

Feuille d'exercices 3

Intégrales

3.1. Chercher deux nombres réels A et B tels que :

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}.$$

En déduire la valeur de l'intégrale $\int_1^2 \frac{dx}{x(x+1)}$.

3.2.

(1) Pour tout x réel, on pose

$$I(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt.$$

En effectuant le changement de variable $t = \tan u$, retrouver qu'une primitive de la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est la fonction arctan.

(2) Trouver une primitive de $\tan(t)$ sur $] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$

(3) Trouver une primitive de la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sin t}$ (on précisera d'abord soigneusement son domaine de définition), en écrivant $\frac{1}{\sin t} = \frac{\sin(t)}{1-\cos(t)^2}$ puis en effectuant un changement de variable approprié. Même question avec la fonction $t \mapsto \frac{1}{\cos t}$

3.3. Calculer des primitives de

(1) $\sin^3(t)$

(2) $\cos^2(t) \sin^2(t)$

3.4.

(1) Pour $n \in \mathbb{Z}$ calculer $\int_0^{2\pi} e^{int} dt$

(2) Soit $P(z) = z^r + a_{r-1}z^{r-1} + \dots + a_1z + a_0$ un polynôme normalisé de degré r . Montrer que $\int_0^{2\pi} e^{-irt} P(e^{it}) dt = 2\pi$.

(3) Soient $z_1, \dots, z_r$ des nombres complexes. Pour tout nombre complexe z , on pose

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_r) = \prod_{i=1}^r (z - z_i)$$

Déduire de la question précédente qu'il existe un nombre complexe z_0 de la forme $z_0 = e^{it}$ avec $t \in \mathbb{R}$ (i.e. un nombre complexe de module 1) tel que $|P(z_0)| \geq 1$ (raisonner par l'absurde). Interprétation géométrique?

3.5. Soient a et b des réels avec $a < b$. Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On rappelle que f est bornée et atteint ses bornes, c'est-à-dire qu'il existe des réels m et M vérifiant $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a, b]$, et il existe alors des réels x_1, x_2 dans $[a, b]$ tels que $f(x_1) = m$ et $f(x_2) = M$.

- (1) Montrer ("formule de la moyenne") qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

On commencera par chercher un encadrement de l'intégrale.

- (2) Soit $f(t) = e^{it}$. Calculer $\int_0^{2\pi} f(t) dt$, et en déduire que la conclusion de a) peut être *faussee* pour une fonction à valeurs complexes au lieu de réelles.

3.6. En effectuant des intégrations par parties ou des changements de variable, étudier si les intégrales généralisées suivantes convergent ou non, et quand elles convergent, donner leur valeur.

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{x^2 + 4}$

(2) $\int_0^{+\infty} x \sin(2x) dx$

(3) $\int_{-\infty}^2 \frac{dx}{x^2 + 4}$

(4) $\int_0^{+\infty} te^{-t^2} dt$

3.7. Etudier la convergence de chacune des intégrales impropres suivantes, en précisant où se situe(nt) le(s) point(s) à problème. Même en cas de convergence, on ne demande pas de calculer la valeur de l'intégrale.

(1) $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t^2 + 2}}$

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^3 + 1} dt$

(3) $\int_0^1 \frac{\sin t}{\sqrt{t^3 - t^5}} dt$

(4) $\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{e^t - 1} dt$

(5) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$

3.8.

- (1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^n dt$ converge.

- (2) Donner une relation de récurrence permettant de calculer I_n , $n \geq 0$. En déduire la valeur de I_n .

3.9. On souhaite déterminer la convergence de

$$\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha \ln(t)^\beta}$$

- (1) Si $\alpha > 1$ comparer l'intégrale avec $\int_e^\infty \frac{dt}{t^\alpha}$. Conclure.

- (2) Si $\alpha < 1$, en utilisant $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t)}{t^{\frac{1-\alpha}{2\beta}}} = 0$ comparer l'intégrale à celle de $\int_e^\infty \frac{dt}{t^{\frac{1+\alpha}{2}}}$. Conclure.

- (3) Si $\alpha = 1$ calculer en faisant un changement de variable $\int_e^x \frac{dt}{t \ln(t)^\beta}$. En déduire la convergence ou divergence de l'intégrale suivant les valeur de β .