

Feuille d'exercices 5

Suites et séries de fonctions

5.1. Vrai ou faux (I). Dire pour chacune des propriétés suivantes si elle est vraie ou fausse. La prouver dans le premier cas, donner un contre-exemple dans le second.

1. Toute suite de fonctions continues converge simplement.
2. Si (f_n) est une suite de fonctions continues sur $[a, b]$ qui converge uniformément sur $]a, b]$ et simplement en a , alors elle converge uniformément sur $[a, b]$.
3. Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur $[a, b]$. Soit $c \in [a, b]$. Si (f_n) converge uniformément sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$, alors elle converge uniformément sur $[a, b]$.

5.2.

Étudier la convergence simple, puis uniforme sur l'intervalle I , des suites de fonctions suivantes :

1. $f_n(x) = \ln(x + \frac{1}{n})$, avec $I = [1, +\infty[$.
2. $f_n(x) = n^2x(1 - nx)$ si $x \in [0, 1/n]$ et $f_n(x) = 0$ si $x \in]1/n, 1]$, avec $I = [0, 1]$.

5.3.

1. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $u_n(x) = x^n - x^{n+1}$ sur l'intervalle $[0, 1]$.
2. Comparer les limites $\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) dx$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 u_n(x) dx$.
3. Même question pour les suites de fonctions $v_n(x) = n(x^n - x^{n+1})$, $w_n(x) = n^2(x^n - x^{n+1})$. Conclusion ?

5.4 Soit $u_n(x) = n \sin(x) \cos(x)^n$ définie sur $[0, \pi/2]$

1. Montrer que u_n converge simplement. Quelle est sa limite.
2. Calculer $\int_0^{\pi/2} u_n(t) dt$. Que peut-on déduire pour la convergence de u_n (est-elle uniforme) ?
3. Montrer que la convergence de u_n est uniforme sur $[a, b]$ pour $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$.

5.5. Montrer que la suite de fonctions $f_n(x) = \frac{x}{n(1+x^n)}$, $x \geq 0$ et $n \geq 1$, converge uniformément vers 0 sur $[0, +\infty[$.

5.6. Soit $f_n(x) = \frac{1 - x^{2n}}{1 + x^{2n}}$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Étudier la convergence simple de la suite (f_n) ; en déduire, sans calcul, que (f_n) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

5.7. Vrai ou faux (II). Même question que dans l'exercice 1 pour les assertions suivantes :

1. Il existe une suite réelle (a_n) telle que la série de fonctions $\sum a_n x^n$ ne converge pour aucun $x \in \mathbb{R}^*$.
2. Si (f_n) est une suite de fonctions C^1 sur $[a, b]$ et la série de fonctions $\sum f'_n$ converge normalement sur $[a, b]$, alors la série $\sum f_n$ converge simplement sur $[a, b]$.
3. Si $\sum f_n$ est une série de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$, et telle que $f_n(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors la série $\sum f_n$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

5.8 Soit la série de fonctions de terme général $f_n(x) = \frac{x}{n(1+nx^2)}$ définie sur $[0, +\infty[$

1. Calculer $f'_n(x)$ et trouver le maximum de la fonction f_n
2. Que peut-on dire de la convergence de la série $\sum_{k=1}^n f_k(x)$ (normale, uniforme, simple ou divergente) ?
3. Montrer que $\sum_{k=1}^n f_k(x)$ est de classe C^1 sur tout intervalle $[a, b]$ tel que $a > 0, b < +\infty$.
4. En déduire que $\sum_{k=1}^n f_k(x)$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$

5.9. Étudier les convergences simple, normale et uniforme de la série de fonctions $\sum f_n$ de terme général $f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$, puis sur l'intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

5.10.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$ converge simplement sur $]0, +\infty[$; on notera $S(x)$ sa somme.
2. Soit $a > 0$, montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$. En déduire que S est continue sur $]0, +\infty[$.
3. Soit $a > 1$, montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

5.11 Soit $I(a) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} - a} d\theta$ pour $a \in \mathbb{C}$ et $|a| \neq 1$.

1. Lorsque $|a| < 1$, en remarquant que $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{e^{i\theta}}\right)^n = \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} - a}$, montrer que $I(a) = 2\pi$.
2. Procéder de façon similaire pour montrer que $I(a) = 0$ lorsque $|a| > 1$.

5.10 Pour $x \in]-1, 1[$, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. En utilisant le théorème de dérivation d'une série de fonctions, calculer $f'(x)$; en déduire pour tout $x \in]0, 1[$ l'égalité

$$\ln(1-x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$