

Feuille d'exercices 7

Séries de Fourier et Transformée de Fourier

8.1. Soit $\alpha \notin \mathbb{Z}$ un nombre réel. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction 2π -périodique, définie par $f(x) = e^{i\alpha x}$ pour $|x| < \pi$.

1. Développer en série de Fourier la fonction f .
2. Etudier la convergence de la série de Fourier vers la fonction et montrer que

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi \alpha} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\alpha - n)^2}$$

8.2. Soit f de période 2π telle que $f(x) = x^2 + \pi x$ pour $-\pi < x < \pi$.

1. Former le développement en série de Fourier de f ainsi que la formule de Parseval. En déduire

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

2. Déduire le développement de F de période 2π telle que $F(x) = \int_0^x (f(t) - \pi^2/3) dt$.

8.3. Soit f la fonction 2-périodique égale à $x - x^3$ pour $-1 \leq x < 1$.

1. f est-elle continue? C^1 par morceaux?
2. Calculer sa série de Fourier
3. En utilisant la valeur de $f(\frac{1}{2})$ calculer les sommes $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)^3}$ et $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{n^2}$
4. En appliquant Parseval calculer $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$

8.4. On s'intéresse dans cet exercice à l'évolution de la température dans une barre métallique, donc les extrémités sont maintenues à zéro degré Celsius. On verra la barre métallique comme un objet unidimensionnel de longueur $2L$, et on identifiera un point de la barre avec un point $x \in [-L, L]$. On notera $u(t, x)$ la température (exprimée en degrés Celsius) au point x et à l'instant t . Comme on suppose la température nulle aux extrémités, on doit avoir

$$(t, L) = u(t, -L) = 0. \quad (1)$$

De plus, u doit satisfaire à l'équation aux dérivées partielles suivante (cf. vos cours de physique!) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (2)$$

On suppose de plus que, à l'instant initial,

$$u(0, x) = u_0(x) := \begin{cases} L + x & \text{si } -L \leq x \leq -L/2 \\ -x & \text{si } -L/2 \leq x \leq L/2 \\ x - L & \text{si } L/2 \leq x \leq L. \end{cases} \quad (3)$$

Le but de cet exercice est de trouver une fonction vérifiant les trois conditions (??), (??), (??).

1. Représenter graphiquement la fonction u_0 .
2. Montrer qu'il existe une suite de nombres $b_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in [-L, L], \quad u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right).$$

Calculer explicitement ces coefficients.

3. Vérifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\pi^2 t n^2 / L^2} \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)$ converge simplement sur $[-\pi, \pi]$. On notera $u(t, x)$ sa limite. Vérifier que $u(t, x)$ satisfait (??), (??) et (??).
4. Peut-on adapter la méthode précédente à des fonctions u_0 plus générales?

8.5 Si f est une fonction dans $C_0^\infty(\mathbb{R})$, et si $\lambda > 0$, on note f_λ la fonction dilatée de la fonction f , définie par

$$x \mapsto f_\lambda(x) = f(\lambda x).$$

Etablir une relation directe entre la transformée de Fourier de f_λ et celle de f .

8.6 On note Λ la fonction égale à 1 sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et à 0 ailleurs.

1. Calculer la transformée de Fourier de la fonction Λ .
2. En déduire, pour tous $a > 0$ et $c \in \mathbb{R}$, la transformée de Fourier de la fonction égale à c sur $[-a, a]$ et à 0 ailleurs. (On pourra utiliser l'exercice 1)
3. Calculer la convolée $\Lambda * \Lambda$ de Λ avec elle-même, tracer son graphe puis calculer sa transformée de Fourier.
4. Calculer la transformée de Fourier de la fonction $x\Lambda(x)$, qui envoie x sur lui-même pour $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et sur 0 sinon.

8.7

1. Déterminer, pour $\lambda > 0$, la transformée de Fourier de la fonction $e^{-\lambda|x|}$.
2. En utilisant la formule d'inversion de Fourier, déduire de la question précédente la transformée de Fourier de la fonction $1/(x^2 + \lambda^2)$.
3. Retrouver sans calcul que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$.
4. Pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, calculer le produit de convolution des fonctions $x \mapsto 1/(x^2 + \lambda^2)$ et $x \mapsto 1/(x^2 + \mu^2)$ en calculant d'abord la transformée de Fourier de cette convolée.