

Feuille d'exercices 4

Séries numériques

3.1. Vrai ou Faux. Dire pour chacune des propriétés suivantes si elle est vraie ou fausse. La prouver dans le premier cas, donner un contre-exemple dans le second.

1. Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive décroissante alors la série $\sum a_n$ converge.
2. Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive et tend vers 0 alors la série $\sum (-1)^n a_n$ converge.
3. Si la suite $(\sum_{k=0}^n a_k)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée alors la série $\sum a_n$ converge.
4. Si la série $\sum a_n$ diverge alors la série $\sum |a_n|$ diverge.
5. Si la série $\sum a_n$ converge alors la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.
6. Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante positive et tend vers 0, alors la série $\sum a_n^2$ converge.

3.2.

Comparer à une série de Riemann $(\sum n^s)$ pour étudier la convergence des séries suivantes :

1. $\sum \frac{-1 - \sin n}{n^2}$
2. $\sum \frac{1}{n^3 \ln n}$
3. $\sum \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$
4. $\sum \frac{\ln n}{n^2}$
5. $\sum \frac{1}{\sqrt{n} \ln n}$
6. $\sum a^{\sqrt{n}} \quad (a > 0)$

3.3. Etudier la convergence de la série $\sum u_n$ pour :

1. $u_n = \frac{n^2 + (-1)^n \ln n - 5}{n^6 + 2^n + \cos n}$
2. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{n} \sin \frac{1}{n}$
3. $u_n = (n^3 + n + 1)^{\frac{1}{3}} - (n^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$
4. $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n \ln n}$

3.4.

Déterminer en fonction des réels a et b si la série $\sum u_n$ converge, pour

1. $u_n = \frac{1}{n^a (\ln n)^b}$
2. $u_n = \frac{a^n}{1 + bn}$

3.5. On se propose de montrer que l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt$ est divergente.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'intervalle $[n\pi, (n+1)\pi]$ contient un intervalle de la forme $I_n = [a_n, b_n]$ de longueur $2\pi/3$, tel que pour tout $t \in I_n$, on ait $|\sin t| \geq 1/2$.
2. Montrer que $\int_{a_n}^{b_n} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt \geq \frac{1}{3(n+1)}$.
3. En déduire que la suite $\int_{\pi}^{(n+1)\pi} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt$ n'est pas majorée, et conclure.

3.6. Déterminer la nature (absolue convergence, convergence, divergence) des séries :

1. $\sum \frac{\sin n}{1+n^2}$
2. $\sum (-1)^n \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}{n}$
3. $\sum \frac{(-1)^n}{\ln n}$

3.7. On définit une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ en posant pour tout $k \geq 0$: $u_{3k} = \frac{1}{\ln(k+2)}$ et $u_{3k+1} = u_{3k+2} = -\frac{1}{2 \ln(k+2)}$.

1. Écrire les 6 premiers termes de la suite (u_n) .
2. Montrer que la série $\sum u_n$ converge mais que la série $\sum u_n^3$ diverge.
3. Généraliser b) à $\sum u_n^r$ avec $r \geq 2$.

3.8. Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres réels ou complexes. On pose $U_0 = 0$ et $U_n = \sum_{k=1}^n u_k$ pour $n \geq 1$. On pose également $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{u_k}{k}$.

1. Exprimer u_n en fonction de U_n .
2. Montrer que $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{U_k}{k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{U_k}{k+1}$.
3. En déduire que $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{U_k}{k(k+1)} + \frac{U_n}{n}$.

4. Montrer que si la suite (U_n) est bornée, alors la série $\sum_{k \geq 1} \frac{U_k}{k(k+1)}$ est absolument convergente ; en déduire que dans ce cas la série $\sum_{k \geq 1} \frac{u_k}{k}$ est convergente (le procédé utilisé, appelé *transformation d'Abel*, est très analogue à une intégration par parties).

5. Soit t un nombre réel qui n'est pas de la forme $2m\pi$ avec $m \in \mathbb{Z}$. On pose $u_k = e^{ikt}$. Calculer $\sum_{k=1}^n e^{ikt}$, et en déduire que la suite $U_n = \sum_{k=1}^n e^{ikt}$ est bornée.

6. En utilisant d) et e), montrer que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{e^{ikt}}{k}$ est convergente. Qu'en déduit-on pour les séries

$$\sum_{k \geq 1} \frac{\sin(kt)}{k} \text{ et } \sum_{k \geq 1} \frac{\cos(kt)}{k} ?$$