

Feuille d'exercices 1

Nombre complexes, trigonométrie

1.1. Vrai ou faux ? Parmi les assertions suivantes, dire lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses en justifiant :

1. Pour tout nombre complexe t , le nombre complexe e^{it} est de module 1.
 2. Si un nombre complexe vérifie $z^n = 1$ pour un entier n alors $z = e^{it}$ pour un $t \in \mathbb{R}$
 3. Si r, t sont réels, le conjugué du nombre complexe re^{it} est re^{-it}
 4. Si $t_1, \dots, t_n$ sont des réels, alors le module $|e^{it_1} + \dots + e^{it_n}|$ de $e^{it_1} + \dots + e^{it_n}$ est égal n
- 1.2.** Soit $u = a + ib$ un nombre complexe avec $a, b \in \mathbb{R}$. On cherche à résoudre l'équation

$$z^2 = u \quad (\text{E})$$

avec $u \in \mathbb{C}$. On pose $z = c + id$ avec $c, d \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que c et d doivent vérifier les conditions suivantes

$$c^2 - d^2 = a, 2cd = b, c^2 + d^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

2. Montrer que si c, d vérifient les deux premières conditions, alors z est solution de (E)

3. $\sqrt{a^2 + b^2} + a, \sqrt{a^2 + b^2} - a$ sont positifs ou nuls.

4. On suppose que $c + id$ est solution de (E). Montrer que $c = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}}$ ou $c = -\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}}$.

Montrer que $d = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}$ ou $d = -\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}$.

5. Trouver toutes les solutions de (E)
6. Expliciter les solutions de (E) quand $u = i$.

1.3.

1. Soit x un réel. Calculer $\sin(x + \frac{\pi}{2})$ et $\cos(x + \frac{\pi}{2})$ en fonction de $\sin(x)$ et $\cos(x)$
2. Même question pour $\sin(x + \frac{\pi}{3})$ et $\cos(x + \frac{\pi}{3})$
3. Même question pour $\sin(2x)$ et $\cos(2x)$
4. Donner la formule exprimant $\cos(x + y)$ et $\sin(x + y)$ en fonction de $\cos(x), \cos(y), \sin(x), \sin(y)$.

1.4. Racines de l'unité. Soit $n \geq 2$ un entier.

1. En cherchant z sous la forme trigonométrique, montrer qu'il existe exactement n nombres complexes vérifiant $z^n = 1$. Expliciter ces n nombres complexes.
2. Soit u un nombre complexe non nul. Combien de solutions dans $\mathbb{C}$ possède l'équation (d'inconnue z) $z^n = u$. (On montrera d'abord qu'il existe une solution z_0 , puis en utilisant la première question on exprimera les autres solutions en fonction de z_0).

1.5. Soient z_1, z_2, z_3 , les affixes de trois points du plan M_1, M_2, M_3 . Montrer que le triangle M_1, M_2, M_3 est équilatéral si et seulement si $z_1 + jz_2 + j^2z_3 = 0$ où $j^3 = 1$ $j \neq 1$. On justifiera l'existence de j et on pourra se ramener au cas $z_1 = 0$.

1.6 Linéariser $\cos(t)^3$ c'est-à-dire l'exprimer comme combinaison linéaire des $\cos(kt), \sin(kt)$ pour $k \in \mathbb{N}$. En déduire une primitive de $\cos(t)^3$. Même question pour $\cos(t)^2 \sin(t) \sin(2t)$

1.7 Montrer que les isométries affines du plan conservant l'orientation sont données en complexe par $z \mapsto az + b$ où $a, b \in \mathbb{C}, |a| = 1$. Montrer que si $a \neq 1$ c'est nécessairement une rotation. Quel est son centre ?