

Feuille d'exercices 2

Limites de suites

2.1. Vrai ou faux ? Parmi les assertions suivantes, dire lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses en justifiant :

1. Une suite de nombres réels qui converge vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.
2. Si une suite de nombres complexes $(u_n)_{n \geq 1}$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} - u_n = 0$
3. Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres complexes telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} - u_n = 0$. Alors $(u_n)_{n \geq 1}$ converge.
4. Une suite de nombres réels $(u_n)_{n \geq 1}$ converge si et seulement si la suite $(e^{u_n})_{n \geq 1}$ converge.
5. Même question pour une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ de nombres complexes.

2.2. Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres réels strictement positifs telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = a$

1. Donner un exemple d'une telle suite telle que $a = 0$. Telle que $a = 1$. Telle que $a = 2$.
2. On suppose que $a < 1$. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0
3. On suppose que $a > 1$. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ tend vers $+\infty$
4. On suppose que $a = 1$. Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.

2.3. Calculer la limite si elle existe des suites suivantes

1. $u_n = \frac{n+4}{n^2-5n+1}$
2. $u_n = \sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$
3. $u_n = \frac{\ln(n)}{n^2+1}$
4. $u_n = \frac{n^2+2^n}{3^n}$
5. $u_n = n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$
6. $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
7. $u_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n$

2.4. Calculer la limite, si elle existe, des suites suivantes :

1. $u_n = \left(\frac{\cos(a + \frac{1}{n})}{\cos(a)}\right)^n$
2. $u_n = n^2(2^{1/n^2} - 1)$

2.5. Pour tout entier n on pose $u_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n(n!)}$

1. Montrer que u_n est croissante, v_n décroissante et que $\lim_n v_n - u_n = 0$. On dit que les suites sont **adjacentes**.
2. En déduire que les suites u_n, v_n ont une limite et que cette limite est la même. On la note l
3. Trouver un intervalle de longueur inférieure à 0,02 près contenant l .

2.6.

1. Montrer que $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ On proposera au moins deux méthodes différentes
2. En déduire pour tout $x \geq 0$ la limite de la suite $u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n [kx]$ où $[kx]$ désigne le plus grand entier inférieur ou égal à kx

2.8. Donner la limite des suites suivantes

1. $u_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right)$

2. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$

3. $u_n = \sum_{k=2}^n \ln \left(1 - \frac{1}{k^2} \right)$

2.9 Utiliser la règle de l'Hôpital pour calculer

1. $\lim_n \left(n - \frac{1}{e^{1/n} - 1} \right)$

2. $\lim_n n^2(1 - \cos(1/n))$

2.10. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite vérifiant la relation de récurrence $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

1. Montrer que si r est une racine réelle ou complexe de $r^2 = ar + b$ la suite géométrique de raison r vérifie la relation de récurrence.
2. On suppose qu'on a deux racines distinctes, r_0, r_1 (réelles ou complexes). Montrer que pour $(r_0^n)_{n \geq 0}$ et $(r_1^n)_{n \geq 0}$ vérifient la relation de récurrence, et que pour toute suite récurrente comme ci-dessous, il existe λ, μ tels que $u_n = \lambda r_0^n + \mu r_1^n$
3. Montrer que si r_0 est racine double de $r^2 = ar + b$, alors r_0^n et $(n-1)r_0^n$ vérifient la relation de récurrence et que pour toute suite récurrente comme ci-dessous, il existe λ, μ tels que $u_n = \lambda r_0^n + \mu n r_0^{n-1}$.
4. Montrer que la suite de Fibonacci donnée par la relation de récurrence $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ et $F_0 = 0, F_1 = 1$, s'écrit $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\theta^n$ où φ, θ sont les racines de $x^2 - x - 1 = 0$.
5. En explicitant φ et θ en déduire la limite de F_{n+1}/F_n .