) = \text{Ker}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on veut que $e_1 - e_2$ soit solution $E_{-1} = \mathbb{R}(e_1 - e_2)$.

Si $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ on a $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Voici quelques propriétés du polynôme caractéristique :

PROPOSITION 3.10. *Soit $P_A(x)$ le polynôme caractéristique de A . Alors*

- (1) Le coefficient de x^n dans $P_A(x)$ est 1
- (2) Le coefficient de x^{n-1} est $-\text{Tr}(M)$ où $\text{Tr}(A) = a_{1,1} + \dots + a_{n,n}$
- (3) Le coefficient de x^0 est $(-1)^n \det(M)$

DÉMONSTRATION. En effet dans le développement de $\det(xI - A)$, x^n n'apparaît que dans $(x - a_{1,1}) \cdots (x - a_{n,n})$ et son coefficient est 1

- x^{n-1} n'apparaît que dans $(x - a_{1,1}) \cdots (x - a_{n,n})$ et son coefficient est $-\text{Tr}(A)$

- Le coefficient de 1 égale $P_A(0)$ soit $\det(-A)$ et vaut donc $(-1)^n \det(A)$.

Bien entendu dans $(x - a_{1,1}) \cdots (x - a_{n,n})$ le coefficient de x^{n-1} est $-\text{trace}(A)$ donc de degré $(n-2)$ au plus en x . □

Il en résulte que $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(P^{-1}AP)$. On a en fait un résultat plus général :

PROPOSITION 3.11. *Quelles que soient les matrices M, N on a $\text{Tr}(MN) = \text{Tr}(NM)$.*

4. Théorème de d'Alembert-Gauss

Soit P un polynôme.

DÉFINITION 3.12. On dit que le polynôme P à coefficients dans $\mathbb{K}$ est **scindé** sur $\mathbb{K}$ si il s'écrit sous la forme

$$P(X) = (x - r_1)^{m_1} \cdots (x - r_n)^{m_n}$$

On dit que m_i est la **multiplicité** de la racine r_i . Si les m_i sont tous égaux à 1 on dit que le polynôme a toutes ses racines **simples** ou **distinctes**.

Notons qu'à l'ordre près, les r_i, m_i sont uniquement déterminés par P .

THÉORÈME 3.13 (Théorème de d'Alembert-Gauss). *Tout polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$ est scindé sur $\mathbb{C}$.*

Notons que si P est réel, les racines non réelles viennent par paires de racines complexes conjuguées ayant même multiplicité.

Ainsi si $\deg P = 3$ on a :

- soit 3 racines réelles
- soit 1 racine réelle et 2 racines complexes conjuguées.

EXEMPLES 3.14. 1) $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ est scindé sur $\mathbb{R}$ car $P(x) = (x-1)^2(x-2)$. La racine 1 est de multiplicité 2, la racine 2 de multiplicité 1.

2) $P(x) = x^2 + 1$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$. Il est scindé sur $\mathbb{C}$ car $P(x) = (x+i)(x-i)$. Les racines i et $-i$ sont de multiplicité 1.

REMARQUE 3.15. Si P est réel et si $r \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est une racine complexe, les multiplicités de r et $\bar{r}$ coïncident. En effet si r et $\bar{r}$ sont réel $P(x) = \overline{P(\bar{x})}$ (car $P(x) \in \mathbb{R}$), donc $(x - r_i)^{m_i} \cdots (x - r_n)^{m_n} = (x - \bar{r}_1)^{m_1} \cdots (x - \bar{r}_n)^{m_n}$ donc $\bar{r}_i = r_j$ $m_i = m_j$

PROPOSITION 3.16. *Si f est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ alors $P_f(x)$ est scindé sur $\mathbb{K}$.*

DÉMONSTRATION. En effet, f a pour matrice dans la base où elle diagonalise

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

donc $P_f(x) = P_D(x) = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)$ est scindé. $\square$

La réciproque est fautive : si $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ $P_f(x) = (x - \lambda)^2$ est bien scindé, mais A n'est pas diagonalisable : si c'était le cas, comme sa seule valeur propre est λ , A serait semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I$. Mais $P^{-1}IP = I$, donc on aurait $A = I$ ce qui n'est pas!

Notons que cet argument s'applique aussi bien pour $\mathbb{R}$ que pour $\mathbb{C}$.

PROPOSITION 3.17. *Si P_A est scindé sur $\mathbb{R}$, A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ si et seulement si elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.*

DÉMONSTRATION. En effet, supposons A diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Alors tout $w \in \mathbb{C}^n$ s'écrit $w = v_1 + \dots + v_p$ où $Av_j = \lambda_j v_j$, $v_j \in \mathbb{C}^n$ et les λ_j sont réelles puisque ce sont les racines de P_A . Si $w \in \mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ (i.e. les coordonnées de w sont réelles), on a $w = v_1 + \dots + v_p = \bar{v}_1 + \dots + \bar{v}_p$ et en faisant la moyenne

$$w = \frac{(v_1 + \bar{v}_1)}{2} + \dots + \frac{(v_p + \bar{v}_p)}{2}$$

Comme $A\bar{v}_j = \lambda_j \bar{v}_j$ on a que $\frac{(v_j + \bar{v}_j)}{2}$ est vecteur propre de A de valeur propre λ_j . On a donc montré que tout élément $w \in \mathbb{R}^n$ est somme de vecteurs propres réels, c'est-à-dire que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. $\square$

PROPOSITION 3.18. *Si P_f a toutes ses racines de multiplicité 1 alors f est diagonalisable sur $\mathbb{K}$.*

DÉMONSTRATION. Si $P_A(x) = (x - r_1) \cdots (x - r_n)$ avec les r_i ni tous distincts, on a $\dim(E_{r_i}) \geq 1$ par définition et $\sum_{i=1}^n \dim(E_{r_i}) \geq n$ donc $\sum \dim(E_{r_i}) = n = \dim E$ car les E_{r_i} sont en somme directe. Ceci montre que A est diagonalisable. $\square$

5. Condition nécessaire et suffisante pour être diagonalisable

Concluons avec un critère donnant une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable

LEMMA 3.19. *Soit r une racine de $P_f(x)$ de multiplicité m . Alors $\dim(E_r) \leq m$.*

DÉMONSTRATION. Prenons une base $e_1, \dots, e_d$ de E_r et complétons la en une base de E ($e_1, \dots, e_d, \dots, e_n$). Dans cette base f a pour matrice

$$\begin{pmatrix} r & \dots & 0 & \star \cdots \star \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & r & \star \cdots \star \\ & 0 & & A' \end{pmatrix}$$

donc $P_A(x) = (x - r)^d P_{A'}(x)$ (par récurrence) donc r est de multiplicité $\geq d$ i.e. $m \geq d = \dim(E_r)$. $\square$

THÉORÈME 3.20. *La matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si*

(1) $P_A(x)$ est scindé sur $\mathbb{K}$

(2) Pour toute racine r de P_A de multiplicité m_r on a $m_r = \dim(E_r)$.

DÉMONSTRATION. Pour la nécessité, celle de (1) a déjà été vue. Celle de (2) s'obtient comme suit. On a par définition d'un polynôme scindé que $\sum_{\lambda} \dim(E_{\lambda})$. Pour la suffisance, montrons que $\sum_{j=1}^p m_{r_j} = n = \dim E$ et donc si $m_{r_j} = \dim(E_{r_j})$ on aura $\sum_{j=1}^p \dim(E_{r_j}) = \dim E$ et donc A est diagonalisable.

D'après le lemme $\dim(E_r) \leq m_r$. $\square$

6. Exemples

1)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} x-2 & -3 & 2 \\ 1 & x-4 & 1 \\ 1 & -3 & x+1 \end{vmatrix} = (x-2)[x^2 - 4x + x + 1] - (-3x + 2 + 2x) =$$

$$x^3 - 5x^2 + 7x - 2 + x - 2 = x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-2)^2(x-1)$$

Donc A est diagonalisable si et seulement si $\dim E_2 = 2$

$$\text{Or } \dim E_2 = \dim \text{Ker}(A - 2I) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

or $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$ donc $\text{rang}(A - 2I) \geq 2$ (mineur de taille 2 non nul) et $\dim \text{Ker}(A - 2I) \leq 1 < 2$ (Théorème du rang) et A n'est pas diagonalisable.

2)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} x & -3 & 1 \\ -2 & x+1 & -1 \\ 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix} = (x-2)(x^2+x+6) = (x-2)^2(x+3)$$

$$\text{Pour } E_2 \text{ résoudre } \begin{cases} -2x-3y+z=0 \\ -2x+03y-z=0 \\ 0=0 \end{cases} \text{ soit } 2x-3y+z=0. \text{ C'est un plan donc } \dim E_2 =$$

2 et A est diagonalisable.

$$\text{Pour trouver } E_{-3}, \text{ résoudre : } \begin{cases} -3x-3y+z=0 \\ -2x-2y-z=0 \\ z=0 \end{cases}$$

$$\text{soit } E_{-3} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$$E_2 \text{ est engendré par } \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On diagonalise } A \text{ avec la matrice de passage } P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ -1 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)[(x-1)^2+1]$$

A ne peut être diagonalisable sur $\mathbb{R}$ car $(x-1)^2+1$ n'a pas de racine réelle.

A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ car $P_A(x) = (x-1)(x-1+i)(x-1-i)$ a 3 racines simples.

$$\text{Pour trouver } E_1 \text{ il faut résoudre } \begin{cases} -y+z=0 \\ 0=0 \\ -x=0 \end{cases}$$

donc E_1 est engendré par $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Pour E_{1-i} on trouve sans calculs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$ et pour E_{1+i} on trouve sans calculs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$ Donc

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & i & -i \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 1+i \end{pmatrix}$$

7. Valeurs Propres Complexes

PROPOSITION 3.21. Si A est une matrice réelle, si une valeur propre complexe λ de A . Alors $E_{\bar{\lambda}} = \overline{E_{\lambda}} = \{\bar{u} \mid u \in E_{\lambda}\}$

DÉMONSTRATION. Si $Au = \lambda u$ et A est réelle, on a $A\bar{u} = \bar{\lambda}\bar{u}$ (car $A = \bar{A}$). Donc $u \in E_{\lambda} \Leftrightarrow \bar{u} \in E_{\bar{\lambda}}$. $\square$

8. Applications de la diagonalisation

8.1. Calcul de A^k . Si A est diagonalisable $P^{-1}AP = D$ où $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ soit $A = PDP^{-1}$.

Alors $A^k = PD^kP^{-1}$ mais $D^k = \text{diag}(d_1^k, \dots, d_n^k)$

REMARQUE 3.22. On peut utiliser cette méthode sur $\mathbb{C}$, même si A est réelle. Dans ce cas $P \in M_n(\mathbb{C})$, $D \in M_n(\mathbb{C})$, mais bien évidemment $PD^kP^{-1} \in M_n(\mathbb{R})$ (puisque c'est A^k !).

EXEMPLE 3.23.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ donc}$$

$$A^k = PD^kP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-3)^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \frac{1}{10} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2(-3)^k + 3 \cdot 2^k}{5} & \frac{3(2^k - (-3)^k)}{5} & \frac{(-3)^k - 2^k}{5} \\ \frac{2(2^k - (-3)^k)}{5} & \frac{3(-3)^k + 2 \cdot 2^k}{5} & \frac{2^k - (-3)^k}{5} \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$$

On voit qu'il alors est très facile de déterminer l'ordre de grandeur de chaque terme de la matrice.

8.2. Suites récurrentes. On considère la récurrence double

$$\begin{cases} u_{n+1} = au_n + bv_n \\ v_{n+1} = cu_n + dv_n \end{cases}$$

(u_0, v_0) étant donné.

Cela se réécrit $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et posant $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on aura $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^k \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$

Si A est diagonalisable et $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ sont les vecteurs propres de valeurs propres α et β , on aura

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \lambda \alpha^n \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \mu \beta^n \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

et en particulier

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Il suffit donc de résoudre cette dernière équation pour obtenir λ, μ et donc la formule explicite pour la suite.

EXEMPLES 3.24.

$$(1) \begin{cases} u_{k+1} = u_k + 2v_k \\ v_{k+1} = -v_k \end{cases} \quad u_0 = v_0 = 1.$$

On a $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ de valeurs propres 1 et -1 et vecteurs propres $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

On a donc $\begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu(-1)^k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ avec $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ soit $\lambda = 2, \mu = -1$ et donc :

$$u_k = 2 + (-1)^{k+1}, v_k = (-1)^k$$

(2) Récurrence double

$u_{k+2} = au_{k+1} + bu_k$ $k \geq 0$ avec u_0, u_1 donnés.

En principe on pourrait poser $v_k = u_{k+1}$ et $\begin{cases} u_{k+1} = v_k \\ v_{k+1} = av_k + bu_k \end{cases}$

dans ce cas $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}$

Notons que $P_A(x) = x(x-a) - b$ i.e $P_A(x) = x^2 - ax - b$

Si α et β sont les deux racines, on aura $u_k = \lambda\alpha^k + \mu\beta^k$

où λ et μ sont déterminés par le système linéaire $\begin{cases} \lambda + \mu = u_0 \\ \lambda\alpha + \mu\beta = u_1 \end{cases}$

Notons que soit α, β sont tous deux réels, soit $\beta = \bar{\alpha}$.

Dans ce cas, il est souvent commode d'écrire $\alpha = \rho e^{i\theta}$ $\beta = \rho e^{-i\theta}$ et $\alpha^k = \rho^k(\cos(k\theta) + i \sin(k\theta))$ $\beta^k = \rho^k(\cos(k\theta) - i \sin(k\theta))$

et $u_k = \lambda\rho^k \cos(k\theta) + \mu\rho^k \sin(k\theta)$

$$\begin{cases} u_0 = \lambda + \mu \\ u_1 = \lambda\rho \cos\theta + \mu\rho \sin\theta \end{cases}$$

EXEMPLE 3.25. $u_{k+2} = -2u_{k+1} - 2u_k$, $u_0 = u_1 = 1$

$$P_A(x) = x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$$

$$\alpha = -1 + i, \beta = -1 - i$$

$$\alpha = \sqrt{2}e^{3\pi/4} \quad \bar{\alpha} = \sqrt{2}e^{-3\pi/4}$$

$$u_k = \lambda(\sqrt{2})^k \cos(\frac{3\pi k}{4}) + \mu(\sqrt{2})^k \sin(\frac{3\pi k}{4})$$

$$\begin{cases} 1 = \lambda + \mu \\ 1 = \lambda\sqrt{2} \cos(\frac{3\pi}{4}) + \mu\sqrt{2} \sin(\frac{3\pi}{4}) \end{cases}$$

Soit $\lambda = 0$ $\mu = 1$. En conclusion

$$u_k = (\sqrt{2})^k \sin(\frac{3\pi}{4})$$

8.3. Classification des matrices 2×2 réelles. Soit A une matrice 2×2 . on veut trouver une matrice aussi simple que possible qui soit semblable à A . On rappelle que deux matrices A, A' sont dites semblables s'il existe une matrice inversible P telle que $A' = P^{-1}AP$. Cela revient à dire que A, A' décrivent la même application dans des bases différentes. Soit $P_A(x)$ son polynôme caractéristique.

a) Si P_A a deux racines réelles distinctes, A est semblable à $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ $\alpha \neq \beta \in \mathbb{R}$

b) Si P_A a deux racines complexes conjuguées (non réelles, donc distinctes!) $\alpha \pm i\beta$, A est semblable à $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$

En effet A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Soit alors $w = u + i v$ un vecteur propre complexe, de valeur propre complexe $\alpha + i \beta$. On aura

$$Au = \alpha u - \beta v, Av = \beta u + \alpha v$$

On vérifie que u et v ne sont pas colinéaires, car si on avait $v = cu$ $Au = \alpha u - \beta cu = (\alpha - \beta c)u$ et comme $\beta \neq 0$ (sinon $\alpha + i \beta \in \mathbb{R}$) on a une contradiction [Comme $-v + i u$ est aussi vecteur propre, il est inutile de considérer le cas $v = 0$].

c) Si P_A a une valeur propre double α (nécessairement réelle)

(1) si $E_\alpha = \mathbb{R}^2$ A est semblable à $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$

(2) si $E_\alpha = \mathbb{R}u$ on a $Au = \alpha u$ et si v est un vecteur quelconque non-colinéaire à u , on aura $Av = \beta u + \alpha v$ avec $\beta \neq 0$ (sinon $E_\alpha = \mathbb{R}^2$!). Quitte à diviser v par β on obtient que A est semblable à $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

Dans le dernier cas, il est utile de connaître la formule pour A^k : si $A = \begin{pmatrix} \lambda & t \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ on a $A^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & kt\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix}$. Cela se vérifie aisément par récurrence.

9. Exemples

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

$P_A(x) = |x - 1, -2; 0, x + 1| = (x - 1)(x + 1)$ qui est scindé, les racines ont toutes multiplicité 1 $\Rightarrow A$ est diagonalisable.

Cherchons $E_1 = \ker(A - I)$: on veut que $Ae_1 = e_1$. Donc $E_1 = \mathbb{R}e_1$.

Cherchons $E_{-1} = \ker(A + I) = \ker \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ on voit que $e_1 - e_2$ est solution $E_{-1} = \mathbb{R}(e_1 - e_2)$.

Si $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ on a $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2) On considère la suite donnée par $\begin{cases} u_{k+1} = 3u_k + v_k \\ v_{k+1} = -u_k + v_k \end{cases} \quad u_0 = 1, v_0 = 2$. La matrice

associée est $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ dont le polynôme caractéristique est $P_A(x) = \begin{vmatrix} x-3 & -1 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)(x-3) + 1 = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$. Donc 2 est valeur propre double et comme A n'est pas diagonale, elle n'est pas diagonalisable. L'espace propre E_2 est donné par

$$\begin{cases} -x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \quad \text{donc } E_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle. \text{ On aura, posant } w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Aw = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2w_2 + tw_1 = 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

d'où $t = 1$. Donc dans la base (w_1, w_2) l'application A a pour matrice $A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Maintenant si $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ soit

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire $\lambda = 1, \mu = 3$, on aura donc $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = w_1 + 3w_2$ et donc

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} &= A^k \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = A^k w_1 + 3A^k w_2 = \\ &= 2^k w_1 + 3(k2^{k-1} w_1 + 2^k w_2) = \begin{pmatrix} 2^k + 3 \cdot (k2^{k-1}) \\ -2^k + 3(2^k - k2^{k-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2+3k)2^{k-1} \\ (4-3k)2^{k-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

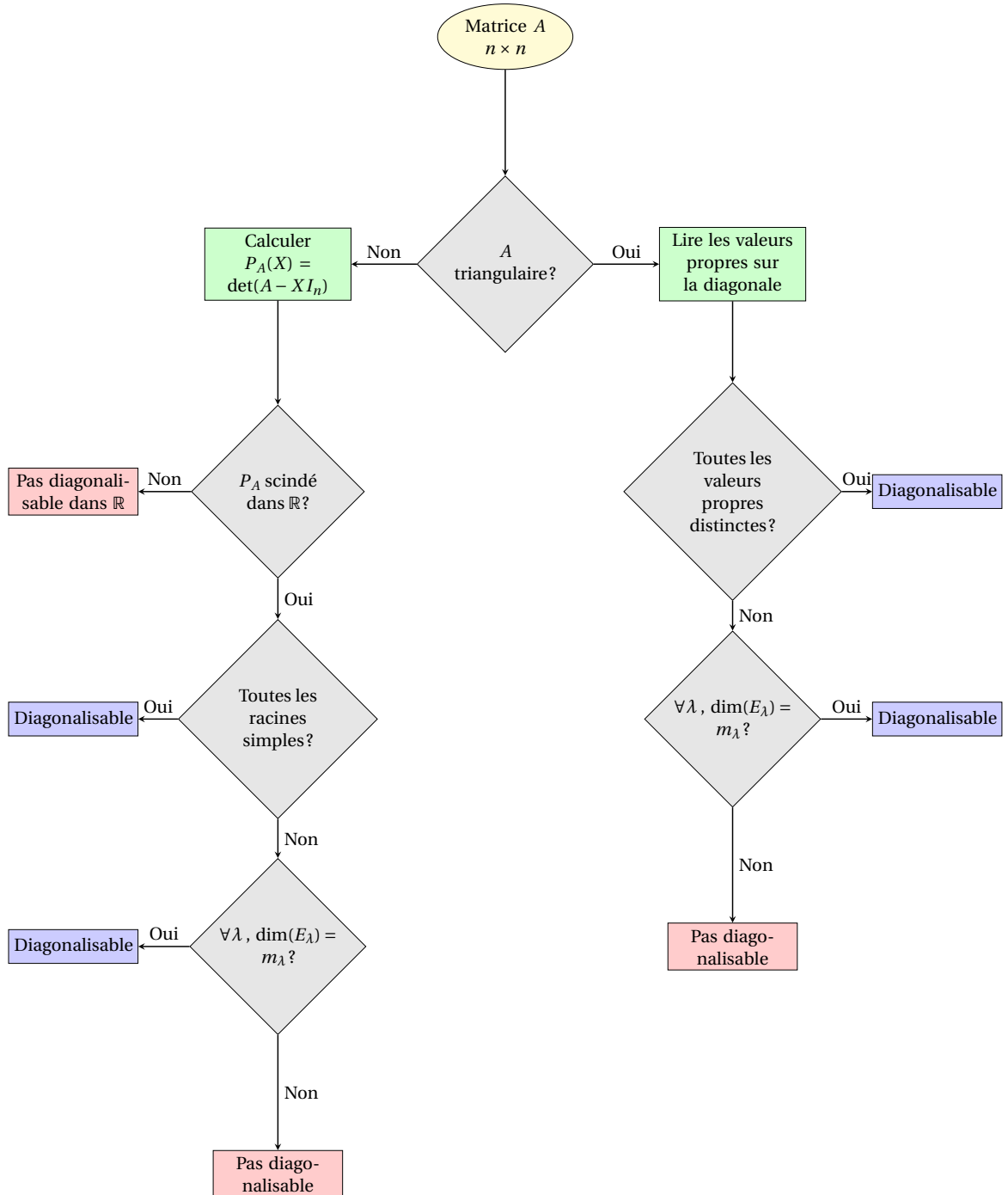
10. Conclusion

Nous avons vu les concepts fondamentaux de la diagonalisation :

- Définition d'un endomorphisme diagonalisable
- Vecteurs propres et valeurs propres
- Espaces propres et leur propriété de somme directe
- Polynôme caractéristique et son rôle dans la détermination des valeurs propres
- Critères de diagonalisabilité
- Applications : calcul de puissances de matrices, résolution de suites récurrentes, classification des matrices 2×2

La diagonalisation est un outil puissant qui permet de simplifier l'étude des transformations linéaires et va s'avérer très utile pour résoudre des équations différentielles.

11. Récapitulatif : comment décider si une matrice est diagonalisable?



12. Appendice 1 : comment décider si une matrice triangulaire est diagonalisable

On veut décider si une matrice triangulaire supérieure est diagonalisable. On appelle bloc associé à la valeur propre λ racine de multiplicité p de P_A la matrice extraite de A (i.e. la sous-matrice) de taille p ayant les p λ comme diagonale. On veut montrer que A est diagonalisable si et seulement si le bloc associé chaque valeur propre est déjà diagonal.

Considérons la matrice T suivante :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
 \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \left[\begin{array}{cccc}
 a & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\
 0 & b & t_{23} & t_{24} \\
 0 & 0 & a & t_{34} \\
 0 & 0 & 0 & b
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Par exemple pour extraire le bloc associé à a , on garde les lignes et colonnes où a apparaît sur la diagonale (positions 1 et 3).

Matrice T originale

$$\left[\begin{array}{cccc}
 a & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\
 0 & b & t_{23} & t_{24} \\
 0 & 0 & a & t_{34} \\
 0 & 0 & 0 & b
 \end{array} \right]$$

Indices pour a : $\{1, 3\}$

Bloc T_a pour $\lambda = a$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cc}
 a & t_{13} \\
 0 & a
 \end{array} \right]$$

Pour extraire le bloc associé à b , on garde les lignes et colonnes où b apparaît sur la diagonale (positions 2 et 4).

Matrice T originale

$$\begin{bmatrix} \boxed{a} & \boxed{t_{12}} & \boxed{t_{13}} & \boxed{t_{14}} \\ \boxed{0} & \boxed{b} & \boxed{t_{23}} & \boxed{t_{24}} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{a} & \boxed{t_{34}} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{b} \end{bmatrix}$$

Indices pour b : $\{2, 4\}$

Bloc T_b pour $\lambda = b$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \boxed{b} & \boxed{t_{24}} \\ \boxed{0} & \boxed{b} \end{bmatrix}$$

Le Théorème dit que T est diagonalisable si et seulement si $t_{1,3} = t_{2,4} = 0$.

12.1. Cas général pour une matrice $n \times n$. Pour une matrice triangulaire T de taille $n \times n$ et une valeur propre λ :

- (1) Identifier les indices i tels que $T_{ii} = \lambda$
- (2) Soit $I = \{i_1, i_2, \dots, i_p\}$ l'ensemble de ces indices
- (3) La sous-matrice T_λ de taille $p \times p$ est définie par :

$$(T_\lambda)_{kl} = T_{i_k, i_l} \quad \text{pour } k, l = 1, 2, \dots, p$$

12.2. Exemple avec diagonale (a, b, a, b, a) - Matrice 5×5 .

$$\begin{bmatrix}
 \boxed{a} & \boxed{*} & \boxed{*} & \boxed{*} & \boxed{*} \\
 \boxed{0} & \boxed{b} & \boxed{*} & \boxed{*} & \boxed{*} \\
 \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{a} & \boxed{*} & \boxed{*} \\
 \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{b} & \boxed{*} \\
 \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{a}
 \end{bmatrix}
 \Rightarrow
 \begin{bmatrix}
 \boxed{a} & \boxed{*} & \boxed{*} \\
 \boxed{0} & \boxed{a} & \boxed{*} \\
 \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{a}
 \end{bmatrix}$$

Bloc T_a (taille 3×3)

Indices pour $a : \{1, 3, 5\}$

12.2.1. Extraction du bloc T_b .

$$\begin{bmatrix}
 \boxed{a} & \boxed{*} & \boxed{*} & \boxed{*} & \boxed{*} \\
 \boxed{0} & \boxed{b} & \boxed{*} & \boxed{*} & \boxed{*} \\
 \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{a} & \boxed{*} & \boxed{*} \\
 \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{b} & \boxed{*} \\
 \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{a}
 \end{bmatrix}
 \Rightarrow
 \begin{bmatrix}
 \boxed{b} & \boxed{*} \\
 \boxed{0} & \boxed{b}
 \end{bmatrix}$$

Bloc T_b (taille 2×2)

Indices pour $b : \{2, 4\}$

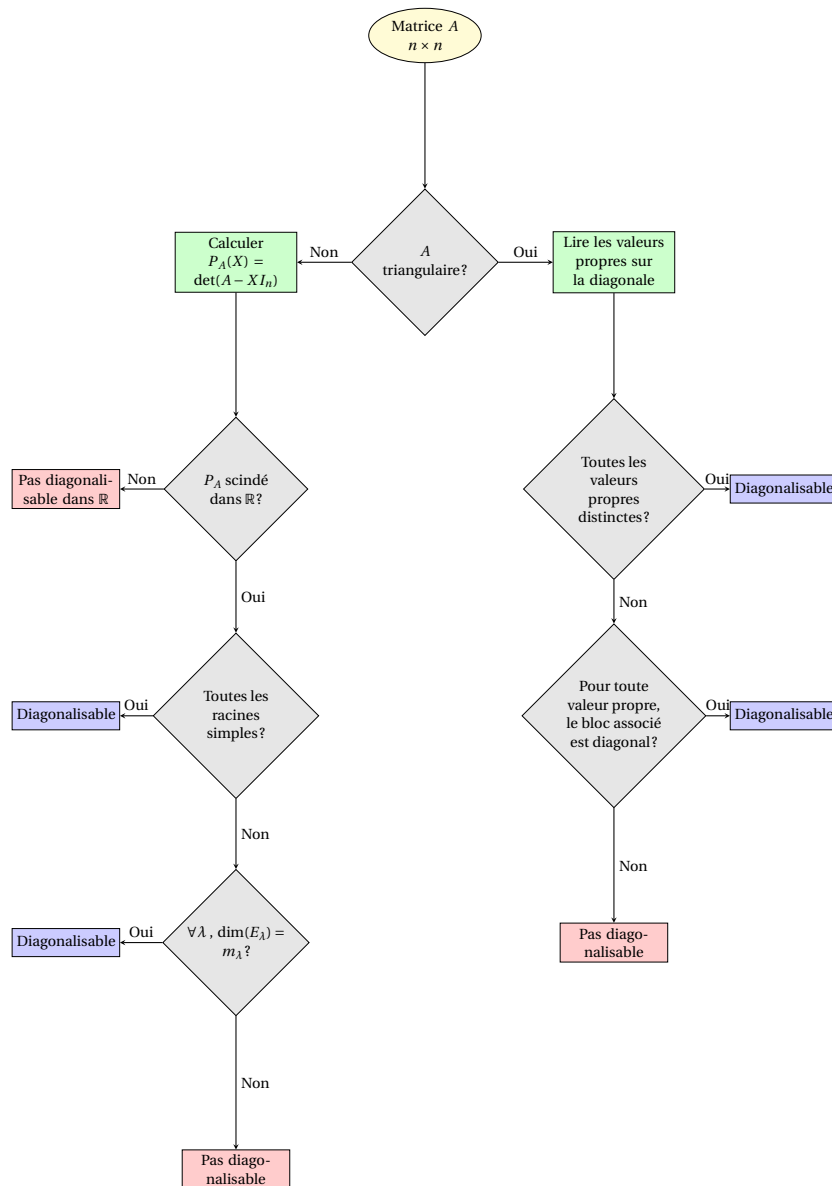
Pour démontrer le résultat sur une matrice 4×4 on remarque que le bloc associé à la valeur propre a correspond au bloc associé à la valeur propre 0 de $A - a\text{Id}$: on remplace λ par 0 dans le bloc. Il faut alors montrer que le noyau d'une matrice triangulaire supérieure ayant exactement p zéros sur la diagonale est égal à p si et seulement si le bloc correspondant est nul. Par le Théorème du rang cela revient à décider quand est-ce que le rang d'une telle matrice est $n - p$. Par le

$$\begin{bmatrix}
 \boxed{0} & \boxed{t_{12}} & \boxed{t_{13}} & \boxed{t_{14}} \\
 \boxed{0} & \boxed{b-a} & \boxed{t_{23}} & \boxed{t_{24}} \\
 \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{t_{34}} \\
 \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{b-a}
 \end{bmatrix}$$

On voit que par pivot sur les lignes, comme $b - a \neq 0$ on peut se ramener au cas $t_{1,2} = t_{1,4} = t_{3,4} = 0$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & t_{13} & 0 \\ 0 & b-a & t_{23} & t_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-a \end{bmatrix}$$

or il est clair que le rang d'une telle matrice est 2 si et seulement si $t_{1,3} = 0$, c'est-à-dire si le bloc de a est déjà diagonal. Donc $\dim(E_a) = m_a = 2$ si et seulement si le bloc de a est déjà diagonal. On a évidemment la même chose pour b . On peut donc remplacer l'arbre de décision par



13. Appendice 2 : Calculs pour l'élevage des lapins

Pour la matrice de l'élevage de lapins,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1,2 & 0 \\ 0,9 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,1 \end{pmatrix}$$

Calcul du polynôme caractéristique :

Il est défini par $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 1,2 & 0 \\ 0,9 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1,2 & 0 \\ 0,9 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,1 - \lambda \end{pmatrix}$$

Pour calculer le déterminant, développons selon la première ligne :

$$(3.3) \quad \det(A - \lambda I) = -\lambda \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0,8 & 0,1 - \lambda \end{pmatrix} - 1,2 \det \begin{pmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & 0,1 - \lambda \end{pmatrix} + 0$$

$$(3.4) \quad = -\lambda \cdot (-\lambda)(0,1 - \lambda) - 1,2 \cdot 0,9(0,1 - \lambda)$$

$$(3.5) \quad = \lambda^2(0,1 - \lambda) - 1,08(0,1 - \lambda)$$

$$(3.6) \quad = (0,1 - \lambda)(\lambda^2 - 1,08)$$

Donc le polynôme caractéristique est :

$$P_A(\lambda) = (0,1 - \lambda)(\lambda^2 - 1,08)$$

Calcul des valeurs propres :

Ce sont les racines du polynôme caractéristique :

$$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (0,1 - \lambda)(\lambda^2 - 1,08) = 0$$

Ceci donne :

$$— \lambda_1 = 0,1$$

$$— \lambda_2 = \sqrt{1,08} = \sqrt{\frac{108}{100}} = \frac{6\sqrt{3}}{5} \approx 1,039$$

$$— \lambda_3 = -\sqrt{1,08} = -\frac{6\sqrt{3}}{5} \approx -1,039$$

Les 3 valeurs propres sont distinctes, donc A est diagonalisable.

Calcul des vecteurs propres

Vecteur propre pour $\lambda_1 = 0,1$

Réolvons $(A - 0,1I)v = 0$:

$$\begin{pmatrix} -0,1 & 1,2 & 0 \\ 0,9 & -0,1 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ceci donne le système :

$$(3.7) \quad -0,1x + 1,2y = 0$$

$$(3.8) \quad 0,9x - 0,1y = 0$$

$$(3.9) \quad 0,8y = 0$$

De la troisième équation : $y = 0$. De la première équation : $-0,1x = 0 \Rightarrow x = 0$. La variable z est libre.

Donc un vecteur propre pour $\lambda_1 = 0,1$ est :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Cela signifie que si on part avec une population faite de k vieux, on aura $X_n = n(0,1)^n$ vieux au bout d'un temps n et ni jeunes ni adultes (ce qui ne nous surprend pas beaucoup!)

Vecteur propre pour $\lambda_2 = \sqrt{1,08} \simeq 1,039$:

Réolvons $(A - \sqrt{1,08}I)v = 0$:

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{1,08} & 1,2 & 0 \\ 0,9 & -\sqrt{1,08} & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,1 - \sqrt{1,08} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Des deux premières équations :

$$(3.10) \quad -\sqrt{1,08}x + 1,2y = 0 \Rightarrow x = \frac{1,2}{\sqrt{1,08}}y$$

$$(3.11) \quad 0,9x - \sqrt{1,08}y = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{1,08}}{0,9}y$$

On vérifie que $\frac{1,2}{\sqrt{1,08}} = \frac{\sqrt{1,08}}{0,9}$ car $1,2 \times 0,9 = 1,08$.

De la troisième équation :

$$0,8y + (0,1 - \sqrt{1,08})z = 0 \Rightarrow z = \frac{0,8y}{\sqrt{1,08} - 0,1}$$

Un vecteur propre pour λ_2 est (en prenant $y = 1$) :

$$v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1,2}{\sqrt{1,08}} \\ 1 \\ \frac{0,8}{\sqrt{1,08} - 0,1} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1,15 \\ 1 \\ 0,85 \end{pmatrix}$$

Vecteur propre pour $\lambda_3 = -\sqrt{1,08}$

Réolvons $(A - (-\sqrt{1,08})I)v = 0$, c'est-à-dire $(A + \sqrt{1,08}I)v = 0$:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{1,08} & 1,2 & 0 \\ 0,9 & \sqrt{1,08} & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,1 + \sqrt{1,08} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ceci donne le système :

$$(3.12) \quad \sqrt{1,08}x + 1,2y = 0 \quad (1)$$

$$(3.13) \quad 0,9x + \sqrt{1,08}y = 0 \quad (2)$$

$$(3.14) \quad 0,8y + (0,1 + \sqrt{1,08})z = 0 \quad (3)$$

De l'équation (1) : $x = -\frac{1,2}{\sqrt{1,08}}y$

Vérifions avec l'équation (2) : $0,9 \cdot \left(-\frac{1,2}{\sqrt{1,08}}y\right) + \sqrt{1,08}y = -\frac{1,08}{\sqrt{1,08}}y + \sqrt{1,08}y = -\sqrt{1,08}y + \sqrt{1,08}y = 0 \quad \checkmark$

De l'équation (3) : $z = -\frac{0,8y}{0,1 + \sqrt{1,08}}$

Simplifions x : $x = -\frac{1,2}{\sqrt{1,08}} = -\frac{1,2}{\sqrt{108/100}} = -\frac{12}{\sqrt{108}} = -\frac{12}{6\sqrt{3}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Un vecteur propre pour λ_3 est (en prenant $y = 1$) : $v_3 = \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ 1 \\ -\frac{0,8}{0,1 + \sqrt{1,08}} \end{pmatrix}$

Ou sous forme décimale approximative : $v_3 \approx \begin{pmatrix} -1,155 \\ 1 \\ -0,702 \end{pmatrix}$

DÉMONSTRATION. La matrice A possède trois valeurs propres distinctes :

— $\lambda_1 = 0,1$

— $\lambda_2 = \sqrt{1,08} = \frac{6\sqrt{3}}{5}$

— $\lambda_3 = -\sqrt{1,08} = -\frac{6\sqrt{3}}{5}$

□

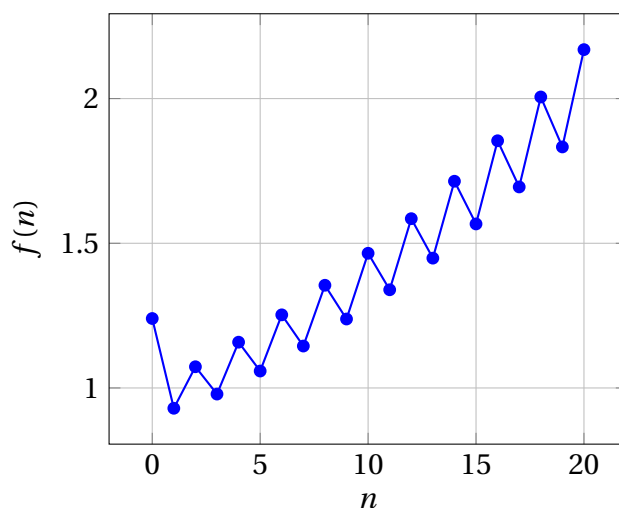
La forme diagonale de A sera :

$$D = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1,08} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{1,08} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6\sqrt{3}}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6\sqrt{3}}{5} \end{pmatrix}$$

Et il existe une matrice inversible P telle que $A = PDP^{-1}$, où les colonnes de P sont les vecteurs propres de A .

Si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est la population initiale écrite dans la base (v_1, v_2, v_3) soit $p = xv_1 + yv_2 + zv_3$ la population au temps n sera $x \cdot (0,1)^n + y \cdot (1,04)^n + z \cdot (-1,04)^n$. Si on part d'une population ayant le même nombre de jeunes d'adultes et de vieux, on aura $x \simeq 0,25$, $y = 0,93$, $z \simeq 0,06$. On a tracé sur la figure suivante l'évolution de la population totale sur 30 ans. Le terme $(1,04)^n$ est responsable de la croissance exponentielle de la suite, le terme $(-1,04)^n$ de l'oscillation.

$$f(n) = 0,25 \cdot (0,1)^n + 0,93 \cdot (1,04)^n + 0,06 \cdot (-1,04)^n$$



14. Exercices

Soit la transformation linéaire $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par sa matrice dans la base canonique :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 9 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- Calculer son polynôme caractéristique.
- En déduire les valeurs propres de M et déterminer si M est diagonalisable.
- En déduire sans calculs que $M^3 = \text{Id}_3$

Formes quadratiques

1. Introduction, généralités

On appelle forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ toute expression de la forme

$$Q(x) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} x_i x_j$$

EXEMPLE 4.1. 1) Sur $\mathbb{R}^2$: $Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$

Rque. On écrit plutôt $ax^2 + 2bxy + cy^2$

En particulier si A est une matrice $n \times n$ symétrique, i.e telle que ${}^t A = A$,

$$Q(x) = \langle Ax, x \rangle$$

est une forme quadratique. Par exemple si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

$$Q(x) = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

EXEMPLE 4.2. Soit I la matrice d'inertie d'un solide par rapport à un point O

$$I = \begin{pmatrix} \int (y^2 + z^2) dm & -\int xy dm & -\int xz dm \\ -\int xy dm & \int (x^2 + z^2) dm & -\int yz dm \\ -\int xz dm & -\int yz dm & \int (x^2 + y^2) dm \end{pmatrix}$$

I est symétrique.

Si ω est le vecteur de rotation du solide, son moment cinétique est $I \cdot \omega$ et son énergie cinétique $E = \frac{1}{2} \langle I\omega, \omega \rangle$: c'est une forme quadratique en ω .

Dans une base appropriée (les axes principaux d'inertie) I est diagonale et E s'écrit alors

$$I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2$$

La forme $\frac{1}{2} \langle I\omega, \omega \rangle$ définit l'ellipsoïde d'inertie du solide : le solide se comporte comme un ellipsoïde homogène, dont les axes sont de longueur I_1, I_2, I_3 .

PROPOSITION 4.3. *Toute forme quadratique s'écrit de manière unique sous la forme $Q(x) = \langle Ax, x \rangle$ pour une matrice symétrique A .*

DÉMONSTRATION. Si $Q(x) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} x_i x_j$ on pose $a_{ii} = q_{ii}$, $a_{i,j} = a_{j,i} \frac{1}{2} q_{ij}$ si $1 \leq i < j \leq n$ $\square$

EXEMPLE 4.4. 1) $Q(x, y, z) = xy + yz + zx$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

2) $Q(x, y, z) = x^2 + xy + 2z^2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Diagonalisation des matrices symétriques

Commençons par rappeler qu'une matrice symétrique a la propriété suivante :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad \langle Ax, y \rangle = \langle Ay, x \rangle.$$

DÉFINITION 4.5. Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. On note $V^\perp$ l'orthogonal de V dans $\mathbb{R}^n$, i.e $V^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n, \forall y \in V \quad \langle x, y \rangle = 0\}$

PROPOSITION 4.6. On a $V \oplus V^\perp = \mathbb{R}^n$

DÉMONSTRATION. Il suffit de vérifier que $V \cap V^\perp = \{0\}$ et que $\dim(V) + \dim(V^\perp) \geq n$.

- $V \cap V^\perp = \{0\}$ car si $x \in V \cap V^\perp$ on a $\langle x, x \rangle = 0$ soit $\|x\|^2 = 0$ donc $x = 0$
- si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de V , $V^\perp$ est donné par p équations $\langle e_i, x \rangle = 0$ donc est le noyau d'une application

$$f_e : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

$$x \longmapsto (\langle e_1, x \rangle, \dots, \langle e_p, x \rangle)$$

Donc $\dim(V^\perp) = \dim \text{Ker}(f_e) = \dim \mathbb{R}^n - \dim \text{Im}(f_e) \geq n - p$

Finalement $V + V^\perp = V \oplus V^\perp$ et

$$\dim(V \oplus V^\perp) = \dim(V) + \dim(V^\perp) \geq p + n - p = n.$$

Or $V \oplus V^\perp \subset \mathbb{R}^n$, donc $V \oplus V^\perp = \mathbb{R}^n$. □

PROPOSITION 4.7. Soit $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que ${}^t A = A$. Alors

- (1) toutes les valeurs propres de A sont réelles
- (2) Si x est un vecteur propre de A , alors $(\mathbb{R}x)^\perp$ est invariant par A i.e $A((\mathbb{R}x)^\perp) \subset (\mathbb{R}x)^\perp$

DÉMONSTRATION. (1) Si $Ax = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, on a $A\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x}$ où $\bar{x}$ est le vecteur dont les coordonnées sont les conjugués complexes des coordonnées de x . On a alors

$$\langle Ax, \bar{x} \rangle = \langle \lambda x, \bar{x} \rangle = \lambda \langle x, \bar{x} \rangle = \lambda \left(\sum |x_j|^2 \right)$$

$$\langle x, A\bar{x} \rangle = \langle x, \bar{\lambda}\bar{x} \rangle = \bar{\lambda} \langle x, \bar{x} \rangle = \bar{\lambda} \left(\sum |x_j|^2 \right)$$

d'où $\lambda = \bar{\lambda}$.

(2) Soit $y \in (\mathbb{R}x)^\perp$ donc on a $\langle x, y \rangle = 0$. Comme $Ax = \lambda x$ on a aussi $\langle Ax, y \rangle = 0$ soit $\langle x, Ay \rangle = 0$. Donc $Ay \in (\mathbb{R}x)^\perp$. $\square$

THÉORÈME 4.8. Soit $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ t.q. ${}^t A = A$. Il existe alors une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$, i.e. telle que $\langle e_i, e_j \rangle = 0 \forall i \neq j$, dans laquelle A est diagonale.

DÉMONSTRATION. On raisonne alors par récurrence. La proposition est évidente si $n = 1$.

Supposons la vraie pour les matrices $(n-1) \times (n-1)$ et montrons là pour les matrices $n \times n$.

Soit λ une valeur propre quelconque de A . Par la proposition précédente $\lambda \in \mathbb{R}$ et choisissons donc $e_1 \in E_\lambda$ que l'on peut supposer de norme 1. Alors $A^\perp(\mathbb{R}e_1)^\perp \subset (\mathbb{R}e_1)^\perp$ donc si on prend $(e_1, f_2, \dots, f_n)$ où f_i est base orthonormale de $(\mathbb{R}e_1)^\perp$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

et ${}^t A_1 = A_1$ qui est dans $M_{n-1,n-1}(\mathbb{R})$. Par hypothèse de récurrence A_1 est diagonalisable, et si $(f'_2, \dots, f'_n)$ est une base de $(\mathbb{R}e_1)^\perp$ où A_1 est diagonale, dans la base $(e_1, f'_2, \dots, f'_n)$ A sera diagonale. $\square$

On va voir que ce qui est important c'est le signe des valeurs propres :

- on appelle rang de Q et on note $\text{rang}(Q)$ le nombre de valeurs propres non nulles
- on appelle signature le couple (p, q) où p est le nombre de valeurs propres strictement positives et q le nombre de valeurs propres < 0 . On a bien entendu $p + q = \text{rang}(Q)$

DÉFINITION 4.9. Si la signature de Q est $(n, 0)$ (resp $(0, n)$) on dit que Q est définie positive (resp. définie négative)

PROPOSITION 4.10. *La forme Q est définie positive si et seulement si $Q(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. La forme Q est définie négative si et seulement si $Q(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.*

DÉMONSTRATION. Il est clair que dans une base où la matrice de Q est diagonale, on a $Q(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2$. Q est définie positive si les a_i sont tous strictement positifs $Q(x_1, \dots, x_n) > 0$ si $x \neq 0$. Inversement supposons un $a_i \leq 0$ alors $Q(e_i) = Q(0, \dots, 1, 0, \dots, 0) = a_i \leq 0$. Le même raisonnement vaut pour le cas négatif. $\square$

DÉFINITION 4.11. Soit $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. On appelle mineurs principaux de A les mineurs obtenus en supprimant les $(n - k)$ dernières lignes et colonnes de A . On notera $\Delta_k(A)$ le mineur principal associé à la sous-matrice de taille k .

EXEMPLE 4.12.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

et ses mineurs principaux sont

$$\Delta_1(A) = |1| = 1, \quad \Delta_2(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_3(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

PROPOSITION 4.13 (Critère de Sylvester). *Soit A symétrique dans $M_{n,n}(\mathbb{R})$ et $Q(x) = \langle Ax, x \rangle$*

- *Q est définie positive si et seulement si tous les mineurs principaux de A sont > 0 .*
- *Q est définie négative si et seulement si $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \dots$*

DÉMONSTRATION. On traite le cas positif, le cas négatif étant semblable. Posons $V_p = \langle e_1, \dots, e_p \rangle$ où $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique.

$\Rightarrow$ Si Q est définie positive, ses valeurs propres la matrice associée se diagonalise avec des valeurs propres strictement positives. Donc $\det(A) > 0$. Or $Q > 0$ entraîne que la restriction de Q à V_p , $Q|_{V_p} > 0$ donc $\Delta_p > 0$.

$\Leftarrow$ On va montrer par récurrence que $\Delta_1, \dots, \Delta_p > 0 \Rightarrow Q|_{V_p} > 0$

On suppose que c'est vrai pour $p - 1$, et on veut le montrer pour p .

Par hypothèse $\Delta_1, \dots, \Delta_{p-1} > 0$ donc $Q|_{V_{p-1}} > 0$. Supposons que $Q|_{V_p}$ ne soit pas > 0 . La forme Q s'écrit dans une nouvelle base $(v_1, \dots, v_p)$ sous la forme $a_1 x_1^2 + \dots + a_p x_p^2$.

Quitte à réordonner, on peut supposer $a_1, \dots, a_i > 0, a_{i+1}, \dots, a_p < 0$. On doit avoir $i \geq p - 2$ car sinon $V_{p-1} \cap \langle v_{p-1}, v_p \rangle \neq \{0\}$ (par la formule de Grassmann) et il existe $x \in V_{p-1}$ tel que $Q(x) < 0$, contradiction. Si $a_1, \dots, a_{p-1} > 0$ et $a_p < 0$, $\det(A) = a_1 \dots a_p < 0$ ce qu'on a vu être impossible. Donc $a_p > 0$ et $Q > 0$.

Le cas $Q < 0$ se démontre de la même manière. $\square$

EXEMPLE 4.14. (1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = 1, \Delta_2 = 1, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$ A est donc définie positive.

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 9 \\ 5 & 9 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = 1, \Delta_2 = -2, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 9 \\ 5 & 9 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -6 \\ 5 & -6 & -14 \end{vmatrix} = 28 - 36 = -8$$

A n'est ni définie positive ni définie négative.

(3)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 2 & -7 & 9 \\ 5 & 9 & -81 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = -1, \Delta_2 = 3, \Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 19 \\ 5 & 14 & -56 \end{vmatrix} = -(5 \cdot 56 - 19 \cdot 14) = -14 < 0.$$

et A est < 0 .

3. Applications géométriques

3.1. Coniques dans le plan de rang maximal. On appelle conique de $\mathbb{R}^2$ un ensemble défini par une équation $Q(x, y) + \lambda x + \mu y = 1$. Lorsque Q est de rang 2, on peut se ramener à $Q(x, y, z) = 1$: en effet choisissons une base où $Q(x, y) = ax^2 + by^2$, on peut écrire

$$x^2 + y^2 + \lambda x + \mu y = \left(x + \frac{\lambda}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\mu}{2}\right)^2 - \frac{\lambda^2 + \mu^2}{4} = 1$$

et donc se ramener au cas $\lambda = \mu = 0$. Ce sont ces ensembles que l'on va étudier. Le seul cas qui nous échappera est celui de la parabole, donné par $y = x^2 + ax + b$, car Q est de rang 1 et la partie linéaire ne peut plus être "absorbée" dans la partie quadratique.

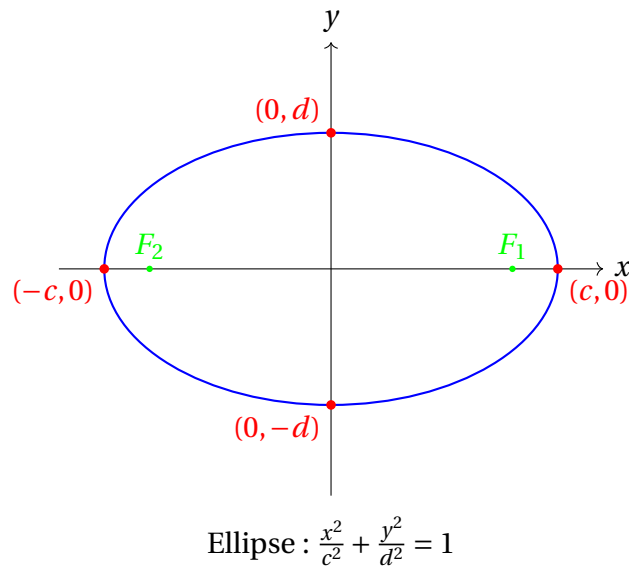
D'après le Théorème 4.8 on peut écrire Q sous la forme $ax^2 + by^2$

À dilatation des axes près i.e $\alpha \rightarrow \alpha x, \beta \rightarrow \beta y$ on peut remplacer a par $a\alpha^2$, b par $b\beta^2$, donc de ramener a, b dans $\{\pm 1\}$.

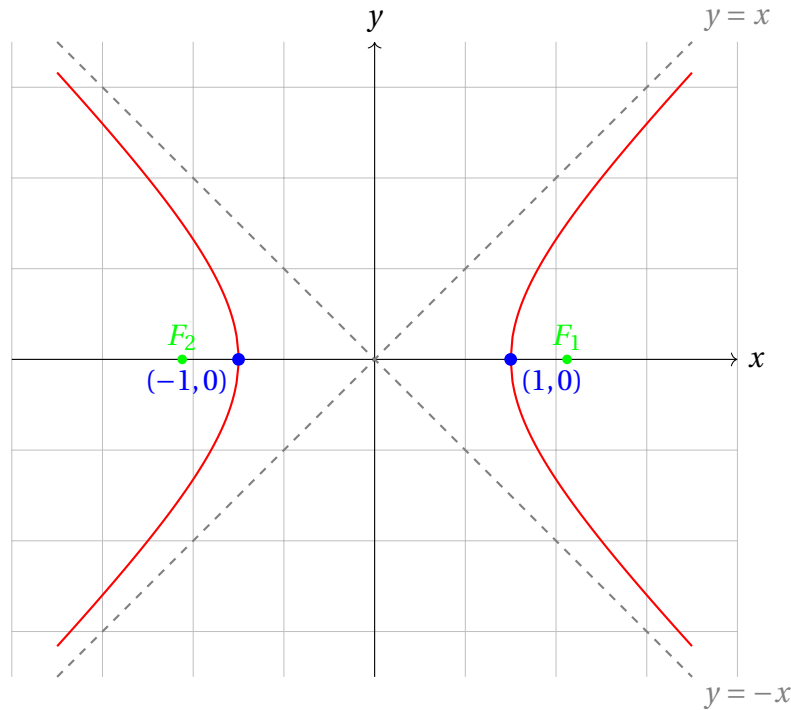
— $(a, b > 0)$ on a une ellipse

— $a > 0, b < 0$: Hyperbole $x^2 - y^2 = 1$

3.2. Ellipse. Équation canonique : $\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{d^2} = 1$ avec $c > d > 0$



3.3. Hyperbole. équation canonique : $\frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{d^2} = 1$ avec $c, d > 0$

Hyperbole équilatère : $x^2 - y^2 = 1$

3.4. Quadriques de rang maximal dans l'espace. On appelle quadrique de $\mathbb{R}^3$ un ensemble défini par une équation

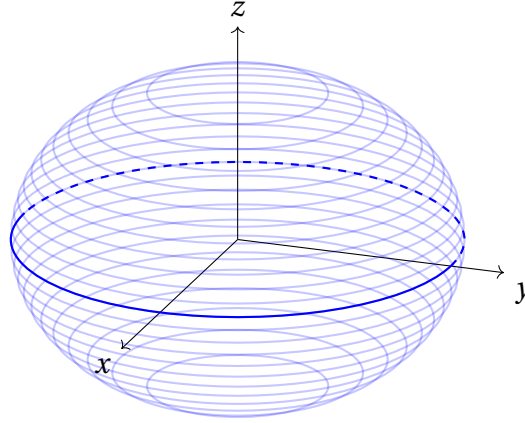
$$Q(x, y, z) + \lambda x + \mu y + \nu z = 1$$

où Q est une forme quadratique. Comme dans le cas des coniques, si Q est de rang 3 on peut par translation se ramener au cas $\lambda = \mu = \nu = 0$. On obtient alors les quadriques de rang maximal. Les quadriques $z = x^2 + y^2$ (paraboloïde elliptique) et $z = x^2 - y^2$ paraboloides hyperboliques sont omises. On suppose dorénavant Q de rang 3. D'après le Théorème on peut écrire Q sous la forme $ax^2 + by^2 + cz^2$

À dilatation des axes près i.e $\alpha \rightarrow \alpha x$, $\beta \rightarrow \beta y$, $\gamma \rightarrow \gamma z$ on peut remplacer a par $a\alpha^2$, b par $b\beta^2$, c par $c\gamma^2$, donc de ramener a, b, c dans $\{\pm 1\}$.

- $(a, b, c > 0)$ on a un ellipsoïde
- $a, b > 0, c < 0$: Hyperboloïde à une nappe $x^2 + y^2 = z^2 + 1$
- $a > 0, b, c < 0$: Hyperboloïde à deux nappes $x^2 - 1 = y^2 + z^2$

3.5. Ellipsoïde. Équation canonique : $\frac{x^2}{d^2} + \frac{y^2}{e^2} + \frac{z^2}{f^2} = 1$ avec $d \geq e \geq f > 0$



Ellipsoïde : $\frac{x^2}{d^2} + \frac{y^2}{e^2} + \frac{z^2}{f^2} = 1$

Sections de l'ellipsoïde :

- Plan $z = k$ (avec $|k| < c$) : ellipse $\frac{x^2}{d^2(1-k^2/f^2)} + \frac{y^2}{e^2(1-k^2/f^2)} = 1$
- Plans principaux : ellipses dans les plans xy , xz , yz

3.6. Hyperboloïde à une nappe. Équation canonique : $\frac{x^2}{d^2} + \frac{y^2}{e^2} - \frac{z^2}{f^2} = 1$ avec $d, e, f > 0$

Sections de l'hyperboloïde à une nappe :

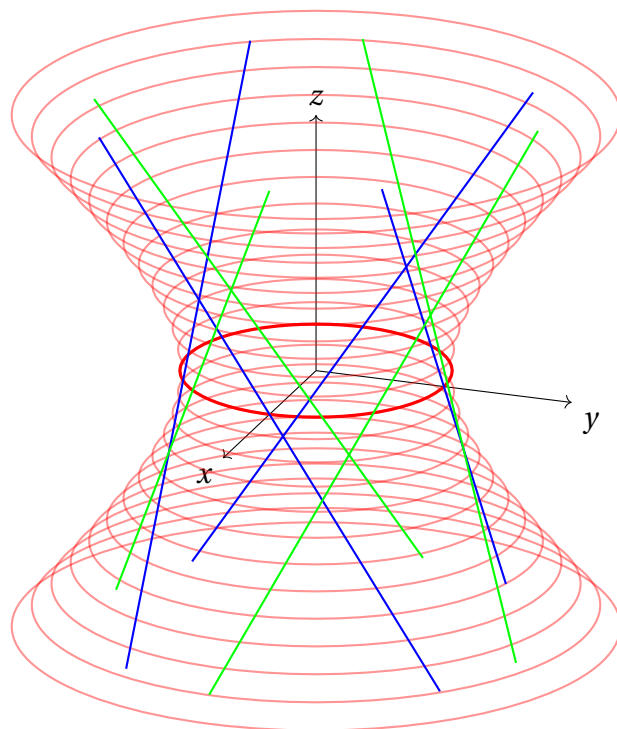
- Plan $z = k$: cercle ou ellipse $\frac{x^2}{d^2} + \frac{y^2}{e^2} = 1 + \frac{k^2}{f^2}$
- Plans contenant l'axe z : hyperboles

La surface contient deux familles de droites, l'une en vert l'autre en bleu. Leurs équations sont

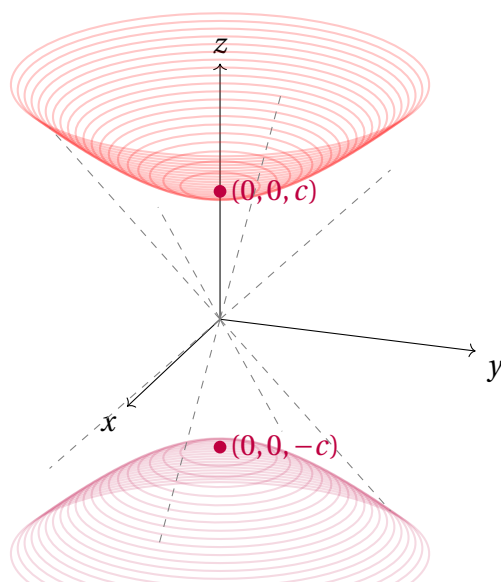
$$t \mapsto \begin{pmatrix} d \cos(\theta) + t e \sin(\theta) \\ e \sin(\theta) - t d \cos(\theta) \\ \pm f t \end{pmatrix}$$

Il est alors facile de construire ces surfaces en utilisant ces droites, ce qui explique leur présence dans de nombreuses structures architecturales, en métal ou en béton précontraint, les droites correspondant aux câbles, fers à béton ou aux poutres.

3.7. Hyperboloïde à deux nappes. équation canonique : $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a, b, c > 0$



Hyperboloïde à une nappe : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$



Hyperboloïde à deux nappes : $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

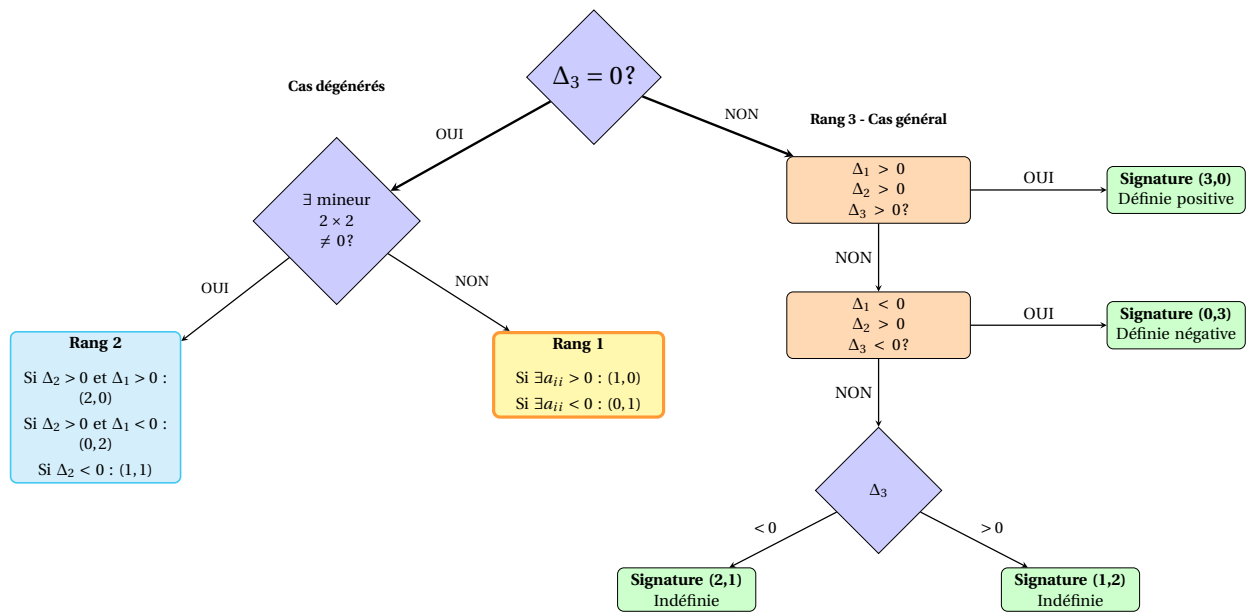
FIGURE 4.2 – Hyperboloïde à deux nappes



FIGURE 4.1 – Deux hyperboloïdes à une nappe : la tour du port de Kobe au Japon et le Château d’eau des Essarts-Le-Roi

4. Classification par signature

Quadrique	équation	Signature	Type
Ellipsoïde	$\frac{x^2}{d^2} + \frac{y^2}{e^2} + \frac{z^2}{f^2} = 1$	(3, 0)	Définie positive
Hyperboloïde à une nappe	$\frac{x^2}{d^2} + \frac{y^2}{e^2} - \frac{z^2}{f^2} = 1$	(2, 1)	Indéfinie
Hyperboloïde à deux nappes	$\frac{z^2}{d^2} - \frac{x^2}{e^2} - \frac{y^2}{f^2} = 1$	(1, 2)	Indéfinie

5. Trouver la signature d'une forme quadratique à trois variables

6. Appendice : Les paraboloides

Ce sont les deux surfaces suivantes

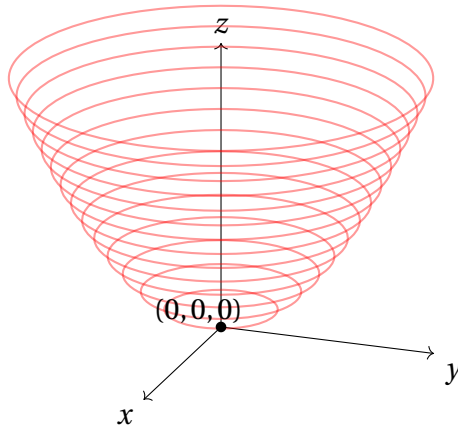


FIGURE 4.3 – Paraboloïde elliptique : $z = ax^2 + by^2, a, b > 0$

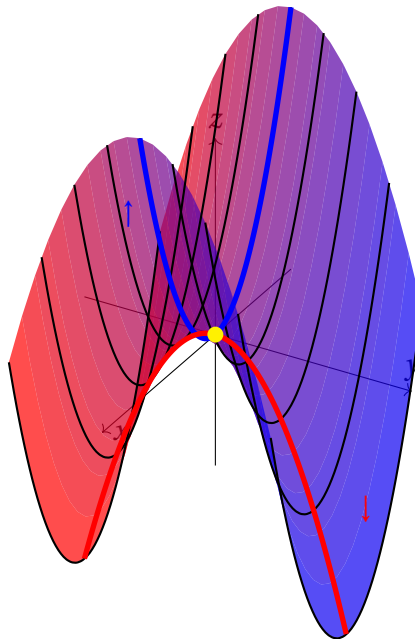


FIGURE 4.4 – Paraboloïde hyperbolique $z = ax^2 - by^2, a, b > 0$

7. Appendice : Critère de Sylvester généralisé (Cet Appendice est hors programme)

DÉFINITION 4.15. Soit Q une forme quadratique sur $E = \mathbb{R}^n$. On pose $L : E \rightarrow E$ l'unique application linéaire telle que pour $y, z \in E$ on ait

$$\langle Lu, v \rangle = Q(y + z) - Q(y) - Q(z)$$

Il faut montrer que pour z fixé, l'application $y \mapsto Q(y + z) - Q(y) - Q(z)$ est linéaire. Or $Q(x)$ est une somme de $x_i x_j$ et donc $Q(y + z) - Q(y) - Q(z)$ est une somme de $(y_i + z_i)(y_j + z_j) - y_i y_j - z_i z_j = y_i z_j + y_j z_i = \langle L(i, j)y, z \rangle$ où $L(i, j)$ échange les coordonnées i et j de u , et annule les autres, soit $L(i, j)e_i = e_j$, $L(i, j)e_j = e_i$ et $L(i, j)e_k = 0$ pour $k \notin \{i, j\}$. Donc si $Q(x) = \sum_{i \leq j} q_{i,j} x_i x_j$, on aura $L = \sum_{i \leq j} q_{i,j} L(i, j)$. L'application linéaire L est évidemment symétrique.

Soit A la matrice de la forme quadratique Q dans la base $(v_1, \dots, v_n)$. Cela signifie que

si on pose $x = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on a $Q(x) = \langle AX, X \rangle$. Prenant $X = E_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

où l'unique 1 est sur la i -ème ligne, on a $Q(v_i, v_i) = \langle AE_i, E_i \rangle = a_{i,i}$ and $Q(v_i + v_j) = \langle A(E_i + E_j), E_i + E_j \rangle = \langle AE_i, E_i \rangle + \langle AE_i, E_j \rangle + \langle AE_j, E_i \rangle + \langle AE_j, E_j \rangle$ et comme $\langle AE_i, E_j \rangle = \langle AE_j, E_i \rangle$ car A est symétrique, on obtient

$$a_{i,j} = \langle AE_i, E_j \rangle = \frac{Q(v_i + v_j) - Q(v_i) - Q(v_j)}{2} \stackrel{\text{def}}{=} L(v_i, v_j)$$

Vu que $L(v_i, v_i) = Q(v_i, v_i)$ on voit qu'en fait $A = (L(v_i, v_j))_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq n}}$. Si V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, on note $V^Q = \{x \mid \langle Ax, y \rangle = 0\}$. On a alors que si $x \in V \cap V^Q$ alors $\langle Ax, y \rangle = 0$ pour tout $y \in V$, et donc dans une base $(v_1, \dots, v_n)$ telle que $(v_1, \dots, v_p)$ soit une base de V , A s'écrit

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & a_{1,p+1} & a_{1,p+2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,p+1} & a_{2,p+2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{p,2} & \dots & a_{p,p+1} & a_{p,p+2} & \dots & a_{p,n} \\ a_{p+1,1} & a_{p+1,2} & \dots & a_{p+1,p+1} & a_{p+1,p+2} & \dots & a_{p+1,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p+1} & a_{n,p+2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

et donc les p premiers mineurs principaux de A sont nuls.

LEMMA 4.16. Soit Q une forme quadratique de rang n . Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une base de E telle que tous les mineurs principaux de A soient non-nuls. Alors il existe une matrice triangulaire supérieure R , telle que ${}^tRAR = D$ soit diagonale. En d'autres termes dans la base $w_i = Rv_i$ la forme quadratique Q s'écrit $\sum_{j=1}^n a_j x_j^2$ avec p des a_i strictement positifs et q strictement négatifs.

DÉMONSTRATION. C'est le processus de Schmidt. Comme par hypothèse et le Lemme 4.19, $V_k \oplus V_k^Q = E$, on va raisonner par récurrence sur k :

- Pour $k = 1$ on prend $w_1 = v_1$. Alors $Q(v_1) \neq 0$ par hypothèse, et Q_{V_1} est bien diagonale dans la base (w_1) !
- Supposons trouvée la base $V_k = (w_1, \dots, w_k)$ de V_k dans laquelle Q soit diagonale. Comme $\Delta_k(A) \neq 0$ on a $V_k \oplus V_k^Q = E$. On a donc $V_{k+1} \cap V_k^Q \neq \{0\}$ puisque $\dim(V_{k+1} \cap V_k^Q) = \dim(V_{k+1}) + \dim(V_k^Q) - \dim(V_{k+1} + V_k^Q) = (k+1) + (n-k) - n = 1$. On choisit alors $w_{k+1} \in V_{k+1} \cap V_k^Q$ non-nul. Comme $w_{k+1} \notin V_k$, $(w_1, \dots, w_{k+1})$ forme une base de V_{k+1} . Ensuite $\langle Lx, w_{k+1} \rangle = 0$ pour tout x dans V_k car $w_{k+1} \in V_k^Q$. Donc $Q(x + aw_{k+1}) = Q(x) + a^2 Q(w_{k+1}) - \langle Lx, aw_{k+1} \rangle = Q(x) + a^2 Q(w_{k+1})$. Or Q est diagonale dans la base $(w_1, \dots, w_k)$ c'est-à-dire $Q(u_1 w_1 + \dots + u_k w_k) = \sum_{j=1}^k a_j u_j^2$. On en déduit $Q(u_1 w_1 + \dots + u_k w_k + u_{k+1} w_{k+1}) = \sum_{j=1}^k a_j u_j^2 + a_{k+1} u_{k+1}^2$ où $a_{k+1} = Q(w_{k+1})$. En conclusion Q est diagonale dans la base $(w_1, \dots, w_{k+1})$. Enfin, comme w_{k+1} est dans V_{k+1} , l'application qui envoie les v_j sur w_j dans V_{k+1} est bien triangulaire supérieure.

□

LEMMA 4.17. Si A est la matrice de Q dans la base $(v_1, \dots, v_n)$ et B celle dans la base $(w_1, \dots, w_n)$ et si la matrice donnée par $Rv_i = w_i$ est triangulaire supérieure, alors il existe des constantes c_i telle que $\Delta_k(A) = c_k^2 \Delta_k(B)$.

DÉMONSTRATION. L'hypothèse sur R signifie que

$$w_1 = Rv_1 = r_{1,1} v_1, w_2 = Rv_2 = r_{1,2} w_1 + r_{2,2} v_2, w_3 = r_{1,3} v_1 + r_{2,3} v_2 + r_{3,3} v_3$$

où

$$R = \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} & \dots & r_{1,n} \\ 0 & r_{2,2} & \dots & \dots & r_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & r_{n,n} \end{pmatrix}$$

On en déduit que $\langle v_1, \dots, v_k \rangle = \langle w_1, \dots, w_k \rangle$ et donc que $Q_{V_k} = Q_{W_k}$ et donc $\langle ARx, Rx \rangle = \langle Bx, x \rangle$ sur $V_k = W_k$ et donc ${}^tRAR = B$ d'où $\det(A) \det(R)^2 = \det(B)$ (on utilise que $\det({}^tA) = \det(A)$). □

PROPOSITION 4.18 (Théorème de Sylvester). *On suppose que les mineurs principaux sont tous non-nuls et on considère la suite $(\Delta_0 = 1, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n)$. On appelle p (resp. q) le nombre d'éléments j dans $\{1, \dots, n\}$ tels que $\Delta_j \cdot \Delta_{j-1}$ soit strictement positif (resp. strictement négatif). Alors la forme Q est de signature (p, q) .*

DÉMONSTRATION. En effet, on utilise le

LEMMA 4.19. *Si $\Delta_i \neq 0$, et $V_i = \langle e_1, \dots, e_i \rangle$, alors $V_i \cap V_i^Q = \{0\}$ et $V_i \oplus V_i^Q = \mathbb{R}^n$.*

DÉMONSTRATION. En effet par définition $V^Q = (AV)^\perp$, et comme A est inversible, $\dim(AV) = \dim(V)$, donc $\dim(V^Q) = \dim((AV)^\perp) = n - \dim(V)$. En conclusion $\dim(V^Q) + \dim(V) = n$ et comme $V \cap V^Q = \{0\}$ on en déduit d'après la Proposition 1.39 que $V \oplus V^Q = \mathbb{R}^n$. $\square$

On raisonne alors par récurrence sur la dimension de V . Si $n = 1$ le Théorème est évident. Supposons le Théorème vrai pour les espaces de dimension $n - 1$ et montrons le pour la dimension n . Prenons une base comme celle fournie par le Lemme 4.16. D'après le Lemme 4.17 les mineurs de Q dans la nouvelle base sont égaux à un coefficient strictement positif près, à ceux de l'ancienne base. Maintenant dans la nouvelle base Q s'écrit $a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2$, $V_{n-1} = W_{n-1}$ est donné par $x_n = 0$. Par hypothèse de récurrence si p' est le nombre de j tels que $1 \leq j \leq n - 1$ et $\Delta_{j-1} \Delta_j > 0$, et q' le nombre de j tels que $1 \leq j \leq n - 1$ et $\Delta_{j-1} \Delta_j < 0$, la restriction de Q à $V_{n-1} = W_{n-1}$ est de signature (p', q') .

La matrice de Q est diagonale dans la nouvelle base, donc $Q(w_n) = \Delta'_n / \Delta'_{n-1}$ (les Δ_j sont les mineurs dans la nouvelle base). Mais le signe de $\Delta'_n / \Delta'_{n-1}$ est égal au signe de Δ_n / Δ_{n-1} qui est aussi celui de $\Delta_n \Delta_{n-1}$. Donc si $\Delta_n \Delta_{n-1} > 0$, $a_n > 0$ donc $p = p' + 1$, $q = q'$ et si $\Delta_n \Delta_{n-1} < 0$, $a_n < 0$, donc $p = p'$ et $q = q' + 1$. On a donc bien que p est le nombre de j tels que $\Delta_j \Delta_{j-1} > 0$ et q le nombre de j tels que $\Delta_j \Delta_{j-1} < 0$. $\square$

EXEMPLE 4.20. Quelle est la forme quadratique de matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

On a $\Delta_1 = 2, \Delta_2 = -7, \Delta_3 = 10, \Delta_4 = 42$ donc la signature est $(2, 2)$.

REMARQUE 4.21. En pratique la méthode de Gauss est plus efficace. Il s'agit d'écrire $Q(x_1, \dots, x_n)$ comme $(a_1 x_1 + \dots + a_n x_n)^2 + R(x_2, \dots, x_n)$ et de recommencer avec x_n . C'est exactement ce que fait le Lemme 4.16! La méthode est légèrement plus compliquée lorsqu'il n'y a pas de terme carré (cas où un mineur principal est nul)

EXEMPLE 4.22.

$$\begin{aligned}
 Q(x_1, x_2, x_3, x_4) &= 2x^2 + 6xy + y^2 + 2xz - z^2 + 4yz + 3t^2 + 2tz + 2ty = \\
 2(x + 3y + z)^2 - 18y^2 - 2z^2 - 12yz + y^2 + z^2 + 4yz + 3t^2 + 2tz + 2ty &= \\
 2(x + 3y + z)^2 - 17y^2 - z^2 - 8yz + 3t^2 + 2tz + 2ty &= \\
 2(x + 3y + z)^2 - (z + 4y + t)^2 + 16y^2 + t^2 + 8ty - 17y^2 + 3t^2 + 2ty &= \\
 2(x + 3y + z)^2 - (z + 4y + t)^2 - y^2 + 4t^2 + 2ty &= \\
 2(x + 3y + z)^2 - (z + 4y + t)^2 - (y + 2t)^2 + 4t^2 + 4t^2 &= \\
 2(x + 3y + z)^2 - (z + 4y + t)^2 - y^2 + 4t^2 + 2ty &= \\
 2(x + 3y + z)^2 - (z + 4y + t)^2 - (y + 2t)^2 + 8t^2 &
 \end{aligned}$$

et on vérifie que la signature est $(2, 2)$.

Par contre si $Q(x, y) = xy$ il faut utiliser $Q(x, y) = \frac{1}{4}[(x + y)^2 - (x - y)^2]$

Fonctions de plusieurs variables

1. Fonctions continues, dérivées partielles

Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on note $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$ et pour $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$d(x, y) = \|x - y\| = \left[\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2}$$

On définit $B_r(x_0)$ comme la boule ouverte de rayon r et de centre x_0 :

$$B_r(x_0) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x_0, y) < r\}$$

DÉFINITION 5.1. Un ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert si chaque point x de Ω est tel que pour r assez petit, $B_r(x) \subset \Omega$.

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction

DÉFINITION 5.2. On dit que f est continue en $x_0 \in A$ si $\lim_{x \rightarrow x_0} f = f(x_0)$. En d'autres termes

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tel que } \|x - x_0\| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

En général on n'utilise pas la définition, mais les propriétés suivantes

- (1) Les fonctions polynomiales : $(x_1, \dots, x_n) \longmapsto \sum a_{i_1 \dots i_k} x_1^{i_1} \dots x_k^{i_k}$ sont continues sur $\mathbb{R}^n$.
- (2) Les fonctions sin, cos, exp sont continues.
- (3) Si f, g sont continues en x_0 , $f \cdot g, f + g$ sont continues.
- (4) Si f est continue en x_0 et g continue en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est continue en x_0 .
- (5) Si f ne s'annule pas sur Ω et est continue, alors $\frac{1}{f}$ est continue.

Le lien entre ouverts et fonctions continues est donné par la proposition suivante que l'on ne démontrera pas.

PROPOSITION 5.3. Si f est continue, l'ensemble $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < 0\}$ est ouvert

Bien entendu on voit que toute expression continue en f avec une inégalité stricte définit aussi un ouvert.

EXEMPLE 5.4. Si f est continue $W = \{x \mid f(x)^3 + \cos(f(x) + 1) > 2\}$ est ouvert. En effet $g(x) = -[f(x)^3 + \cos(f(x) + 1)] - 2$ est continue et $W = \{x \mid g(x) < 0\}$.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Pour $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, on considère la fonction d'une variable réelle

$$x_i \longmapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

définie au voisinage de $x_i = a_i$.

DÉFINITION 5.5. On appelle dérivée partielle de f par rapport à x_i en a , la dérivée de

$$x_i \longmapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

en $x_i = a_i$. On la note $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ (ou parfois $\partial_{x_i} f(a)$).

La dérivée $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ se calcule donc en considérant les autres variables $x_1, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ comme des constantes.

EXEMPLE 5.6. $f(x, y) = x^2 \cos(xy) + y^3$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \cos(xy) - x^2 y \sin(xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -x^3 \sin(xy) + 3y^2$$

On peut itérer cette définition : on note

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ pour } \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ pour $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$ On trouve parfois (mais nous n'utiliserons pas) la notation $\partial_{xx}, \partial_{xy}$ etc.

DÉFINITION 5.7. On dit que $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 si toutes les dérivées partielles de f sont continues. On dit que f est de classe C^2 si les dérivées partielles d'ordre 2 sont continues.

EXEMPLE 5.8. $f(x, y) = x^2 \cos(xy) + y^3$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = -2x^2 \sin(xy) - x^2 y \sin(xy) = -x^3 y \cos(xy) = -3x^2 \sin(xy) - x^3 y \cos(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2 \cos(xy) - 2xy \sin(xy) - 2xy \sin(xy) - x^2 y^2 \cos(xy) =$$

$$(2 - x^2 y^2) \cos(xy) - 4xy \sin(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -3x^2 \sin(xy) - x^3 y \cos(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -x^4 \cos(xy) + 6y$$

On constate sur cet exemple et on admettra

THÉORÈME 5.9 (Théorème de Schwarz). Si $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ on a pour tout a dans Ω .

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$$

2. Formule de Taylor et applications aux extrémis

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

PROPOSITION 5.10 (Formule de Taylor à l'ordre 1). Si f est de classe C^1 sur Ω et $a \in \Omega$, il existe $\alpha > 0$ et $\varepsilon : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\varepsilon(0) = 0$ et

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \|h\| \varepsilon(h)$$

pour $\|h\| < \alpha$

Explication : Au 1^{er} ordre en h , $f(a+h)$ est donné par l'application affine $f(a) + Df(a) : (h_1, \dots, h_n) \mapsto \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$

DÉMONSTRATION. Appliquons le Théorème des accroissements finis à $F_h(s) = f(a+sh) - f(a)$. On a donc $f(a+h) - f(a) = \int_0^1 F'_h(s) ds$.

Or par composition des fonctions dérivées $a \mapsto a+sh$ et f on a

$$F'_h(s) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+sh) h_i$$

Mais $F'_h(s) - F'_h(0) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a+sh) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right) h_i = \|h\| \eta(h)$

car $h \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+sh) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ est continue et tend vers 0 lorsque h tend vers 0 ($s \in [0, 1]$) donc

$$f(a+h) - f(a) = F'_h(0) + \|h\| \varepsilon(h)$$

où $\varepsilon(h) = \int_0^1 \eta(sh) ds$. □

DÉFINITION 5.11. Si f est de classe C^1 dans un ouvert contenant a , on appelle différentielle de f en a l'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$DF(a)(h_1, \dots, h_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i$$

Comme en dimension 1, l'application $h \mapsto f(a) + DF(a)h$ est l'application linéaire qui approche le mieux f au voisinage de a .

Interprétation géométrique : si f est une fonction C^1 de 2 variables, et S la surface définie par $z = f(x, y)$, alors l'espace tangent en (x_0, y_0, z_0) à S est donné par le graphe de

$$(h, k) \mapsto DF(x_0, y_0)(h, k) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k$$

3. Extrema de fonctions de plusieurs variables réelles

Nous voulons trouver les maxima et minima de f . Rappelons que pour $n = 1$, si f a un maximum ou un minimum en $a_0 \in \mathbb{R}$, on a $f'(a_0) = 0$. De même

PROPOSITION 5.12. Si $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ a un maximum ou un minimum en a_0 on a $Df(a_0) = 0$.

DÉMONSTRATION. Si $Df(a_0) \neq 0$ prenons $h = \alpha \nabla f(a_0)$ avec α assez petit. Alors $f(a_0 + h) = f(a_0) + \alpha |\nabla f(a_0)|^2 + \alpha \varepsilon (\alpha \nabla f(a_0))$. On aura alors –pour α suffisamment petit–

$$|\varepsilon(\alpha \nabla f(a_0))| < \frac{1}{2} |\nabla f(a_0)|^2$$

et donc $f(a_0 + h) > f(a_0) + \frac{\alpha}{2} |\nabla f(a_0)|^2$ ce qui fait que a_0 ne peut être un maximum local.

De même en montrant que $f(a_0 - h) < f(a_0) - \frac{\alpha}{2} |\nabla f(a_0)|^2$ on voit que a_0 ne peut être un minimum local. $\square$

REMARQUE 5.13. Cela signifie que si $\nabla f(a_0) \neq 0$ la fonction f augmente si on se déplace dans la direction de $\nabla f(a_0)$ et diminue si on se déplace dans la direction de $-\nabla f(a_0)$.

Comment savoir si un point a_0 tel que $Df(a_0) = 0$ est un maximum, un minimum ou ni l'un ni l'autre. En dimension 1, c'est simplement le signe de $f''(a_0)$ qui permet de décider. Dans le cas de plusieurs variables, c'est un peu plus compliqué : $D^2 f(a_0)$ peut être non-dégénérée, sans que f n'ait ni un maximum ni un minimum.

EXEMPLE 5.14. Pour $f(x, y) = x + y^2$ 0 est un minimum, pour $f(x, y) = -x^2 - y^2$ 0 est un maximum, pour $f(x, y) = x^2 - y^2$ on n'a ni un maximum ni un minimum car $f(0, \varepsilon) = -\varepsilon^2 < 0$ $f(\varepsilon, 0) = \varepsilon^2 > 0$

Pour décider, il faut regarder les dérivées d'ordre 2.

On pose alors pour $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$

DÉFINITION 5.15. Si $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ on appelle différentielle seconde de f en a la forme quadratique $D^2 f(a)(h) = \sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j$

C'est une forme quadratique dont la matrice associée est

$$D^2 f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$$

EXEMPLE 5.16. 1) $f(x, y) = x^2 \cos(xy) + y^3$

$D^2 f(0, 0)$ est la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$2) f(x, y) = 2x + 3y - y + x^2 + xy + y^3$$

$$D^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

PROPOSITION 5.17 (Formule de Taylor à l'ordre 2). Soit $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$. Soit $a \in \Omega$, il existe alors $\alpha > 0$ et $\varepsilon : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\varepsilon(0) = 0$ et

$$f(a+h) = f(a) + Df(a)h + \frac{1}{2}D^2 f(a)(h) + \|h\|^2 \varepsilon(h)$$

pour $\|h\| < \alpha$

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction

DÉFINITION 5.18. On dit que f a un maximum (resp. minimum) local en $x_0 \in \Omega$ s'il existe $r > 0$ tel que $\forall x \in B_r(x_0) \quad f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $f(x) \geq f(x_0)$)

On dit que f a un maximum local strict (resp. minimum local strict) en $x_0 \in \Omega$, s'il existe $r > 0$ tel que $\forall x \in B_r(x_0) \setminus \{x_0\} \quad f(x) < f(x_0)$ (resp. $f(x) > f(x_0)$)

REMARQUE 5.19. Bien entendu s'il existe un maximum absolu de f sur Ω i.e. $\forall x \in \Omega \quad f(x) \leq f(x_0)$ alors c'est un maximum local.



Comme Ω est ouvert, f n'atteint pas forcément son sup sur Ω .

EXEMPLE 5.20. Sur $\Omega = B_1(0)$ la fonction $x^2 + y^2$ vérifie $\sup_{(x,y) \in B_1(0)} (x^2 + y^2) = 2$ mais $x^2 + y^2 < 2$ sur $B_1(0)$.

On a vu que si f a un maximum ou un minimum local en $x_0 \in \Omega$ on a $Df(x_0) = 0$.

DÉFINITION 5.21. Soit $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$. On appelle points critiques de f les points x_0 tels que $Df(x_0) = 0$.

Les extrema de f (maximums ou minimums) sont donc à chercher parmi les points critiques de f .

Si f est de classe C^2 on peut écrire la formule de Taylor à l'ordre 2

$f(x_0+h) = f(x_0) + Df(x_0)h + \frac{1}{2}D^2 f(x_0)(h) + \|h\|^2 \varepsilon(h)$ et si $Df(x_0) = 0$ (i.e. x_0 est point critique de f) on a

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{1}{2}D^2 f(x_0)(h) + \|h\|^2 \varepsilon(h)$$

On peut donc espérer que le signe de $f(x_0+h) - f(x_0)$ soit déterminé par celui de $D^2 f(x_0)(h)$.

PROPOSITION 5.22. Soit $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ et x_0 un point critique de f .

- Si $D^2 f(x_0)$ est définie négative (resp. positive) alors f a un maximum (resp. minimum) local en x_0 .
- Si $D^2 f(x_0)$ est de signature (p, q) avec $p \neq 0$ alors x_0 n'est pas un maximum local. Si $q \neq 0$ ce n'est pas un minimum local.

On va d'abord montrer

LEMMA 5.23. *Soit Q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$.*

- *Si Q est définie positive (resp. négative) il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $Q(x) \geq \varepsilon_0 \|x\|^2$ (resp. $Q(x) \leq -\varepsilon_0 \|x\|^2$)*
- *Si Q est de signature (p, q) avec $p \neq 0$ il existe $u \in \mathbb{R}^n$, ε_0 tels que $Q(tu) \geq \varepsilon_0 t^2$.*
- *Si Q est de signature (p, q) avec $q \neq 0$ il existe $v \in \mathbb{R}^n$ et $\varepsilon_0 > 0$ tel que $Q(tv) \leq -\varepsilon_0 t^2$.*

DÉMONSTRATION. Si Q est définie positive, on a vu qu'il existe une base orthonormée où $Q(x) = a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2$ si $\varepsilon_0 = \inf_{1 \leq i \leq n} a_i > 0$ on a $Q(x) \geq \varepsilon_0 \|x\|^2$.

Le cas Q définie négative est analogue. Si Q est de signature (p, q) elle se ramène à une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$.

Si Q est de signature (p, q) avec $p \neq 0$ il existe $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $Q(u) > 0$. Alors posant $Q(u) = \varepsilon_0$ on aura bien $Q(tu) \geq \varepsilon_0 t^2$. De même si $q \neq 0$ il existe $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $Q(v) = -\varepsilon_0 < 0$ donc $Q(tv) \leq -\varepsilon_0 t^2$. $\square$

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 5.22. Si Q est définie positive, la formule de Taylor à l'ordre 2 nous dit que $f(x_0 + h) - f(x_0) \geq \frac{\varepsilon_0}{2} \|h\|^2 + |h|^2 \varepsilon(h)$. Pour $|h|$ assez petit, $\varepsilon(h) > -\frac{\varepsilon_0}{4}$ et donc

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \geq \frac{\varepsilon_0}{2} \|h\|^2 - \frac{\varepsilon_0}{4} \|h\|^2 = \frac{\varepsilon_0}{4} \|h\|^2$$

et x_0 est donc un minimum local. La démonstration dans le cas $D^2 f(x_0)$ définie négative est identique.

Si Q est de signature (p, q) avec $p > 0$, on a

$$f(x_0 + tu) - f(x_0) = \frac{1}{2} D^2 f(x_0)(tu) + \|tu\|^2 \varepsilon(tu) \geq t^2 \left(\frac{\varepsilon_0}{2} + \|u\|^2 \varepsilon(tu) \right)$$

Pour t assez petit $-\frac{\varepsilon_0}{4\|u\|^2} < \varepsilon(tu)$ donc si $t \neq 0$ est assez petit

$$f(x_0 + tu) - f(x_0) \geq \frac{\varepsilon_0}{4} t^2 > 0$$

et x_0 n'est pas un minimum local.

De même, si $q \neq 0$, on voit que x_0 n'est pas un maximum local. $\square$

REMARQUE 5.24.  Si Q est positive mais pas définie positive, on ne peut pas conclure.

EXEMPLES 5.25. 1) $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2) + y^2$

On ne peut pas trancher en fonction de $x^2 + y^6$ a un min local en $(0, 0)$

$x^2 - y^6$ n'a ni minimum ni maximum local en $(0, 0)$

$-x^2 - y^6$ a un maximum local en $(0, 0)$

4. Appendice : Polygone convexe extrémal inscrit dans un cercle

On considère un polygone convexe dont les sommets sont sur le cercle unité et on souhaite qu'il ait le plus grand périmètre possible. Si les n sommets sont de la forme $1, e^{i\varphi_1}, \dots, e^{i\varphi_{n-1}}$ (on peut toujours supposer que le premier sommet est en 1), on pose $\theta_j = \varphi_{j+1} - \varphi_j$ où on a posé $\varphi_0 = 0$.

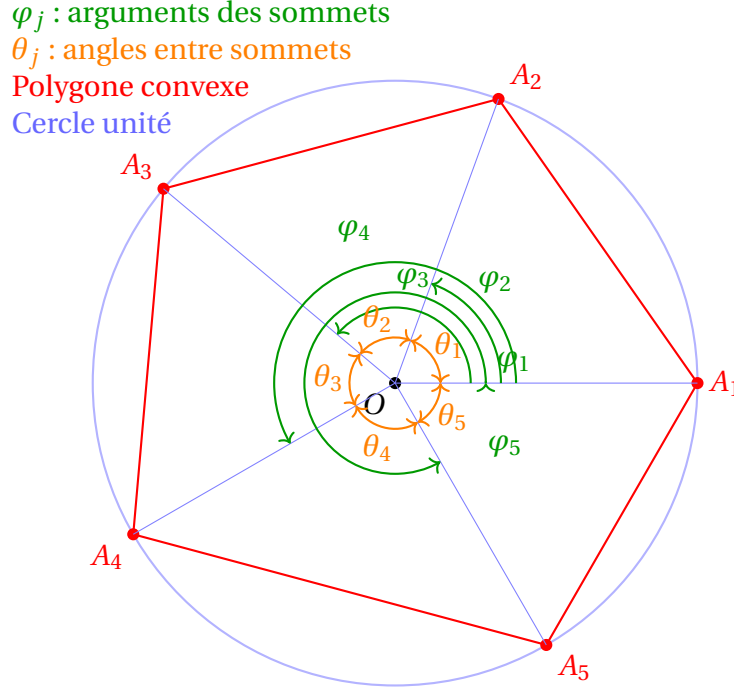


FIGURE 5.1 – Un polygone convexe et les angles φ_j, θ_j

On voit que le polygone est déterminé par les θ_j et que $\theta_1 + \dots + \theta_n = 2\pi$. Pour n fixé on cherche le polygone de périmètre maximal. On vérifie sans peine que ce périmètre vaut

$$L(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}) = 2 \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) + 2 \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) + \dots + 2 \sin\left(\frac{\theta_{n-1}}{2}\right) + 2 \sin\left(\frac{\theta_n}{2}\right) =$$

$$2 \left[\sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) + 2 \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) + \dots + \sin\left(\frac{\theta_{n-1}}{2}\right) + \sin\left(\frac{2\pi - \theta_1 + \dots + \theta_{n-1}}{2}\right) \right]$$

On a alors

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_j}(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}) = 2 \cos\left(\frac{\theta_j}{2}\right) - 2 \cos\left(\frac{2\pi - \theta_1 + \dots + \theta_{n-1}}{2}\right)$$

donc un point critique correspond à $\cos(\frac{\theta_j}{2}) = \cos(\frac{2\pi - \theta_1 + \dots + \theta_{n-1}}{2})$ quel que soit j donc en un extrémum local, on a que tous les $\cos(\frac{\theta_j}{2})$ sont égaux à $\cos(\frac{2\pi - \theta_1 + \dots + \theta_{n-1}}{2}) = \cos(\frac{2\pi - \theta_1 + \dots + \theta_n}{2})$. Comme $0 < \theta_j < \pi$, car les angles d'un polygône convexe sont saillants, il en résulte que les θ_j sont tous égaux, et donc égaux à $\frac{2\pi}{n}$.

Conclusion : le seul point critique est donné par $(\frac{2\pi}{n}, \dots, \frac{2\pi}{n})$.

Calculons la différentielle seconde en ce point. On a

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \theta_j^2}(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}) = -\sin(\frac{\theta_j}{2}) - \sin(\frac{2\pi - \theta_1 + \dots + \theta_{n-1}}{2})$$

et pour $i \neq j$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \theta_i \partial \theta_j}(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}) = -\sin(\frac{2\pi - \theta_1 + \dots + \theta_{n-1}}{2})$$

Comme $\theta_j = \frac{2\pi}{n}$, la forme quadratique est

$$-\sin(\frac{2\pi}{n}) \left[2x_1^2 + \dots + 2x_n^2 - \sum_{i < j} x_i x_j \right]$$

et $2x_1^2 + \dots + 2x_n^2 + \sum_{i < j} x_i x_j = (\sum_{i=1}^n x_i)^2 + \sum_{i=1}^n x_i^2$. Cette quantité est positive si $(x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$ et donc $D^2 L(\frac{2\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \dots, \frac{2\pi}{n})$ est définie négative. On en conclut que ce point correspond à un maximum local.

Conclusion : le polygone régulier réalise un maximum local de la longueur des polygones à n côtés. On peut en fait montrer que c'est un maximum global.

Équations différentielles d'ordre 1

1. Généralités

Soient U, Ω deux intervalles ouverts et $F : U \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

DÉFINITION 6.1. On appelle solution de l'équation

$$(ED) \quad x'(t) = F(t, x(t))$$

une fonction $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- $I \subset U$ est un intervalle ouvert
- x est dérivable et $x(I) \subset \Omega$
- $x'(t) = F(t, x(t))$ pour $t \in I$.

1.1. Exemples.

EXEMPLES 6.2. (1) Résoudre $x'(t) = f(t)$, c'est calculer $\int_0^t f(s) ds$

(2) $x'(t) = x(t)$, les solutions sont $x(t) = Ce^t$, $C \in \mathbb{R}$

(3) $x'(t) = \cos(t) + \ln(x(t) - 1)$ $U =]0, +\infty[$, $\Omega =]1, +\infty[$. On ne sait pas résoudre explicitement cette équation.

On n'abordera pas ici des équations implicites, c'est-à-dire de la forme $F(t, x(t), x'(t)) = 0$.

En général une équation différentielle n'a pas de solution "explicite" donnée par des fonctions "élémentaires". Dans ce cas, on s'attache à comprendre ces solutions de manière qualitative/géométrique. Mais pour cela on utilise les quelques cas où on peut résoudre explicitement les équations.

1.2. Interprétation géométrique. On considère le graphe $(t, x(t))$ de x .

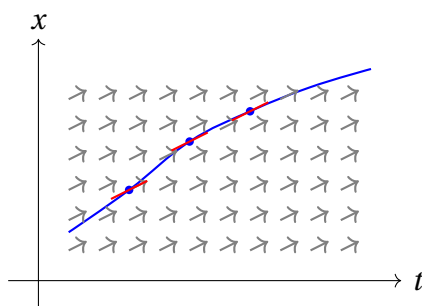
C'est une courbe dans $\mathbb{R}^2$ dont la tangente en $(t_0, x(t_0))$ est donnée par

$$(1, x'(t_0)) = (1, F(t_0, x(t_0)))$$

soit une droite de pente $F(t_0, x_0)$ où $x_0 = x(t_0)$.

On peut alors tracer en chaque point $(t_0, x_0) \in U \times \Omega$ un petit segment $D(t_0, x_0)$ de pente $F(t_0, x_0)$.

Alors x est solution de l'équation différentielle $x'(t) = F(t, x(t))$ si et seulement si son graphe est tangent en chaque point à $D(t_0, x_0)$.



Il est souvent utile de séparer le plan en régions où la pente est positive (i.e. x est croissante) négative (i.e. x est décroissante).

EXEMPLE 6.3. $F(t, x) = t - x^2$

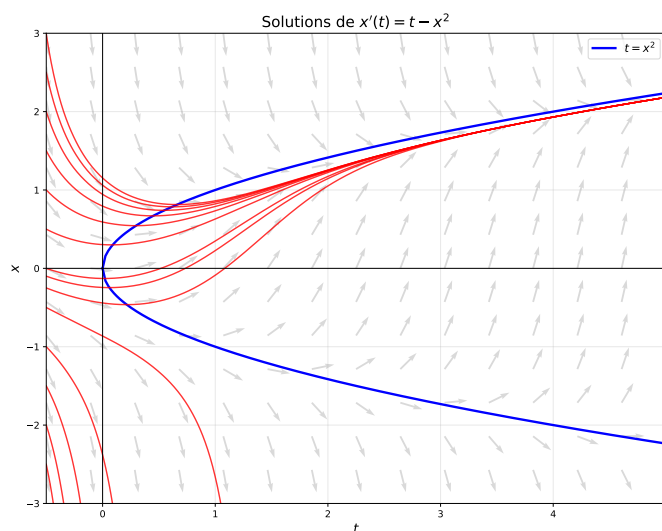


FIGURE 6.1 – Solutions de l'équation $x'(t) = t - x^2$. La parabole bleue sépare la région où les solutions sont croissantes de celle où elles sont décroissantes.

On voit sur la figure que lorsqu'une solution entre dans la région $t > x^2$, elle n'en sort plus.

La méthode géométrique permet aussi de voir rapidement les symétries de l'équation :

- (1) Si $F(t, x) = -F(t, -x)$ on a une symétrie du champ de tangentes par rapport à l'horizontale Ot . Donc si x est solution, $-x$ l'est aussi, car en posant $y(t) = -x(t)$ on a $y'(t) = -x'(t) = -F(t, x(t)) = +F(t, -x(t)) = F(t, y(t))$.
- (2) Si $F(-t, x) = -F(t, x)$ on a symétrie par rapport à l'axe Ox . Donc si x est solution, $y(t) = x(-t)$ est aussi solution.
- (3) Si F est périodique en t , le champ $D(t, x)$ est invariant par translation de T où t , donc si x est solution, $y(t) = x(t + T)$ est solution, pour tout $c \in \mathbb{R}$:

$$y'(t) = x'(t + T) = F(t + T, x(t + T)) = F(t, y(t))$$

En particulier si F ne dépend pas de t , $x(t + c)$ est solution pour tout $c \in \mathbb{R}$. Lorsque F ne dépend pas de t on dit que l'équation est **autonome**.

2. Définition et propriétés générales

- DÉFINITION 6.4. (1) Soient $x_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}$ deux solutions de $x'(t) = F(t, x(t))$. On dit que x_2 prolonge x_1 si $I_1 \subseteq I_2$ et $x_2|_{I_1} = x_1$.
- (2) On dit que $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une solution maximale si il n'existe pas de solution prolongeant x .
- (3) On dit que x est une solution globale si $I = \mathbb{R}$.

Une solution globale est évidemment maximale!

- EXEMPLE 6.5. (1) $x'(t) = 1 + x(t)^2$
 $x(t) = \tan(t)$ est solution, car

$$x'(t) = \tan'(t) = \frac{\sin(t)'}{\cos(t)} = \frac{\cos^2(t) + \sin^2(t)}{\cos^2(t)} = 1 + \tan^2(t)$$

Comme $1 + x^2$ ne dépend pas de t , $\tan(t + c)$ est aussi solution.

Comme $\lim_{t \rightarrow \pm\pi/2} \tan(t) = \pm\infty$ on a que $\tan$ est définie sur $] -\pi/2, \pi/2[$ et est une solution maximale : une solution coïncidant avec $\tan(t)$ sur un intervalle contenant $] -\pi/2, \pi/2[$ ne peut être continue.

2.1. Résolution d'équations autonomes. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on considère l'équation $x'(t) = f(x(t))$ (ED).

Soit I un intervalle sur lequel f ne s'annule pas et G une primitive de $\frac{1}{f}$ sur $\Omega \subset \mathbb{R}$.

$$G'(x) = \frac{1}{f(x)}$$

Alors si x est solution de l'équation (ED) et $x(I) \subset \Omega$ on a :

$$\frac{d}{dt}G(x(t)) = G'(x(t))x'(t) = \frac{1}{f(x(t))} \cdot f(x(t)) = 1$$

donc $G(x(t)) = G(x(0)) + t$ et $x(t) = G^{-1}(t + c)$.

EXEMPLE 6.6. (1) $x' = x$

$$G(x) = \int \frac{dx}{x} = \ln(x), \quad \ln(x(t)) = t + c$$

Donc $x(t) = Ce^t$.

(2) $x'(t) = \sqrt{1 - x^2}$

$$G(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \text{Arcsin}(x)$$

$\text{Arcsin}(x(t)) = t + c$ $x(t) = \sin(t + c)$.

(3) $x'(t) = \sqrt{x(t)}$

$$G(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}$$

$$2\sqrt{x} = c - t, \quad x(t) = \frac{1}{4}(c - t)^2$$

Notons aussi que $x(t) = 0$ est solution.

2.2. Méthode mnémotechnique (non rigoureuse). On écrit

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \Leftrightarrow \frac{dx}{f(x)} = dt$$

et on intègre des deux côtés, ce qui donne

$$\int_0^{x(t)} \frac{dx}{f(x)} = \int_{t_0}^t dt$$

$$G(x(t)) - G(x(0)) = t - t_0$$

3. Équations à variables séparables

Il s'agit d'équations du type $x'(t) = a(t)f(x(t))$.

EXEMPLE 6.7. $x'(t) = a(t)x(t)$ (eq. linéaire)

$$x(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right)$$

Posant $G(x) = \int_0^x \frac{du}{f(u)}$ on a

$$\frac{d}{dt}G(x(t)) = a(t)$$

donc

$$G(x(t)) = \int_{t_0}^t a(s) ds = A(t)$$

et $x(t) = G^{-1}(A(t))$.

EXEMPLE 6.8. $x'(t) = t(1 - x^2(t))$

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_0^x \frac{du}{1-u^2} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{1-u} + \frac{1}{2} \int \frac{du}{1+u} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \end{aligned}$$

$A(t) = \frac{t^2}{2}$ d'où

$$\ln(1 - x^3) = \frac{t^2}{2}$$

$$1 - x^3 = e^{t^2/2}$$

$$x = \sqrt[3]{1 - e^{t^2/2}}$$

4. Problème de Cauchy

Le problème de Cauchy pour l'équation différentielle $x'(t) = F(t, x(t))$ est la recherche de solutions de cette équation avec condition initiale fixée, i.e.

$$\begin{cases} x'(t) = F(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

où t_0, x_0 sont fixés.

Le résultat fondamental est :

THÉORÈME 6.9 (Cauchy-Lipschitz). Soient U, Ω des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, $F : U \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

(1) F est continue sur $U \times \Omega$

(2) $(t, x) \mapsto \frac{\partial F}{\partial x}(t, x)$ est (définie) et continue sur $U \times \Omega$.

Alors pour tout $(t_0, x_0) \in U \times \Omega$, le problème de Cauchy

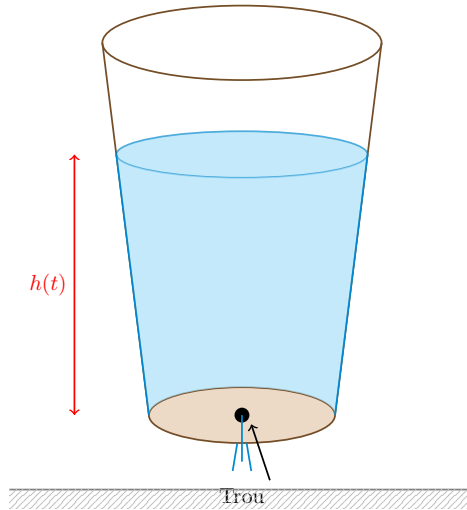
$$\begin{cases} x'(t) = F(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admet une solution maximale unique.

De nombreuses équations de la mécanique, physique, biologie, etc... sont des équations différentielles. Le paramètre t jouant souvent le rôle du temps, le Théorème de Cauchy-Lipschitz dit que - sous certaines conditions portant sur l'équation - le phénomène qui décrit est déterministe : connaissant l'état du système x_0 à l'instant t_0 , permet de décrire l'état du système dans le futur... ($t > t_0$) mais aussi dans le passé ($t < t_0$).

Cela semble "physiquement évident", mais ce n'est pas le cas :

4.1. L'équation du seau qui se vide. Considérons un seau contenant de l'eau, percé d'un trou à sa base et mesurons $h(t)$ la hauteur d'eau à l'instant t .



Les lois de l'hydrodynamique se traduisent par l'équation

$$h'(t) = -C\sqrt{h(t)}$$

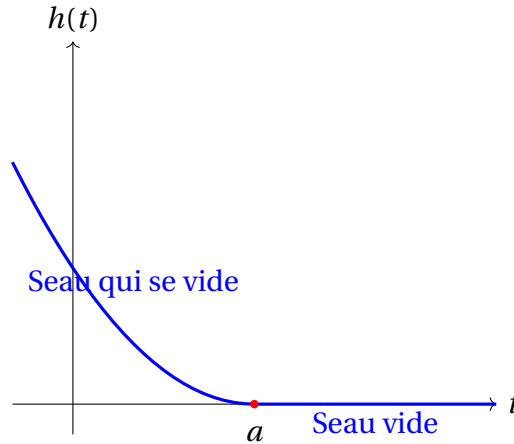
Posant $C = 1$, on a vu que l'on a comme solutions

$$x(t) = \frac{1}{4}(t - c)^2, \quad x(t) = 0$$

Mais on peut aussi combiner des solutions :

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}(t - a)^2 & t \leq a \\ 0 & c < t \leq +\infty \end{cases}$$

Physiquement, le seau se vide, car $h'(t) \leq 0$ et une fois qu'il est vide... il reste vide!



Mais on voit que même pour ces solutions, il n'y a pas de déterminisme : lorsque le seau est vide, on ne peut dire à quel moment il a été plein. Il n'y a donc pas unicité, ce qui ne contredit pas le Théorème de Cauchy, car nous ne sommes pas dans son domaine d'application : $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en $x = 0$.

5. Conséquences de Cauchy-Lipschitz

On considère l'équation $x'(t) = F(t, x(t))$ et on suppose vérifiées les hypothèses (et donc les conclusions!) du Théorème de Cauchy-Lipschitz. On considère des graphes $\{(t, x(t)) | t \in U\}$ des solutions.

PROPOSITION 6.10. (1) *Par chaque point $(t_0, x_0) \in U \times \Omega$ passe le graphe d'une solution maximale de (ED).*

(2) *Si les graphes de deux solutions maximales ont un point commun, alors ces graphes (et donc les solutions) coïncident.*

L'assertion (1) n'est que la reformulation de l'existence dans Cauchy-Lipschitz, (2) la reformulation de l'unicité.

Géométriquement, cela signifie que $U \times \Omega$ est réunion disjointe de graphes de solutions.

6. Explosion en temps fini (ou le Théorème des bouts)

Il s'agit de comprendre ce qui peut se passer lorsqu'on a une solution maximale qui n'est pas globale pour l'équation $x'(t) = F(t, x(t))$.

6.1. Exemples.

(1) $x'(t) = x(t)^2$ définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Les solutions sont $x(t) = -\frac{1}{t-c}$ définies sur $] -\infty, c[$ ou $]c, +\infty[$ et $x(t) = 0$.

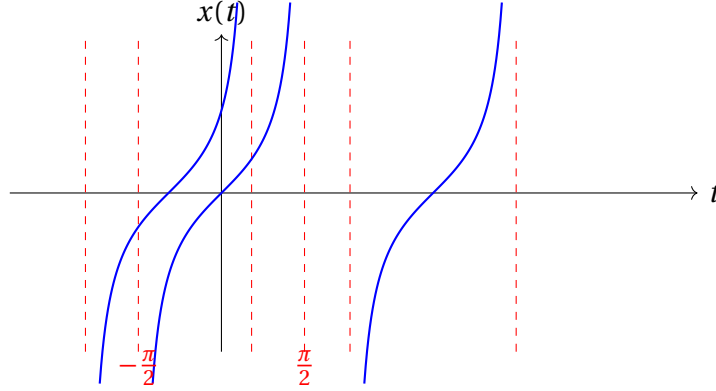
Ce sont des solutions maximales, car $\lim_{t \rightarrow c} \left| \frac{1}{t-c} \right| = +\infty$.

Il n'y a eu à pas d'autres après Cauchy-Lipschitz, car $x(t_0) = x_0$ équivaut à $-\frac{1}{t_0-c} = x_0$ soit $c = -\frac{1+x_0 t_0}{x_0}$ si $x_0 \neq 0$.

Si $x_0 = 0$, $x(t) = 0$. C'est la seule solution globale!

(2) $x'(t) = 1 + x(t)^2$ définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Les solutions sont $x(t) = \tan(t - c)$ définies sur $] -\pi/2 + c, \pi/2 + c[$. Elle sont maximales car $\lim_{t \rightarrow \pm\pi/2+c} \tan(t - c) = \pm\infty$.



Il n'y en a pas d'autres car $x(t_0) = x_0$ équivaut à $\tan(t_0 - c) = x_0$. Or $\tan \theta_0 = x_0$ a une unique solution dans $] -\pi/2, \pi/2[$ et $t_0 - c = \theta_0 \Leftrightarrow c = t_0 - \theta_0$. On peut donc réaliser n'importe quelle condition initiale avec les fonctions $t \rightarrow \tan(t - c)$. Par Cauchy-Lipschitz on a donc obtenu toutes les solutions maximales.

Soit donc F définie sur $U \times \Omega$ avec $U =]u_-, u_+[$ et $\Omega =]\omega_-, \omega_+[$ avec $u_-, \omega_- \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $u_+, \omega_+ \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

THÉORÈME 6.11 (Explosion en temps fini ou des bouts). *Soit $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ une solution maximale de (ED), où $I =]t_-, t_+[$, vérifiant les hypothèses du Théorème de C-L. Alors si x n'est pas globale :*

(1) *Soit $t_+ < u_+$ et alors $\lim_{t \rightarrow t_+} x(t) = \omega_1$ ou ω_2*

(2) *Soit $t_- > u_-$ et alors $\lim_{t \rightarrow t_-} x(t) = \omega_1$ ou ω_2*

COROLLARY 6.12. *Sous les hypothèses du Théorème si $\omega_1 = -\infty$, $\omega_2 = +\infty$ (i.e. F est définie sur $U \times \mathbb{R}$) une solution maximale bornée est globale.*

DÉMONSTRATION. Si x n'était pas globale, on devrait avoir $\lim_{t \rightarrow u_+} |x(t)| = +\infty$ ou $\lim_{t \rightarrow u_-} |x(t)| = +\infty$ et x ne serait pas bornée. $\square$

Interprétation géométrique du Théorème : Le graphe d'une solution maximale ne peut s'interrompre au milieu du rectangle $U \times \Omega$, elle doit nécessairement aller d'un

bord à un autre bord. Voici donc à quoi doit ressembler le tracé des solutions maximales de (ED).

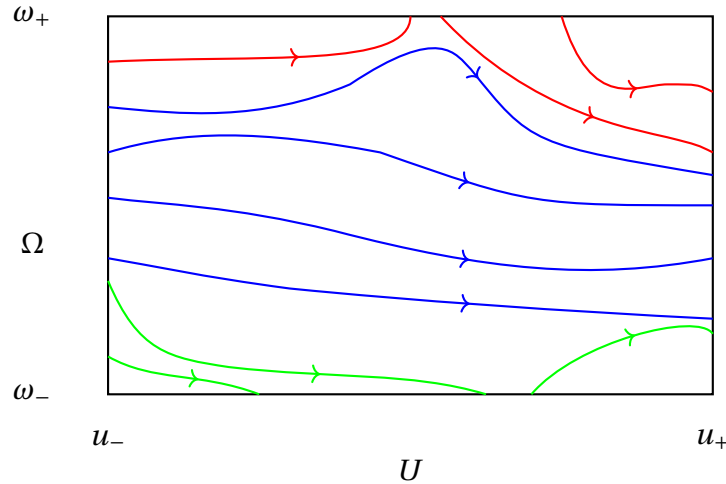


FIGURE 6.2 – Les courbes bleues sont les solutions globales. Les courbes rouges vérifient $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \omega_+$ et $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = \omega_+$. Les courbes vertes vérifient $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \omega_-$ et $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = \omega_-$.

EXEMPLE 6.13. $x'(t) = t(x^2(t) - 1)$ définie sur $\mathbb{R}$.

$F(t, x) = t(x^2 - 1)$ est C^1 en x , donc l'équation vérifie les hypothèses du Théorème de Cauchy-Lipschitz.

Solutions constantes : Correspondent aux valeurs de x pour lesquelles $F(t, x) = 0$ pour tout t , donc $x(t) \equiv 1$ et $x(t) \equiv -1$

Étude géométrique : Par le Théorème de Cauchy-Lipschitz : Si $x(t)$ est solution

- (a) soit $x(t) < -1 \forall t$
- (b) soit $-1 < x(t) < 1 \forall t$
- (c) soit $1 < x(t) \forall t$

Pas d' "explosion en temps fini" dans le cas (b), la solution maximale est globale.

Dans les cas (a) et (c), on ne peut pas savoir a priori.

Étude analytique : L'équation est à variables séparables :

$$\frac{x'(t)}{x^2(t) - 1} = t$$

$$\text{d'où } \int \frac{x'(t)}{x^2(t) - 1} = \frac{t^2}{2} + c$$

$$\text{Or } \int \frac{dx}{x^2-1} = \int \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{2(x-1)} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$$

$$\text{Donc } \left| \frac{x(t)+1}{x(t)-1} \right| = Ce^{t^2} \text{ où } C = e^c > 0$$

(a) et (c) : Si $|x(t)| > 1$ on a $\frac{x(t)+1}{x(t)-1} = Ce^{t^2}$ d'où $x(t)(1 - Ce^{t^2}) = -(1 + Ce^{t^2})$ et

$$x(t) = \frac{Ce^{t^2} + 1}{Ce^{t^2} - 1}$$

La solution maximale est définie sur $e^{t^2} > \frac{1}{C}$ ou $e^{t^2} < \frac{1}{C}$ soit $t^2 > -\log C$ i.e. $\mathbb{R}$ si $C > 1$ ($x(t) > 1$), $] -\infty, -\sqrt{-\log C}[$ ou $]\sqrt{-\log C}, +\infty[$ si $0 < C < 1$ ($x(t) < -1$).

On a donc des solutions non globales.

On voit que $x(t) < -1$ si $0 < C < 1$ sur $] -\sqrt{-\log C}, \sqrt{-\log C}[$ et $x(t) > 1$ sinon.

(b) : Si $-1 < x(t) < 1$ on a $\frac{1+x(t)}{1-x(t)} = Ce^{t^2}$ d'où

$$x(t) = \frac{1 - Ce^{t^2}}{1 + Ce^{t^2}}$$

La solution est globale, comme prévu.

7. Appendice : valeurs asymptotiques des solutions dans le cas autonome

Sout $x'(t) = f(x(t))$ une équation différentielle. On suppose f de classe C^1 , ce qui fait qu'on peut appliquer le Théorème de Cauchy-Lipschitz. Les solutions constantes correspondent aux zéros de f , i.e. aux solutions de $f(x) = 0$. Soit z_0 une telle valeur.

PROPOSITION 6.14. *Supposons que dans un intervalle $]a, z_0[$ f soit strictement positive. Alors que toute solution de condition initiale en $x_0 \in]a, z_0[$ est croissante et $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = z_0$*

DÉMONSTRATION. Supposons qu'il existe $t > t_0$ tel que $x(t) \notin]a, z_0[$. Il doit alors exister t_1 tel que soit $x(t_1) = x_0$ ce qui n'est pas possible car deux solutions ne peuvent se croiser, soit que x reprend la valeur a et comme $x'(t_0) > 0, x(t_0) > a$ il existe t_1 tel que $x(t_1) \in [a, z_0[$ et $x'(t_1) < 0$. Par le Théorème des valeurs intermédiaires $x'(t_2) = 0$ mais alors $f(x(t_2)) = 0$ avec $x(t_2) \in [a, z_0[$ ce qui contredit l'hypothèse. Donc x est croissante et a une limite x_∞ en $t = +\infty$. Comme $x(t) \leq z_0$ on a forcément $x_\infty \in [a, z_0]$. Supposons $x_\infty < z_0$, et soit $\varepsilon_0 > 0$ une borne inférieure de f sur $[a, x_\infty]$. On doit alors avoir $x(t) - x(t_0) \geq \varepsilon_0(t - t_0)$, mais cela entraînerait $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty$ ce qui contredit $x(t) \leq z_0$.

On a donc nécessairement $x_\infty = z_0$. □

On voit alors que si z_0, z_1 sont deux zéros consécutifs de f , toute solution va asymptotiquement de l'une à l'autre et est globale. Par contre si f n'a pas de zéro inférieur à z_0 , et par exemple est strictement négative sur $] -\infty, z_0[$, la solution sera asymptotique à

z_0 lorsque t tend vers $-\infty$, sera donc définie sur un intervalle $-\infty, t_+[$ ($t_+ \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$) et $\lim_{t \rightarrow t_+} x(t) = -\infty$.

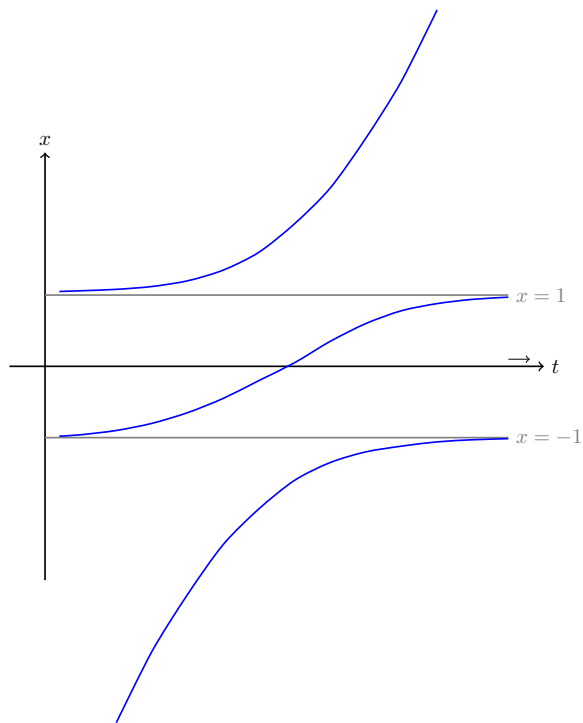


FIGURE 6.3 – Solutions de $x'(t) = 1 - x(t)^2$

Chapitre 7

Équations Différentielles Linéaires

L'objet de ce chapitre est l'étude des équations différentielles "vectorielles" linéaires

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$$

où $x(t) \in \mathbb{K}^n$, $A(t) \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$, $b(t) \in \mathbb{K}^n$.

1. Équations différentielles linéaires en dimension 1.

1.1. Généralités.

$$(EL1) \quad x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$$

où $a, b \in C^0(U)$

Cela se réécrit $x'(t) = F(t, x(t))$ avec $F(t, x) = a(t)x + b(t)$, $\frac{\partial F}{\partial x}(t, x) = a(t)$ et F est C^1 en x , donc on peut appliquer Cauchy-Lipschitz.

THÉORÈME 7.1. *Le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admet une unique solution maximale pour $(t_0, x_0) \in U \times \mathbb{R}$.

REMARQUE 7.2. (1) On verra que les solutions sont toujours globales : il ne peut y avoir « explosion en temps fini ».

(2) On appelle équation homogène associée à (EL1), l'équation

$$(EH1) \quad z'(t) = a(t)z(t)$$

C'est une équation à variables séparables.

PROPOSITION 7.3. *La solution de $\begin{cases} z'(t) = a(t)z(t) \\ z(t_0) = z_0. \end{cases}$ est donnée par*

$$z(t) = z_0 \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right)$$

DÉMONSTRATION. La dérivation de fonctions composées donne

$$z'(t) = z_0 a(t) \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right) = a(t) z(t)$$

Comme $z(t_0) = z_0$, le Théorème de Cauchy-Lipschitz nous dit que c'est l'unique solution. $\square$

REMARQUE 7.4. (1) La solution est globale.

(2) On n'a pas dit comment on a trouvé la solution : comme $z \equiv 0$ est solution, les autres solutions ne s'annulent jamais. On écrit l'équation sous la forme $\frac{z'(t)}{z(t)} = a(t)$ soit $\frac{d}{dt} \ln(z(t)) = a(t)$ et en intégrant de t_0 à t

$$\ln(z(t)) - \ln(z(t_0)) = \int_{t_0}^t a(s) ds.$$

$$\text{d'où } z(t) = z(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right).$$

$$= z_0 \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right)$$

Le Théorème de Cauchy-Lipschitz permet de dire qu'on a bien trouvé toutes les solutions.

(3) L'espace des solutions de (EH1) est un espace vectoriel de dimension 1. Si z_1, z_2 sont solutions de (EH1) il en est de même de $z_1 + z_2, \lambda z_1$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. L'application $z(t) \mapsto z(t_0)$ est une bijection linéaire de l'espace des solutions sur $\mathbb{R}$.

1.2. Méthode de variation des constantes. Revenons à l'équation (EL1) et soit z une solution non nulle de $z'(t) = a(t)z(t)$ (et ne s'annulant donc jamais!). On pose $c(t) = \frac{x(t)}{z(t)}$ d'où $x(t) = c(t)z(t)$. L'équation (EL1) s'écrit alors

$$x'(t) = c'(t)z(t) + c(t)z'(t) = a(t)c(t)z(t) + b(t)$$

soit, vu que $z'(t) = a(t)z(t)$

$$c'(t)z(t) + c(t)a(t)z(t) = a(t)c(t)z(t) + b(t)$$

$$\text{i.e. } c'(t)z(t) = b(t) \text{ et donc } c'(t) = \frac{b(t)}{z(t)}$$

$$\text{d'où } c(t) = \int_{t_0}^t \frac{b(s)}{z(s)} ds + c(t_0)$$

Or on a une expression explicite pour z : $z(t) = \exp A(t)$ où $A(t) = \int_{t_0}^t a(s) ds$ et donc $c(t) = \int_{t_0}^t b(s) \exp(-A(s)) ds + c(t_0)$.

La condition $x(t_0) = x_0$ s'exprime par $c(t_0) = \frac{x_0}{z(t_0)} = x_0$.

On a donc montré :

THÉORÈME 7.5. *Les solutions maximales de*

$$\begin{cases} x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

sont globales et données par la formule

$$x(t) = \left(\int_{t_0}^t b(s) e^{-A(s)} ds \right) e^{A(t)} + x_0 e^{A(t)}$$

$$\text{où } A(t) = \int_{t_0}^t a(s) ds$$

REMARQUES 7.6. (1) On voit que toute solution est somme d'une solution particulière

$\left(\int_{t_0}^t b(s) e^{-A(s)} ds \right) e^{A(t)}$ (obtenue en prenant $x_0 = 0$) et d'une solution de (EH) : $x_0 e^{A(t)}$.

Ceci n'est pas surprenant, car la différence de deux solutions de (EL1) est une solution de (EH1) : si $x_1'(t) = a(t)x_1(t) + b(t)$

$$x_2'(t) = a(t)x_2(t) + b(t)$$

$$(x_1 - x_2)'(t) = a(t)(x_1 - x_2)(t).$$

Donc si on a trouvé une solution particulière, on trouve toutes les solutions en ajoutant les solutions de (EH1).

(2) Il est plus important de retenir la méthode de résolution par variation de la constante que la formule donnée par le Théorème.

EXEMPLES 7.7. (1)

$$x'(t) = 5t^2 x(t) + t^2$$

L'équation homogène associée est $z'(t) = 5t^2 z(t)$ soit $z(t) = C e^{\frac{5t^3}{3}}$.

On voit que $x \equiv -\frac{1}{5}$ est solution, donc les solutions sont $x(t) = -\frac{1}{5} + C e^{\frac{5}{3}t^3}$.

(2) $x'(t) = \frac{1}{t} x(t) + \frac{1}{\ln^2(t)}$ sur $]1, +\infty[$.

L'équation homogène associée est $z'(t) = \frac{1}{t} z(t)$

d'où $z(t) = C e^{\ln(t)} = C t$. On pose alors $x(t) = c(t) t$ d'où

$$x'(t) = c'(t) t + c(t) = c(t) + \frac{1}{\ln(t)^2}$$

et $c'(t) t = \frac{1}{\ln(t)^2}$, soit $c'(t) = \frac{1}{t \ln(t)^2} = \frac{(\ln(t))'}{(\ln(t))^2}$.

Finalement on obtient $c(t) = \frac{-1}{\ln(t)} + C$, donc $x(t) = \frac{-t}{\ln(t)} + C t$

2. Équations différentielles linéaires en dimension quelconque

2.1. Généralités. Ce sont les équations

$$(EL) \quad x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$$

où $t \mapsto A(t)$ et $t \mapsto b(t)$ sont continues sur U (i.e. $t \mapsto a_{ij}(t)$ et $t \mapsto b_i(t)$ sont continues)

En coordonnées, si $x(t)$ est le vecteur colonne

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, A(t) = \begin{pmatrix} a_{1,1}(t) & \cdots & a_{1,n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}(t) & \cdots & a_{n,n}(t) \end{pmatrix}$$

et $b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$ l'équation se réécrit

$$\begin{cases} x'_1(t) = a_{1,1}(t)x_1(t) + \cdots + a_{1,n}(t)x_n(t) + b_1(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) = a_{n,1}(t)x_1(t) + \cdots + a_{n,n}(t)x_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

On appelle système homogène associé à (EL) l'équation $z'(t) = A(t)z(t)$ (EH)

PROPOSITION 7.8. *L'espace des solutions de (EH) est un espace vectoriel.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de vérifier que si z_1, z_2 sont solutions et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $z_1 + z_2$ et λz_1 sont solutions. $\square$

Le Théorème de Cauchy-Lipschitz est encore valable dans ce cadre :

THÉORÈME 7.9 (Cauchy-Lipschitz). *Soient $t \mapsto A(t)$ et $t \mapsto b(t)$ continues sur U . Alors pour tout $t_0 \in U$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admet une unique solution maximale qui est globale.

COROLLARY 7.10. *L'espace vectoriel $\mathcal{E}$ des solutions de (EH) est de dimension n . Pour tout $t_0 \in U$ l'application $z \mapsto z(t_0)$ de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}^n$ est un isomorphisme.*

DÉMONSTRATION. L'application $z \mapsto z(t_0)$ est linéaire. L'existence dans le Théorème de C-L dit que cette application est surjective, l'unicité qu'elle est injective. C'est donc un isomorphisme, donc $\dim \mathcal{E} = \dim(\mathbb{R}^n) = n$. $\square$

REMARQUE 7.11. (1) Si $(z_1, \dots, z_n)$ est une base de $\mathcal{E}$ alors pour chaque $t_0 \in \mathbb{R}$, la famille $(z_1(t_0), \dots, z_n(t_0))$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

(2) Contrairement au cas de la dimension 1, il n'y a pas de méthode générale simple pour résoudre (EH) dès que $n \geq 2$.

(3) Bien entendu toute solution de (EL) est ici encore somme d'une solution particulière et de la solution générale de (EH).

2.2. Méthode de variation des constantes. Supposons connue une base $z_1, \dots, z_n$ de $\mathcal{E}$. On va écrire $x(t) = \alpha_1(t)z_1(t) + \dots + \alpha_n(t)z_n(t)$

L'équation $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$ s'écrit alors

$$\alpha'_1(t)z_1(t) + \dots + \alpha'_n(t)z_n(t) + \alpha_1(t)z'_1(t) + \dots + \alpha_n(t)z'_n(t) = \alpha_1(t)A(t)z_1(t) + \dots + \alpha_n(t)A(t)z_n(t) + b(t)$$

soit

$$\alpha'_1(t)z_1(t) + \dots + \alpha'_n(t)z_n(t) = b(t)$$

Les α'_i sont donc les coordonnées dans la base $z_i(t)$ de $b(t)$.

EXEMPLE 7.12. Pour $\omega \neq 0$ on considère l'équation

$$\begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix}$$

$$z_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ -\omega \sin(\omega t) \end{pmatrix}, z_2(t) = \begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ \omega \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

$z_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $z_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \end{pmatrix}$ et z_1, z_2 constituent bien une base de l'espace des solutions de l'équation homogène.

On doit alors résoudre :

$$\alpha'_1(t)z_1(t) + \alpha'_2(t)z_2(t) = b(t)$$

Soit

$$\begin{cases} \alpha'_1(t) \cos(\omega t) + \alpha'_2(t) \sin(\omega t) = b_1(t) \\ -\alpha'_1(t) \omega \sin(\omega t) + \omega \alpha'_2(t) \cos(\omega t) = b_2(t) \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \alpha'_1(t) = b_1(t) \cos(\omega t) - \frac{b_2(t)}{\omega} \sin(\omega t) \\ \alpha'_2(t) = b_1(t) \sin(\omega t) + \frac{b_2(t)}{\omega} \cos(\omega t) \end{cases}$$

On a donc

$$\alpha_1(t) = \int_0^t \left[b_1(s) \cos(\omega s) - \frac{b_2(s)}{\omega} \sin(\omega s) \right] ds$$

$$\alpha_2(t) = \int_0^t \left[b_1(s) \sin(\omega s) + \frac{b_2(s)}{\omega} \cos(\omega s) \right] ds$$

Note : si $b_1 \equiv 0$ l'équation s'écrit

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = -\omega^2 x_1(t) + b_2(t) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x_1''(t) + \omega^2 x_1(t) = b_2(t) \\ x_2(t) = x_1'(t) \end{cases}$$

La première équation est celle d'un oscillateur harmonique de fréquence ω avec terme de forçage.

3. Equations à coefficients constants

On considère le cas où $A(t)$ est constante, c'est-à-dire l'équation

$$(EHC) \quad x'(t) = Ax(t)$$

PROPOSITION 7.13. *Soit v un vecteur propre de A de valeur propre λ . Alors $x(t) = e^{\lambda t} v$ est solution de EHC.*

DÉMONSTRATION. En effet, il suffit de vérifier que

$$x'(t) = \lambda e^{\lambda t} v = e^{\lambda t} (\lambda v) = e^{\lambda t} Av = A(e^{\lambda t} v)$$

□

On en déduit que si A est diagonalisable on peut trouver une base de l'espace des solutions.

COROLLARY 7.14. *Si A est diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et vecteurs propres associés $v_1, \dots, v_n$, alors une base de l'espace des solutions est donnée par $(e^{\lambda_1 t} v_1, \dots, e^{\lambda_n t} v_n)$*

DÉMONSTRATION. En effet, les $z_j(t) = e^{\lambda_j t} v_j$ sont solutions et sont l'image inverse de la base $(v_1, \dots, v_n)$ par l'isomorphisme $z \mapsto z(0)$, puisque $z_j(0) = v_j$. □

Il peut bien sûr arriver que A soit réelle, et diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$. Dans ce cas les valeurs propres complexes et les vecteurs propres associés apparaissent par paires $\lambda, \bar{\lambda}$ associés à $v, \bar{v}$. Dans ce cas $e^{\lambda t} v$ et $e^{\bar{\lambda} t} \bar{v}$ sont des solutions complexes, mais donc aussi

$$\Re(e^{\lambda t} v) = \frac{1}{2}(e^{\lambda t} v + e^{\bar{\lambda} t} \bar{v})$$

et

$$\Im(e^{\lambda t} v) = \frac{1}{2i}(e^{\lambda t} v - e^{\bar{\lambda} t} \bar{v})$$

Ces solutions sont réelles!

COROLLARY 7.15. *Soit A une matrice réelle, ayant $\lambda_1, \bar{\lambda}_1, \dots, \lambda_k, \bar{\lambda}_k$ les valeurs propres complexes et $\lambda_{2k+1}, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres réelles, les vecteurs propres associés étant les $v_i, \bar{v}_i$ pour $1 \leq i \leq k$ et v_j pour $k+1 \leq j \leq n$.*

3.1. Cas général (hors programme). Dans le cas général on peut définir pour une matrice A son exponentielle, $\exp(A)$ par la formule

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

En effet si les coefficients de A sont bornés par C , ceux de A^2 sont bornés par nC^2 , ceux de A^3 par n^2C^3 et ceux de A^k par $n^{k-1}C^k$ et $\frac{n^{k-1}C^k}{k!}$ et comme la série

$$\sum_k \frac{n^{k-1}C^k}{k!}$$

est (absolument convergente sa somme est $\frac{1}{n}e^{nC}$), donc la série a une somme qui est une matrice notée e^A .

⚡ On a en général que $e^{A+B} \neq e^A e^B$ sauf si A et B **commutent** c'est-à-dire si $AB = BA$.

Notons que si $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est diagonalisable, $e^A = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$. On considère $x : t \mapsto e^{tA}v$.

PROPOSITION 7.16. *La fonction $z : t \mapsto e^{tA}v$ est solution de l'équation EHC. De plus si $(v_1, \dots, v_n)$ est une base de $E = \mathbb{R}^n$, les $e^{tA}v_j$ forment une base de l'espace des solutions de l'équation EHC.*

DÉMONSTRATION. En dérivant la série terme à terme après avoir vérifié que cela est licite (car la série des dérivées est normalement convergente), on obtient

$$z'(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k t^{k-1} A^k}{k!} v = \sum_{k=0}^{+\infty} A \frac{t^{k-1} A^{k-1}}{k-1!} v = A e^{tA} v = A z(t)$$

donc les $e^{tA}v$ sont bien des solutions. L'isomorphisme $z \mapsto z(0)$ envoie $e^{tA}v$ sur v , donc l'image réciproque d'une base est bien une base. $\square$

Dans le cas où A est diagonalisable on obtient le résultat de la Proposition 7.13.

EXEMPLE 7.17. En dimension 2 si A n'est pas diagonalisable elle est semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \text{Id} + N$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Évidemment λId et N commutent, donc $e^{tA} = e^{t\lambda \text{Id}} e^{tN}$ mais $e^{tN} = I + tN$ car $N^2, N^3, \dots$ sont nulles. Donc

$$e^{tA} = e^{t\lambda} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & t e^{t\lambda} \\ 0 & e^{t\lambda} \end{pmatrix}$$

La solution du système

$$\begin{cases} x'(t) &= \lambda x(t) + y(t) \\ y'(t) &= \lambda y(t) \end{cases}$$

a donc pour solutions

$$\begin{cases} x(t) &= e^{t\lambda}(x_0 + ty_0) \\ y(t) &= e^{\lambda t}y_0 \end{cases}$$

4. Équations d'ordre n

On appelle équation linéaire d'ordre n une équation du type

$$(EL_n) \quad x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = b(t)$$

On se ramène à une équation linéaire d'ordre 1 en n variables en posant

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}'(t) = x_n(t) \\ x_n'(t) = -a_{n-1}(t)x_n(t) - \dots - a_1(t)x_2(t) - a_0(t)x_1(t) + b(t) \end{cases}$$

La matrice correspondante est donc

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \dots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix}$$

Posant donc $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{pmatrix}$ l'équation se réécrit

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$$

On peut vérifier que la méthode de variation des constantes se traduit de la manière suivante.

PROPOSITION 7.18. *Soit $(z_1, \dots, z_n)$ une base de l'espace des solutions de l'équation homogène associée*

$$(EH_n) \quad z^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)z^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)z'(t) + a_0(t)z(t) = 0$$

Alors les solutions de l'équation (EL_n) sont de la forme $\alpha_1(t)z_1(t) + \dots + \alpha_n(t)z_n(t)$ où les α_i sont solutions du système

$$\begin{cases} \alpha_1'(t)z_1(t) & + \dots + & \alpha_n'(t)z_n(t) & = 0 \\ \alpha_1'(t)z_1'(t) & + \dots + & \alpha_n'(t)z_n'(t) & = 0 \\ & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1'(t)z_1^{(n-1)}(t) & + \dots + & \alpha_n'(t)z_n^{(n-1)}(t) & = b(t) \end{cases}$$

4.1. Cas à coefficients constants. C'est essentiellement le seul cas que l'on saura résoudre complètement.

$$(ELCC_n) \quad x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1x'(t) + a_0x(t) = b(t)$$

et l'équation homogène associée est

$$(ELCCH_n) \quad z^{(n)}(t) + a_{n-1}z^{(n-1)}(t) + \dots + a_1z'(t) + a_0z(t) = 0$$

On vérifie par récurrence et en développant suivant la première colonne, que le polynôme caractéristique de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

est $P_A(\lambda) = \lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - \dots - a_1\lambda - a_0$. On sait que si λ est racine simple, $e^{\lambda t}$ est solution de l'équation **??**. Mais dans le cas général on trouve facilement toutes les solutions

PROPOSITION 7.19. (1) *Les solutions de l'équation $ELCCH_n$ sont données par $t^k e^{\lambda t}$ où λ est une racine de multiplicité m de P_A et $0 \leq k \leq m-1$. Si P_A est scindé sur $\mathbb{K}$ on obtient ainsi toutes les solutions.*

(2) *Si $\lambda = \mu + iv$ est une racine complexe de P_A de multiplicité m une base de l'espace des solutions réelles est obtenue en ajoutant aux solutions précédentes correspondant aux racines réelles, les fonctions $t^k e^{\mu t} \cos(\nu t)$ et $t^k e^{\mu t} \sin(\nu t)$.*

DÉMONSTRATION. On note D l'application linéaire de $C^\infty(\mathbb{R})$ dans lui-même donnée par $f \mapsto f'$ (la dérivation!). Bien évidemment D^k est l'application qui à f associe sa dérivée d'ordre k et notre équation $ELCCH_n$ s'écrit $P_A(D)z = 0$. Maintenant si on factorise P_A , $P_A(X) = \prod_{\lambda \in R} (X - \lambda)^{m_\lambda}$, l'équation se réécrit

$$\prod_{\lambda \in R} (D - \lambda)^{m_\lambda} z(t) = 0$$

Comme l'ordre dans lequel on écrit les facteurs est sans importance, on voit que si λ_0 est une racine de multiplicité m_0 , on peut écrire

$$\prod_{\lambda \in R, \lambda \neq \lambda_0} (D - \lambda)^{m_\lambda} (D - \lambda_0)^{m_0} z(t) = 0$$

Il suffit donc pour montrer que les $t^k e^{\lambda t}$ sont solutions de $ELCCH_n$, de montrer que $(D - \lambda_0)^{m_0} (t^k e^{\lambda_0 t}) = 0$. Cela se démontre aisément par récurrence sur m_0 :

— Si $m_0 = 1$, il faut montrer que $(D - \lambda_0)e^{\lambda_0 t} = 0$ soit que $(e^{\lambda_0 t})' = \lambda_0 e^{\lambda_0 t}$ ce qui est immédiat.

— Supposons vérifiée la propriété à l'ordre m_0 et vérifions là pour $m_0 + 1$. On doit montrer que $(D - \lambda_0)^{m_0+1}(t^k e^{\lambda_0 t}) = 0$ dès que $k \leq m_0$. Écrivons

$$(D - \lambda_0)^{m_0+1}(t^k e^{\lambda_0 t}) = (D - \lambda_0)^{m_0}(D - \lambda_0)(t^k e^{\lambda_0 t})$$

Or

$$(D - \lambda_0)(t^k e^{\lambda_0 t}) = k t^{k-1} e^{\lambda_0 t} + \lambda_0 t^k e^{\lambda_0 t} - \lambda_0 t^k e^{\lambda_0 t} = k t^{k-1} e^{\lambda_0 t}$$

Il suffit donc de vérifier que $(D - \lambda_0)^{m_0}(k t^{k-1} e^{\lambda_0 t}) = 0$ ce qui résulte immédiatement de l'hypothèse de récurrence car $k - 1 \leq m_0 - 1$.

□

EXEMPLE 7.20. On considère l'équation définie sur $U =]0, +\infty[$

$$(7.1) \quad x''(t) - x(t) = t e^t$$

L'équation homogène a pour solutions e^t, e^{-t} , vu que les polynômes caractéristique est $\lambda^2 - 1$. On écrit alors $x(t) = \alpha_1(t)e^t + \alpha_2(t)e^{-t}$ et il faut résoudre

$$\begin{cases} \alpha_1'(t)e^t + \alpha_2'(t)e^{-t} = 0 \\ \alpha_1'(t)e^t - \alpha_2'(t)e^{-t} = t e^t \end{cases}$$

soit $\alpha_1'(t) = \frac{t}{2}, \alpha_2'(t) = -\frac{t e^{2t}}{2}$. Donc $\alpha_1(t) = \frac{t^2}{4}$ et

$$\alpha_2(t) = -\frac{1}{2} \int s e^{2s} ds = -\left[\frac{1}{4} s e^{2s}\right]^t + \frac{1}{4} \int e^{2s} ds = -\frac{t}{4} e^{2t} + \frac{e^{2t}}{8}.$$

Donc $x(t) = e^t(\frac{t^2}{4}) - (\frac{t}{4} e^t - \frac{1}{8} e^t) + c_1 e^t + c_2 e^{-t} = (\frac{t^2}{4} - \frac{t}{4} + b_1) e^t + b_2 e^{-t}$.

5. Exercices

(1) (Wronskien) Soient $f_1, \dots, f_n$ des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.

(a) On suppose que les fonctions sont linéairement dépendantes. En déduire que la matrice

$$A_n(f_1, \dots, f_n) = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

a un noyau non réduit à zéro.

(b) En déduire que le déterminant $W_n(f_1, \dots, f_n)$ de cette matrice (appelé Wronskien) est identiquement nul.

(c) On suppose maintenant que le Wronskien ne s'annule pas : on considère l'équation différentielle en y donnée par le déterminant $(n+1) \times (n+1)$

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n & y \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' & y' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} & y_n^{(n-1)} \\ f_1^{(n)} & f_2^{(n)} & \cdots & f_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0$$

(d) Montrer que l'équation s'écrit sous la forme $ELCCH_n$ si et seulement si $W_n(f_1, \dots, f_n)$ ne s'annule pas.

(e) Montrer que les fonctions $y(x) = f_j(x)$ sont solutions de cette équation.

(f) Montrer que l'espace des solutions est de dimension n . En déduire toutes les solutions de cette équation.

(2) Soit $P(X)$ un polynôme. On considère l'équation

$$(\star) \quad P(D)x(t) = e^{\mu t}$$

(a) Montrer qu'il existe une solution de la forme $Ce^{\mu t}$ si et seulement si μ n'est pas racine du polynôme. On montrera que $P(D)e^{\mu t} = P(\mu)e^{\mu t}$.

(b) On suppose maintenant que μ est racine du polynôme P de multiplicité m . Montrer par récurrence que $(D-\mu)^m(t^m e^{\mu t}) = Ce^{\mu t}$ où C est une constante non nulle.

(c) En écrivant $P(X) = Q(X)(X-\mu)^m$ où Q est un polynôme qui n'a pas μ pour racine (donc $Q(\mu) \neq 0$), montrer que $P(D)(t^m e^{\mu t}) = Ke^{\mu t}$ avec $K \neq 0$.

(d) Montrer qu'il existe une constante $A \neq 0$ telle que $At^m e^{\mu t}$.

(e) Décrire toutes les solutions de $(\star)$

(f) Même question pour

(★★)

$$P(D)x(t) = t^k e^{\mu t}$$

Chapitre 8

Théorie qualitative des équations différentielles

Nous allons étudier de manière qualitative les solutions de l'équation autonome dans $\mathbb{R}^n$:

$$(S) \quad x'(t) = f(x(t))$$

où $x : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^1 .

On peut se demander pourquoi on ignore le cas plus général

$$x'(t) = F(t, x(t))$$

où $F : U \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Les arguments suivants sont plus ou moins convaincants :

a) En petite dimension le cas autonome est effectivement plus simple (on l'a déjà constaté en dimension 1).

b) Le cas général se ramène au cas autonome si on ajoute une dimension : on pose

$$y = (s, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

et

$$f(y) = f(s, x) = (1, F(s, x))$$

Alors l'équation $y' = f(y)$ se réécrit

$$\begin{cases} s'(t) = 1 \\ x'(t) = F(s(t), x(t)) \end{cases}$$

d'où $s(t) = t + c$ et si on impose $s(0) = 0$, $x(0) = x_0$, on a $s = t$ et donc

$$x'(t) = F(t, x(t)).$$

c) De même une équation différentielle autonome d'ordre n ,

$$(E) \quad x^{(n)}(t) = g(x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t))$$

se réécrit

$$\begin{cases} x_1'(t) &= x_2(t) \\ \vdots & \vdots \\ x_{n-1}'(t) &= x_n(t) \\ x_n'(t) &= g(x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{cases}$$

donc en posant $y = (x_1, \dots, x_n)$ et $f(x_1, \dots, x_n) = (x_2, \dots, x_n, g(x_1, \dots, x_n))$ ce système est équivalent à

$$y'(t) = f(y(t))$$

Par exemple, l'équation du pendule s'écrit $\theta''(t) + \frac{g}{\ell} \sin \theta(t) = 0$, qui se ramène à

$$\begin{cases} \theta'(t) = \varphi(t) \\ \varphi'(t) = -\frac{g}{\ell} \sin \theta(t) \end{cases}$$

1. Résultats fondamentaux

On appelle solution de (S) une application $x : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ vérifiant (S).

On dit que x est une solution maximale s'il n'existe pas d'autre solution la prolongeant. On a alors

THÉORÈME 8.1 (Théorème de Cauchy-Lipschitz (version générale)). *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1 . Alors pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$, le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

possède une unique solution maximale, définie sur $]t_-, t_+[$ ($t_- \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $t_+ \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$).

REMARQUES 8.2. (1) En général la solution n'est pas globale comme on l'a vu en dimension 1.

(2) La condition que f soit C^1 est nécessaire, comme on l'a vu en dimension 1 pour $h' = \sqrt{|h|}$.

Pour (S) l'analogue du Théorème d'explosion en temps fini est un peu plus compliqué à énoncer en dimension $n > 1$.

On a cependant

PROPOSITION 8.3. *Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 et $x : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une solution maximale, où $I =]t_1, t_2[$.*

Alors si $t_2 < +\infty$ (resp. $t_1 > -\infty$) on a $\lim_{t \rightarrow t_2^-} |x(t)| = +\infty$ (resp. $\lim_{t \rightarrow t_1^+} |x(t)| = +\infty$).

Notons enfin une remarque importante : si $x(t)$ est solution, $x(t - t_0)$ est solution quel que soit t_0 .

DÉFINITION 8.4. Soit $x : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une solution maximale de (S). La courbe orientée $x(I)$ est appelée trajectoire de (S).

REMARQUE 8.5. D'après Cauchy-Lipschitz, deux trajectoires ne peuvent se croiser, car si x, y sont deux solutions et $x(t_0) = y(t_1)$, alors $\tilde{x}(t) = x(t + t_0)$ et $\tilde{y}(t) = y(t + t_1)$ sont aussi solutions et $\tilde{x}(0) = \tilde{y}(0)$, donc $\tilde{x} = \tilde{y}$, i.e. $x(t + t_0) = y(t + t_1)$, soit $x(t) = y(t + t_1 - t_0)$ et donc x et y décrivent la même trajectoire.

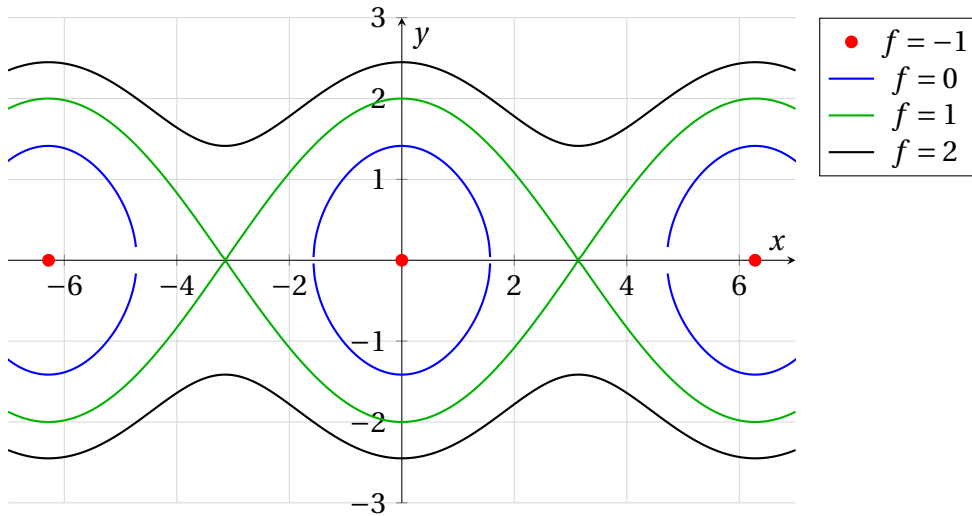


FIGURE 8.1 – Trajectoires du pendule / courbes de niveau de $f(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \cos(x)$,

EXEMPLE 8.6. Pendule

$$x''(t) + \sin(x(t)) = 0$$

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -\sin(x(t)) \end{cases}$$

Conservation de l'énergie : la quantité

$$E(t) = \frac{1}{2}y(t)^2 - \cos(x(t))$$

reste constante, car $E'(t) = yy' + \sin(x)x' = 0$.

Les trajectoires sont donc contenues dans les courbes de niveau de $\frac{1}{2}y^2 - \cos(x)$.

DÉFINITION 8.7. Le portrait de phase de (S) est l'ensemble des trajectoires orientées de (S).

Parmi les trajectoires, on distingue :

- (a) les **équilibres** ou solutions constantes correspondant aux zéros de f .
- (b) les courbes fermées, correspondant à des mouvements périodiques : si $x(t_0) = x(t_1)$ on aura $x(t + (t_1 - t_0)) = x(t)$, on a donc une solution de période $t_1 - t_0$. Physiquement ce sont des oscillations.

Le Théorème de Cauchy-Lipschitz se traduit par

PROPOSITION 8.8. Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 . Alors par tout point de Ω passe une trajectoire unique.

2. Portrait de phase d'un système linéaire

Soit $x'(t) = Ax(t)$.

- Les points d'équilibre correspondent à $Ax = 0$, i.e. $\text{Ker}(A)$.
- Les solutions $x(t) = e^{\lambda t}v$ où v est vecteur propre de valeur propre $\lambda \neq 0$ correspondent à des trajectoires radiales (ou rectilignes).

D'autre part si A et B sont conjuguées, i.e. $B = P^{-1}AP$, le portrait de phase de $x'(t) = Ax(t)$ est l'image par P de celui de $y'(t) = By(t)$. En effet $Py(t)$ vérifie

$$y'(t) = P^{-1}APy(t) \Rightarrow Py'(t) = APy(t)$$

donc $x(t) = Py(t)$ vérifie $x'(t) = Ax(t)$.

On peut donc - quitte à composer par un isomorphisme linéaire - remplacer A par une matrice semblable.

Pour le cas $n = 2$ on a classifié les matrices 2×2 réelles.

- (1) Si A a deux valeurs propres réelles distinctes elle est semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.

(a) $\mu > \lambda > 0$: Nœud répulsif ($x(t), y(t) = (e^{\lambda t}x_0, e^{\mu t}y_0)$)

- un seul équilibre $(0, 0)$
- les trajectoires sont contenues dans $\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^\lambda x^\mu = y^\lambda$ (exemple : $\lambda = 1$, $\mu = 2$: paraboles)

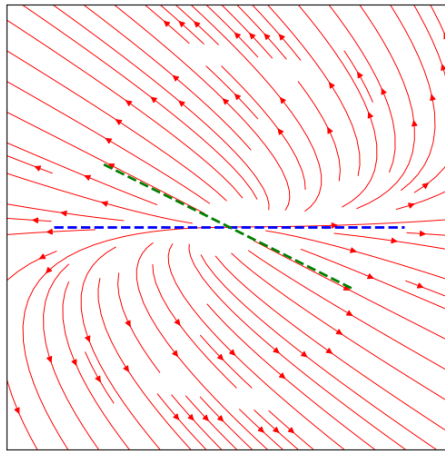


FIGURE 8.2 – Nœud répulsif (ou instable)

Notons que les solutions de $x'(t) = -Ax(t)$ sont obtenues en posant $y(t) = x(-t)$ qui vérifie $y'(t) = Ay(t)$. Donc les trajectoires des deux équations sont les mêmes avec le sens des flèches inversé.

On dit que c'est un nœud répulsif instable : si on part tout près de l'équilibre on s'en éloigne de plus en plus.

(b) $\mu < \lambda < 0$: Nœud attractif stable

Les trajectoires pour $x'(t) = Ax(t)$ sont les mêmes que pour $\mu > \lambda > 0$ mais avec le sens inversé. On a donc

On parle de nœud attractif ou nœud stable : si on part d'un point quelconque on se rapproche de O . Plus précisément $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$.

(c) $\lambda < 0 < \mu$: Col (ou selle)

$x(t) = x_0 e^{\lambda t}$, $y(t) = y_0 e^{\mu t}$ donc $y(t)^{(-\lambda)} x(t)^\mu = C$.

Les courbes $y^{-\lambda} x^\mu = c$ sont des sortes d'hyperboles (vraies hyperboles pour $\lambda = -\mu$).

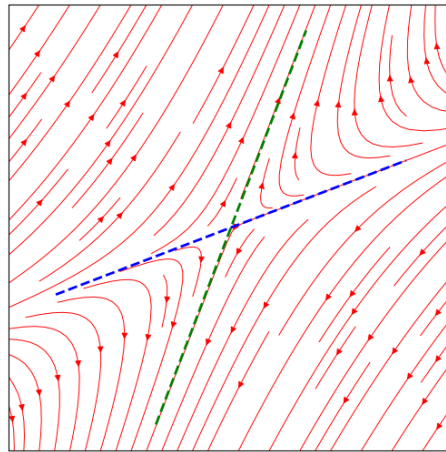


FIGURE 8.3 – Col ou Selle

Les seules solutions qui tendent vers 0 lorsque $t \rightarrow +\infty$ sont celles situées sur l'axe des x .

(2) $\lambda = \mu > 0$, A non diagonalisable.

On a vu que A est semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

On a donc $\begin{cases} x'(t) = \lambda x(t) + y(t) \\ y'(t) = \lambda y(t) \end{cases}$

donc $y(t) = e^{\lambda t} y_0$ et $x(t) = (x_0 + t y_0) e^{\lambda t}$.

Pour $t \rightarrow -\infty$, $(x(t), y(t))$ tend vers 0, et $\frac{|x(t)|}{|y(t)|} \rightarrow +\infty$ ainsi que si $y(t) > 0 \Rightarrow x(t) < 0$ (et si $y(t) < 0 \Rightarrow x(t) > 0$).

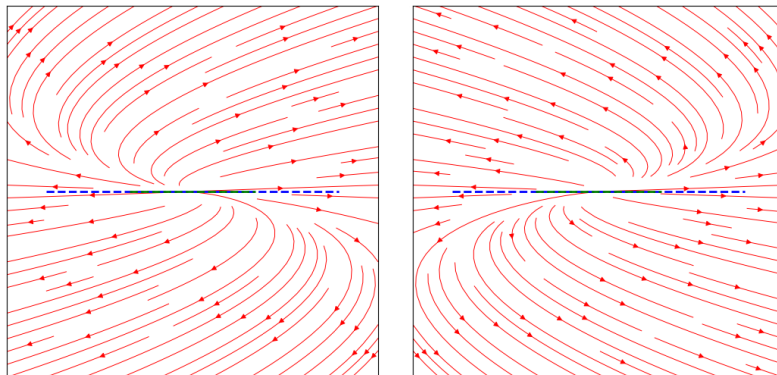


FIGURE 8.4 – Nœud impropre répulsif (ou instable) et les deux orientations possibles

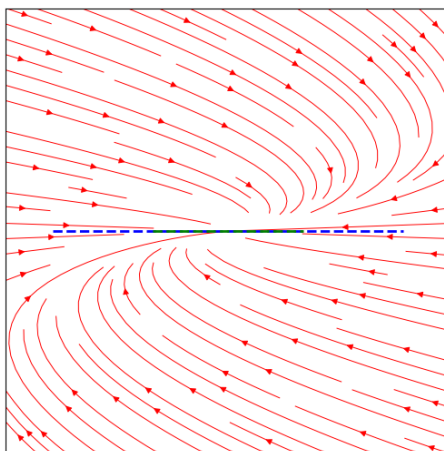
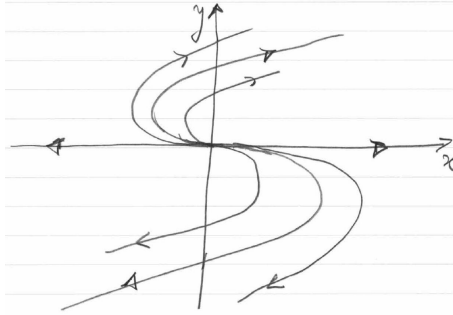


FIGURE 8.5 – Nœud impropre attractif (ou stable)

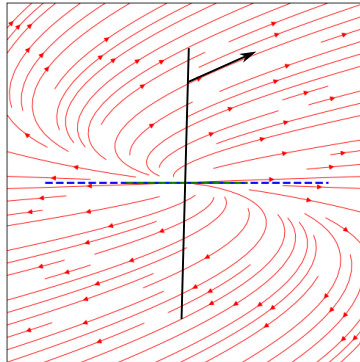
Le maximum de x est obtenu lorsque $x'(t) = 0$ soit $y(t) = -\lambda x(t)$.

Pour $t \rightarrow +\infty$, $(x(t), y(t))$ tend vers $+\infty$ et $\frac{|x(t)|}{|y(t)|} \rightarrow +\infty$.

Si $y(t) > 0$ alors $x(t) > 0$.



REMARQUE 8.9. Pour distinguer les deux orientations du noeud impropre on choisit un point qui ne soit pas sur un axe distinct de l'espace propre (qui est une droite), et on regarde l'orientation de Av par rapport à v .



EXEMPLE 8.10. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. La trace de A égale 4 et son déterminant 2, donc le polynôme caractéristique est $x^2 - 4x + 2 = 0$ donc son discriminant

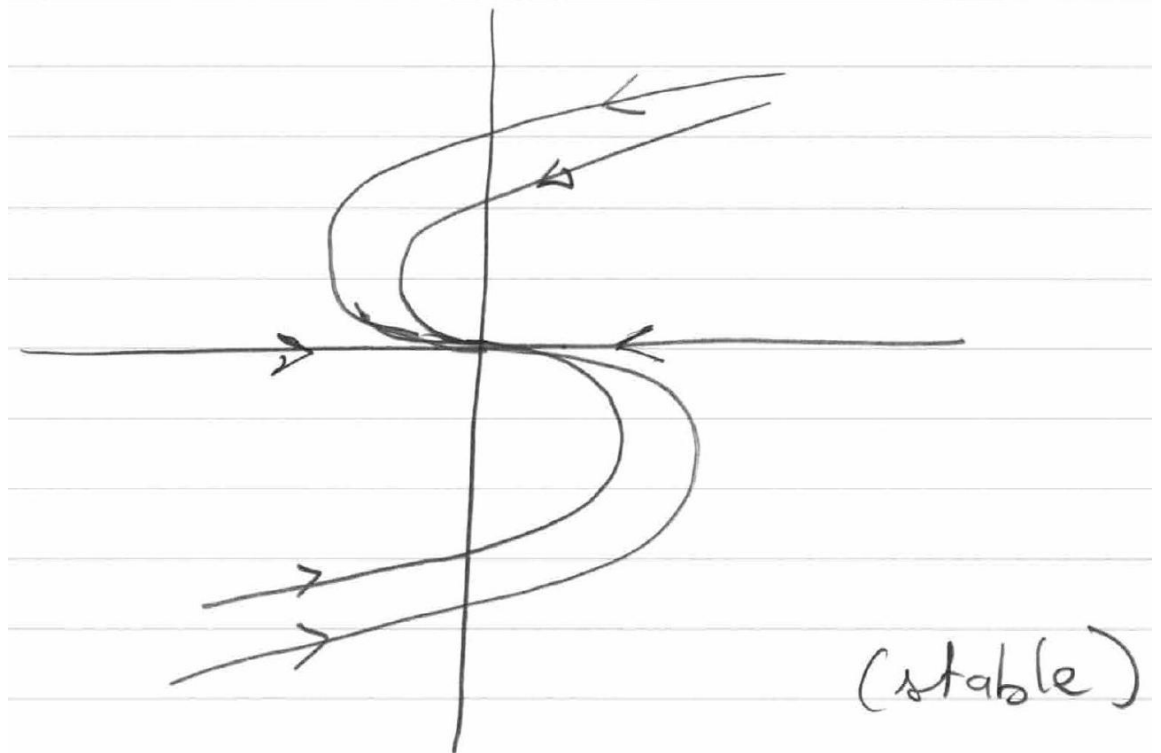
est $\Delta = 0$ et 2 est racine double. La matrice n'est pas diagonalisable, sinon elle serait diagonale. Le portrait de phase est donc celui d'un nœud impropre. L'es-

pace propre est $\ker \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

C'est un nœud impropre répulsif (instable).

4') $\mu < \lambda < 0$: nœud impropre attractif

Il suffit de renverser le sens des flèches par rapport au dessin précédent.



(3) Deux valeurs propres complexes conjuguées $a \pm ib$.

On se ramène à $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Les vecteurs propres complexes sont donnés par, pour $a + ib$:

$$\begin{cases} [a - (a + ib)]x - by = 0 \\ bx + [a - (a + ib)]y = 0 \end{cases}$$

$y = ix$, $v_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ et $v_- = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$.

L'espace des solutions complexes a pour base (sur $\mathbb{C}$)

$$e^{(a+ib)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad e^{(a-ib)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

L'espace des solutions réelles a pour base les parties réelles et imaginaires de ces solutions :

$$\begin{pmatrix} e^{at} \cos(bt) \\ e^{at} \sin(bt) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{at} \sin(bt) \\ -e^{at} \cos(bt) \end{pmatrix}$$

Les vecteurs $\begin{pmatrix} \cos bt \\ \sin bt \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \sin bt \\ -\cos bt \end{pmatrix}$ "tournent" à vitesse b , et leur norme est multipliée par e^{at} .

(a) $a > 0$: Foyer répulsif (instable)

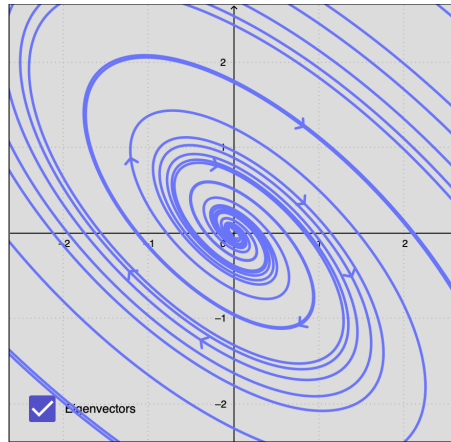


FIGURE 8.6 – Foyer répulsif (ou instable)

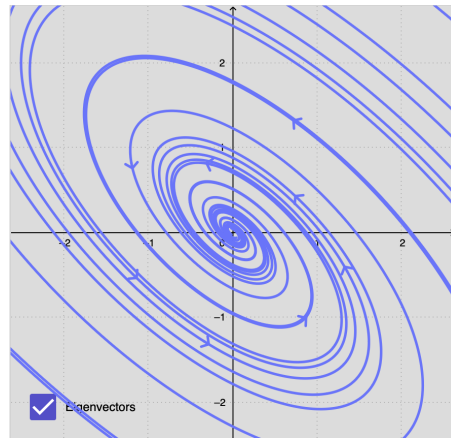


FIGURE 8.7 – Foyer attractif (ou stable)

(b) $a < 0$: Foyer attractif (stable)

- (c) Cas $a = 0$: Centre. Les trajectoires sont des cercles (en fait après transformation linéaire, des ellipses).

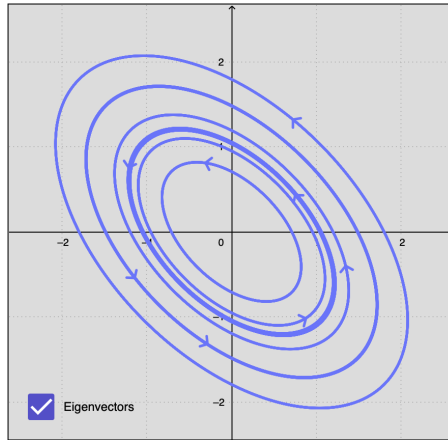


FIGURE 8.8 – Centre

0.1. Quelques cas "dégénérés".

- (a) $\lambda = \mu > 0$, A diagonalisable. Les trajectoires sont $(e^{\lambda t} x_0, e^{\lambda t} y_0)$, ce sont des demi-droites radiales. On appelle le portrait de phase un **soleil**

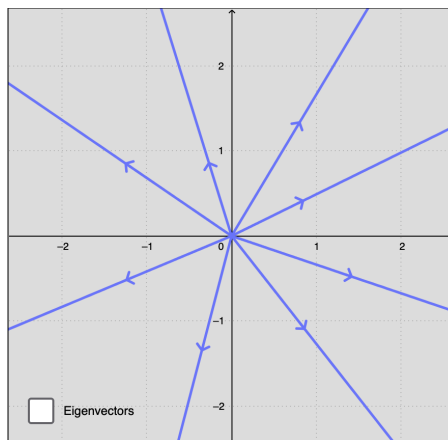


FIGURE 8.9 – Soleil répulsif (instable)

- (b) $\lambda > 0, \mu = 0$

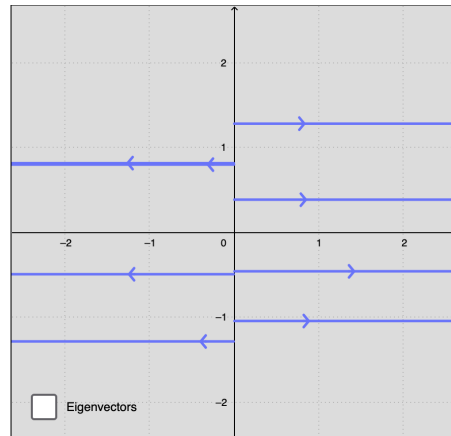


FIGURE 8.10 – Radiateur répulsif (ou instable)

(c) $\lambda = \mu = 0$, A non-diagonalisable. On se ramène au cas $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ L'équation est alors donnée par

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = 0 \end{cases}$$

soit $y(t) = y_0, x(t) = (y_0 t + x_0)$. On obtient un cisaillement.

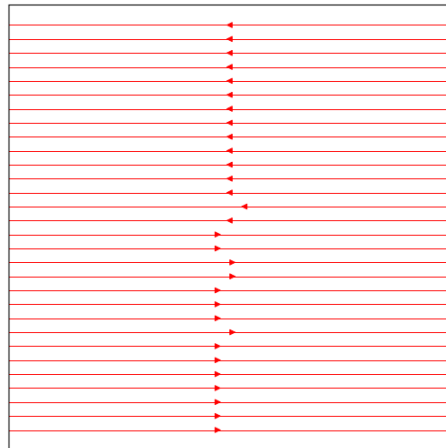


FIGURE 8.11 – Cisaillement (instable)

Comme le polynôme caractéristique de A est $\lambda^2 - \text{Tr}(A)\lambda + \det(A)$, on peut distinguer les cas en fonction des signes de $\Delta = \text{Tr}(A)^2 - 4\det(A)$, $\det(A)$ et $\text{Tr}(A)$:

I) $\Delta > 0 \Rightarrow 2$ v.p. réelles distinctes

- (1) $\text{Tr}(A), \det(A) > 0 \Rightarrow \lambda, \mu > 0$: Nœud répulsif
- (2) $\text{Tr}(A) < 0, \det(A) > 0 \Rightarrow \lambda, \mu < 0$: Nœud attractif
- (3) $\det(A) < 0 \Rightarrow \lambda < 0 < \mu$: Col ou selle
- (4) $\det(A) = 0, \lambda = 0$:
 - (a) si $\text{Tr}(A) > 0$ radiateur répulsif,
 - (b) si $\text{Tr}(A) < 0$ on a un radiateur attractif,
 - (c) si $\text{Tr}(A) = 0$, 0 est valeur propre double on a
 - (i) si A est la matrice nulle, tous les points sont points d'équilibre
 - (ii) Si A n'est pas diagonalisable, on a un « shear flow » et en français « cisaillement » ou « flot de transvection »

II) $\Delta = 0 \Rightarrow$ une valeur propre double

- (1) A diagonalisable : Soleil
- (2) A non-diagonalisable :
 - $\text{Tr}(A) > 0$: Nœud impropre répulsif
 - $\text{Tr}(A) < 0$: Nœud impropre attractif

III) $\Delta < 0$

- (1) $\text{Tr}(A) > 0$: Foyer répulsif
- (2) $\text{Tr}(A) < 0$: Foyer attractif
- (3) $\text{Tr}(A) = 0$: Centre

REMARQUE 8.11. On vérifie que pour les systèmes linéaires de $\mathbb{R}^2$ on a stabilité si $\Re(\lambda) < 0$.

Lorsque $\Re(\lambda) = 0$ on peut avoir stabilité (centre $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$) ou pas (cisaillement, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$).

1. Linéarisation et Notions de stabilité

1.1. Définitions, Généralités.

DÉFINITION 8.12. On appelle flot (au temps t) de l'équation $x'(t) = f(x(t))$ l'application $x_0 \mapsto x(t)$ où $x(t)$ est la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

On note $\varphi^t(x_0) = x(t)$.

L'application $x_0 \mapsto \varphi^t(x_0)$ s'obtient en suivant pendant le temps t la trajectoire de (S) passant par x_0 .

EXEMPLES 8.13. (1) Dans $\mathbb{R}^2$, si $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et (S) $X' = AX$, alors $\varphi^t(x_0, y_0) = ((x_0 + ty_0)e^{\lambda t}, y_0 e^{\lambda t})$.

(2) Dans $\mathbb{R}^2$, si $A = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$, $\varphi^t(x_0) = \begin{pmatrix} x_0 \cos(bt) + y_0 \sin(bt) \\ -x_0 \sin(bt) + y_0 \cos(bt) \end{pmatrix}$ = rotation d'angle bt

(3) Dans $\mathbb{R}$, si on considère (S) $x' = x^2$, $\varphi^t(x_0) = \frac{x_0}{1-tx_0}$.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application C^1 et considérons le système (S) $x'(t) = f(x(t))$

Rappel : On appelle point d'équilibre de (S) un point x_0 tel que $f(x_0) = 0$. L'application constante $t \mapsto x_0$ est donc solution de (S).

EXEMPLE 8.14. (1) $x' = x(x-1)$, on a deux points d'équilibre $x_0 = 1, x_0 = 0$.

(2) $x' = Ax$, les points d'équilibre correspondent à $\text{Ker}(A)$.

DÉFINITION 8.15 (Stabilité). On dit que x_0 est un point d'équilibre stable si pour toute boule ouverte $B(x_0, \varepsilon)$ il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x \in B(x_0, \delta), \forall t \geq 0, \varphi^t(x) \in B(x_0, \varepsilon)$.

Sinon le point d'équilibre est dit instable.

DÉFINITION 8.16 (Stabilité asymptotique). On dit que l'équilibre x_0 de (S) est asymptotiquement stable si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(1) il est stable

(2) il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in B(x_0, \varepsilon)$ on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi^t(x) = x_0$.

EXEMPLES 8.17. (1) Les nœuds attractifs, foyers attractifs, soleil attractif sont asymptotiquement stables. Le centre est stable mais non asymptotiquement stable. Les autres cas (non dégénérés) ne sont pas stables.

(2) Le pendule : la position d'équilibre $x = 0$ stable mais pas asymptotiquement stable. La position d'équilibre $x = \pi$ est instable.

REMARQUE 8.18.  Pour la stabilité asymptotique, il faut bien vérifier les deux conditions (1) et (2). En particulier il est faux de croire que (2) implique (1) comme le montre l'exemple ci-dessous.

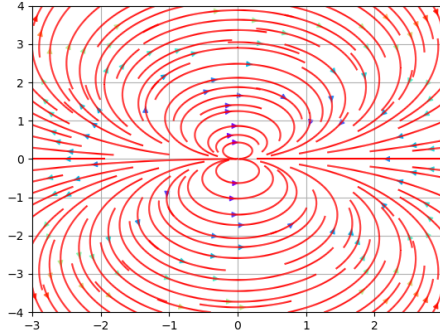


FIGURE 8.12 – Equation $\begin{cases} x'(t) = y(t)^2 - x(t)^2 \\ y'(t) = -2x(t)y(t) \end{cases}$. Toutes les trajectoires convergent vers 0 en $t = +\infty$, mais le système n'est pas stable : il y a des points arbitrairement proches de 0 qui vont très loin de 0.

1.2. Étude de $x' = f(x)$ pour $n = 1$. Les équilibres correspondent aux points u tels que $f(u) = 0$.

Soit u_0 un tel équilibre :

- (1) si $f(x) > 0$ pour $x \in]u_0 - \varepsilon, u_0[$ et $f(x) < 0$ pour $x \in]u_0, u_0 + \varepsilon[$, alors u_0 est asymptotiquement stable.

En effet si $x_0 \in]u_0 - \varepsilon, u_0[$:

- $x(t)$ est croissante
- $x(t) < u_0$ par Cauchy-Lipschitz (deux solutions ne se croisent pas!)

donc :

- (1) $x(t) \in]u_0 - \varepsilon, u_0[$ pour $t \geq 0$
- (2) $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_\infty$ existe
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} x'(t) = f(x_\infty)$

Mais si on avait $f(x_\infty) > 0$, on aurait $x'(t) = f(x(t)) > \alpha_0 > 0$ pour $t \geq T$, d'où $x(t) - x(T) > (t - T)\alpha_0$ et donc pour t assez grand $x(t) > u_0$, contradiction (comme on l'a déjà vu Proposition 6.14!).

Donc $f(x_\infty) = 0$ d'où $x_\infty = u_0$.

De même si $x_0 \in]u_0, u_0 + \varepsilon[$, $x(t)$ décroît et $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = u_0$.

Donc u_0 est un équilibre asymptotiquement stable. Notons que l'hypothèse sur f est en particulier vérifiée si $f'(u_0) < 0$.

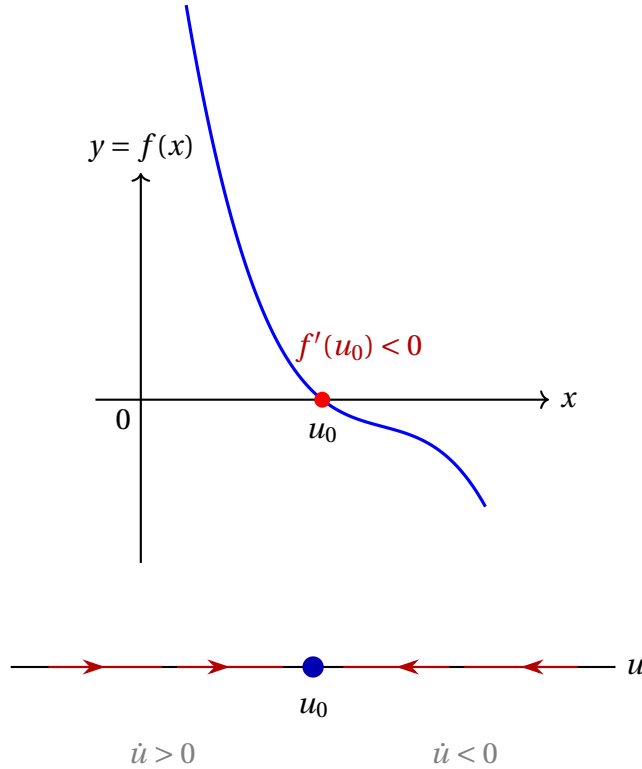


FIGURE 8.13 – Le portrait de phase pour $x'(t) = f(x(t))$ avec $f'(u_0) < 0$

Notons que dans le cas $x_0 \in]u_0 - \varepsilon, u_0[$ le Théorème des bouts nous garantit que la solution maximale est définie au moins sur $]0, +\infty[$, car $x(t)$ reste dans $]u_0 - \varepsilon, u_0 + \varepsilon[$.

Dans le cas $x_0 \in]u_0, u_0 + \varepsilon[$ on peut par contre avoir explosion en temps fini à droite, i.e. $I =]0, t_+[$ avec $t_+ < +\infty$, sauf s'il existe un autre zéro de f supérieur à u_0 , $u_0 < u_1$ car alors $x(t) \in]u_0, u_1[$ et la solution est globale.

- (2) si $f(x) > 0$ sur $]u_0 - \varepsilon, u_0 + \varepsilon[$ et $f(x) < 0$ sur $]u_0 - \varepsilon, u_0[$, alors le même raisonnement que dans le cas précédent montre que u_0 est un équilibre instable. En effet, si $g(x) = -f(x)$, les trajectoires de g sont obtenues à partir de celles de f en renversant le sens du temps, et on aura $g'(u_0) < 0$. En particulier on est dans ce cas si $f'(u_0) > 0$.

EXEMPLE 8.19. (1) $x'(t) = (x(t)^2 - 1)$

Ici $f(x) = (x^2 - 1)$, $f'(x) = 2x$ donc il y a deux équilibres, $x = -1, x = +1$. En ces points $f'(1) = 2$, $f'(-1) = -2$, donc 1 est instable, -1 asymptotiquement stable.

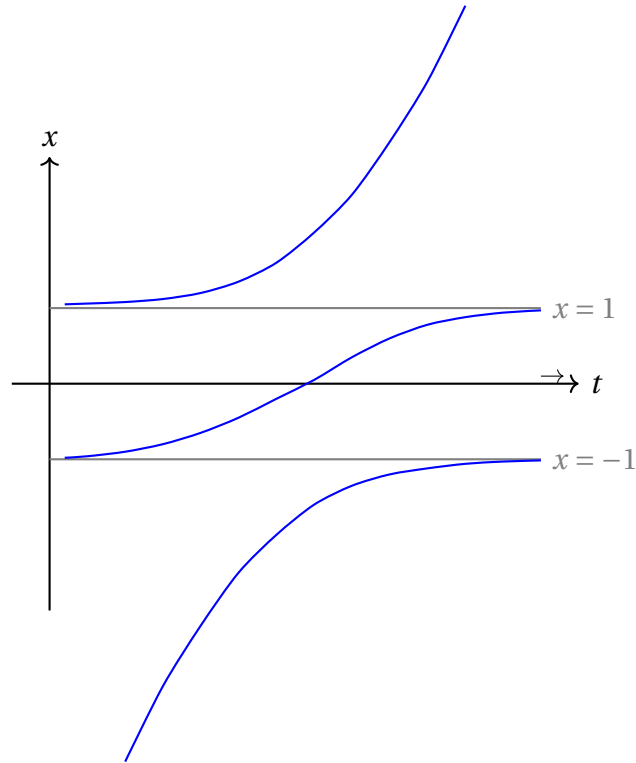


FIGURE 8.14 – Graphes des solutions de $x'(t) = (x(t)^2 - 1)$

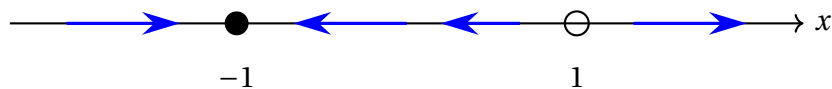


FIGURE 8.15 – Portrait de phase de $x'(t) = (x(t)^2 - 1)$

1.3. Stabilité de $X' = AX$ pour $n \geq 2$.

THÉORÈME 8.20 (Critère de Lyapounov-cas linéaire). *Soit le système $X' = AX$. L'origine est **asymptotiquement stable** si et seulement si les valeurs propres de A sont de partie réelle < 0 .*

Dans le cas où A est diagonalisable, la démonstration est facile : si $v_1, \dots, v_n$ est une base de vecteurs propres associée aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, alors les solutions de

(S) sont :

$$x(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \cdots + \alpha_n e^{\lambda_n t} v_n$$

Or, si $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$, alors $e^{\lambda_j t} \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$, donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$.

D'autre part, si $\operatorname{Re} \lambda_j < -a < 0$, alors :

$$\|x(t)\| \leq e^{-at} \sum_{j=1}^n |\alpha_j| \|v_j\|$$

Puisque $\|x_0\| = \|\sum \alpha_j v_j\| \geq c_0 \sum |\alpha_j| \|v_j\|$, on a, pour $\|x_0\| \leq \frac{\varepsilon}{c_0}$,

$$\forall t \geq 0, \|x(t)\| \leq \varepsilon$$

2. Stabilité asymptotique : cas non-linéaire

On considère (S) $x'(t) = f(x(t))$, avec x_0 un point d'équilibre.

DÉFINITION 8.21. Le système linéarisé de (S) au voisinage de x_0 est donné par :

$$y'(t) = df(x_0)y(t)$$

C'est un système linéaire à coefficients constants.

Dans quelle mesure ce système linéaire détermine-t-il le comportement du système non linéaire (S) ?

EXEMPLE 8.22. Le pendule

$$\theta'' + \sin(\theta) = 0$$

qui se ramène à

$$\begin{cases} \theta'(t) = \varphi(t) \\ \varphi'(t) = -\frac{g}{\ell} \sin \theta(t) \end{cases}$$

Son linéarisé au point d'équilibre $(0, 0)$ est donné par

$$\begin{cases} \theta'(t) = \varphi(t) \\ \varphi'(t) = -\frac{g}{\ell} \theta(t) \end{cases}$$

qui correspond à l'équation du second ordre $\theta''(t) + \theta(t) = 0$ (oscillateur harmonique) celui en l'équilibre $(\pi, 0)$ (équilibre « masse en haut ») par

$$\begin{cases} \theta'(t) = \varphi(t) \\ \varphi'(t) = +\frac{g}{\ell} \theta(t) \end{cases}$$

qui correspond à l'équation du second ordre $\theta''(t) - \theta(t) = 0$ (répulsor harmonique)

Si l'on pose $x(t) = x_0 + \varepsilon y(t)$, en supposant que ε est très petit, on obtient :

$$\begin{aligned}\varepsilon y'(t) &= \varepsilon df(x_0)y(t) + \varepsilon^2 r(y) \\ y'(t) &= df(x_0)y(t) + \varepsilon r(y)\end{aligned}$$

On peut donc espérer que les solutions de $y'(t) = df(x_0)y(t)$ constituent la partie principale de $x(t)$. Cela n'est pas tout à fait évident, mais on a :

THÉORÈME 8.23 (Théorème de stabilité de Lyapounov). *Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 , et soit x_0 un équilibre de $x'(t) = f(x(t))$. Alors :*

- (1) *Si toutes les valeurs propres de $df(x_0)$ ont une partie réelle strictement négative, alors x_0 est **asymptotiquement stable**.*
- (2) *Si $df(x_0)$ possède au moins une valeur propre de partie réelle strictement positive, alors x_0 est **instable**.*

On aura besoin du résultat suivant

PROPOSITION 8.24. *Si A a ses valeurs propres de partie réelle < 0 , il existe une forme quadratique définie positive Q , de matrice B , telle que :*

$$\langle BA\xi, \xi \rangle \leq -\frac{c}{2} \langle B\xi, \xi \rangle, \quad c > 0$$

On a vu que si A est diagonalisable la Proposition se démontre facilement (cf. Théorème 8.20).

DÉMONSTRATION. On pose $\|x\|^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2$ et

$$Q(x) = \int_0^{+\infty} \|e^{sA}x\|^2 ds$$

Cette intégrale est bien définie justement parce que les valeurs propres de A sont de partie réelle négative. On a alors

$$\frac{d}{dt} Q(e^{tA}x)|_{t=0} = \frac{d}{dt} \langle B e^{tA}x, e^{tA}x \rangle|_{t=0} = \langle B A e^{tA}x, e^{tA}x \rangle|_{t=0} = \langle B A x, x \rangle$$

D'un autre côté

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} Q(e^{tA}x)|_{t=0} &= \frac{d}{dt} \int_0^{+\infty} \|e^{sA} e^{tA}x\|^2 ds = \frac{d}{dt} \int_0^{+\infty} \|e^{(s+t)A}x\|^2 ds \\ &= \frac{d}{dt} \int_t^{+\infty} \|e^{(s)A}x\|^2 ds = -\|e^{tA}x\|^2|_{t=0} = -\|x\|^2\end{aligned}$$

□

Alors, si $y(t)$ est solution de l'équation $y'(t) = Ay(t)$, on a $y(t) = e^{At}y_0$, et :

$$\frac{d}{dt}\langle By(t), y(t) \rangle = 2\langle By'(t), y(t) \rangle = \langle BAy(t), y(t) \rangle \leq -c\langle By(t), y(t) \rangle$$

Maintenant l'inégalité $f'(t) \leq -cf(t)$ entraîne

$$(f(t)e^{ct})' \leq 0$$

donc $f(t)e^{ct}$ est décroissante, soit $f(t) \leq f(0)e^{-ct}$ pour $t \geq 0$.

En appliquant ceci à $f(t) = \langle By(t), y(t) \rangle$ on obtient

$$\langle By(t), y(t) \rangle \leq \langle By_0, y_0 \rangle e^{-ct}$$

d'où

$$\langle By(t), y(t) \rangle \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow +\infty$$

D'autre part si c, C sont des constantes telle que $c\|x\|^2 \leq \langle Bx, x \rangle \leq C\|x\|^2$, on en déduit que si $\|x\|^2 \leq \frac{c\varepsilon}{C}$ on a $\langle Bx, x \rangle \leq c\varepsilon$ donc $\langle Bx(t), x(t) \rangle \leq c\varepsilon$ pour tout $t \geq 0$, et donc $\|x\|^2 \leq \varepsilon$. On a donc montré la stabilité asymptotique de l'origine pour $X' = AX$.

REMARQUE 8.25. Si $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_j < -c$, on peut prendre $B = I$.

REMARQUE 8.26. On dit que $\langle B\xi, \xi \rangle$ est une **fonction de Lyapounov** pour le système $y'(t) = Ay(t)$. Une fonction de Lyapounov est une fonction décroissante le long des trajectoires, du moins au voisinage de l'équilibre. C'est l'analogue de la décroissance de l'énergie pour un système avec friction en physique.

Si $x(t) = x_0 + u(t)$, alors :

$$f(x_0 + u) = df(x_0)u + \|u\|\varepsilon(u)$$

donc :

$$\frac{d}{dt}\langle Bu(t), u(t) \rangle = 2\langle Bu'(t), u(t) \rangle = -c\langle Bu(t), u(t) \rangle + \langle B\|u\|\varepsilon(u), u(t) \rangle \leq (-c + \varepsilon)\langle Bu(t), u(t) \rangle$$

On obtient donc :

$$f(t) = \langle Bu(t), u(t) \rangle \Rightarrow f'(t) \leq -(c - \varepsilon)f(t) \Rightarrow f(t) \leq f(0)e^{-(c-\varepsilon)t}$$

Pour $\varepsilon < \frac{c}{2}$, on a :

$$\langle Bu(t), u(t) \rangle \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow +\infty \Rightarrow u(t) \rightarrow 0$$

EXEMPLE 8.27. Le pendule avec frottement :

$$\ddot{x}(t) + k\dot{x}(t) + \sin x(t) = 0$$

Cela s'écrit comme un système :

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -ky(t) - \sin x(t) \end{cases}$$

Les équilibres sont $(x_0, y_0) = (0, 0)$ et $(\pi, 0)$.

Linéarisation en $(0, 0)$:

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -ky(t) - x(t) \end{cases}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -k \end{pmatrix}$$

$$\text{tr}(A) = -k, \det(A) = 1, \Delta = k^2 - 4$$

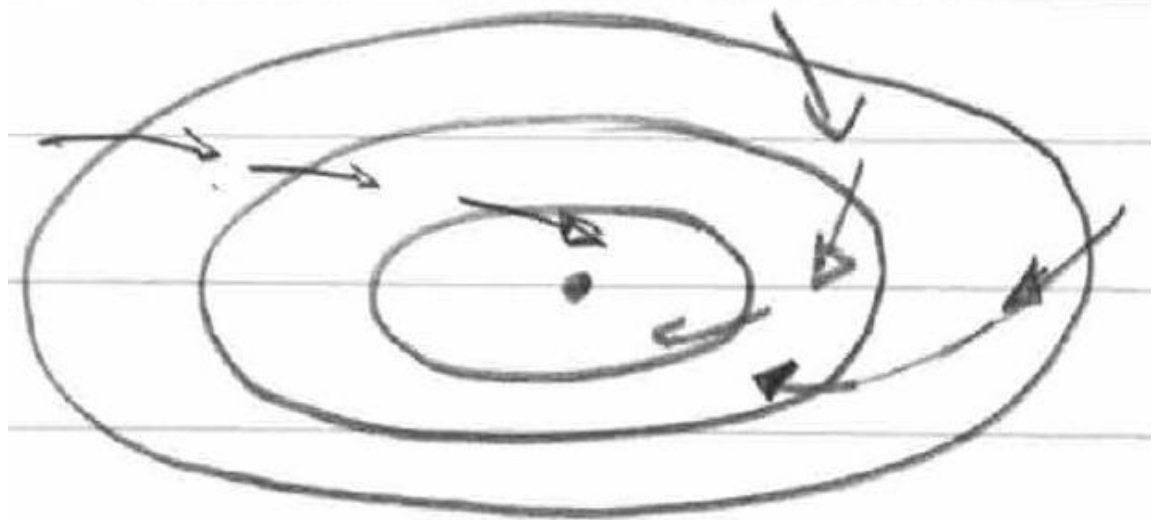
- Si $0 < k < 2$: valeurs propres complexes de partie réelle $< 0 \Rightarrow$ foyer stable $\Rightarrow$ asymptotiquement stable (oscillations faiblement amorties).
- Si $k > 2$: valeurs propres réelles, distinctes, toutes $< 0 \Rightarrow$ nœud stable $\Rightarrow$ asymptotiquement stable (oscillations fortement amorties).

Énergie :

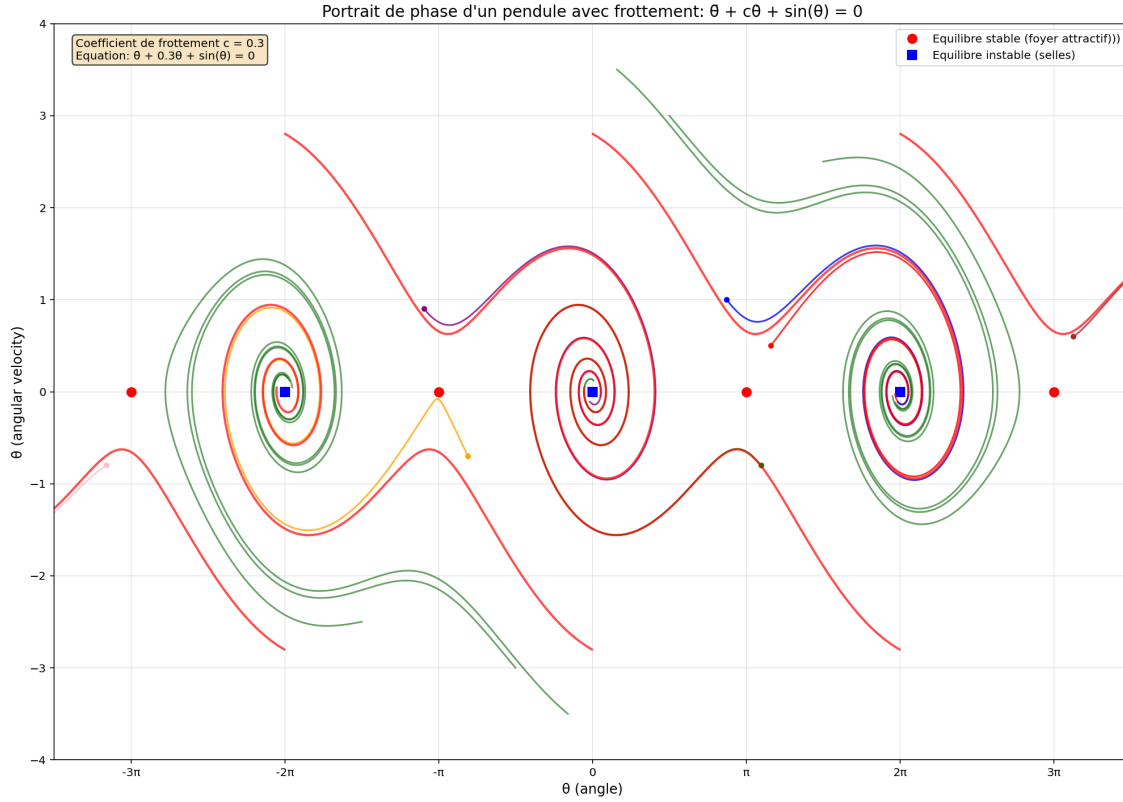
$$E(t) = \frac{1}{2}y(t)^2 - \cos(x(t)) \Rightarrow \frac{d}{dt}E(t) = y(t)y'(t) + \sin(x(t))x'(t)$$

$$= y(t)(-ky(t) - \sin x(t)) + \sin x(t)y(t) = -ky(t)^2 \leq 0$$

Donc $E(t)$ décroît, et $\lim_{t \rightarrow +\infty} E(t) = \text{constante}$



Ainsi, $(x(t), y(t)) \rightarrow (0, 0)$ ou $(\pi, 0)$ selon l'état initial. Mais notons que pour converger vers $(\pi, 0)$ il faut partir d'un point sur la courbe correspondant à la valeur propre négative du linéarisé. C'est évidemment peu probable.



3. Appendice : théorème de Dirichlet

On considère un système

$$(SP) \quad \ddot{x}(t) + \nabla V(x(t)) = 0$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ modélise le mouvement d'une particule dans un champ de potentiel V . Sa version avec frottement est

$$(SP') \quad \ddot{x}(t) + f\dot{x}(t) + \nabla V(x(t)) = 0$$

où f est un coefficient positif.

Notons que dans les deux cas, si x_0 est un point critique de V , la constante en x_0 est solution de l'équation et c'est un équilibre. Notons aussi que (SP) correspond au cas $f = 0$ de (SP').

THÉORÈME 8.28 (Théorème de Dirichlet). *Si V a un minimum local strict en x_0 , la position d'équilibre en x_0 est stable pour le système (SP) et asymptotiquement stable pour (SP')*

DÉMONSTRATION. Soit $E(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + V(x)$. Si x_0 est un minimum strict de V alors $(x_0, 0)$ est un minimum strict de E , car $E(x, y) \leq E(x_0, 0) = V(x_0)$ entraîne que $y = 0$ et donc que $x = x_0$. On supposera pour simplifier que $V(x_0) = 0$ et on se place dans un voisinage de $(x_0, 0)$ où $(x_0, 0)$ est un minimum strict de E . Alors

- Pour tout $\eta > 0$ il existe $\delta(\eta) > 0$ tel que $|x - x_0|^2 + |y|^2 \leq \delta(\eta)^2$ entraîne $E(x, y) \leq \eta$.
- pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta(\varepsilon) > 0$ tel que $(x_0, 0)$, l'inégalité $E(x, y) \leq \eta(\varepsilon)$ entraîne $|x - x_0|^2 + |y|^2 \leq \varepsilon^2$

La première assertion résulte de la continuité de E , la seconde du fait que E a un minimum local strict en x_0 .

Alors si $(x, y) \in B((x_0, 0), \delta(\eta(\varepsilon)))$ on aura $E(x, y) \leq \eta(\varepsilon)$ donc pour $t \geq 0$ on aura $E(\varphi^t(x, y)) \leq \eta(\varepsilon)$ puisque E décroît le long des trajectoires, d'où $|x - x_0|^2 + |y|^2 \leq \varepsilon$. On a donc stabilité.

Pour la stabilité asymptotique on remarque que $E(x(t), y(t))$ est décroissante, et plus précisément

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(x(t), y(t)) &= y(t)\dot{y}(t) + \nabla V(x(t))\dot{x}(t) = \\ y(t)(-fy(t) - \nabla V(x(t)) + \nabla V(x(t))\dot{x}(t)) &= -fy(t)^2 \end{aligned}$$

Donc la dérivée de E est strictement négative sauf lorsque $y = 0$. On a en ces points $\dot{y}(t) = -\nabla V(x(t))$, et puisque $\nabla V(x)$ ne s'annule qu'en x_0 , si $y(t_0) = 0$ il existe un intervalle autour de t_0 tel que y ne s'y annule pas (sauf en t_0). Donc E est strictement décroissante, sauf en une suite discrète d'instants $t_0, t_1, \dots$, mais cela entraîne que E est strictement décroissante. Elle possède donc une limite lorsque t tend vers $+\infty$. On montre avec le même argument que cette limite est forcément nulle. On en déduit que $(x(t), y(t))$ converge vers $(x_0, 0)$. On a donc stabilité asymptotique. $\square$

REMARQUE 8.29. Notons d'abord un cas particulièrement simple du théorème de Dirichlet qui résulte du théorème de Lyapounov : lorsque $D^2V(x_0)$ est définie négative. En effet les équations du premier ordre associées à (SP) et (SP') sont (avec $f = 0$ pour (SP))

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) \\ \dot{y}(t) = -fy(t) - \nabla V(x(t)) \end{cases}$$

dont le linéarisé en $(x_0, 0)$ est

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) \\ \dot{y}(t) = -fy(t) - D^2V(x_0) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \text{Id}_n \\ -D^2V(x_0) & -f\text{Id}_n \end{pmatrix}$$

Si $D^2V(x_0)$ qui est symétrique (th. de Schwarz) a pour valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, la matrice se réécrit, en prenant une base dans la quelle $D^2V(x_0)$ est diagonale

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\lambda_1 & 0 & -f & 0 \\ & \ddots & & \ddots \\ 0 & -\lambda_n & 0 & -f \end{pmatrix}$$

et en permutant les coordonnées, c'est-à-dire remplaçant $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ par $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 & 0 \\ -\lambda_1 & -f & \cdots & 0 & 0 \\ & \vdots & \ddots & & \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda_n & -f \end{pmatrix}$$

dont le polynôme caractéristique est égal à $\prod_{j=1}^n (x^2 + fx + \lambda_j)$. Ses racines sont celles de $x^2 + fx + \lambda_j$. Si $\lambda_j > 0$ les racines sont soit complexes conjuguées soit réelles et de même signe (car leur produit λ_j est positif), et le signe de la partie réelle est le même. Comme la somme de ces parties réelle est $-f < 0$, la partie réelle des racines est strictement négative dès que $f > 0$. On a donc stabilité asymptotique d'après Laypounov.

Index

- Changement de base, 25
- Combinaison linéaire, 11
- Critère
 - de Lyapunov, 128
- Critère de Sylvester, 68
- Différentielle
 - d'une fonction, 83
 - seconde, 84
- Dérivée partielle, 82
- Ensemble ouvert, 81
- Famille
 - génératrice, 11
 - libre, 11
- Formule de Grassmann, 26
- Formule de Taylor
 - à l'ordre 1, 83
 - à l'ordre 2, 85
- Minimum ou maximum local, 85
- Méthode de Gauss pour la signature
 - des formes quadratiques, 79
- Pivot
 - sur les colonnes, 14
- Points critiques, 85
- Rang, 17
- Soleil (portrait de phase), 122
- Sous-espace vectoriel, 10
- Théorème
 - de d'Alembert-Gauss, 47
 - de diagonalisation des matrices symétriques, 67
 - de la base incomplète, 17
 - de Schwarz, 83
 - de Sylvester, 79
 - du rang, 24
 - fondamental de l'algèbre linéaire, 15
- Théorème de stabilité de Lyapounov, 130
- Vecteurs
 - linéairement indépendants, 11

[Dem96] [HS74] [Lef77; Arn74a; Arn74b]

Bibliographie

- [Arn74a] V. I. ARNOLD. *Équations différentielles ordinaires*. MIR, 1974. URL : <https://archive.org/details/vladimir-arnold-equations-differentielles-ordinaires-editions-mir-1988>. Republié par les éditions Ellipses, 2012 et en anglais par Springer, Universitext (cf. p. 137).
- [Arn74b] V. I. ARNOLD. *Les Méthodes mathématiques de la mécanique classique*. Moscou : MIR, 1974. Traduction anglaise publiée par Springer-Verlag (cf. p. 137).
- [Dem96] J.-P. DEMAILLY. *Analyse Numérique et équations différentielles*. Grenoble : Presses Universitaires de Grenoble, 1996 (cf. p. 137).
- [HS74] M. W. HIRSCH et S. SMALE. *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Academic Press, 1974 (cf. p. 137).
- [Lef77] S. LEFSCHETZ. *Differential equations : geometric theory*. New-York : Dover, 1977 (cf. p. 137).