

Feuille d'exercices 6

Séries de Fourier

7.1. Soit g une fonction C^0 et 2π -périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

1. On suppose que g admet une primitive 2π -périodique. Toutes les primitives de g sont-elles alors 2π -périodiques ?
2. Donner un exemple où g n'admet pas de primitive 2π -périodique.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur le coefficient de Fourier $c_0(g)$ pour que les primitives de g soient 2π -périodiques.

7.2. Soient les fonctions périodiques de période 2π définies par :

$$K(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x \leq 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

$$f(x) = |x| \quad -\pi \leq x < \pi$$

$$g(x) = x \quad -\pi \leq x < \pi$$

1. Tracer les courbes représentant ces fonctions.
2. Calculer leurs coefficients de Fourier réels.

7.3. Soit f la fonction 2π -périodique égale à x^2 pour $-\pi \leq x < \pi$.

1. Représenter graphiquement f .
2. Calculer les coefficients de Fourier réels et complexes de f .

7.4. On fixe un réel α avec $\alpha \notin \mathbb{Z}$. Soit f l'application 2π -périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $t \in]-\pi, \pi]$ par $f(t) = \cos(\alpha t)$.

1. Représenter graphiquement la fonction f pour $\alpha = \frac{1}{2}$.
2. La fonction f est-elle continue ?
3. La fonction f est-elle paire sur $]-\pi, \pi[$? Est-elle paire ou impaire sur $\mathbb{R}$?
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Que vaut $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt$? Calculer (en fonction de α) le coefficient de Fourier $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$.
5. Pour tout entier $n \geq 1$, on considère le coefficient de Fourier réel $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt$. Démontrer que

$$\pi a_n = \frac{\sin((\alpha + n)\pi)}{\alpha + n} + \frac{\sin((\alpha - n)\pi)}{\alpha - n}.$$

6. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $a_n = \frac{2(-1)^n \alpha \sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2 - n^2)}$.

7.5

1. Soit f une fonction 2π -périodique continue par morceaux. Exprimer les coefficients de Fourier complexes de $t \mapsto e^{-it} f$ en fonction de ceux de f .
2. L'équation différentielle $y' = e^{-it} y$ a-t-elle une solution 2π -périodique, continue et C^1 par morceaux (autre que la fonction nulle) ?

7.6 On considère une série trigonométrique complexe $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ avec $c_n \in \mathbb{C}$.

1. On suppose que pour tout entier $k > 0$, la suite $n^k c_k$ converge vers 0. Montrer que la fonction

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} \text{ est bien définie et continue sur } \mathbb{R}.$$

2. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que f est dérivable, f' est elle-même dérivable etc.
3. Donner un exemple de telle fonction où tous les c_n sont des réels > 0 .
4. Soit maintenant g une fonction continue et 2π -périodique sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on ait $|c_n(g)| \leq M$, où $c_n(g)$ est le n -ième coefficient de Fourier complexe de g (on rappelle qu'une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, est bornée sur $[a, b]$).

5. (*) Supposons qu'on se donne une fonction g de la forme $g(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$, où la série est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$. Supposons de plus g de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Montrer que la suite $(n^k c_n)$ converge vers 0 pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

7.7

1. On reprend les fonctions K, f, g de l'exercice 2. Étudier la convergence de leurs séries de Fourier.
2. Dédire de ce qui précède les sommes des séries numériques suivantes :

$$1) \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad 3) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$$

La première série donne la formule de Madhava-Gregory-Leibniz (mais attention : Madhava de Sangamagrama 1350-1425, J. Gregory 1638-1675, G.W. Leibniz 1646-1716, et J. Fourier 1768-1830).

7.8

1. En utilisant la fonction f de l'exercice 7.3, Retrouver la relation

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

2. En appliquant la formule de Parseval, démontrer qu'on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$