

Analyse de Fourier pour la physique

Claude Viterbo

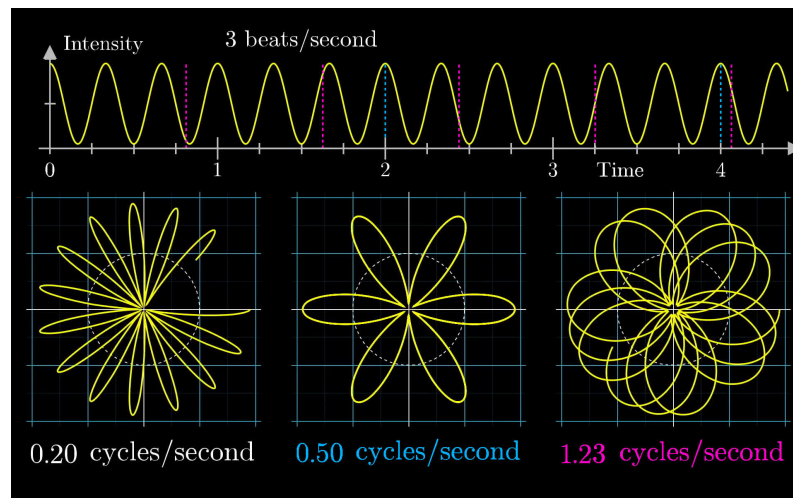


Illustration de Grant Sanderson (3Blue1Brown) – <https://www.3blue1brown.com>

24 juillet 2026

Table des matières

Table des figures	3
Présentation	5
Chapitre 1. Révision : nombres complexes et trigonométrie	7
1. Définitions, Généralités	7
2. Applications trigonométriques	9
3. Exercices	11
Chapitre 2. Suites numériques	13
1. Généralités	13
2. Critères de convergence	18
3. Exercices	24
Chapitre 3. Intégrales	25
1. Intégrale d'une fonction continue	25
2. Propriétés	26
3. Calculs d'intégrales et primitives	28
4. Méthodes de calcul	30
5. Appendice : intégrales dépendant d'un paramètre	33
6. Intégrales généralisées	34
7. Appendice : intégrales indéfinies dépendant d'un paramètre	40
8. Exercices	42
Chapitre 4. Séries numériques	43
1. Généralités	43
2. Séries à termes positifs	44
3. Séries à termes quelconques	46
4. Exercices	50
Chapitre 5. Suites et séries de fonctions	51
1. Généralités	51
2. Propriétés des limites de suites de fonctions	53
3. Intégration, Dérivation	55
4. Séries de fonctions	56
5. Exercices	60

Chapitre 6. Séries de Fourier	61
1. Fonctions périodiques	61
2. Séries trigonométriques (cas réel)	63
3. Notation complexe	64
4. Séries trigonométriques complexes	64
5. Coefficients de Fourier	65
6. Convergence de la série de Fourier d'une fonction	68
7. Estimation des coefficients de Fourier et convergence uniforme	74
8. Applications	78
9. Applications aux équations aux dérivées partielles	78
10. Inégalité isopérimétrique	79
11. Exercices	81
Chapitre 7. La Transformée de Fourier	83
1. Introduction	83
2. Transformée de Fourier de fonctions à support compact et premières propriétés	83
3. Fonctions à décroissance rapide : l'espace $\mathcal{S}$ de Schwartz	85
4. Convolution	87
5. Inversion de Fourier et Plancherel	88
6. Exemples et Applications	91
7. Le théorème de Shannon-Nyquist	98
8. Principe d'incertitude de Heisenberg	99
9. Résolution d'équations différentielles	101
10. Le théorème central limite	103
11. Exercices	108
Problèmes	109
12. Examen, première session 2022	109
13. Examen deuxième session 2022	110
Index	113
Bibliographie	115

Table des figures

1.1	Addition de deux nombres complexes	7
1.2	Représentation géométrique du produit de deux nombres complexes : $z_1 \cdot z_2 = z_1 z_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$	10
3.1	Intégrale d'une fonction comme somme d'aires	25
3.2	La fonction $f(x) = (-1)^{E(x)}$	27
4.1	Illustration des estimations utilisées pour la preuve du théorème : l'aire des rectangles orange vaut $f(k)$, celle des rectangles bleus vaut $f(k+1)$	45
4.2	Sommes partielles pour une série alternée	48
5.1	Convergence uniforme d'une suite de fonctions	53
5.2	Convergence simple d'une suite de fonctions vers 0.	53
6.1	$f(x) = x$ sur $[-2\pi, 2\pi]$, $\tilde{f}(x) = x - E(x)$	62
6.2	Phénomène de Gibbs (gauche : $n = 150$, droite $n = 1500$)	73
7.1	Effet d'un filtre passe-bas	91
7.2	Courbe de la fonction densité de la loi de Gauss.	93
7.3	Fonction triangle	95

Présentation

Le but de ce cours est de donner les outils mathématiques pour étudier les dualités – en théorie du signal ou en physique – temps-fréquence et leurs analogues et leur généralisation : à une fonction $f(t)$ on associe une fonction $\hat{f}(k)$ telle que $f(t)$ soit la somme (ou l'intégrale) des $\hat{f}(k)e^{ikt}$ i.e. somme de fonctions de fréquence pure $\frac{k}{2\pi}$. C'est ce qu'on appelle la série de Fourier de f si f est périodique, et dans ce cas k est un entier, ou la transformée de Fourier dans le cas général. Inversement la donnée des $\hat{f}(k)$ permet de retrouver f .

On verra que des phénomènes d'apparence sans relation entre eux, comme le principe d'incertitude d'Heisenberg et le choix de la fréquence d'échantillonnage des CD (ou de votre service de streaming favori), ont tous la même origine : les séries ou transformée de Fourier. Par ailleurs, séries et transformée de Fourier sont aussi utiles pour résoudre des équations différentielles. C'est d'ailleurs pour résoudre l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial}{\partial t} T(x, t) - c \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x, t) = f(t, x)$$

où T est la température de la barre au point x et à l'instant t , et $f(t, x)$ la source de chaleur que Joseph Fourier a introduit les séries qui portent son nom ([Fou22]). Mais les séries de Fourier permettent de résoudre de nombreuses autres équations, comme l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) - c \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) = f(t, x)$$

Fourier ne s'embarassait pas de la question de l'existence ou de la convergence des séries de Fourier, mais on s'est vite aperçu qu'il s'agissait d'un problème fondamental : quelles est le sens d'une somme infinie de fonctions et quelles sont les fonctions que l'on peut représenter comme sommes (ou intégrale) d'exponentielles (ou de sinus et cosinus)? C'est ce qui occupera une bonne partie de ce cours avant de nous permettre de passer aux applications mentionnée ci-dessus. Enfin nous n'aborderons pas (ou très peu) ce sujet ici, mais notons qu'en traitement du signal d'autres outils sont apparus récemment, en particulier les "ondelettes" (voir par exemple [Mal00]) qui suivant le même principe de décomposition d'une fonction, permettent de mieux tenir compte de la localisation du signal (i.e. le fait que l'information qu'il contient soit plus ou moins concentrée dans le temps ou l'espace) et qui est par exemple à la base de l'algorithme JPEG 2000. On conseille la lecture de [DR98] sur les différents aspects de

la vie de Joseph Fourier et le visionnage de [ElJi; 3 Blue 1 Brown] pour divers points de vue sur séries et transformée de Fourier. Pour approfondir le cours, on pourra se référer à [Bra00; Kör88; SS03; Kat04].

Les trois premiers chapitres sont des chapitres de révision. Mais les outils rappelés sont indispensables pour l'étude des séries et transformées de Fourier.

Les appendices ne sont pas au programme.

Révision : nombres complexes et trigonométrie

1. Définitions, Généralités

DÉFINITION 1.1. On appelle $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes, c'est à dire les nombres de la forme $z = a + ib$ $a, b \in \mathbb{R}$ $i^2 = -1$ dont les lois d'addition et multiplication sont données par les formules

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

On note $\text{Re}(z) = a$ la partie réelle de z et $\text{Im}(z) = b$ sa partie imaginaire.

1.1. Représentation géométrique : On associe à $z = a + ib$ le point du plan de coordonnées (a, b) (ou le vecteur (a, b)). L'addition des nombres complexes correspond à l'addition des vecteurs

On appelle z l'affixe du point (a, b) . On peut aussi associer à $a + ib$ la similitude $A_z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$.

La multiplication correspond à la composition des similitudes car

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & -(ad + bc) \\ ad + bc & ac - bd \end{pmatrix}$$

i.e. $A_z \cdot A_{z'} = A_{z \cdot z'}$ (on a aussi $A_z + A_{z'} = A_{z+z'}$).

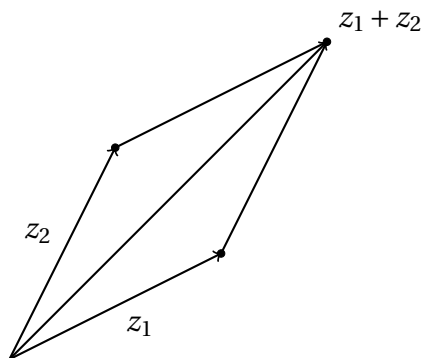


FIGURE 1.1 – Addition de deux nombres complexes

On verra plus loin d'autres interprétations géométriques de la multiplication.

DÉFINITION 1.2. Si $z = a + ib$ on appelle conjugué de z le nombre complexe $\bar{z} = a - ib$. On appelle module de z le réel $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Géométriquement $\bar{z}$ est le symétrique par rapport à l'axe horizontal de z . Son module est la distance à l'origine (ou la norme du vecteur).

PROPOSITION 1.3. On a

(1)

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

(2)

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

(3) (Inégalité triangulaire)

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

(4)

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

(5)

$$|z|^2 = z \bar{z}$$

DÉMONSTRATION. Les deux premières propriétés se vérifient en coordonnées :

Si $z = a + ib$ $z_2 = c + id$ on a

$$\overline{z_1 + z_2} = (a + c) - i(b + d) = (a - ib) + (c - id) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 z_2} = ac - bd - i(ad + bc) = (a - ib)(c - id) = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

La troisième inégalité traduit l'inégalité triangulaire : la norme de la somme de deux vecteurs est inférieure à la somme des normes.

Enfin les deux dernières s'obtiennent en développant :

$$z \bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$$

d'où

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} = z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 = |z_1|^2 |z_2|^2$$

et finalement $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$. □

REMARQUE 1.4.

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

En particulier $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z} \iff \operatorname{Im}(z) = 0$

$$z \in i\mathbb{R} \iff z = -\bar{z} \iff \operatorname{Re}(z) = 0$$

1.2. Forme trigonométrique. C'est l'analogue des coordonnées polaires. Un nombre complexe de module 1 correspond à un point du cercle, que l'on paramètre par l'angle $t \in [0, 2\pi[$. Il a pour coordonnées $(\cos(t), \sin(t))$.

On verra que la fonction exponentielle est définie¹ sur $\mathbb{C}$. Sa restriction à $\mathbb{R}$ est l'exponentielle usuelle et sur $i\mathbb{R}$ elle est définie par

$$e^{it} = \cos(t) + i \sin(t)$$

Elle vérifie toujours $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$ donc $e^{a+ib} = e^a(\cos(b) + i \sin(b))$.

Si $z \in \mathbb{C}$, $\frac{z}{|z|}$ est de module 1 donc s'écrit $\frac{z}{|z|} = e^{it}$ soit $z = |z|e^{it}$. On écrit souvent $z = re^{it}$

DÉFINITION 1.5. Si $z = re^{it} \neq 0$ $r \in \mathbb{R}$ $t \in \mathbb{R}$ on dit que t est un argument du nombre complexe z (et r son module!).

PROPOSITION 1.6. (1) Si $z = re^{it} \neq 0$ les arguments de z sont les réels de la forme $t + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

(2) Si z, z' ont pour argument t, t' alors zz' a pour argument $t + t'$

(3) Si $z = re^{it}$, alors $\bar{z} = re^{-it}$

DÉMONSTRATION. 1) Si $z = re^{it} = r'e^{it'}$ on a $r = r' \neq 0$ (car $r = |z|$) et $e^{i(t-t')} = 1$ soit $\cos(t-t') = 1$ et $\sin(t-t') = 0$ donc $t-t' = 2k\pi$

2) $zz' = rr'e^{it}e^{it'} = rr'e^{i(t+t')}$

3) $\bar{z} = r(\cos t - i \sin t) = r(\cos(-t) + i \sin(-t)) = re^{-it}$ □

Cela donne une autre interprétation géométrique de la multiplication des nombres complexes : zz' correspond au vecteur dont la norme est le produit des normes de z et z' et l'argument la somme des arguments de z et z' .

On a certaines formules remarquables :

$$e^{2i\pi} = 1 \quad e^{i\pi} = -1 = \cos(\pi) + i \sin(\pi)$$

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$(e^{it})^n = e^{nit}$$

2. Applications trigonométriques

On a :

$$\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \operatorname{Re}(e^{it})$$

$$\sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \operatorname{Im}(e^{it})$$

1. Par exemple par la formule $e^z = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{z^j}{j!}$.

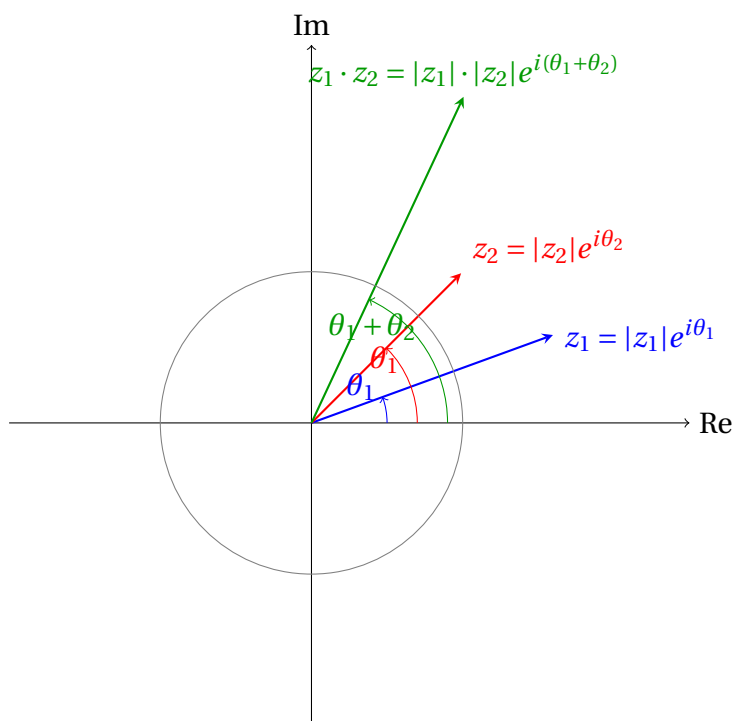


FIGURE 1.2 – Représentation géométrique du produit de deux nombres complexes : $z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

On peut retrouver facilement toutes les formules trigonométriques en utilisant ces expressions et la propriété fondamentale

$$e^z e^{z'} = e^{z+z'}$$

EXEMPLES 1.7. Voici quelques applications de ces formules :

(1)

$$\begin{aligned} \sin(a) \cos(b) &= \frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i} \frac{e^{ib} + e^{-ib}}{2} = \frac{e^{i(a+b)} - e^{-i(a+b)}}{4i} + \frac{e^{i(a-b)} - e^{-i(a-b)}}{4i} \\ &= \frac{1}{2} \sin(a+b) - \frac{1}{2} \sin(a-b) \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \frac{e^{i(a+b)} + e^{-i(a+b)}}{2} = \frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2} \frac{e^{ib} + e^{-ib}}{2} - \frac{(e^{ia} - e^{-ia})(e^{ib} - e^{-ib})}{2i \cdot 2i} \\ &= \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b) \end{aligned}$$

(3)

(4)

$$\cos^2(t) = \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2it} + e^{-2it} + 2}{4} = \frac{1}{2}(1 + \cos(2t))$$

(5)

$$\begin{aligned} \cos(a)^3 &= \frac{(e^{ia} + e^{-ia})^3}{8} = \frac{e^{3ia} + 3e^{2ia}e^{-ia} + 3e^{ia}e^{-2ia} + e^{-3ia}}{8} \\ &= \frac{e^{3ia} + e^{-3ia} + 3e^{ia} + 3e^{-ia}}{8} = \frac{1}{4}(\cos(3a) + \cos(a)) \end{aligned}$$

(6)

$$\sin^3(a) = \left(\frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i} \right)^3 = -\frac{1}{8i} (e^{3ia} - 3e^{ia}e^{-ia} + 3e^{ia}e^{-2ia} - e^{-3ia}) = -\frac{1}{4}\sin(3a) + \frac{3}{4}\sin(a)$$

3. Exercices

- (1) Exprimer la partie réelle et imaginaire d'un nombre complexe en fonction de son module et son argument.
- (2) (a) Montrer que $\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}$. Quel est le module de $\frac{1}{1+i}$? Son argument?
 (b) Quel est le module de $1+i\sqrt{3}$? Son argument? On rappelle que $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$.
 (c) Quel est le module de $\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$? Son argument?
 (d) En utilisant la question précédente, calculer $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$
- (3) (a) Exprimer $\cos(t)^2 \sin(t)$ en fonction de $\cos(kt)$ et $\sin(kt)$ avec $0 \leq k \leq 3$
 (b) Calculer la primitive de $\cos(t)^2 \sin(t)$ qui vaut $\frac{-1}{3}$ en $t = 0$. En déduire l'expression de $\cos(t)^3$ en fonction de $\cos(kt)$ et $\sin(kt)$ avec $0 \leq k \leq 3$

Chapitre 2

Suites numériques

1. Généralités

DÉFINITION 2.1. Une suite de nombres réels (resp. complexes) est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). On notera u_n l'image de n , et $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite.

REMARQUE 2.2. Il arrive que les suites ne soient définies que pour $n \geq n_0$ et on note alors $(u_n)_{n \geq n_0}$.

EXEMPLES 2.3.

- (1) La suite $u_n = n^2$ des carrés des entiers
- (2) La suite $u_n = \frac{1}{n}$ définie pour $n \geq 1$.
- (3) La suite $u_n = \sqrt{n^2 - 3}(1 + i)^n$ définie pour $n \geq 2$.

Les suites peuvent être définies de différentes manières :

- par une formule explicite, comme dans les exemples précédents
- par une formule de récurrence : on définit le premier terme (en général u_0) et on donne une formule définissant le $(n+1)$ -ième terme en fonction du n -ième $u_{n+1} = f(u_n)$.

EXEMPLES 2.4.

- (1) $u_0 = 0 \quad u_{n+1} = 3u_n + 2$
- (2) $u_0 = 1 \quad u_{n+1} = i u_n^2 + 1$

On peut aussi avoir des récurrences doubles (ou n -uples) : on définit u_0, u_1 et on exprime u_{n+2} en fonction de u_n, u_{n+1} .

EXEMPLE 2.5. La suite de Fibonacci : $u_0 = 0, u_1 = 1, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$

Il y a bien sûr de nombreuses autres manières de définir les suites. La suite des nombres premiers n'est ni explicite ni définie par récurrence.

1.1. Quelques propriétés des suites.

DÉFINITION 2.6. Une suite de nombres réels $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante (resp. strictement croissante) si pour tout n $u_n \leq u_{n+1}$ (resp. $u_n < u_{n+1}$). La suite est décroissante (resp. strictement décroissante) si pour tout n on a $u_{n+1} \leq u_n$ (resp. $u_{n+1} < u_n$).

EXEMPLES 2.7.

- (1) $u_n = \sqrt[3]{n}$ est strictement croissante
- (2) $u_n = 1/n$ est strictement décroissante
- (3) $u_n = (-1)^n$ n'est ni croissante ni décroissante
- (4) Si F est croissante (resp. décroissante) alors $u_n = F(n)$ est croissante (resp. décroissante)

Si $(u_n)_{n \geq 0}$ est définie par récurrence, $u_{n+1} = f(u_n)$, la suite est croissante si $u_{n+1} - u_n > 0$ et décroissante si $u_{n+1} - u_n < 0$. Or $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$, il faut donc étudier le signe de $g(x) = f(x) - x$.

EXEMPLES 2.8.

- (1) La suite récurrente associée à $f(x) = x + 2$ est croissante car $f(x) - x = 2 > 0$.
- (2) Si $f(x) = 2x + 3$ $f(x) - x = x + 3$
 - Si $u_0 > -3$ $u_1 - u_0 = u_0 + 3 > 0$, donc $u_1 > u_0 > -3$ donc $u_2 > u_1 > u_0 > -3$ etc. et la suite est croissante
 - Si $u_0 < -3$ $u_1 - u_0 = u_0 + 3 < 0$ donc $u_1 < u_0 < -3$ et $u_2 - u_1 < u_1 + 3 < 0$ et $u_2 < u_1 < u_0 < -3$ etc. la suite est décroissante.
 - Si $u_0 = -3$ on voit que $u_n = -3$ pour tout n , la suite est dite stationnaire.

DÉFINITION 2.9. Une suite réelle $(u_n)_{n \geq 0}$ est majorée s'il existe M tel que

$$\forall n \quad u_n \leq M$$

La suite est minorée s'il existe m tel que

$$\forall n \quad u_n \geq m$$

La suite (u_n) est bornée si elle est à la fois minorée et majorée.

REMARQUE 2.10.

- La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est majorée si et seulement si $(-u_n)_{n \geq 0}$ est minorée.
- La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est bornée si et seulement si $|u_n|$ est majorée : si $|u_n| \leq M$ on a : $-M \leq u_n \leq M$.

DÉFINITION 2.11. Une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ de nombres complexes est bornée si les suites $(\operatorname{Re}(u_n))_{n \geq 0}$ et $(\operatorname{Im}(u_n))_{n \geq 0}$ sont bornées, ou encore si la suite $(|u_n|)_{n \geq 0}$ est bornée.

EXEMPLES 2.12.

- (1) La suite $u_n = n^2$ est minorée (par 0) mais pas majorée
- (2) La suite $u_n = \frac{1}{n^2}$ $n \geq 1$ est majorée (par 1) et minorée (par 0).
- (3) La suite $u_n = e^{in\sqrt{2}}$ est bornée car $|u_n| = 1$

1.2. Suites arithmétiques, géométriques.

DÉFINITION 2.13. Une suite arithmétique est une suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + r$. On appelle r la raison de la suite.

On vérifie que $u_n = nr + u_0$

EXEMPLES 2.14.

- (1) La suite des nombres pairs et la suite des nombres impairs sont des suites arithmétiques de raison 2.
- (2) La suite des nombres dont le dernier chiffre de l'écriture en base 10 est 3 est une suite de raison 10.

Il est parfois utile de savoir calculer la somme $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$

Ici $S_n = u_0 + (u_0 + r) + (u_0 + 2r) + \dots + (u_0 + nr)$

$$= (n+1)u_0 + r(0+1+2+\dots+n)$$

Or $0+1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ car $2(0+1+2+\dots+n) =$

$$\begin{array}{r} 0+1+2+\dots+n \\ n+(n-1)+\dots+1+0 \end{array} = n(n+1)$$

Donc $S_n = (n+1)u_0 + \frac{n(n+1)}{2}r$

DÉFINITION 2.15. On appelle suite géométrique de raison q une suite donnée par la relation de récurrence $u_{n+1} = qu_n$.

On a donc $u_n = q^n u_0$ et on peut calculer la somme de ses n premiers termes

PROPOSITION 2.16. Si $u_n = u_0 q^n$ avec $q \neq 1$ alors

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

DÉMONSTRATION.

$$\begin{aligned} S_n &= u_0(1 + q + \dots + q^n) \\ &= u_0 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \quad \text{si } q \neq 1 \\ &= (n+1)u_0 \quad \text{si } q = 1 \end{aligned}$$

La démonstration de

$$1 + q + \dots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \text{ se fait}$$

par récurrence : on a bien $S_0 = 1 = \frac{q-1}{q-1}$ et si

$$S_n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}, \quad S_{n+1} = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} + q^{n+1} = \frac{q^{n+1} - 1 + q^{n+1}(q - 1)}{q - 1} = \frac{q^{n+2} - 1}{q - 1}.$$

Variante : on calcule $S_n(q - 1) = q^{n+1} - q^n + q^n - q^{n-1} + \dots + q - 1$. Les termes s'éliminent deux à deux (téléscopage) sauf le premier et le dernier, et il reste $q^{n+1} - 1$. Donc $S_n(q - 1) = q^{n+1} - 1$ et $S_n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$. Bien sûr cela n'a de sens que si $q \neq 1$. Mais si $q = 1$, $S_n = 1 + 1 + \dots + 1 = n + 1$. $\square$

1.3. Limites d'une suite. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle. Dire que $(u_n)_{n \geq 0}$ a pour limite l , c'est dire que lorsque n augmente u_n est aussi proche qu'on veut de l .

DÉFINITION 2.17. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle et $l \in \mathbb{R}$. On dit que la suite a pour limite l si quel que soit le réel $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$ lorsque $n \geq n_0$. Soit encore

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad |u_n - l| < \varepsilon.$$

On note alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ ou $\lim_n u_n = l$.

REMARQUES 2.18.

- (1) La limite - si elle existe - est unique. Si $l \neq l'$ sont les limites de $(u_n)_{n \geq 0}$ et $\varepsilon < \frac{|l - l'|}{2}$ ($|l - l'| > 0$) on aura pour n assez grand

$$|u_n - l| < \frac{|l - l'|}{2} \quad |u_n - l'| < \frac{|l - l'|}{2}$$

donc

$$|l - l'| < |l - u_n| + |u_n - l'| < |l - l'|$$

contradiction.

- (2) Si $(u_n)_{n \geq 0}$ a pour limite l , il en est de même pour une suite obtenue en changeant un nombre fini de termes u_n .

- (3) Toute suite convergente est bornée. En effet si n_0 est associé à $\varepsilon = 1$ on a pour $n \geq n_0$ que $|u_n - l| \leq 1$ donc $|u_n| \leq |l| + 1$ et il en résulte que

$$\forall n, \quad |u_n| \leq \max\{|u_0|, |u_1|, \dots, |u_{n_0-1}|, |l| + 1\}$$

- (4) Bien sûr certaines suites n'ont pas de limite. Par exemple $u_n = (-1)^n$ bien que bornée n'a pas de limite.

(5) On dit par abus de langage que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ tend vers $+\infty$ si on a

$$\forall M, \exists n_0, \forall n \geq n_0 \quad u_n \geq M$$

et que $(u_n)_{n \geq 0}$ tend vers $-\infty$ si

$$\forall M, \exists n_0, \forall n \geq n_0 \quad u_n \leq -M$$

La définition de la convergence s'étend immédiatement au cas complexe.

DÉFINITION 2.19. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ de nombres complexes a pour limite $l \in \mathbb{C}$ si $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad |u_n - l| < \varepsilon$.

Géométriquement cela signifie que pour tout disque de rayon ε centré en $l \in \mathbb{C}$, tous les u_n sont, à partir d'un certain rang, dans $D(l, \varepsilon)$.

Le lien entre cas réel et complexe est donné par le théorème suivant.

DÉFINITION 2.20. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ de nombres complexes a pour limite $l \in \mathbb{C}$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0 \quad |u_n - l| < \varepsilon$$

Géométriquement cela signifie que pour tout disque de rayon ε centré en $l \in \mathbb{C}$, tous les u_n sont, à partir d'un certain rang, dans $D(l, \varepsilon)$.

Le lien entre cas réel et complexe est donné par le théorème suivant.

THÉORÈME 2.21. La suite de nombres complexes $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers $l \in \mathbb{C}$ si et seulement si les suites réelles $(\operatorname{Re}(u_n))_{n \geq 0}$ et $(\operatorname{Im}(u_n))_{n \geq 0}$ convergent respectivement vers $\operatorname{Re}(l)$ et $\operatorname{Im}(l)$.

DÉMONSTRATION. Posons $u_n = v_n + i w_n$ $l = p + i q$ On a $|v_n - p|^2 + |w_n - q|^2 = |u_n - l|^2$ donc si $|u_n - l| < \varepsilon$ on a $|v_n - p| < \varepsilon$ et $|w_n - q| < \varepsilon$. On en conclut que si $\lim_n u_n = l$ alors $\lim_n v_n = p$ $\lim_n w_n = q$. Inversement posons $\varepsilon > 0$. Il existe alors n_0 et n'_0 tels que

$$n \geq n_0 \Rightarrow |v_n - p| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$n \geq n'_0 \Rightarrow |w_n - q| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Donc si $n \geq \max(n_0, n'_0)$ on a

$$|u_n - l| = \sqrt{|v_n - p|^2 + |w_n - q|^2} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^2}{4}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} < \varepsilon$$

□

EXEMPLES 2.22. (1) Les suites $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$, $(\frac{1}{n^\alpha})_{n \geq 1}$ pour $\alpha > 0$ ont pour limite 0.

(2) La suite $(a^n)_{n \geq 0}$ tend vers 0 si $a \in \mathbb{C}$ et $|a| < 1$, de même que $(n^\alpha a^n)_{n \geq 1}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)

(3) La suite $\frac{\ln(n)}{n^\alpha}$ tend vers 0 pour $\alpha > 0$.

En effet, considérons la fonction $f(x) = \varepsilon x^\alpha - \ln(x)$. Sa dérivée est $\frac{\varepsilon \alpha x^{\alpha-1} - 1}{x}$. Pour $x \geq x_0$ assez grand cette quantité est minorée par $\frac{1}{x}$. Donc $f(x) - f(x_0) \geq \int_{x_0}^x \frac{dt}{t} = \ln(x) - \ln(x_0)$. On en déduit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ donc pour x assez grand $0 \leq \ln(x) \leq \varepsilon x^\alpha$, d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$.

2. Critères de convergence

On veut savoir dire si une suite donnée est convergente ou divergente. Pour cela il existe plusieurs critères.

2.1. Donnant la limite.

(1) Comparaison

Si $|u_n - l| \leq v_n$ avec $\lim_n v_n = 0$ alors $\lim_n u_n = l$

EXEMPLES 2.23. (1) $\lim_n \frac{1}{n^2+1} = 0$ car $\left| \frac{1}{n^2+1} \right| \leq \frac{1}{n}$ et $\lim \frac{1}{n} = 0$

(2) $\lim_n \frac{n+3}{n+5} = 1$ car

$$|u_n - 1| = \frac{2}{n+5} \leq \frac{2}{n}$$

(2) Composition

Tout d'abord on a

PROPOSITION 2.24 (Limites de sommes, produits, quotients de suites). Soient $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ deux suites (réelles ou complexes) telles que $\lim_n u_n = l$ $\lim_n v_n = l'$ alors $\lim (u_n + v_n) = l + l'$ $\lim (u_n v_n) = ll'$ et si $l \neq 0$ $\lim \frac{v_n}{u_n} = \frac{l'}{l}$.

PROPOSITION 2.25 (Limites de l'image d'une suite par une fonction continue). Plus généralement soit f une fonction continue. Si $\lim_n u_k = l$ alors $\lim_k f(u_k) = f(l)$.

Dans le cas réel, lorsque l'une des limites est infinie on a :

— Si $l = +\infty$ $l' \neq -\infty$ $\lim (u_n + v_n) = +\infty$

— Si $l = -\infty$ $l' \neq +\infty$ $\lim (u_n + v_n) = -\infty$

— Si $l = \pm\infty$ $l' \neq 0$: $\lim u_n \cdot v_n = +\infty$ si $l = +\infty, l' > 0$ ou $l = -\infty, l' < 0$,
 $\lim u_n \cdot v_n = -\infty$ sinon.



Les expressions $(+\infty) - (+\infty)$ ou $+\infty \cdot 0$ n'ont pas de sens. Si $l = +\infty$ et $l' = -\infty$, $u_n + v_n$ peut avoir une limite ou ne pas en avoir. Mais la seule connaissance de l et l' ne permet pas de décider.

EXEMPLES 2.26.

(1) $\lim_n \frac{1}{n} = 0$

(2) $\lim (n^2 + \frac{1}{n}) = +\infty$ car $\lim n^2 = +\infty$ et $\lim \frac{1}{n} = 0$

(3) $\lim (n^2 - n) = +\infty$ mais $\lim_n n^2 = \lim_n n = +\infty$

(4) $\lim (n^2 - (n^2 + 1)) = -1$ $\lim_n n^2 = \lim_n (n^2 + 1) = +\infty$

$$(5) \lim_n \frac{n^2+1}{n} = +\infty \quad \lim_n (n^2+1) = +\infty$$

Plus généralement on a.

THÉORÈME 2.27. *Soit f une fonction (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) continue en l . Alors si $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite telle que $\lim_n u_n = l$ on a $\lim_n f(u_n) = f(l)$.*

On rappelle que les fonctions suivantes sont continues

- (1) Les polynômes sur $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)
- (2) Les fonctions e^z (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $\sin(x)$, $\cos(x)$ (sur $\mathbb{R}$), $\frac{1}{x}$ (sur $\mathbb{R}^*$), $\log(x)$ (sur $\mathbb{R}_+^*$)
- (3) Si f est continue en x_0 et g continue en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est continue

EXEMPLES 2.28. (1) $f(x) = x^2 + 1$ est continue en 0, $f(0) = 1 \neq 0$ et $g(y) = \frac{1}{y}$ est continue en 1, donc $g \circ f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ est continue en 0. (En fait par le même raisonnement elle est continue en tout point de $\mathbb{R}$, mais pas sur $\mathbb{C}$ car $f(-i) = 0$)

(2) $u_n = \frac{n^2+3n+5}{n^2+1} = \frac{1+3/n+5/n^2}{1+\frac{1}{n^2}} = f\left(\frac{1}{n}\right)$ où $f(x) = \frac{1+3x+5x^2}{1+x^2}$ f est continue en $x = 0$ et $f(0) = 1$, donc $\lim_n u_n = 1$.

(3) $\lim_n \cos\left(\frac{\pi}{n^2+1}\right) = 1$.

(4) $1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$

Pour $|a| < 1$ on a $\lim_n a^{n+1} = 0$ donc $\lim_n (1 + a + a^2 + \dots + a^n) = \frac{1}{1-a}$

2.2. Critères de convergence sans connaître la limite. Le résultat suivant est une propriété fondamentale de $\mathbb{R}$, qui le distingue de $\mathbb{Q}$.

THÉORÈME 2.29. *Toute suite croissante et majorée de $\mathbb{R}$ est convergente. De même toute suite décroissante et minorée est convergente.*

EXEMPLES 2.30.

(1) Construction de e . La suite $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$ est évidemment croissante.

Comme $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$ (récurrence) on a

$$u_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \leq 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3$$

Donc u_n a une limite, notée e , vérifiant $e \leq 3$.

(2) Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par récurrence par $u_0 = 2$ $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right)$

On a donc $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right)$ et $f(x) - x = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} - 2x \right) = \frac{2-x^2}{2x}$ qui est

- strictement positif si $2 > x^2$
- strictement négatif si $2 < x^2$

Comme $u_0 = 2 > \sqrt{2}$ on a $u_1 - u_0 = f(u_0) - u_0 < 0$ i.e. $u_1 < u_0$ et si $u_n > \sqrt{2}$ on a $u_{n+1} < u_n$.

D'autre part $f'(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{x^2}\right)$ et on a donc le tableau de variation suivant

x	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$

et donc $u_n = f(u_{n-1})$ est toujours supérieur à $\sqrt{2}$.

La suite est donc décroissante et minorée par $\sqrt{2}$ et a donc une limite l .

Si u_n tend vers l alors $f(u_n) = u_{n+1}$ a pour limite d'une part égale à l ($= \lim_n u_{n+1}$) et d'autre part égale à $f(l)$ (f est continue). Donc $f(l) = l$ et $l = \sqrt{2}$.

Un résultat plus général est le suivant

THÉORÈME 2.31 (Théorème de Cauchy). *Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle ou complexe. La suite converge si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq n_0 \quad |u_m - u_n| < \varepsilon$$

Autrement dit, à partir d'un certain rang la différence entre deux termes de la suite (pas nécessairement consécutifs!) peut être rendue arbitrairement petite.

EXEMPLES 2.32.

- (1) La suite de nombres complexes $u_n = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!}$ est convergente quel que soit $z \in \mathbb{C}$. En effet

$$u_m - u_n = \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} + \dots + \frac{z^m}{m!}$$

et si $\frac{|z|}{n_0+1} = q < 1$ on a pour $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} |u_m - u_n| &\leq \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} (1 + q + \dots + q^{m-n-1}) \\ &\leq \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \left(\frac{1}{1-q} \right) \end{aligned}$$

or $\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}$ tend vers 0 avec n , car

$$\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{|z|^{n_0+1}}{(n_0+1)!} q^{n-n_0} \longrightarrow 0 \quad (\text{car } q < 1)$$

donc pour n assez grand et $m \geq n$ on a

$$|u_m - u_n| \leq \varepsilon.$$

On note e^z la limite de cette suite.

- (2) La suite $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ ne converge pas, car elle ne vérifie pas le critère de Cauchy. En effet, $u_{2n} - u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$.

Quelques limites de fonctions à connaître

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ car $(e^x)' = e^x$ et on calcule en $x = 0$
 (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log(1+x) = 1$ car $\log(1+x)' = \frac{1}{1+x}$ et on calcule en $x = 0$
 (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin(x) = 1$ car $\sin(x)' = \cos(x)$ et on calcule en $x = 0$
 (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$ car $\cos(0) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{2x}$
 (5) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^p} = +\infty$. En effet, la suite définissant e^t est clairement minorée par $\frac{t^{p+1}}{(p+1)!}$, donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^p} \geq \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{p+1}}{(p+1)!t^p} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{(p+1)!} = +\infty$.

Variante : comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ en posant $x = e^y$, lorsque y tend vers $+\infty$, x tend vers $+\infty$ et on a $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^y)}{e^y} = 0$, donc $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y} = 0$ et finalement $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty$

2.3. Règle de L'Hôpital. On rappelle la règle de l'Hôpital¹ :

THÉORÈME 2.33 (Règle de L'Hôpital). Soient f, g des fonctions continues sur $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$, de classe C^1 sur $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\setminus \{a\}$ telles que $f(a) = g(a) = 0$. Alors si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ on a $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

En particulier si f, g sont dérivables sur un intervalle contenant a et $g'(a) \neq 0$ on a

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$



La règle ne s'applique que si $f(0) = g(0) = 0$ i.e. on a une forme indéterminée : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{1} = 0$.

On peut appliquer ce théorème plusieurs fois de suite, mais il faut bien vérifier que les fonctions dérivées successives s'annulent en a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{2} = \frac{1}{2}$$

DÉMONSTRATION. On utilise le théorème des accroissements finis généralisé : si f, g sont deux fonctions C^0 sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$$

En effet, on considère la fonction $x \mapsto (f(x) - f(a))(g(b) - g(a)) - (g(x) - g(a))(f(b) - f(a))$ qui s'annule en $x = a$ et en $x = b$. D'après le théorème de Rolle si f est continue

1. Nommée d'après Guillaume de L'Hôpital (1661-1704) auteur de "Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes" où se trouve cette règle, qui serait en fait due à Jean Bernoulli (1667-1748).

sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$. Il existe donc un point c où sa dérivée s'annule, c'est-à-dire

$$f'(c)(g(b) - g(a)) - g'(c)(f(b) - f(a)) = 0$$

Dans notre cas, $f(a) = g(a) = 0$, et en posant $b = x$, on a $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$ et lorsque x tend vers a , $c_x \in]a, x[$ tend aussi vers a . Donc si $\frac{f'(y)}{g'(y)}$ a une limite en a , il en est de même pour $\frac{f(x)}{g(x)}$ et les limites sont égales. $\square$

EXEMPLES 2.34. (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x)^{1/x}$. On prend le logarithme de l'expression qui est $\frac{\ln \cos(x)}{x}$. La dérivée de $\ln(u)$ est $\frac{u'}{u}$, donc ici $\ln(\cos(x))' = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, et par la règle de l'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(\cos(x)^{1/x}) = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 0$$

Donc par continuité de l'exponentielle, $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x)^{1/x} = e^0 = 1$.

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 \sin(x) - \sin(2x))}{(x - \sin(x))}.$$

La dérivée de $2 \sin(x) - \sin(2x)$ est $2 \cos(x) - 2 \cos(2x)$, celle de $x - \sin(x)$ est $1 - \cos(x)$. Les deux s'annulent en $x = 0$, on peut alors appliquer à nouveau la règle de l'Hôpital.

La dérivée de $2 \cos(x) - 2 \cos(2x)$ est $-2 \sin(x) + 4 \sin(2x)$ celle de $1 - \cos(x)$ est $\sin(x)$. Les deux s'annulent en 0, on peut donc appliquer la règle de l'Hôpital...

La dérivée de $-2 \sin(x) + 4 \sin(2x)$ est $-2 \cos(x) + 8 \cos(2x)$ celle de $\sin(x)$ est $\cos(x)$. Leurs limites en 0 sont 6 et 1, donc

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 \sin(x) - \sin(2x))}{(x - \sin(x))} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos(x) - 2 \cos(2x)}{1 - \cos(x)} = \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin(x) + 4 \sin(2x)}{\sin(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cos(x) + 8 \cos(2x)}{\cos(x)} = 6 \end{aligned}$$

REMARQUES 2.35. (1) La règle de l'Hôpital s'applique aussi en $+\infty$. Donc si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty, \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \text{ existe, on a } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} =$$

l . En effet, on applique encore la formule $\frac{f(b)-f(x)}{g(b)-g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$ avec x tendant vers a . Comme $f(x)$ et $g(x)$ tendent vers $+\infty$, et $f(b), g(b)$ sont des constantes finies, donc $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{f(x)-f(b)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{g(x)-g(b)} = 1$ et

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)} = \frac{f'(c_b)}{g'(c_b)}$$

Lorsque b tend vers a , c_b tend vers a (car $a < c_b < b$ et donc

$$\lim_{b \rightarrow a} \frac{f'(c_b)}{g'(c_b)} = \lim_{y \rightarrow a} \frac{f'(y)}{g'(y)} = l$$

- (2) Il se peut que la limite de $\frac{f(x)}{g(x)}$ existe alors que la limite des dérivées n'existe pas. C'est le cas par exemple pour $\frac{x \sin(\frac{1}{x})}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} \sin(\frac{1}{x})$ qui a pour limite 0 en $x = 0$. Le quotient des dérivées est

$$\frac{\sin(\frac{1}{x}) - \frac{1}{x} \sin(\frac{1}{x})}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = 2\sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 2\frac{1}{\sqrt{x}} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

qui n'a pas de limite en $x = 0$.

Liste (non limitative) de limites à connaître par coeur

$$(1) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

$$(2) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$$

$$(3) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$$

$$(4) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} = \frac{1}{2}$$

$$(5) \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$$

$$(6) \text{ Pour } \alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t)^\beta}{t^\alpha} = 0$$

3. Exercices

- (1) Répondre par VRAI ou FAUX en justifiant (citer un théorème ou donner un contre-exemple)
- (a) Une suite croissante majorée admet une limite
 - (b) Une suite bornée est convergente
 - (c) Si $a = \lim_n u_n$ alors $\lim_n e^{u_n} = e^a$
- (2) On veut calculer la limite de la suite $u_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n+2)}$
- (a) Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et sa limite lorsque n tend vers $+\infty$
 - (b) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle qu'à partir d'un certain rang on ait $u_n \leq C(\frac{3}{4})^n$.
 - (c) En déduire la limite de la suite

Intégrales

1. Intégrale d'une fonction continue

1.1. Définition et généralités. Soit f une fonction continue sur un intervalle borné, fermé $[a, b]$. L'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ est intuitivement l'aire sous le graphe de la fonction (affectée d'un signe “−” si f est négative).

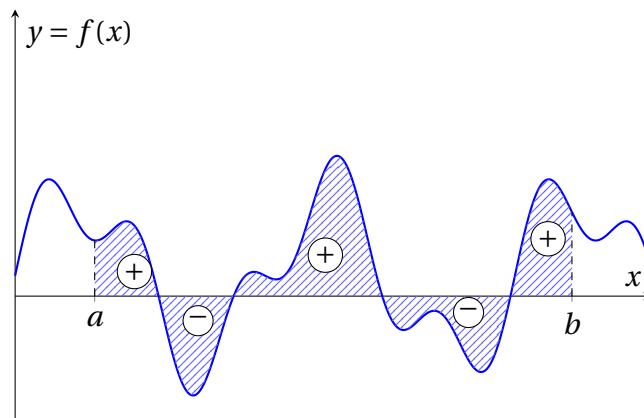
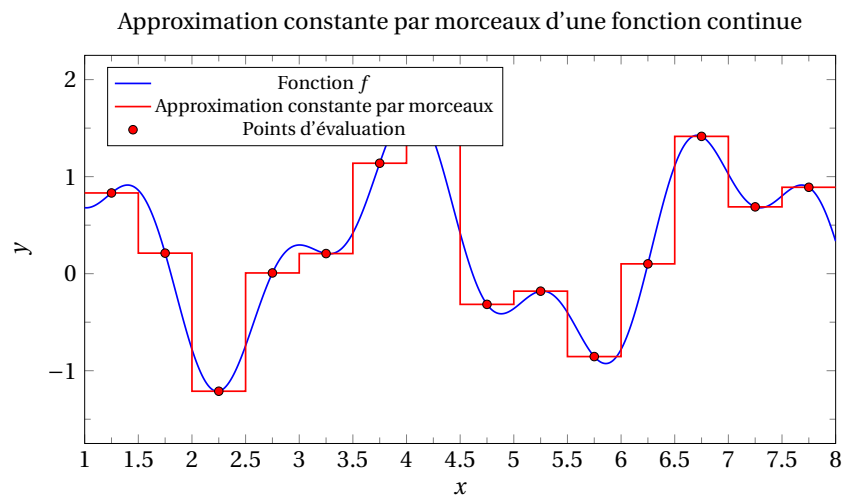


FIGURE 3.1 – Intégrale d'une fonction comme somme d'aires



En approchant f par des fonctions en escalier, on approche l'aire par l'aire de rectangles.

THÉORÈME 3.1. Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Posons $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$ pour $k = 0, \dots, n$. Alors la suite

$$I_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$$

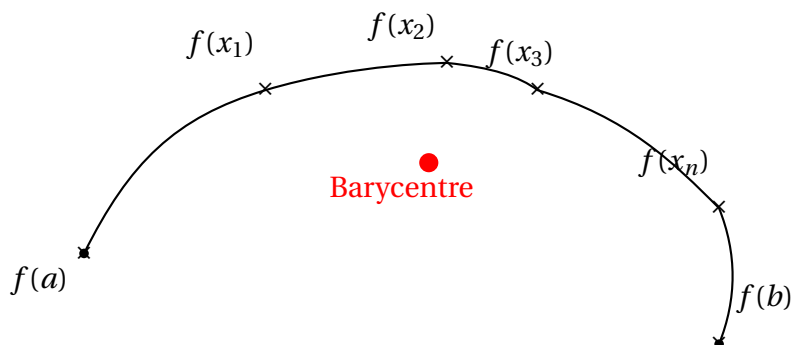
converge. On appelle *intégrale de f de a à b* la limite, et on la note $\int_a^b f(x) dx$

DÉMONSTRATION. On ne donnera pas la démonstration ici. Notons juste que l'on peut remplacer $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$ par n'importe quel point $\xi_k \in [a + k \frac{b-a}{n}, a + (k+1) \frac{b-a}{n}]$. $\square$

REMARQUE 3.2.  Il faut toujours écrire $\int f(x) dx$ et pas $\int f(x)!$

D'une part pour savoir par rapport à quelle variable on intègre (par exemple $\int a^2 t dt \neq \int a^2 t da!$) et d'autre part car cela permettra de ne pas se tromper lors des changements de variables.

Interprétation géométrique dans le cas d'une fonction définie sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$: $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$ qui est le barycentre des points $f(x_k)$. Lorsque n augmente, les points x_k se trouvent uniformément répartis sur la courbe $f([a, b])$ et le barycentre tend vers le barycentre de la courbe.



2. Propriétés

a) *Relation de Chasles.* On voit de la définition que si $c \in [a, b]$:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

On pose par convention, si $a > b$:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

La relation de Chasles est alors vérifiée quels que soient a, b, c , pourvu que f soit continue sur tous les intervalles concernés.

La relation de Chasles permet d'étendre la définition de l'intégrale au cas où f est seulement continue par morceaux,

DÉFINITION 3.3 (Fonction continue par morceaux et son intégrale). On dit que la fonction f est continue par morceaux s'il existe $a = a_0 < a_1 < \dots < a_p = b$ tels que f est continue sur $]a_j, a_{j+1}[$ et $\lim_{x \rightarrow a_j^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a_j^-} f(x)$ existent.

On pose alors :

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{j=0}^{p-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(x) dx$$

EXEMPLE 3.4.

$$f(x) = (-1)^{E(x)}$$

$$\text{alors } \int_0^3 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx = 1 - 1 + 1 = 1$$

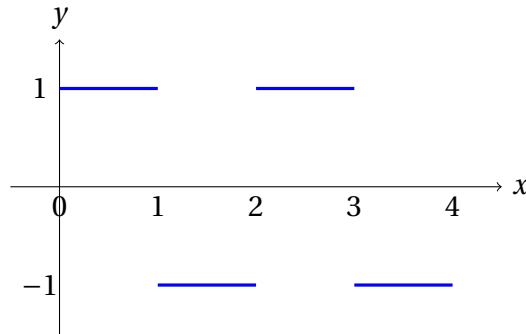


FIGURE 3.2 – La fonction $f(x) = (-1)^{E(x)}$

b) Linéarité. Si f et g sont continues sur $[a, b]$,
on a :

$$\begin{aligned} \int_a^b (f + g)(x) dx &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \\ \int_a^b \lambda f(x) dx &= \lambda \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

L'application $f \mapsto \int_a^b f$ de $C^0([a, b], \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ est donc linéaire. De même, évidemment, pour l'application définie de $C^0([a, b], \mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$.

c) *Positivité.* En utilisant le fait que la limite d'une suite de réels positifs est positive, on a :

PROPOSITION 3.5. Si $a < b$ et la fonction $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$ est positive sur $[a, b]$, on a $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

Bien entendu, il est important de souligner que $a < b$! En appliquant la proposition à $g - f$ et en utilisant la linéarité, on obtient :

COROLLAIRE 3.6. Soit $a < b$ et $f, g \in C^0([a, b], \mathbb{R})$ telles que $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$, alors :

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

En remarquant que $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, on a :

COROLLAIRE 3.7. Soient $a < b$ et $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$. Alors :

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

DÉMONSTRATION. Dans le cas réel, c'est simplement le théorème précédent avec les inégalités $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$. Dans le cas complexe, on reprend la définition et on utilise

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |f(\xi_k)|(x_{k+1} - x_k)$$

qui donne par passage à la limite l'inégalité voulue. □

Une autre conséquence du corollaire suivant est donnée par :

COROLLAIRE 3.8. Si f est une fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et si sur $[a, b]$ on a $|f(x)| \leq M$, alors :

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq M(b - a)$$

DÉMONSTRATION. En effet, on a :

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b M dx = M(b - a)$$

□

3. Calculs d'intégrales et primitives

DÉFINITION 3.9. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction sur I . On dit qu'une fonction F définie sur I est une primitive de f si $F' = f$.

PROPOSITION 3.10. Deux primitives d'une même fonction f diffèrent d'une constante.

DÉMONSTRATION. En effet, si $F' = G' = f$, alors $(F - G)' = 0$ donc $F - G$ est constante sur un intervalle. $\square$

REMARQUE 3.11. Il est essentiel d'être sur un intervalle : la fonction égale à 0 sur $[0, 1] \cup [3, 4]$ a pour primitive la fonction nulle, mais aussi la fonction égale à 0 sur $[0, 1]$ et à 1 sur $[3, 4]$.

Le lien entre intégrale et primitive est donné par le résultat suivant :

THÉORÈME 3.12 (Théorème fondamental du calcul intégral). *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. La fonction $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est une primitive de f sur $[a, b]$.*

DÉMONSTRATION.

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \left[\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right] = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt$$

Par continuité de f , on a $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = f(x)$ car

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt - f(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) dt$$

En effet quel que soit $\delta > 0$ on peut trouver h assez petit pour que sur $[x, x+h]$, $|f(x+h) - f(x)| \leq \delta$. Alors $\left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) dt \right| \leq \frac{1}{h} h \delta = \delta$. Donc $F'(x) = f(x)$. $\square$

COROLLAIRE 3.13. *Si f est une fonction continue sur $[a, b]$ et F une primitive de f , on a :*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

On note souvent $F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

EXEMPLES 3.14. (1) Une primitive de $f(x) = x^n$ est $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ donc : $\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

$$\text{Et plus généralement : } \int_a^b x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_a^b = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$$

$$(2) \int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$$

$$\text{Plus généralement : } \int \sin(kx) dx = -\frac{1}{k} \cos(kx) + C \quad (k \neq 0) \quad \int \cos(kx) dx = \frac{1}{k} \sin(kx) + C \quad (k \neq 0)$$

$$(3) \text{ Pour calculer } \int \sin^2(x) dx \text{ ou } \int \cos^2(x) dx, \text{ on linéarise : } \sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \text{ et } \cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \text{ donc : } \int \sin^2(x) dx = \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C$$

$$(4) \text{ Soit } n \in \mathbb{Z}^*. \text{ On a : } \int_0^{2\pi} \sin(nx) dx = \left[-\frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^{2\pi} = 0 \quad \int_0^{2\pi} \cos(nx) dx = \left[\frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^{2\pi} = 0$$

On en déduit $\int_0^{2\pi} e^{inx} dx = 0$ pour $n \neq 0$ et sinon, évidemment $\int_0^{2\pi} 1 dx = 2\pi$.

Interprétation géométrique : le barycentre du cercle est en 0. Ce calcul sera très important pour les séries de Fourier.

4. Méthodes de calcul

4.1. Intégration par parties. On exploite ici la formule $(fg)' = f'g + fg'$.

PROPOSITION 3.15. Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ (i.e. dérivables à dérivée continue) sur $[a, b]$. Alors :

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx$$

REMARQUE 3.16. La proposition est encore vraie si f et g sont $\mathcal{C}^1$ par morceaux, i.e. s'il existe $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ telle que f et g soient $\mathcal{C}^1$ sur $[x_i, x_{i+1}]$ (ceci découle de la relation de Chasles).

Bien entendu, cette formule n'a d'intérêt que si l'intégrale de droite est plus facile à calculer que celle de gauche.

REMARQUE 3.17. On évitera absolument d'écrire $\int f(x)$, ce qui risque des confusions. On écrira $\int f(x) dx$ ou $\int_a^b f(x) dx$...

Par ailleurs, on pourra écrire :

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

afin de décrire toutes les primitives.

EXEMPLES 3.18.

(1) $\int e^x \cos(x) dx$. On pose $u = e^x$ et $dv = \cos(x) dx$, donc $du = e^x dx$ et $v = \sin(x)$.

$$\int e^x \cos(x) dx = e^x \sin(x) - \int e^x \sin(x) dx$$

On intègre par parties une seconde fois avec $u = e^x$ et $dv = \sin(x) dx$:

$$\int e^x \sin(x) dx = -e^x \cos(x) + \int e^x \cos(x) dx$$

En substituant :

$$\int e^x \cos(x) dx = e^x \sin(x) + e^x \cos(x) - \int e^x \cos(x) dx$$

Donc :

$$2 \int e^x \cos(x) dx = e^x (\sin(x) + \cos(x))$$

D'où :

$$\int e^x \cos(x) dx = \frac{e^x (\sin(x) + \cos(x))}{2} + C$$

VARIANTE : $e^x \cos(x) = \operatorname{Re}(e^{(1+i)x})$ donc

$$\begin{aligned} \int e^x \cos(x) dx &= \operatorname{Re} \int e^{(1+i)x} dx = \operatorname{Re} \left(\frac{e^{(1+i)x}}{1+i} \right) + C = \\ &= e^x \operatorname{Re} \left(e^{ix} \frac{1-i}{2} \right) + C = \frac{e^x (\cos(x) + \sin(x))}{2} + C \end{aligned}$$

(2) $\int x \sin(x) dx$. On pose $u = x$ et $dv = \sin(x) dx$, donc $du = dx$ et $v = -\cos(x)$.

$$\begin{aligned} \int x \sin(x) dx &= -x \cos(x) - \int (-\cos(x)) dx \\ &= -x \cos(x) + \int \cos(x) dx \\ &= -x \cos(x) + \sin(x) + C \end{aligned}$$

4.2. Changement de variables. On exploite ici la formule suivante : si $F \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ (ou $\mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{C})$) et $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ est $\mathcal{C}^1$ de $[\alpha, \beta]$ vers $[a, b]$, alors :

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

THÉORÈME 3.19 (Formule du changement de variable). *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ une fonction $\mathcal{C}^1$ telle que $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$. Alors :*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

DÉMONSTRATION. Soit F une primitive de f et $G(t) = F(\varphi(t))$. Alors :

$$G'(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

Donc :

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_\alpha^\beta G'(t) dt = G(\beta) - G(\alpha) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$$

□

C'est ici que la notation $\int f(x) dx$ est utile : formellement on dit que l'on pose $x = g(t)$ donc $dx = g'(t) dt$ et

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(g(t)) g'(t) dt$$

Parfois $g(\alpha) > g(\beta)$ et il faut faire attention au bon ordre des variables d'intégration.

EXEMPLES 3.20.

(1) Calculons $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$. Posons $x = \sin(t)$, $dx = \cos(t) dt$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2(t)} \cos(t) dt = \int_0^{\pi/2} \cos(t) \cos(t) dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2(t) dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} (\cos(2t) + 1) dt \\ &= \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

(2) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ Posons $x = \sin(t)$, $dx = \cos(t) dt$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\cos(t) dt}{\sqrt{1-\sin^2(t)}} = \int \frac{\cos(t) dt}{|\cos(t)|} = \int \frac{\cos(t) dt}{\cos(t)} = \int dt = t + C$$

car sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\cos(t) \geq 0$ donc $|\cos(t)| = \cos(t)$. Plus généralement, sur $[-1, 1]$, la primitive de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est $\arcsin(x)$.

C'est ici que la notation $\int f(x) dx$ est utile : formellement on dit que l'on pose $x = g(t)$ donc $dx = g'(t) dt$ et on écrit alors

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(g(t)) g'(t) dt$$

Parfois $g(\alpha) > g(\beta)$ et il faut faire attention au bon ordre des variables d'intégration.

(3) On a $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) + C$

Posons $x = \tan(u)$, $dx = \tan'(u) du = (1 + \tan^2(u)) du$. Alors

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \int \frac{(1 + \tan^2(u)) du}{1 + \tan^2(u)} = \int du = u = \arctan(x) + C$$

(4) Calcul de $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$

Posons $x = a \tan(u)$, $dx = a(1 + \tan^2(u)) du$. Alors

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{a^2+x^2} &= \int \frac{a(1 + \tan^2(u)) du}{a^2 + a^2 \tan^2(u)} = \int \frac{a(1 + \tan^2(u)) du}{a(1 + \tan^2(u))} = \\ &= \int du = u + C = \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C \end{aligned}$$

(5) On peut aussi utiliser le théorème dans l'autre sens : on reconnaît une expression du type $f(g(x)) \cdot g'(x)$

Par exemple pour calculer $\int \frac{2x dx}{1+x^2}$, on pose $u = 1 + x^2$, alors $du = 2x dx$.
Donc

$$\int \frac{2x dx}{1+x^2} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln(1+x^2) + C$$

Ou encore pour calculer $\int \frac{\ln(t)^2}{t} dt$ on pose $u = \ln(t)$, d'où $du = \frac{dt}{t}$ et $\int \frac{\ln(t)^2}{t} dt = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{\ln(t)^3}{3} + C$

Liste (non limitative) d'intégrales à connaître par coeur

$$(1) \int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \text{ si } \alpha \neq -1 \text{ et } \int \frac{du}{u} = \ln(|u|) + C$$

$$(2) \int \cos(u) du = \sin(u) + C \text{ et } \int \sin(u) du = -\cos(u) + C$$

$$(3) \int \tan(u) du = \ln|\cos(u)| + C$$

$$(4) \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin(u) + C$$

$$(5) \int \frac{du}{1+u^2} = \arctan(u) + C$$

$$(6) \text{ Toutes les intégrales précédentes en remplaçant } u \text{ par une fonction } v(t) \text{ et } du \text{ par } v'(t)dt. \text{ Exemple : } \int \frac{v'(t)}{v(t)} dt = \ln(v(t)) + C.$$

5. Appendice : intégrales dépendant d'un paramètre

On considère une fonction $f(x, t)$ de deux variables. On suppose f continue en (x, t) . Alors on peut intégrer en x et t dans n'importe quel ordre

THÉORÈME 3.21 (Théorème de Fubini). *On a*

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, t) dt \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, t) dx \right) dt$$

Cela entraîne aussi que l'on peut dériver sous le signe intégrale

THÉORÈME 3.22 (Dérivation sous le signe intégral). *Soi $f(x, t)$ une fonction sur $[a, b] \times [c, d]$ telle que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ soit continue sur $[a, b] \times [c, d]$. Alors on a*

$$\frac{d}{dx} \int_c^d f(x, t) dt = \int_c^d \frac{d}{dx} f(x, t) dt$$

6. Intégrales généralisées

6.1. Définitions et généralités. À priori on ne sait pas définir l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle infini $[a, +\infty[$, ou l'intégrale sur $[a, b]$ d'une fonction continue seulement sur $[a, b[$.

DÉFINITION 3.23. Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge si la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ a une limite lorsque x tend vers $+\infty$. On la note $\int_a^{+\infty} f(t)dt$.

Si f est continue sur $] -\infty, a]$ on dit de même que $\int_{-\infty}^a f(t)dt$ converge si $\int_x^a f(t)dt$ a une limite lorsque x tend vers $-\infty$. On la note $\int_{-\infty}^a f(t)dt$.

Enfin si f est continue sur $[a, b[$ (resp. $]a, b]$, on dit que $\int_a^b f(t)dt$ converge si l'intégrale $\int_a^x f(t)dt$ (resp. l'intégrale $\int_x^b f(t)dt$) a une limite lorsque x tend vers b resp. x tend vers a). On la note $\int_a^b f(t)dt$.

REMARQUE 3.24. Pour le moment on suppose que f est continue sur un intervalle qui est fermé d'un côté et ouvert de l'autre. On verra plus tard le cas où f n'est continue ni en a ni en b .

EXEMPLE 3.25. 1) Si p est un réel > 0 $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^p}$ converge si et seulement si $p > 1$. En effet si $p = 1$ $\int_1^x \frac{dt}{t} = \log(x)$ qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$

si $p \neq 1$ la primitive de t^{-p} est $\frac{1}{1-p} t^{1-p}$ donc $\int_1^x \frac{dt}{t^p} = \frac{1}{1-p} [1 - x^{1-p}]$ qui a une limite en $+\infty$ ssi $p > 1$. Cette limite est alors égale à $\frac{1}{p-1}$.

2) $\int_0^{+\infty} e^{at} dt$ converge ssi $a < 0$

En effet $\int_0^x e^{at} dt = \left. \frac{e^{at}}{a} \right|_0^x = \frac{e^{ax}-1}{a}$ qui a pour limite $-\frac{1}{a}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

DÉFINITION 3.26. Soient $a < b$ des réels et f une fonction continue sur $[a, b[$, à valeurs réelles ou complexes. On dit que $\int_a^b f(t)dt$ converge si la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ (définie pour $x \in [a, b[$) a une limite lorsque x tend vers b^- . On pose alors $\int_a^b f(t)dt = \ell$.

De même si f est continue sur $]a, b]$ on définit $\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t)dt$ si cette limite existe.

Il faut toujours préciser où est le "problème", c'est-à-dire la discontinuité de la fonction (en a , en b , les deux?). Bien évidemment si l'une des bornes est $\pm\infty$ il y a là automatiquement un problème

EXEMPLE 3.27. L'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{t^p}$ converge ssi $p < 1$

En effet $\int_x^1 \frac{dt}{t^p} = \frac{x^{1-p}}{1-p}$ si $p \neq 1$

$\frac{1-x^{1-p}}{1-p} \rightarrow \frac{1}{1-p}$ si $p < 1 \rightarrow +\infty$ si $p > 1$

et $\int_x^1 \frac{dt}{t} = \log(\frac{1}{x}) \rightarrow +\infty$ si $x \rightarrow 0$.



Pour définir $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ si $f \in C^0(]-\infty, +\infty[, \mathbb{R})$ (ou $\mathbb{C}$) on pose

DÉFINITION 3.28. Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et $f \in C^0(]a, b[, \mathbb{R})$ ou $C^0(]a, b[, \mathbb{C})$.

On dit que $\int_a^b f(t) dt$ converge si **à la fois** $\int_a^c f(t) dt$ et $\int_c^b f(t) dt$ convergent, et on pose

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

REMARQUES 3.29. (1) La relation de Chasles entraîne que si f (est continue sur $[a, b]$ la convergence de $\int_a^b f(t) dt$ est équivalente à celle de $\int_c^b f(t) dt$ pour $a < c < b$.

(2) De même si f est continue sur $]a, b[$, la convergence de $\int_a^b f(t) dt$ ne dépend pas du choix de c . En effet,

$$\int_x^c f(t) dt = \int_x^d f(t) dt + \int_d^c f(t) dt$$

et comme $\int_d^c f(t) dt$ est finie l'existence de la limite lorsque x tend vers a de $\int_x^c f(t) dt$ entraîne celle de $\int_x^d f(t) dt$.

REMARQUES 3.30.

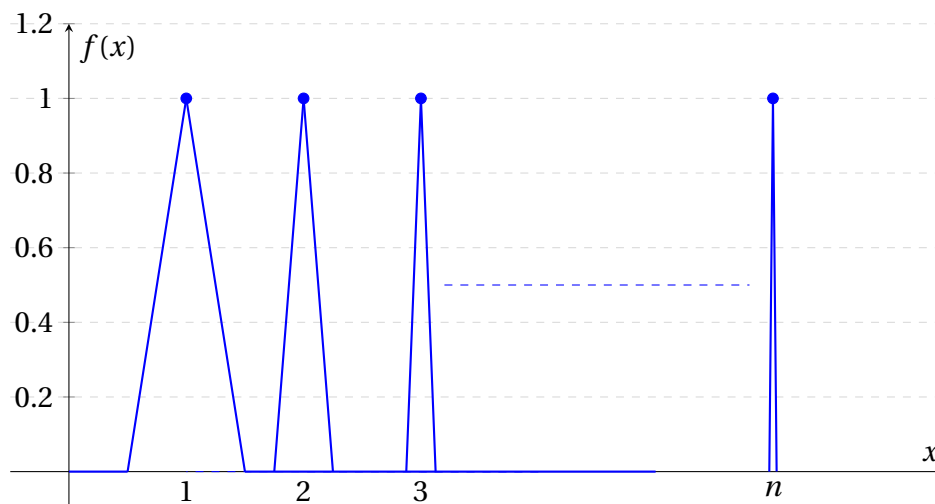
(1)  Il est faux de dire que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge si $\int_{-x}^x f(t) dt$ a une limite lorsque x tend vers $+\infty$. Voir l'exemple qui suit.

(2)  La convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ N'ENTRAÎNE PAS $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) dt = 0$. Par exemple si f est la fonction ci-dessous égale à 0 partout sauf sur $]n - \frac{1}{2^n}, n + \frac{1}{2^n}[$ où elle est égale à

$$\begin{cases} 2^n(x - n + \frac{1}{2^n}) & \text{sur } [n - \frac{1}{2^n}, n] \\ 2^n(n + \frac{1}{2^n} - x) & \text{sur } [n, n + \frac{1}{2^n}] \end{cases}$$

et en particulier vaut 1 en n .

Alors $\int_0^{n + \frac{1}{2^n}} f(t) dt$ égale la somme des aires des triangles de base $[k - \frac{1}{2^k}, k + \frac{1}{2^k}]$ et de hauteur 1, c'est-à-dire $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \leq 1$. On en déduit que la fonction $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ est croissante (car f est positive) et bornée, car $F(n + \frac{1}{2^n}) \leq 1$ et possède donc une limite en $+\infty$. L'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ est donc convergente, bien que clairement $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ n'existe pas.



EXEMPLES 3.31.

- (1) L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t dt$ diverge car $\int_0^{+\infty} t dt$ et $\int_{-\infty}^0 t dt$ divergent, mais $\int_{-x}^x t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_{-x}^x = 0$.
- (2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ converge car $\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(x) \Big|_0^x = \arctan(x)$ tend vers $\frac{\pi}{2}$ lorsque x tend vers $+\infty$.
- (3) $\int_{-\infty}^0 \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x \Big|_{-\infty}^0 = -\arctan(x)$ a pour limite $\frac{\pi}{2}$ lorsque x tend vers $-\infty$.

6.2. Règles de calcul.

6.2.1. *Linéarité.* Par simple passage à la limite au cas d'une fonction continue sur un intervalle fini on vérifie

PROPOSITION 3.32. Soient f, g deux fonctions continues sur $[a, b[$ ($b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$) et $\lambda \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ convergent alors

$$\int_a^b (f(t) + g(t)) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$$

$$\int_a^b \lambda f(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt$$

6.2.2. *Intégration par parties.* Là aussi on se ramène au cas de f, g continues sur un intervalle fini.

⚠ Les intégrales $\int_a^c f(t) dt$ et $\int_a^c g(t) dt$ peuvent converger, mais $\int_a^c f(t) g'(t) dt$ ne converge pas. [Exemple : $f = g = \frac{1}{\sqrt{t}}$]

Et aussi bien sûr que $\int_a^c f(t) g'(t) dt$ converge, mais $\int_a^c f'(t) g(t) dt$ diverge

Morale : On fait les calculs pour $\int^x$ et on passe à la limite en x .

EXEMPLE 3.33. On a $\int_1^{+\infty} \cos t \, dt$ converge.

On écrit $\int_1^x \frac{\cos t}{t} \, dt = \left[\frac{\sin t}{t} \right]_1^x + \int_1^x \frac{\sin t}{t^2} \, dt = \frac{\sin(x)}{x} - \sin(1) + \int_1^x \frac{\sin t}{t^2} \, dt$

On verra que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} \, dt$ converge.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$, on en déduit que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} \, dt$ converge.

6.2.3. *Changement de variable.* De même on peut le changement de variables sur $\int_a^x f(t) \, dt$ et on passe à la limite en x .

PROPOSITION 3.34. Soient a, α des réels et b, β dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, et f une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit φ une bijection C^1 de $[\alpha, \beta]$ dans $[a, b]$ telle que $\varphi(\alpha) = a$ $\lim_{t \rightarrow \beta^-} \varphi(t) = b$. Alors $\int_a^b f(t) \, dt$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt$ sont simultanément convergentes ou divergentes, et dans le premier cas, elles sont égales.

EXEMPLES 3.35. (1) Pour $a > 0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + a^2} \stackrel{t=au}{=} \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{u^2 + 1} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{t}{a}\right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{a}$$

(2)

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \stackrel{t=\sin(u)}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(u) \, du}{|\cos(u)|} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} du = \frac{\pi}{2}$$

Notons qu'on a ici ramené une intégrale généralisée à une intégrale ordinaire!

6.3. Critères de convergence. Il s'agit de pouvoir dire si une intégrale converge lorsqu'on ne sait pas calculer une primitive.

6.3.1. *Cas d'une fonction positive.* Soient f, g des fonctions à valeurs positives définies sur $[a, +\infty[$.

DÉFINITION 3.36. Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. On note $f \sim_a g$ (ou $f \sim g$ lorsque x tend vers a) et on dit que f et g sont équivalentes en a si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. ($a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$)

On note $f \in O_a(g)$ (ou $f \in O(g)$ lorsque x tend vers a) (on évitera l'abus de langage courant $f = O_a(g)$!) s'il existe une constante $C > 0$ telle que $f(x) \leq Cg(x)$ pour x au voisinage de a (i.e dans $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ si a est fini, $a > M$ ou $a \leq M$ si $a = +\infty$ ou $-\infty$)

EXEMPLES 3.37.

(1) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \sim \frac{1}{x}$ lorsque $x \rightarrow +\infty$

(2) $e^x - 1 \sim e^x$ lorsque $x \rightarrow \infty$

(3) $\frac{1+\sin(x)}{x} \in O\left(\frac{1}{x}\right)$ lorsque $x \rightarrow \infty$ car $\frac{1+\sin(x)}{x} \leq \frac{2}{x}$

(4) $\frac{1}{x} \notin O_{+\infty}\left(\frac{1+\sin(x)}{x}\right)$ car $\frac{1+\sin(x)}{x}$ s'annule en $(2k+1)\pi$ mais $\frac{1}{x} \neq 0$!

Par contre $\frac{1}{x} \in O_{+\infty}\left(\frac{2+\sin(x)}{x}\right)$.

THÉORÈME 3.38. Soient f, g des fonctions positives sur $[a, +\infty[$. Si $f \in O_{+\infty}(g)$ et si $\int_a^{+\infty} g(t) \, dt$ converge, alors $\int_a^{+\infty} f(t) \, dt$ converge.

De même si f, g sont positives sur $[a, b[$ et $f \in O_b(g)$, si $\int_a^b g(t) dt$ converge alors $\int_a^b f(t) dt$ converge.

DÉMONSTRATION. On traite le cas $\int_a^{+\infty}$, l'autre cas étant identique.

Tout d'abord si $f(t)$ est positive, $F_a(x) \rightarrow \int_a^x f(t) dt$ est croissante.

En effet si $y > x$ on a $F(y) - F(x) = \int_x^y f(t) dt > 0$ (Prop en page I5)

Ensuite, si $f(t) \leq Kg(t)$ pour $t > a$ avec $K > 0$, alors on a $\int_a^x f(t) dt \leq K \int_a^x g(t) dt$

Par hypothèse $\int_a^x g(t) dt$ a une limite pour x tendant vers $+\infty$. Elle est donc bornée, donc $\int_a^x f(t) dt$ aussi et on en déduit que $\int_a^x f(t) dt$ étant croissante et majorée possède une limite lorsque x tend vers $+\infty$ i.e l'intégrale converge. $\square$

REMARQUE 3.39.  Ceci est faux si $f(t), g(t)$ ne sont pas positives. Cependant il suffit en fait de supposer $f(t)$ et $g(t)$ positives pour t assez grand, en appliquant le théorème sur $[c, +\infty[$ avec c assez grand.

EXEMPLES 3.40. Notons que dans les exemples qui suivent toutes les fonctions sont positives (on ne le répètera donc pas à chaque fois).

(1) $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge car $e^{-t^2} \in O_{+\infty}(e^{-t})$ et $\int_1^{+\infty} e^{-t} dt$ converge

(2) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3+t} dt$ converge car $\frac{1}{t^3+t} \in O_{+\infty}\left(\frac{1}{t^3}\right)$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^3}$ converge

(3) $\int_1^{+\infty} \frac{3\sin(t)+t}{t^3} dt$ converge car pour t assez grand $3\sin(t) + t \geq 0$ et $\frac{3\sin(t)+t}{t^3} \in O_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge

Évidemment si on a $f, g \geq 0$ et à la fois $f \in O_{+\infty}(g)$ et $g \in O_{+\infty}(f)$ $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ et $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ convergent ou divergent simultanément.

En particulier c'est le cas si $f \sim g$.

EXEMPLES 3.41.

(1) $\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{\ln(1+t)} dt$ converge. Le problème est en 0, $\sqrt{t}$ et $\ln(1+t)$ sont ≥ 0 pour $t \geq 0$ $\ln(1+t) \sim_0 t$ donc $\frac{\sqrt{t}}{\ln(1+t)} \sim \frac{1}{\sqrt{t}}$ et $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ converge.

(2) $\int_1^{+\infty} e^{-t}(2+\sin(t)) dt$ converge car $e^{-t}(2+\sin(t)) \in O_{+\infty}(e^{-t})$ et $\int e^{-t} dt$ converge

6.3.2. *Cas d'une fonction de signe quelconque.* Le critère suivant permet parfois de se ramener au cas positif

THÉORÈME 3.42. Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$ à valeurs réelles ou complexes. Si l'intégrale $\int_a^{+\infty} |f(t)| dt$ converge alors $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge.

DÉFINITION 3.43. Lorsque $\int_a^{+\infty} |f(t)| dt$ converge on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge absolument. De même pour $\int_a^b f(t) dt$.

DÉMONSTRATION. Dire que $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ revient à dire que pour toute suite (x_n) tendant vers $+\infty$ $y_j = \int_{x_m}^{x_n} f(t) dt$ a une limite. Or si $v_n - v_m = \int_{x_m}^{x_n} |f(t)| dt$ et on a $|v_n - v_m| = \left| \int_{x_m}^{x_n} f(t) dt \right| \leq \int_{x_m}^{x_n} |f(t)| dt$ donc $(v_n)_{n \geq 1}$ vérifie le critère de Cauchy.

On en déduit que $(v_n)_{n \geq 1}$ converge donc $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge. $\square$

On déduit de la section précédente que si $|f| \in O_{+\infty}(g)$ et que $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ converge alors $\int_a^{+\infty} |f(t)| dt$ converge, c'est-à-dire que $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est absolument convergente, donc convergente. On pourra donc écrire par abus de langage $f \in O_a(g)$ au lieu de $|f| \in O_a(g)$.

REMARQUE 3.44.



Il existe des intégrales convergentes qui ne sont pas absolument convergentes.

Pour toute fonction f , on écrit

$$f^+ = \max(f, 0) \quad \text{et} \quad f^- = \max(-f, 0)$$

de sorte que :

$$\begin{aligned} f(t) &= f^+(t) - f^-(t) \\ |f(t)| &= f^+(t) + f^-(t) \end{aligned}$$

où $f^+, f^- \geq 0$ (deux fonctions positives).

Interprétation :

(1) **Convergence absolue**

Si $\int_a^{+\infty} |f(t)| dt$ converge, alors **aussi bien** $\int_a^{+\infty} f^+(t) dt$ **que** $\int_a^{+\infty} f^-(t) dt$ convergent.

(2) **Convergence mais pas convergence absolue**

Si $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge mais $\int_a^{+\infty} |f(t)| dt = +\infty$, alors :

$$\int_a^{+\infty} f^+(t) dt = +\infty \quad \text{ET} \quad \int_a^{+\infty} f^-(t) dt = +\infty$$

La convergence de l'intégrale résulte d'une **compensation**, c'est-à-dire :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_a^x f^+(t) dt - \int_a^x f^-(t) dt \right) = \int_a^{+\infty} f(t) dt \quad (\text{fini})$$

EXEMPLES 3.45.

(1) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$ converge absolument car $\left| \frac{\sin t}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge

(2) $\int_1^{+\infty} t \sin(t) e^{-t} dt$ converge absolument car $|t \sin(t) e^{-t}| \leq t e^{-t}$ or $t e^{-t} = \exp(-t + \ln(t))$. Or on a vu que $\frac{\ln(t)}{t} \rightarrow 0$ en $+\infty$ donc pour t assez grand $\ln(t) < \frac{t}{2}$ et $t e^{-t} \leq e^{-\frac{t}{2}}$. Or $\int_1^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}} dt$ converge.

- (3) On a vu que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$ converge, car $\int_1^x \frac{\cos t}{t} dt = \frac{\sin t}{t} \Big|_1^x + \int_1^x \frac{\sin t}{t^2} dt$. Or $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$ converge absolument, vu que $\left| \frac{\sin t}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$, et vu que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ on aura $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{\cos(t)}{t} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(t)}{t} \Big|_1^x + \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{\sin t}{t^2} dt$. Donc

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt = -\sin 1 + \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$$

Mais $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$ n'est pas absolument convergente. En effet $|\cos t| \geq \frac{1}{2}$ sur $k\pi - \frac{\pi}{3} \leq t \leq k\pi + \frac{\pi}{3}$ donc $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\cos t}{t} \right| dt \geq \int_{\frac{2\pi}{3}}^{k\pi + \frac{\pi}{3}} \left| \frac{\cos(t)}{t} \right| dt \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{k\pi - \frac{\pi}{3}}^{k\pi + \frac{\pi}{3}} \frac{dt}{t} \geq \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\pi + \frac{\pi}{3}} = \frac{3\pi}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k-1}$ qui diverge.

Liste (non limitative) d'intégrales impropres à connaître par coeur

- (1) $\int_0^a \frac{du}{u^\alpha}$ est convergente ssi $\alpha < 1$
- (2) $\int_a^{+\infty} \frac{du}{u^\alpha}$ est convergente ssi $\alpha > 1$
- (3) $\int_0^{+\infty} e^{-u} du$ est convergente
- (4) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} du$ sont convergentes mais pas absolument convergentes.

7. Appendice : intégrales indéfinies dépendant d'un paramètre

On considère une fonction $f(x, t)$ de deux variables. On suppose f continue en (x, t) . Pour intégrer en x et t dans n'importe quel ordre il faut une hypothèse supplémentaire. On énonce le théorème dans le cas de bornes $c = -\infty, d = +\infty$.

THÉORÈME 3.46 (Théorème de Fubini, cas impropre). *On suppose qu'il existe une fonction φ positive sur $\mathbb{R}$ telle que*

- $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt$ converge
- Pour tout x dans $[a, b]$, $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$

Alors

$$\int_a^b \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t) dt \right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_a^b f(x, t) dx \right) dt$$

Cela entraîne aussi que l'on peut dériver sous le signe intégrale

THÉORÈME 3.47 (Dérivation sous le signe intégral-cas impropre). *Soit $f(x, t)$ une fonction sur $[a, b] \times [c, d]$ telle que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ soit continue sur $[a, b] \times [c, d]$ et il existe une fonction φ sur $\mathbb{R}$ telle que*

- $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt$ converge

— Pour tout x dans $[a, b]$, $|\frac{\partial}{\partial x} f(x, t)| \leq \varphi(t)$

Alors on a

$$\frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx} f(x, t) dt$$

8. Exercices

Étudier la convergence de chacune des intégrales impropres suivantes, en précisant où se situe(nt) le(s) point(s) à problème. Même en cas de convergence, on ne demande pas de calculer la valeur de l'intégrale.

$$(1) \int_0^{+\pi/2} \tan(t) dt$$

$$(2) \int_0^{+\infty} (t-1)e^{-t^2+2t} dt$$

$$(3) \int_1^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t^2} dt$$

Chapitre 4

Séries numériques

1. Généralités

DÉFINITION 4.1. Soit $(u_k)_{k \geq 0}$ une suite de réels ou de complexes. On définit la suite des **sommes partielles** $(S_n)_{n \geq 0}$ par :

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

On dit que la série $\sum u_k$ **converge** si la suite (S_n) admet une limite quand $n \rightarrow +\infty$. Cette limite est appelée la **somme de la série**.

Terminologie : on dit aussi de manière équivalente que la série de terme général u_k converge ou diverge.

REMARQUE 4.2.  Ne pas confondre la convergence de la **série** $\sum u_k$ avec celle de la **suite** (u_k) . On peut commencer la série à un rang $n_0 > 0$, ce qui ne change pas la convergence mais modifie la somme.

EXEMPLES 4.3.

(1) La série **harmonique** $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ **diverge** (vu dans le chapitre 2, Exemple 2.32 (2) en utilisant le critère de Cauchy).

(2) La série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ **converge**, car :

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1$$

(3) La série géométrique $\sum q^k$ converge si $|q| < 1$:

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \rightarrow \frac{1}{1 - q}$$

Si $|q| \geq 1$, la série diverge.

(4) La série $\sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ diverge car :

$$\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln(n+1) \rightarrow +\infty$$

Comme conséquence immédiate du critère de Cauchy on obtient :

PROPOSITION 4.4. *Si la série $\sum u_k$ converge, alors $u_k \rightarrow 0$.*

DÉMONSTRATION. Par le critère de Cauchy, pour tout ε strictement positif, il existe N tel que :

$$\forall n \geq N, \quad |S_{n+1} - S_n| = |u_{n+1}| < \varepsilon \Rightarrow \lim_n u_n = 0$$

□

REMARQUE 4.5.



La convergence de la suite $(u_k)_{k \geq 0}$ vers 0 N'ENTRAÎNE PAS la convergence de la série $\sum_k u_k$.

2. Séries à termes positifs

2.1. Comparaison de séries.

PROPOSITION 4.6. *Si $u_k \geq 0$, alors $\sum u_k$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles (S_n) est **majorée**.*

DÉMONSTRATION. En effet la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ est alors croissante, donc elle converge si et seulement si elle est majorée. □

THÉORÈME 4.7 (Théorème de Comparaison). *Si $0 \leq u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.*

DÉMONSTRATION. En effet si on note S_n les sommes partielles associées à u_k , T_n pour les sommes partielles associées à v_k on a que S_n, T_n sont croissantes car u_n et v_n sont positifs et $S_n \leq T_n$. Comme $(T_n)_{n \geq 1}$ converge elle est bornée, mais alors $(S_n)_{n \geq 1}$ est bornée et donc étant croissante et majorée, elle converge. □

EXEMPLES 4.8.

(1) $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k+1)} \Rightarrow \sum \frac{1}{k^2}$ converge.

(2) Si $p > 1$, alors $\sum \frac{1}{n^p}$ converge.

(3) Comme $\lim_k \frac{\ln(k)}{k} = 0$ à partir d'un certain rang on a $\frac{1}{\ln k} \geq \frac{1}{k}$. Donc $\sum \frac{1}{\ln k}$ diverge.

2.2. Notation « O ».

DÉFINITION 4.9. On écrit $u_k = O(v_k)$ si u_k, v_k sont positifs à partir d'un certain rang et s'il existe $C > 0$ tel que :

$$\forall k \geq N, \quad u_k \leq C v_k$$

THÉORÈME 4.10 (Théorème de Comparaison (version générale)). *On suppose $u_k, v_k \geq 0$. Si $u_k = O(v_k)$ et $\sum v_k$ converge, alors $\sum u_k$ converge. Si $u_k = O(v_k)$ et $v_k = O(u_k)$, alors les deux séries sont de même nature.*

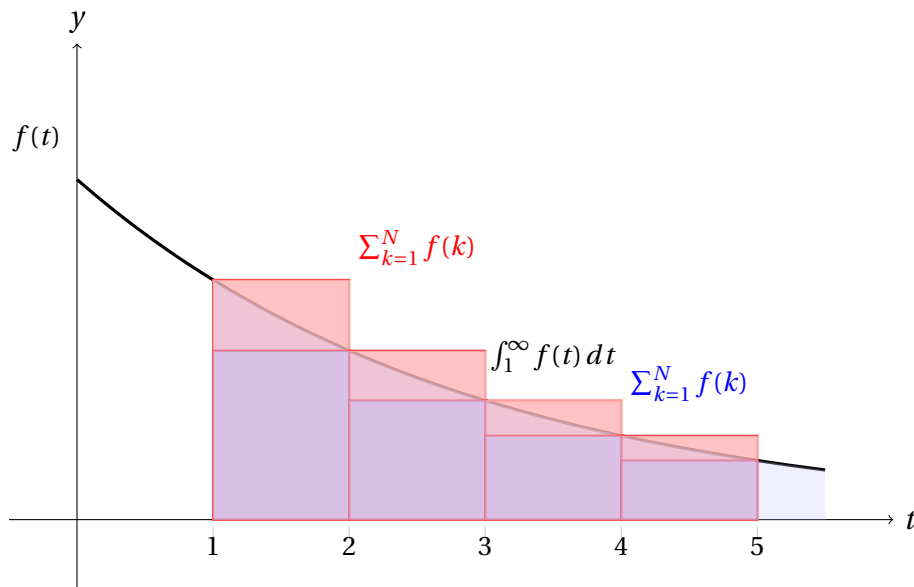


FIGURE 4.1 – Illustration des estimations utilisées pour la preuve du théorème : l'aire des rectangles orange vaut $f(k)$, celle des rectangles bleus vaut $f(k+1)$

2.3. Comparaison avec une intégrale.

THÉORÈME 4.11 (Théorème de Comparaison des séries et intégrales). *Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, continue, **positive et décroissante**. Alors $\sum_k f(k)$ converge si et seulement si $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge.*

DÉMONSTRATION. On regarde la série en partant de $n_0 \geq a$. On a pour $k > n_0$

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k)$$

car $f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$ si $t \in [k, k+1]$.

Donc

$$\sum_{k=n_0}^n f(k+1) \leq \int_{n_0}^n f(t) dt \leq \sum_{k=n_0}^n f(k)$$

en utilisant la relation de Chasles.

Si l'intégrale converge $\int_a^n f(t) dt$ est une suite convergente donc bornée, et il en est de même pour $\sum_{k=n_0}^n f(k+1)$ donc les sommes partielles sont bornées et la série converge.

Réciproquement, si la série converge la suite $\int_{n_0}^n f(t) dt$ converge car elle est croissante et majorée. En effet si $x \leq n$ on aura $\int_{n_0}^x f(t) dt \leq \sum_{k=n_0}^n f(k) \leq \sum_{k=n_0}^{+\infty} f(k)$, donc $\int_{n_0}^x f(t) dt$ est bornée et comme elle est croissante elle a une limite en $+\infty$.

□

EXEMPLES 4.12. (1) La série de terme général $\frac{1}{k^\alpha}$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leq 1$, car c'est le cas pour $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ et $\frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante et positive.

(2) $\sum \frac{1}{k \ln(k)}$ diverge. On utilise $f(t) = \frac{1}{t \ln(t)}$ définie sur $[2, +\infty[$.

$$\int_2^x \frac{dt}{t \ln(t)} = [\ln(\ln(t))]_2^x = \ln(\ln(x)) - \ln(\ln(2))$$

qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

Comme f est décroissante et positive, le critère s'applique.

3. Séries à termes quelconques

3.1. Convergence absolue. Ce critère est semblable à celui pour les intégrales généralisées, et s'applique pour des séries à termes réels ou complexes.

THÉORÈME 4.13. Soit $\sum u_k$ une série à termes réels ou complexes. Si la série $\sum |u_k|$ converge alors la série $\sum u_k$ converge. On dit que $\sum u_k$ est **absolument convergente**.

DÉMONSTRATION. On applique le critère de Cauchy à $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. On a pour $n \geq m$

$$|S_n - S_m| = \left| \sum_{k=m+1}^n u_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^n |u_k|.$$

La convergence de $\sum |u_k|$ entraîne, par le critère de Cauchy, que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N tel que si $n \geq m \geq N$ on a

$$\sum_{k=m+1}^n |u_k| \leq \varepsilon.$$

Mais alors $\left| \sum_{k=m+1}^n u_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^n |u_k| \leq \varepsilon$ et, toujours d'après le critère de Cauchy la suite S_n converge. $\square$

REMARQUE 4.14. Comme pour les intégrales, une série peut converger sans être absolument convergente.

EXEMPLE 4.15. $\sum \frac{\sin(k)}{k^2}$ est absolument convergente car $\left| \frac{\sin(k)}{k^2} \right| \leq \frac{1}{k^2}$ qui est convergente.

EXEMPLE 4.16. (1) $\sum \frac{e^{ik}}{k^2}$ est absolument convergente, car $\left| \frac{e^{ik}}{k^2} \right| \leq \frac{1}{k^2}$.

(2) Soit $z \in \mathbb{C}$. La série $\sum \frac{z^k}{k!}$ est absolument convergente car $\sum \frac{|z|^k}{k!}$ est convergente. En effet pour $|z| < \frac{n_0}{2}$ on a

$$\frac{|z|^k}{k!} = \frac{|z|_0^n}{n_0!} \frac{|z|^{k-n_0}}{(n_0+1)\dots k} \leq C \frac{1}{2^{k-n_0}}$$

Donc $\frac{|z|^k}{k!} \in O(\frac{1}{2^k})$ et comme la série de terme général $\frac{1}{2^k}$ converge, la série de terme général $\frac{|z|^k}{k!}$ converge, donc la série de terme général $\frac{z^k}{k!}$ est absolument convergente, donc convergente.

La somme de cette série est la (ou une) définition de e^z .

Les deux critères suivants sont couramment utilisés, bien que les démonstrations directes soient souvent plus simples

PROPOSITION 4.17 (Règle de d'Alembert). *Soit $(u_k)_{k \geq 1}$ le terme général d'une série. On suppose que la suite $(|\frac{u_{k+1}}{u_k}|)_{k \geq 1}$ a une limite l . Alors*

- Si $l < 1$ la série est absolument convergente
- Si $l > 1$ la série est divergente

Notons que si $l = 1$ on ne peut pas conclure, la série peut être divergente ou convergente.

DÉMONSTRATION. En effet si $l < 1$, à partir d'un certain rang n_0 on doit avoir $|\frac{u_{k+1}}{u_k}| < l' < 1$ et donc $|u_{k+1}| \leq (l')^{k+1-n_0} |u_{n_0}| = O(l'^k)$. Comme la série de terme général $(l')^k$ est convergente, d'après le Théorème de comparaison (Théorème 4.7) la série de terme général u_k sera absolument convergente donc convergente.

D'autre part si $l > 1$, à partir d'un certain rang n_0 on a $|\frac{u_{k+1}}{u_k}| > l' > 1$ (en particulier le quotient a un sens donc $u_{n_0} \neq 0$) donc $|u_{k+1}| \geq (l')^{k+1-n_0} |u_{n_0}| \geq C l'^k$ (notons que $C = u_{n_0} l'^{-n_0} \neq 0$). Le terme général de la suite ne tend donc pas vers 0 et la série est évidemment divergente. $\square$

EXEMPLE 4.18. (1) Si $u_k = \frac{1}{k}$ on aura $l = 1$ mais on sait que la série diverge. Si $u_k = \frac{1}{k^2}$ de nouveau $l = 1$ mais on sait que la série converge.

PROPOSITION 4.19 (Règle de Cauchy). *Soit $(u_k)_{k \geq 1}$ le terme général d'une série. On suppose que la suite $(|u_k|^{\frac{1}{k}})_{k \geq 1}$ a une limite l . Alors*

- Si $l < 1$ la série est absolument convergente
- Si $l > 1$ la série est divergente

DÉMONSTRATION. En effet si $l < 1$, à partir d'un certain rang n_0 on doit avoir $|u_k|^{\frac{1}{k}} < l' < 1$ et donc $|u_k| \leq (l')^k$. Comme la série de terme général $(l')^k$ est convergente la série de terme général u_k sera absolument convergente donc convergente.

D'autre part si $l > 1$, à partir d'un certain rang on a $|u_k|^{\frac{1}{k}} > l' > 1$ (en particulier $|u_k| \geq (l')^k$). Le terme général de la suite ne tend donc pas vers 0 et la série est divergente. $\square$

Ces critères permettent parfois de simplifier des démonstrations de convergence.

EXEMPLE 4.20. La série $\sum_k \frac{z^k}{k!}$. On a $u_k = \frac{z^k}{k!}$ donc $\left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| = \left| \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} \frac{k!}{z^k} \right| = \frac{|z|}{k+1}$ qui a pour limite 0 lorsque k tend vers $+\infty$. La série est donc convergente.

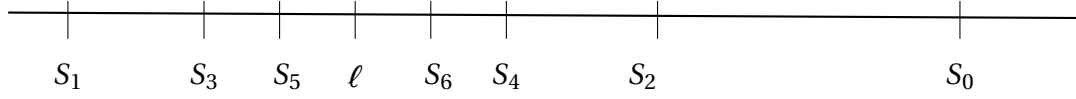


FIGURE 4.2 – Sommes partielles pour une série alternée

3.2. Séries alternées.

DÉFINITION 4.21. Une série est alternée si son terme général est de la forme $u_k = (-1)^k v_k$ avec $v_k \geq 0$ pour tout $k \geq 0$ (ou $v_k \leq 0$ pour tout $k \geq 0$).

THÉORÈME 4.22 (Théorème de Leibniz). Si v_k est **décroissante** et $\lim_k v_k \rightarrow 0$, alors la série $\sum (-1)^k v_k$ converge.

DÉMONSTRATION. Idée : les suites des sommes partielles paires et impaires sont respectivement croissantes et décroissantes et leur différence tend vers 0. On traite le cas où $v_k \geq 0$ pour tout k , l'autre cas se traite de la même manière.

Soit en effet $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k v_k$. Alors

- $S_{2k-1} \leq S_{2k+1}$, car $S_{2k+1} - S_{2k-1} = -v_{2k+1} + v_{2k} \geq 0$ par décroissance de $(v_k)_{k \geq 0}$.
Donc la suite $(S_{2k+1})_{k \geq 0}$ est croissante.
- De même $S_{2k+2} \leq S_{2k}$ car $S_{2k+2} - S_{2k} = v_{2k+2} - v_{2k+1} \leq 0$, donc la suite $(S_{2k})_{k \geq 1}$ est décroissante.
- Enfin la différence $S_{2k+1} \leq S_{2k}$ et $S_{2k+1} - S_{2k}$ tend vers 0, puisque $S_{2k+1} - S_{2k} = -v_{2k+1} \leq 0$ et $\lim_k v_{2k+1} = 0$.

On a donc une suite croissante $(S_{2k+1})_{k \geq 0}$ une suite décroissante $(S_{2k})_{k \geq 0}$ et donc

$$S_{2k+1} \leq S_{2k} \leq S_{2k-2} \leq \dots \leq S_0$$

La suite $(S_{2k+1})_{k \geq 1}$ est donc croissante majorée et a donc une limite a . La suite décroissante $(S_{2k})_{k \geq 0}$ a la même limite puisque $S_{2k+1} - S_{2k}$ a pour limite 0. On en déduit que la suite $(S_k)_{k \geq 1}$ a une limite, donc que la série converge. $\square$

EXEMPLES 4.23. (1) $\sum \frac{(-1)^k}{k}$ converge.

(2) $\sum \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ converge.

(3) $\sum \frac{(-1)^k}{k^2 \ln(k)}$ converge.

Notons qu'aucune de ces 3 suites n'est absolument convergente vu que $\sum_k \frac{1}{k}$ diverge et $\frac{1}{k} < \frac{1}{\sqrt{k}} < \frac{1}{\ln(k)}$ pour k assez grand.

REMARQUE 4.24. Si $\ell = \lim S_n$ on a

$$S_{2n+1} \leq \ell \leq S_{2n+2} \leq S_{2n}$$

donc

$$\begin{aligned} |S_{2n+1} - \ell| &\leq |S_{2n+2} - S_{2n+1}| = v_{2n+2} \\ |S_{2n} - \ell| &\leq |S_{2n} - S_{2n+1}| = v_{2n+1} \end{aligned}$$

donc la différence entre la somme partielle et la somme de la série, qu'on appelle le **reste de la série** est majorée par le module du premier terme omis.

EXEMPLE 4.25. Si $\ell = \lim \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ on a

$$\left| \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k} - \ell \right| \leq \frac{1}{n+1}.$$

On verra que $\ell = \ln(2)$. Il y a cependant des méthodes plus efficaces de calculer une valeur approchée de $\ln(2)$: en effet pour calculer $\ln(2)$ avec trois décimales cette méthode exige qu'on additionne mille (!) termes de la série.

3.3. Réarrangement.

REMARQUE 4.26. On peut permuter un nombre fini de termes d'une suite sans modifier sa convergence ou sa limite. C'est faux pour une infinité de termes.

EXEMPLES 4.27. (1)

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots \neq 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots$$

mais les deux séries convergent car

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{4k-1} + \frac{1}{4k+1} - \frac{1}{2k} \right]$$

qui correspond à une série alternée avec

$$\begin{aligned} u_{8k} &= \frac{1}{4k-1} + \frac{1}{4k+1} = \frac{8k}{16k^2-1} \\ u_{8k+4} &= \frac{1}{2k} \end{aligned}$$

et on a bien $u_{2k+4} \leq u_{2k} \leq u_{2k-2}$, donc la série converge et S_n a une limite. Comme $S_{2n+2} \leq S_{2n}$ la limite de la série n'est pas $\ln(2)$ car $\ln(2) = 0,693$ et la somme est supérieure.

(2) On peut réordonner $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ de façon à la rendre divergente en permutant les termes de manière appropriée.

4. Exercices

(1) Répondre par VRAI ou FAUX en justifiant (citer un théorème ou donner un contre-exemple)

- (a) Une série dont le terme général tend vers 0 est convergente
- (b) Une série de terme général u_k tel que $\lim_k k|u_k| = 1$ diverge
- (c) Une série de terme général u_k tel que $\lim_k k^2|u_k| = 1$ converge

(2) Dire si les séries suivantes sont absolument convergentes? Convergentes?

(a) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\log(k)}$

(b) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k)}{k^2}$

(c) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(k)}{k^2 - \log(k)}$

(3) Soit $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$

(a) (2pts) En majorant $\frac{t^n}{1+t}$ montrer que $\lim_n I_n = 0$

(b) (2pts) Montrer que $I_n + I_{n-1} = \frac{1}{n}$

(c) (2pts) En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)$

(4) Soit la série de terme général $u_{3k} = \frac{1}{3k}, u_{3k+1} = \frac{1}{3k+1}, u_{3k+2} = \frac{-2}{3k+2}$.

(a) Calculer $u_{3k} + u_{3k+1} + u_{3k+2}$ et en donner un équivalent.

(b) En déduire la convergence de la série. Est-elle absolument convergente?

Suites et séries de fonctions

1. Généralités

On va voir qu'il y a plusieurs définitions de convergence pour les fonctions. La plus évidente est

DÉFINITION 5.1 (Convergence simple). Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que la suite converge simplement vers une fonction f si pour tout $x \in I$ la suite $(f_n(x))_{n \geq 0}$ converge vers $f(x)$.

EXEMPLES 5.2.

- (1) $(\frac{\sin nx}{n})_{n \geq 1}$ converge simplement vers 0
- (2) $(e^{nx})_{n \geq 1}$ converge simplement vers χ_0 sur $] -1, 0]$ où $\chi_0(x) = 0$ pour $x < 0$ et $\chi_0(0) = 1$. Elle ne converge pas sur $] -1, 1[$.
- (3) $(1 + \frac{x}{n})^n$ converge simplement vers e^x car $n \log(1 + \frac{x}{n}) \sim n \cdot \frac{x}{n} \rightarrow x$.

On voit que, partant de fonctions continues, la limite simple est parfois continue, parfois discontinue (exemple 2). On introduit alors une autre notion :

DÉFINITION 5.3 (Convergence uniforme). Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I . On dit que $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers f si la suite $d_n = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$ tend vers 0.

Il s'agit donc de majorer $|f_n(x) - f(x)|$ par une quantité indépendante de x et tendant vers 0.

EXEMPLES 5.4.

- (1) $|\frac{\sin nx}{n}| \leq \frac{1}{n}$ donc $\frac{\sin nx}{n}$ converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$.
- (2) Si $x_n = \frac{-1}{n}$, $|e^{nx_n} - \chi_0(x_n)| = e^{-1}$ ne tend pas vers 0, donc e^{nx} ne converge pas uniformément vers χ_0 sur $] -1, 0]$.
- (3) $|x - n \ln(1 + \frac{x}{n})| \leq |\int_0^x (1 - \frac{n}{n+t}) dt|$
 $\leq |\int_0^x \frac{t}{n+t} dt| \leq \frac{|x|}{n}$
 si $I = [a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ on a $|x| \leq \max\{|a|, |b|\} = M$ et donc
 $|x - n \ln(1 + \frac{x}{n})| \leq \frac{M}{n}$ tend vers 0, et donc $n \ln(1 + \frac{x}{n})$ converge uniformément vers x .

Par contre pour $x_n = n$ on a

$$\left| n - n \ln \left(1 + \frac{n}{n} \right) \right| = n(1 - \ln(2)) \neq 0$$

donc

$$\left| n - n \ln \left(1 + \frac{n}{n} \right) \right| = n$$

ne tend pas vers 0, donc la convergence n'est pas uniforme sur $[0, +\infty[$.

En termes de quantificateurs les deux types de convergence s'expriment comme suit :

— pour la convergence simple

$$\forall x \in I \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N, \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

— et pour la convergence uniforme

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geq N \quad \forall x \in I \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

i.e. la place de « $\forall x$ » fait la différence entre les deux types de convergence.

Bien entendu, la convergence uniforme est plus forte que la convergence simple.



Pour éviter des confusions, on ne dira JAMAIS qu'une suite de fonctions converge, mais on précisera toujours « la suite de fonctions converge simplement » ou « la suite de fonctions converge uniformément ».

PROPOSITION 5.5. Si une suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ définie sur I converge uniformément vers f alors elle converge simplement vers f .

Un critère utile pour montrer qu'une suite de fonctions ne converge pas uniformément c'est de trouver une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ dans I telle que $f_n(x_n) - f(x_n)$ ne tend pas vers 0.

EXEMPLES 5.6. (1) $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ ne tend pas uniformément vers e^x car $f_n(n) - f(n) = 2^n - e^n$ ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$

(2) $f_n(x) = x^n$ ne tend pas uniformément vers 0 sur $[0, 1]$ car $f_n\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e^{-1} \neq 0$

En terme de graphes, dire que f_n converge uniformément vers f c'est dire que le graphe de f_n , pour n assez grand, est contenu dans un tube de taille ε autour du graphe de f .

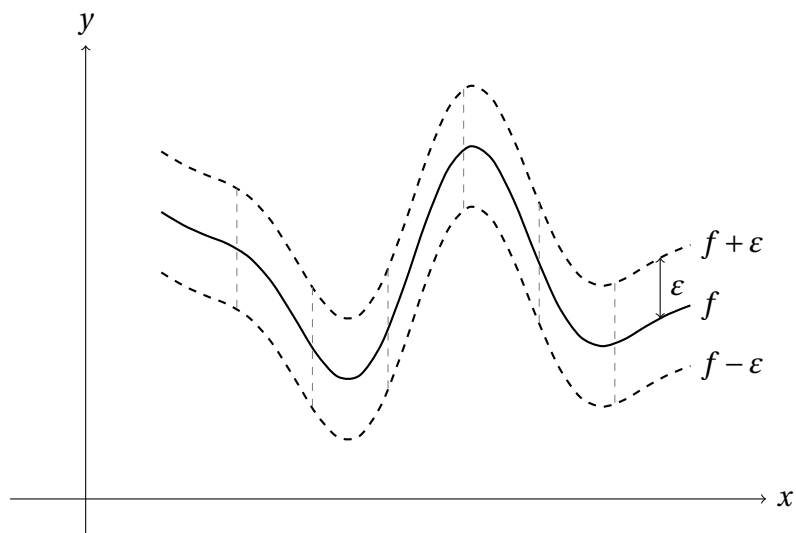


FIGURE 5.1 – Convergence uniforme d’une suite de fonctions



FIGURE 5.2 – Convergence simple d’une suite de fonctions vers 0.

2. Propriétés des limites de suites de fonctions

On veut savoir quelles propriétés permettent à la limite. Tout d’abord on a

PROPOSITION 5.7. Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions sur I convergeant simplement vers f . Alors

(1) Si les $(f_n)_{n \geq 0}$ sont des fonctions positives alors f est positive

(2) Si les $(f_n)_{n \geq 0}$ sont des fonctions croissantes alors f est croissante

REMARQUES 5.8.

- (1) On a bien sûr que si $f_n \leq 0$ alors $f \leq 0$.
- (2) On en déduit que si $f_n \leq g_n$ et g_n converge simplement vers g alors $f \leq g$.
- (3) De même si les f_n sont convexes, i.e $\forall t \in [0, 1], \forall x, y \in I, f_n(tx + (1-t)y) \leq tf_n(x) + (1-t)f_n(y)$ alors f sera convexe par passage à la limite de l'inégalité ci-dessus.

On a maintenant une conséquence importante de la convergence uniforme.

THÉORÈME 5.9. Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On suppose que (1) les f_n sont continues (2) f_n converge uniformément vers f . Alors f est continue.

DÉMONSTRATION. Soit $x_0 \in I$, on veut montrer que f est continue en x_0 . Soit $\varepsilon > 0$, il existe N tel que pour $n \geq N$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ sur I .

On écrit alors

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)|$$

Les 1^{er} et 3^{ème} termes de droite sont majorés par ε . Le second est, par continuité de f_N , majoré par ε si $|x - x_0| < \eta$. Donc si $|x - x_0| < \eta$ on a $|f(x) - f(x_0)| < 3\varepsilon$ et f est bien continue en x_0 . $\square$



La convergence simple ne suffit pas!

EXEMPLE 5.10. Si $f_n(x) = x^n$ sur $[0, 1]$, $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement vers f définie par $f(x) = 0$ si $x \neq 1$, $f(1) = 1$. Les f_n sont continues, mais f ne l'est pas.

REMARQUES 5.11. (1) La réciproque est fautive : la continuité d'une limite n'entraîne pas que la convergence soit uniforme. Par exemple sur $]0, 1[$, $f_n(x) = x^n$ a pour limite 0, mais la convergence n'est pas uniforme car

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e^{-1} \neq 0$$

- (2) Pour montrer la continuité d'une limite simple de fonctions sur I , il suffit de montrer la convergence uniforme de f_n vers f sur les intervalles de la forme $[a, b]$ contenus dans I : en effet chaque point x_0 de I est dans un tel intervalle et la continuité de f sur $[a, b]$ entraînera la continuité de f en $x_0 \in]a, b[$.

EXEMPLE 5.12. (1) La suite $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$ converge uniformément sur $|x| \leq a < 1$ car

- pour x fixé la suite $S_n(x)$ converge car c'est une série absolument convergente $\left|\frac{x^k}{k}\right| < a^k$ et $\sum a^k$ converge.
- $|S_n(x) - S_\infty(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}\right|$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |x|^k \leq a^{n+1} \cdot \frac{1}{1-a}$$

qui tend vers 0. Donc $S_n(x)$ converge uniformément vers $S_\infty(x)$ lorsque $|x| \leq a < 1$. On en déduit que pour tout $a < 1$, $S_\infty(x)$ est continue sur $|x| \leq a$. Elle est donc continue sur $\{x \mid |x| < 1\}$.

REMARQUE 5.13. On verra que $S_\infty(x) = -\ln(1-x)$.

3. Intégration, Dérivation

Il s'agit ici d'intervertir limite d'une suite de fonctions et intégrale.

THÉORÈME 5.14. Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions continues définies sur un intervalle **borné** $[a, b] = I$. On suppose que la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers une fonction f sur I . Alors la suite de fonctions $F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt$ converge uniformément vers $F(x) = \int_a^x f(t) dt$.

COROLLAIRE 5.15. Sous les hypothèses du Théorème la suite numérique $\int_a^b f_n(t) dt$ converge vers $\int_a^b f(t) dt$ pour $a, b \in I$.

DÉMONSTRATION. En effet si F_n converge uniformément (ou simplement) vers F on a $F_n(b) \rightarrow F(b)$. □

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. La convergence uniforme de f_n vers f dit que $\forall \varepsilon > 0 \exists N, \forall n \geq N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Mais alors $|\int_a^x f_n(t) dt - \int_a^x f(t) dt| \leq$

$$\int_a^x |f_n(t) - f(t)| dt \leq \varepsilon(b-a)$$

donc F_n converge uniformément vers F . □

EXEMPLE 5.16. $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ pour $|x| \leq a < 1$, plus précisément $f_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ converge uniformément vers $\frac{1}{1-x}$ sur $] -a, a[$.

Donc $\int_0^x f_n(t) dt = \sum_{k=0}^n \frac{x^{k+1}}{k+1}$ converge uniformément vers $\int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x)$.

REMARQUE 5.17.  L'énoncé est faux si l'intervalle n'est pas borné! Par exemple $\frac{1}{nx}$ converge uniformément vers 0 sur $[1, +\infty[$, mais sa primitive $\frac{\ln(x)}{n}$ qui converge vers 0 ne converge pas uniformément vers 0, car si $x_n = e^n$, on a $\frac{\ln(x_n)}{n} = 1 \neq 0$.

On va utiliser le théorème ci-dessus pour obtenir un résultat sur les dérivées, mais il faut faire attention à ce que l'hypothèse porte sur les dérivées.

THÉORÈME 5.18. Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions C^1 d'un intervalle I . On suppose

- (1) $(f'_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers g sur I
- (2) Il existe $x_0 \in I$ tel que $f_n(x_0)$ converge vers une limite l .

Alors il existe une fonction f de classe C^1 sur I , telle que $f' = g$ et f_n converge uniformément vers f sur tout intervalle **borné** $[a, b]$ avec $a, b \in I$.

THÉORÈME 5.19. 1) On a en particulier que si I est un intervalle fermé $[a, b]$, la convergence est uniforme sur $I = [a, b]$.

2) Il résulte de la conclusion que dans tous les cas f_n converge simplement vers f sur I .

DÉMONSTRATION. On a pour x dans $[a, b]$

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(t) dt$$

et on applique le théorème précédent à (f'_n) sur $[a, b]$. Donc f_n converge uniformément vers $l + \int_{x_0}^x g(t) dt = f(x)$ et comme g est continue, f est bien C^1 et $f' = g$. $\square$

REMARQUE 5.20. (1) On a utilisé que si f_n converge uniformément vers f et a_n est une suite de limite a , $a_n + f_n$ converge uniformément vers $a + f$. Or pour tout $\varepsilon > 0$ on a N_1 tel que $|a_n - a| < \varepsilon$ et N_2 tel que si $n \geq N_2$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ sur I , donc si $n \geq \max(N_1, N_2)$,

$$\begin{aligned} |a_n + f_n(x) - (a + f(x))| &\leq |a_n - a| + |f_n(x) - f(x)| \\ &\leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

(2)  Il est faux de dire que si f_n converge uniformément vers f alors f'_n converge vers f' .

Par exemple $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$ converge uniformément vers 0, mais $f'_n(x) = \cos(nx)$ ne converge pas vers 0!

4. Séries de fonctions

On va considérer les suites de fonctions de la forme $S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$.

DÉFINITION 5.21. On appelle série de fonctions de terme général $f_k(x)$ la suite des sommes partielles $S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$. On dit que la série converge simplement sur I si $(S_n(x))_{n \geq 0}$ converge simplement. On dit que la série converge uniformément si cette suite converge uniformément.

REMARQUE 5.22. On écrit parfois « $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$ converge simplement/uniformément » pour dire que la série de terme général $f_k(x)$ converge simplement/uniformément.

EXEMPLES 5.23. (1) $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ converge simplement vers $\frac{1}{1-x}$ sur $] -1, 1[$ et uniformément sur $] -a, a[$ pour $a < 1$.

En effet $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ et donc

$$\left| S_n(x) - \frac{1}{1-x} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{|1-x|} \leq \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}$$

Pour $|x| < a$ ce reste est majoré par $\frac{a^{n+1}}{1-a}$ (car $a \mapsto \frac{a^{n+1}}{1-a}$ est croissante sur $[0, 1]$) qui tend vers 0 (ceci ne dépend pas de x).

- (2) La série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et uniformément sur $[-a, a]$ (quel que soit a). En effet, on a vu que pour chaque $x \in \mathbb{R}$ la série converge (cf cours sur les séries) et si $|x| \leq a$

$$\begin{aligned} |S_n(x) - S_\infty(x)| &\leq \sum_{k \geq n+1} \frac{a^k}{k!} \\ &\leq \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} \\ &= e \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

Or $\lim_n \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ donc pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N tel que pour $n \geq N$, $\frac{ea^{n+1}}{(n+1)!} < \varepsilon$ donc $|S_n(x) - S_\infty(x)| < \varepsilon$ pour $|x| \leq a$ et la série converge uniformément sur $[-a, a]$.

REMARQUE 5.24. On voit sur les exemples précédents qu'on a tendance à raisonner en deux étapes. Tout d'abord on montre que la série converge simplement vers une fonction $S_\infty(x)$, puis on montre la convergence uniforme.

La notion suivante permet de simplifier le raisonnement.

DÉFINITION 5.25. On dit que la série de fonctions $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$ converge normalement sur I s'il existe une suite de réels (a_n) telle que (1) $|f_n(x)| \leq a_n \quad \forall x \in I$ (2) $\sum a_n$ converge.

THÉORÈME 5.26. Soit $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ une série de fonctions qui converge normalement sur I . Alors elle converge uniformément.

DÉMONSTRATION. (1) Pour chaque $x \in I$ la série $\sum f_k(x)$ est absolument convergente par le théorème du chapitre précédent. Notons $S_\infty(x)$ sa limite et $S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$. Alors $|S_n(x) - S_\infty(x)| = |\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ sur I .

Or la série $\sum_{k \geq 0} a_k$ converge donc vérifie le critère de Cauchy : pour $n \geq N$ on aura $\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \leq \varepsilon$. Mais alors pour $n \geq N$, $|S_n(x) - S_\infty(x)| \leq \varepsilon$. $\square$

EXEMPLES 5.27. (1) La série $\sum_{n \geq 0} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ car $\frac{|\sin(nx)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. Donc la série converge uniformément et sa somme est continue.

- (2) La série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^x}$ converge normalement sur $[1 + \varepsilon, +\infty[$ ($\varepsilon > 0$) car $\frac{1}{k^x} \leq \frac{1}{k^{1+\varepsilon}}$ sur cet intervalle et $\sum \frac{1}{k^{1+\varepsilon}}$ converge. La somme de la série est donc continue sur $]1, +\infty[$.

REMARQUE 5.28. On a traité le cas de séries de fonctions définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ mais les mêmes résultats sont vrais pour des suites ou séries de fonctions définies sur un domaine (par exemple un disque $D(a, r)$) de $\mathbb{C}$.

THÉOREME 5.29. Soit $\sum_{k \geq 0} f_k(x)$ une série de fonctions définies sur un intervalle I . Si $\sum_{k \geq 0} f_k(x)$ converge uniformément sur tout intervalle fermé $[a, b] \subset I$, et si les f_n sont continues sur I alors (1) La somme de la série est continue sur I (2) Pour $a \in I$ et $F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt$ la série de terme général $F_n(x)$ converge uniformément sur tout intervalle borné $[a, b]$ de I et $\int_a^x \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t) dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^x f_k(t) dt$ (en d'autres termes on peut intervertir sommation et intégration).

DÉMONSTRATION. $S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$ converge uniformément vers $S_\infty(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$ qui est donc continue.

D'autre part on sait que $\int_a^x S_n(t) dt$ converge uniformément pour $x \in [a, b]$ vers $\int_a^x S_\infty(t) dt$. Or

$$\begin{aligned} \int_a^x S_n(t) dt &= \int_a^x \sum_{k=0}^n f_k(t) dt \\ &= \sum_{k=0}^n \int_a^x f_k(t) dt = \sum_{k=0}^n F_k(x) \end{aligned}$$

qui converge donc uniformément vers $F(x) = \int_a^x S_\infty(t) dt = \int_a^x \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t) dt$. $\square$

On a le même type de traduction pour la dérivation.

THÉOREME 5.30. Soit $\sum_{k \geq 0} f_k$ une série de fonctions C^1 sur I telle que la série $\sum_{k \geq 0} f'_k(x)$ converge uniformément sur tout intervalle fermé $[a, b]$ de I et qu'il existe $x_0 \in I$ tel que la série $\sum_{k \geq 0} f_k(x_0)$ converge. Alors la série $\sum_{k \geq 0} f_k(x)$ converge uniformément sur tout intervalle borné $[a, b]$ vers une fonction de classe C^1 et sa dérivée est $\sum_{k \geq 0} f'_k(x)$, c'est-à-dire :

$$\left(\sum_{k \geq 0} f_k(x) \right)' = \sum_{k \geq 0} f'_k(x).$$

DÉMONSTRATION. La démonstration est analogue à la précédente. $\square$

EXEMPLES 5.31. (1) $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ converge uniformément sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}$. Sa série dérivée $\sum_{n \geq 1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ converge aussi uniformément sur tout intervalle borné, donc $\sum \frac{x^n}{n!}$ est de classe C^1 et est égale à sa dérivée. En répétant l'argument, on voit que la somme de la série, qui est égale à e^x , est de classe C^∞ .

(2) Soit la série $\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1}$. Sur $[-a, a]$ ($a < 1$), elle converge normalement car $ka^{k-1} \leq b^{k-1}$ pour $a < b < 1$ et k assez grand, car

$$\begin{aligned}
\ln(ka^k) &= (k-1)\ln(a) + \ln(k) \\
&= (k-1)\left(\ln(a) + \frac{\ln(k)}{k-1}\right) \\
&\leq (k-1)\ln(b) \text{ à partir d'un certain rang car } \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\ln(k)}{k} = 0.
\end{aligned}$$

Or $\sum_{k \geq 0} x^k$ est la série dont la série des termes dérivés est $\sum kx^{k-1}$, qui converge normalement sur $[-a, a]$ et converge en $x = 0$. Donc $\sum x^k$ est de classe C^1 et a pour dérivée $\sum_k kx^{k-1}$. Mais $\sum_{k \geq 0} x^k = \frac{1}{1-x}$, donc sa dérivée est $\frac{1}{(1-x)^2}$, c'est-à-dire :

$$\sum kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

5. Exercices

(1) On considère la série

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

(a) Montrer que f est C^1 et calculer sa dérivée.

(b) Montrer que f vérifie l'équation $(xf'(x))' = xf''(x) + f'(x) = \frac{1}{1-x}$

(c) Calculer f

(2) Étudier la convergence simple puis uniforme de la série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2n^2}$ sur $\mathbb{R}$ puis sur $[\varepsilon, +\infty[$ pour $\varepsilon > 0$.

Chapitre 6

Séries de Fourier

On va s'intéresser ici à des fonctions périodiques, et la manière de les décomposer en fonctions simples. Les fonctions périodiques les plus simples sont les fonctions trigonométriques $\sin(kt)$, $\cos(kt)$ en réel et e^{ikt} en complexe.

1. Fonctions périodiques

DÉFINITION 6.1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On dit que f est T -périodique si $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x + T) = f(x)$.

REMARQUES 6.2. (1) Une fonction T -périodique est kT -périodique pour $\forall k \in \mathbb{Z}$.

(2) S'il existe un plus petit $T > 0$ tel que f soit T périodique on dit que T est la période de f . C'est toujours le cas si f est continue.

(3) On peut voir une fonction T -périodique comme une fonction définie sur le cercle de longueur T : on peut écrire

$$\tilde{f}\left(e^{2i\pi \frac{x}{T}}\right) = f(x)$$

f est bien définie car $e^{2i\pi \frac{x}{T}} = e^{2i\pi \frac{y}{T}}$ si et seulement si $x - y = kT$ et alors $f(x) = f(y)$ donc les définitions de $\tilde{f}\left(e^{2i\pi \frac{x}{T}}\right)$ et $\tilde{f}\left(e^{2i\pi \frac{y}{T}}\right)$ coïncident. On montre facilement que $\tilde{f}$ est continue ssi f est continue.

EXEMPLES 6.3. (1) $\sin x, \cos x, \sin kx, \cos kx, e^{ikx}$ sont 2π -périodiques.

(2) Si on note $E(x)$ la partie entière de x , la fonction $x \mapsto x - E(x)$ est 1-périodique. On l'appelle partie fractionnaire de x . Notons qu'elle est discontinue en $x \in \mathbb{Z}$ car

$$\lim_{x \rightarrow k^-} x - E(x) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow k^+} x - E(x) = 0$$

(3) Si f est définie sur $[0, T[$, elle se prolonge de manière unique en une fonction T périodique sur $\mathbb{R}$. En effet on pose

$$\tilde{f}(x) = f\left(x - TE\left(\frac{x}{T}\right)\right) = f(x - kT)$$

où k est l'unique entier tel que $0 \leq x - kT < T$.

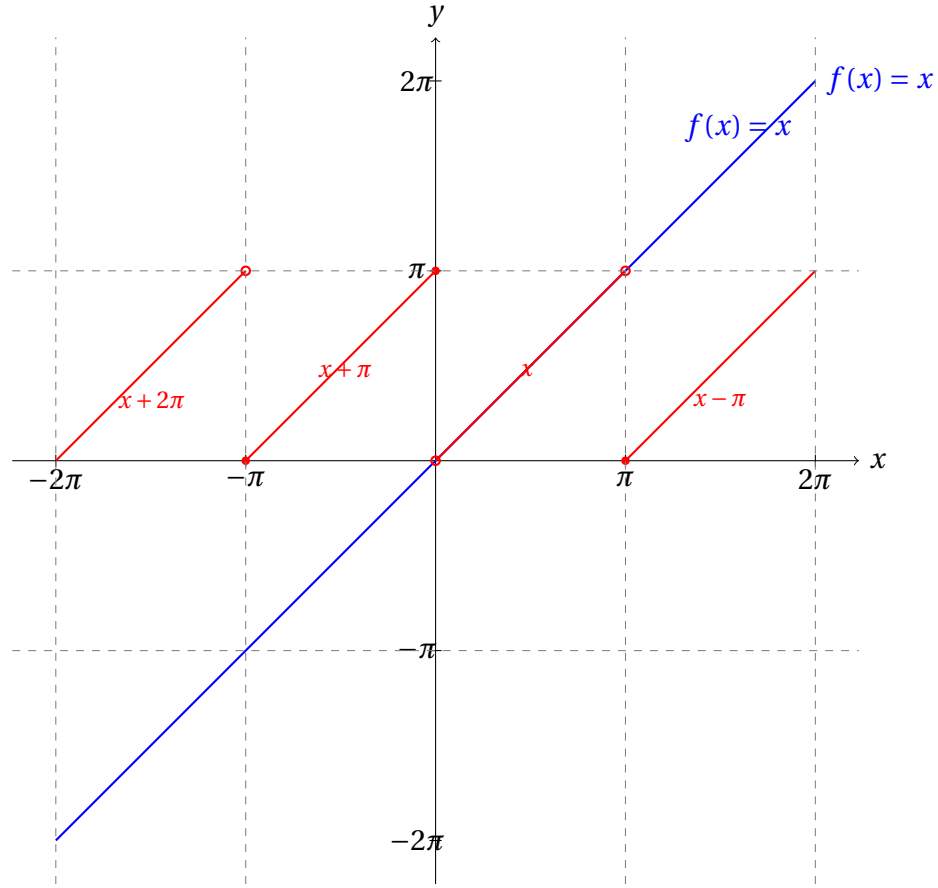


FIGURE 6.1 – $f(x) = x$ sur $[-2\pi, 2\pi]$, $\tilde{f}(x) = x - E(x)$

Notons que même si f est continue, $\tilde{f}$ n'est en général que continue par morceaux.

PROPOSITION 6.4. *Soit f continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et T -périodique. Alors quels que soient $a, b \in \mathbb{R}$*

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{a+T}^{b+T} f(t) dt$$

et

$$\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt$$

DÉMONSTRATION. Le changement de variable $u = t + T$ montre que $\int_a^b f(t) dt = \int_{a+T}^{b+T} f(u - T) du$ et comme $f(u - T) = f(u)$ cette intégrale coïncide avec $\int_{a+T}^{b+T} f(u) du$. Pour la seconde égalité, la relation de Chasles donne

$$\int_0^T f(t) dt = \int_0^a f(t) dt + \int_a^{a+T} f(t) dt - \int_T^{a+T} f(t) dt$$

Mais les première et troisième intégrales sont égales d'où

$$\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt.$$

□

EXEMPLE 6.5. Si f est T -périodique et impaire $\int_0^T f(t) dt = 0$ car cette intégrale coïncide avec $\int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$. Or la primitive F de f est paire donc $\int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = F\left(\frac{T}{2}\right) - F\left(-\frac{T}{2}\right) = 0$.

2. Séries trigonométriques (cas réel)

On a vu que les $\sin(kx), \cos(kx)$ ($k \in \mathbb{N}$) sont 2π périodiques. Comme la somme de fonctions 2π périodiques est 2π -périodique, et la limite simple de fonctions 2π périodiques est 2π -périodique, une série $\sum_{k \geq 0} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$ - si elle converge simplement - sera 2π -périodique.

DÉFINITION 6.6. Une série trigonométrique (réelle) est une série de fonctions de la forme $\sum_{k \geq 0} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$, avec $(a_k)_{k \geq 0}, (b_k)_{k \geq 1}$ réels.

Notons que comme $\sin 0 = 0$, on peut toujours supposer $b_0 = 0$. Les théorèmes démontrés pour les séries de fonctions s'appliquent ici. Comme on vient de voir

- Si la série converge simplement, la somme de la série est 2π -périodique.
- Si la série converge uniformément, la somme de la série est continue.
- Si la série converge normalement, elle converge uniformément.

En particulier si $\sum_{k \geq 0} |a_k| + |b_k|$ converge, la série est normalement convergente car

$$|a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)| \leq |a_k| + |b_k|$$

- Si la série dérivée converge uniformément (ou normalement) vers g , alors la série converge uniformément vers une fonction $f \in C^1$ telle que $f' = g$.

Dans notre cas la série dérivée est

$$\sum_{k \geq 1} -ka_k \sin(kx) + kb_k \cos(kx)$$

et converge donc normalement si $\sum_{k \geq 1} k(|a_k| + |b_k|)$ converge.

EXEMPLE 6.7. $\sum_{k \geq 0} \frac{\cos(kx)}{k^2+1}$ converge normalement car $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k^2+1}$ converge. La somme de la série $\sum_{k \geq 0} \frac{\cos(kx)}{k^2+1}$ est donc 2π -périodique et continue.

3. Notation complexe

La décomposition $\cos(kx) = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}$, $\sin(kx) = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$ permet d'écrire $a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) =$

$$\left(\frac{a_k - ib_k}{2} \right) e^{ikx} + \left(\frac{a_k + ib_k}{2} \right) e^{-ikx}$$

et posant pour $k > 0$

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}$$

$$c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}$$

et $c_0 = a_0$ et $\sum a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$. Notons aussi que $c_{-k} = \overline{c_k}$.

Inversement si $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$ et $c_{-k} = \overline{c_k}$ on peut réécrire cette somme comme $\sum a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$ avec $a_k = 2 \operatorname{Re}(c_k)$, $b_k = -2 \operatorname{Im}(c_k)$, $k \geq 1$ car

$$c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx} = \frac{1}{2} (a_k - ib_k) e^{ikx} + \frac{1}{2} (a_k + ib_k) e^{-ikx} = a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

4. Séries trigonométriques complexes

Nous allons considérer des séries de la forme $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$ sans supposer que $c_{-k} = \overline{c_k}$.

DÉFINITION 6.8. Une série trigonométrique complexe est une série de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$ avec $c_k \in \mathbb{C}$.

DÉFINITION 6.9. La convergence simple/uniforme de $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$ signifie que la suite des sommes partielles $\sum_{k=-n}^{+n} c_k e^{ikx} = S_n(x)$ converge simplement/uniformément vers une fonction $S_\infty(x)$.

REMARQUE 6.10.  Par cohérence, par exemple avec la notion de convergence des intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$, on devrait dire que la série de fonctions $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k(x)$ converge simplement/uniformément si les deux séries $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$ et $\sum_{k=-\infty}^0 f_k(x)$ convergent simplement/uniformément. C'est en effet le cas, avec une seule exception : celui des séries de Fourier complexes pour lesquelles on définit la convergence comme ci-dessus. Il peut alors y avoir des « compensations ». Par exemple si $c_n = (-1)^n$ pour $n > 0$ et $c_n = (-1)^{n+1}$ pour $n < 0$ et $c_0 = 0$, la somme

$$\sum_{k=-n}^n c_k e^{ni\pi} = \sum_{k=-n}^n c_k (-1)^n = \sum_{k=-n}^{-1} (-1)^{k+1} (-1)^k + \sum_{k=1}^n (-1)^k (-1)^k = -n + n = 0$$

et la série converge. Cependant la somme $\sum_{k=-n}^n c_k e^{ni\pi} = \sum_{k=-n}^{-1} (-1)^{k+1} (-1)^k = -n$ ne converge pas.

DÉFINITION 6.11. On dit que la série $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$ converge normalement si la série $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|$ converge.

On a alors

THÉORÈME 6.12. Si la série $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$ converge normalement, alors la somme de la série $S(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$ est continue.

De même

THÉORÈME 6.13. Si la série $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k| |c_k|$ converge, la série $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$ est une fonction C^1 de dérivée

$$S'(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} i k c_k e^{ikx}$$

DÉMONSTRATION. Démonstration du premier théorème En effet dans ce cas la suite $S_n(x)$ converge uniformément vers $S(x)$, vu que

$$\begin{aligned} |S(x) - S_n(x)| &\leq \left| \sum_{|k| \geq n+1} c_k e^{ikx} \right| \\ &\leq \sum_{|k| \geq n+1} |c_k| \end{aligned}$$

Or la série $\sum |c_k|$ converge, donc le reste tend vers 0. $\square$

DÉMONSTRATION DU 2ÈME THÉORÈME. On a $S'_n(x)$ qui converge uniformément vers $T_\infty(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i n c_n e^{inx}$ et $S_n(0) = \sum_{k=-n}^n c_k$ converge vers $S_\infty(0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k$ par le théorème précédent. Par le théorème général sur les suites de fonctions dérivées on a que S_n converge uniformément vers S_∞ et $S'_\infty = T_\infty$. $\square$

EXEMPLES 6.14. (1) $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{e^{ikx}}{1+k^2}$ converge et sa somme est continue. Par contre la série de terme général $\left| \frac{ik}{1+k^2} \right| = \frac{|k|}{1+k^2} \sim \frac{1}{k}$ n'est pas convergente et donc on ne peut pas conclure la dérivabilité de la somme.

(2) $\sum \frac{e^{ikx}}{1+k^4}$ est continue et dérivable car $\sum \frac{|k|}{1+k^4}$ converge. Elle est même de classe C^2 , car $\sum \frac{k^2}{1+k^4}$ converge encore.

5. Coefficients de Fourier

La question que l'on se pose est la suivante : quelles fonctions 2π -périodiques peuvent-elles s'écrire comme somme d'une série de Fourier et si c'est le cas, comment trouver les coefficients c_k (ou a_k, b_k).

THÉORÈME 6.15. Soit $S(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ une série de Fourier convergeant uniformément. Alors $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(x) e^{-ikx} dx$.

La démonstration résulte du

LEMME 6.16. L'intégrale

$$\int_0^{2\pi} e^{ikt} dt = 0$$

vaut 0 si $k \neq 0$ et 2π si $k = 0$.

DÉMONSTRATION. Pour $k = 0$ c'est immédiat car $\int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi$. Sinon la primitive de e^{ikt} est $\frac{1}{ik} e^{ikt}$, donc

$$\int_0^{2\pi} e^{ikt} dt = \left[\frac{e^{ikt}}{ik} \right]_0^{2\pi} = 0$$

□

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. Comme la série converge uniformément, on a vu que l'on peut intervertir somme et intégrale

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikt} \right) e^{-int} dt &= \\ \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \int_0^{2\pi} e^{ikt} e^{-int} dt &= \\ \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)t} dt &= \\ 2\pi c_n. \end{aligned}$$

On voit donc que si $f(x)$ est la somme d'une série de Fourier, les coefficients sont nécessairement donnés par

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

□

REMARQUE 6.17. Notons que si f est réelle on a $c_{-n} = \overline{c_n}$ et on peut écrire la série de Fourier en termes de $\cos(kx)$ et $\sin(kx)$

$$c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} = c_n e^{inx} + \overline{c_n} e^{-inx}$$

et posant pour $n > 0$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{a_n}{2} - i \frac{b_n}{2} \\ c_{-n} = \overline{c_n} &= \frac{a_n}{2} + i \frac{b_n}{2} \end{aligned}$$

et

$$c_0 = a_0$$

on a

$$c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

où si $n > 0$,

$$a_n = c_n + \overline{c_{-n}} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt$$

$$b_n = i(c_n - \overline{c_{-n}}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt$$

$$\text{et } a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt$$

DÉFINITION 6.18. Si f est une fonction continue par morceaux et 2π -périodique, on note $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$, et on appelle c_n les coefficients de Fourier de f . On dira que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ est la série de Fourier de f .

DÉFINITION 6.19. Si f est une fonction 2π -périodique continue par morceaux à valeurs réelles, on pose

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt \quad n > 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt \quad n > 0$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt$$

On les appelle coefficients de Fourier réels de f .

REMARQUE 6.20. On a vu que puisque les fonctions $f(t) \cos(kt)$ et $f(t) \sin(kt)$ sont 2π -périodiques on peut prendre l'intégrale sur n'importe quel intervalle de longueur 2π . Par exemple pour $n > 0$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$$

On en déduit

PROPOSITION 6.21. Soit f une fonction 2π -périodique, continue par morceaux et à valeurs réelles. Alors

- (1) Les coefficients de Fourier complexes vérifient $c_n = \overline{c_{-n}}$

(2) Si f est paire les b_n sont tous nuls

(3) Si f est impaire les a_n sont tous nuls

DÉMONSTRATION. On a déjà vu le 1). Pour 2) et 3) on utilise les formules

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt$$

Si f est paire $f(t) \sin(nt)$ est impaire donc sa primitive est paire et $b_n = 0$

Si f est impaire $f(t) \cos(nt)$ est impaire et $a_n = 0$. $\square$

DÉFINITION 6.22. Si f est 2π -périodique, continue par morceaux et à valeurs réelles on appelle série de Fourier réelle de f la série $\sum_{n \geq 0} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$.

REMARQUE 6.23. Si au lieu de fonctions 2π -périodiques on a des fonctions T périodiques, les définitions et théorèmes ci-dessus s'adaptent facilement puisque si f est T périodique $f(x \frac{T}{2\pi})$ est 2π -périodique. Une série de Fourier sera donc de la forme

$$\sum c_n e^{\frac{2\pi i n x}{T}}$$

et

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-\frac{2\pi i n t}{T}} dt$$

et de même dans le cas réel

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt \quad n > 0$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt \quad n > 0$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt.$$

6. Convergence de la série de Fourier d'une fonction

Il y a en fait deux questions :

- la série de Fourier de f converge-t-elle simplement/uniformément?
- Si la question précédente a une réponse positive, la somme de la série est-elle égale à f ?

Disons tout de suite que c'est un problème difficile : on donnera des conditions pour que la réponse à ces deux questions soit positive, mais pas la condition optimale.

EXEMPLE 6.24. Soit $f(t) = t$ sur $[0, 2\pi[$ et notons encore f la fonction 2π -périodique définie sur $\mathbb{R}$ coïncidant avec f sur $[0, 2\pi[$. La fonction f est continue par morceaux et discontinue en $2k\pi$.

C'est une fonction réelle, et les coeff. de Fourier réels sont donnés par

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} t dt = \left[\frac{t^2}{4\pi} \right]_0^{2\pi} = \pi.$$

$$\text{pour } n \geq 1 \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t \cos(nt) dt$$

$$= \left[\frac{t}{\pi n} \sin(nt) \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(nt)}{n} dt$$

$$= 0 - 0 = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t \sin(nt) dt = \left[\frac{-t}{n\pi} \cos(nt) \right]_0^{2\pi}$$

$$+ \int_0^{2\pi} \frac{\cos(nt)}{n\pi} dt = -\frac{2}{n}$$

La série de Fourier réelle de f est donc

$$\pi - 2 \sum_{n>0} \frac{\sin(nx)}{n}$$

Or en $x = 2\pi$ la série converge vers

$$\pi \neq f(2\pi) = 0.$$

Notons que $\lim_{x \rightarrow 2\pi^-} f(x) = 2\pi$, $\lim_{x \rightarrow 2\pi^+} f(x) = 0$ et π est la moyenne de ces deux valeurs.

Le théorème suivant montre que c'est un phénomène général. On va d'abord poser

DÉFINITION 6.25 (Fonction C^1 par morceaux). On dit que la fonction f est C^1 par morceaux s'il existe $a = a_0 < a_1 < \dots < a_p = b$ tels que f est C^1 sur $]a_j, a_{j+1}[$ et $\lim_{x \rightarrow a_j^+} f'(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a_j^-} f'(x)$ existent (mais ne sont pas forcément égales!).

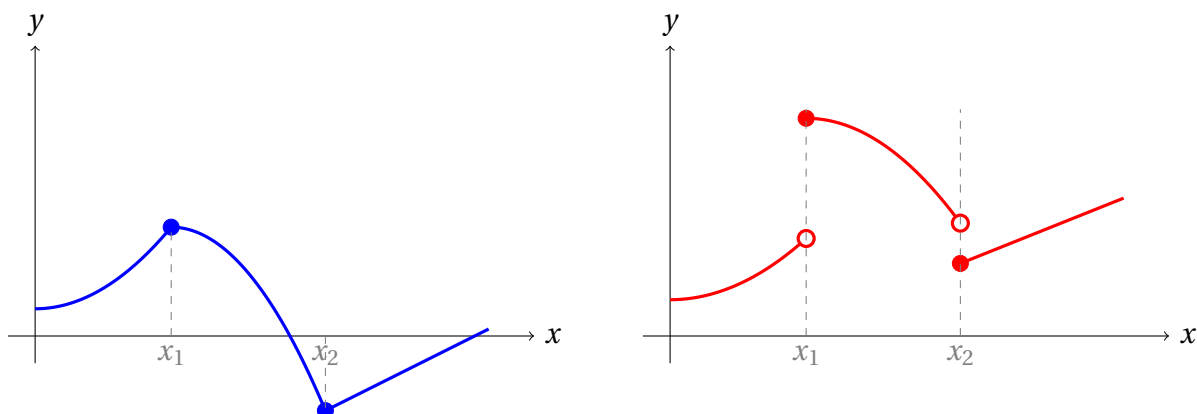
REMARQUE 6.26. Il résulte de la définition que si f est C^1 par morceaux, les limites $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ existent.

THÉORÈME 6.27 (Théorème de Dirichlet). Soit f C^1 par morceaux et 2π -périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On pose alors $f(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0^-)$ et $f(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.

Alors la série de Fourier de f converge en x_0 vers $\frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}$.

REMARQUES 6.28. (1) Une fonction C^1 par morceaux sur $[a, b]$ est une fonction telle qu'il existe $a_0 = a < \dots < a_N = b$ tels que f coïncide avec une fonction C^1 sur $]a_i, a_{i+1}[$. En particulier une telle fonction n'est pas en général continue. Par contre une fonction continue et C^1 par morceaux est évidemment continue.

(2) Le théorème de Dirichlet n'est pas un résultat de convergence uniforme! Le théorème donne la convergence simple de la série en x_0 .



Cas 1 : C^1 par morceaux **et continue**

Cas 2 : C^1 par morceaux (**mais non continue**)

EXEMPLE 6.29. La fonction f de l'exemple précédent égale $t - 2k\pi$ sur $[2k\pi, (2k + 2)\pi[$, elle est donc bien C^1 par morceaux. D'autre part $f(x_0^-) = f(x_0^+)$ pour $x_0 \in]2k\pi, (2k + 2)\pi[$ et

$$f(2k\pi^-) = 2\pi \quad \text{et} \quad f(2k\pi^+) = 0$$

Donc

$$x = \pi - 2 \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nx)}{n} \quad \text{sur }]0, 2\pi[$$

COROLLAIRE 6.30. Soit f une fonction continue, C^1 par morceaux et 2π -périodique. Alors sa série de Fourier converge simplement en tout point x .

DÉMONSTRATION. En effet, f est a fortiori C^1 par morceaux, et comme elle est continue, $f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0)$ et sa série de Fourier converge donc vers $f(x_0)$. $\square$

EXEMPLE 6.31. Soit f définie par $f(x) = -1$ si $x \in]-\pi, 0[$,

$$\begin{cases} f(x) = -1 & \text{si } x \in]-\pi, 0[\\ f(x) = 0 & \text{si } x = 0 \\ f(x) = 1 & \text{si } x \in]0, \pi[\end{cases}$$

que l'on étend à $\mathbb{R}$ comme fonction 2π -périodique. Elle est évidemment C^1 par morceaux, impaire donc ses coefficients de Fourier réels sont :

$$\begin{aligned}
 a_n &= 0 \\
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-1) \sin(nt) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (1) \sin(nt) dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos(nt)}{n} \right]_{-\pi}^0 + \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos(nt)}{n} \right]_0^{\pi} \\
 &= \frac{2}{\pi n} (1 - (-1)^n) \\
 &= \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & \text{si } n = 2k + 1 \\ 0 & \text{si } n = 2k \end{cases}
 \end{aligned}$$

La série de Fourier de f est donc

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}$$

et donc si $x \in]0, \pi[$

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{k \geq 0} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}$$

et si $x \in]-\pi, 0[$

$$-1 = \frac{4}{\pi} \sum_{k \geq 0} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}$$

Appliquons ceci en $x = \pi/2$. Alors $\sin(2k+1)\pi/2 = (-1)^k$ et donc

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{k \geq 0} \frac{\sin((2k+1)\pi/2)}{2k+1} = \frac{4}{\pi} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

donc

$$\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

Notons que la convergence de la série de Fourier ne peut être uniforme, vu que la fonction limite n'est pas continue. Pire, lorsque x s'approche de 0, les sommes partielles de la série ne restent pas entre -1 et 1 mais « débordent » jusqu'à $\pm 1,79$: c'est le phénomène de Gibbs.

6.1. Appendice : Phénomène de Gibbs. Soit f définie par $f(x) = -1$ si $x \in]-\pi, 0[$,

$$\begin{cases} f(x) = -1 & \text{si } x \in]-\pi, 0[\\ f(x) = 0 & \text{si } x = 0 \\ f(x) = 1 & \text{si } x \in]0, \pi[\end{cases}$$

On vient de voir que la série de Fourier de f est $\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}$.

Si on regarde $S_n(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}$, elle atteint un maximum en $x = \frac{\pi}{2n}$: on vérifie que

$$S'_n(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \cos((2k+1)x) = \frac{4}{\pi} \frac{\sin(2nx)}{2\sin(x)}$$

On a alors :

$$S_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin((2k+1)\pi/2n)}{(2k+1)\pi/2n}$$

EXERCICE 6.32. Vérifier que le maximum de $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}$ est bien atteint en $\frac{\pi}{2n}$. On calculera les points où la dérivée s'annule et on utilisera le fait que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \cos((2k+1)x) &= \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{i(2k+1)x}\right) = \operatorname{Re}\left(e^{ix} \sum_{k=1}^{n-1} e^{i2kx}\right) = \operatorname{Re}\left(e^{ix} \frac{e^{i2nx} - 1}{e^{i2x} - 1}\right) = \\ &= \operatorname{Re}\left(\frac{e^{i2nx} - 1}{2i \sin(x)}\right) = \frac{\sin(2nx)}{2 \sin(x)} \end{aligned}$$

qui s'annule pour $x = p \frac{\pi}{2n}$.

La somme définissant $S_n(\frac{\pi}{2n})$ est (au facteur 2 près) une somme de Riemann associée à l'intégrale $\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t} dt$. En effet, posant $g(t) = \frac{\sin(t)}{t}$ la somme

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g\left((2k+1)\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g(\xi_k)$$

est telle que les $\xi_k = (2k+1)\frac{\pi}{2n}$ étant chacun bien dans l'intervalle $[k\frac{\pi}{n}, (k+1)\frac{\pi}{n}]$ cette somme converge donc vers

$$2 \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t} dt$$

comme expliqué dans le théorème 3.1 et la remarque qui le suit. Or $\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = 1 - \frac{\pi^2}{6} x^2 + \frac{\pi^4}{120} x^4 + \dots$ et le reste est inférieur au dernier terme écrit à partir du moment où le terme

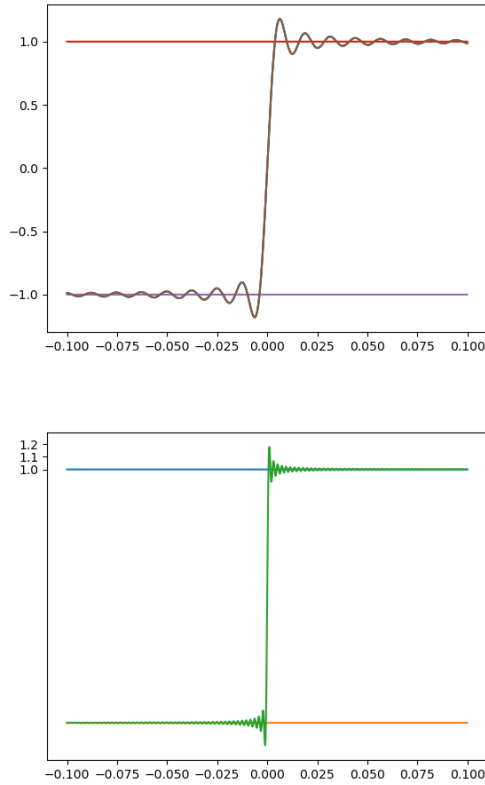


FIGURE 6.2 – Phénomène de Gibbs (gauche : $n = 150$, droite $n = 1500$)

général décroît (ici ce sera le terme en π^4). Donc :

$$\begin{aligned} S_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) &\simeq 2\left(1 - \frac{4\pi^2}{18} + \frac{16\pi^4}{600} + \frac{\pi^6}{35280} + \dots\right) \\ &\simeq 1 + 2 \cdot (0,089\dots) \end{aligned}$$

Plus généralement, si f a une discontinuité en x_0 avec $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a$, on aura que la série de Fourier de f en x_0 « déborde » jusqu'à la valeur¹ :

$$f(x_0^+) + a \cdot (0,089\dots)$$

Le phénomène de Gibbs est le résultat général qui affirme que si $f(x_0^+) - f(x_0^-) = a$, et $S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{x \in x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[} |S_n(f)(x) - f(x)| = a \cdot 0,89\dots$$

1. on parle aussi de « dépassement » ou en anglais « overshooting ».

REMARQUE 6.33. Même si f est continue, il est faux de croire que la série de Fourier converge uniformément vers f . Les exemples sont difficiles à expliciter et la méthode la plus simple pour le montrer n'est pas constructive (on montre qu'une telle fonction existe sans pouvoir l'exhiber).

7. Estimation des coefficients de Fourier et convergence uniforme

On veut maintenant voir dans quel cas on peut assurer la convergence uniforme de la série de Fourier d'une fonction. Bien sûr dans ce cas on sait que la fonction doit être continue. Dans la suite on supposera souvent les fonctions **continues et C^1 par morceaux**. Bien entendu les théorèmes s'appliquent aux fonctions C^1 et c'est en pratique le seul cas dans lequel on utilisera ces théorèmes.

THÉORÈME 6.34. Soit f une fonction **continue, C^1 par morceaux** et 2π -périodique à valeurs complexes. Alors :

(1) f' est 2π -périodique et continue

(2) Les coefficients de Fourier (complexes) de f' , $c_n(f')$ sont donnés par

$$c_n(f') = in \cdot c_n(f)$$

DÉMONSTRATION. 1) On dérive $f(x + 2\pi) = f(x)$.

2) On intègre par parties, car f' est continue par morceaux :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f'(t) e^{-int} dt &= \left[f(t) e^{-int} \right]_0^{2\pi} + in \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt \\ &= in \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt \end{aligned}$$

□

Dans le cas réel :

$$a_n(f') = nb_n(f)$$

$$b_n(f') = -na_n(f)$$

On retrouve ces formules en considérant le cas des sommes finies : si $f(x) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ikx}$, on a

$$f'(x) = \sum_{k=-n}^n ik \cdot c_k(f) e^{ikx}$$

donc $c_n(f') = in \cdot c_n(f)$.

Si $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k(f) \cos(kx) + b_k(f) \sin(kx)$

$$f'(x) = \sum_{k=0}^n -ka_k(f) \sin(kx) + kb_k(f) \cos(kx)$$

donc $a_k(f') = kb_k(f)$

$$b_k(f') = -ka_k(f)$$

THÉORÈME 6.35. *Soit f une fonction continue, C^1 par morceaux et 2π -périodique. Alors il existe une constante M telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a $|c_n(f)| \leq \frac{M}{|n|}$.*

DÉMONSTRATION. Si g est continue par morceaux et 2π -périodique, elle est bornée par un nombre M . Alors :

$$|c_n(g)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) e^{-int} dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(t)| dt \leq M$$

Soit alors f **continue, C^1 par morceaux et 2π -périodique**. Alors f' est continue par morceaux et 2π -périodique donc $|c_n(f')| \leq M$ et comme $c_n(f) = \frac{1}{in} c_n(f')$, on en déduit :

$$|c_n(f)| \leq \frac{1}{|n|} |c_n(f')| \leq \frac{M}{|n|}$$

□

COROLLAIRE 6.36. *Si f est de classe C^r ($r \geq 0$) et 2π -périodique, il existe une constante M telle que $|c_n(f)| \leq \frac{M}{|n|^r}$.*

DÉMONSTRATION. On raisonne par récurrence :

- vu pour $r = 0$ (et 1)
- supposons le vrai à l'ordre r et soit f de classe C^{r+1} et 2π -périodique. Alors f' est C^r et 2π -périodique donc

$$|c_n(f)| = \frac{1}{|n|} |c_n(f')| \leq \frac{1}{|n|} \frac{M}{|n|^r} = \frac{M}{|n|^{r+1}}$$

□

REMARQUE 6.37. On voit facilement que si f est C^{r-1} et sa dérivée d'ordre r est-continue par morceaux, le théorème reste vrai.

On en déduit facilement un théorème de convergence uniforme :

THÉORÈME 6.38. *Soit f une fonction C^1 , C^2 par morceaux et 2π -périodique. Alors sa série de Fourier converge uniformément vers $f(x)$.*

DÉMONSTRATION. Par le corollaire, on a $|c_n(f)| \leq \frac{M}{|n|^2}$ et comme la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, la série $\sum c_n(f) e^{inx}$ converge normalement car $\sum_{k=-n}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$. Elle converge donc uniformément. Le théorème de Dirichlet garantit que la somme de la série est bien f . □

REMARQUE 6.39. Un théorème plus difficile à démontrer affirme que l'énoncé précédent reste vrai pour f continue et C^1 par morceaux.

7.1. Formule de Parseval. Il s'agit d'utiliser les séries de Fourier pour calculer la somme de certaines séries.

THÉORÈME 6.40 (Formule de Parseval). *Soit f une fonction continue par morceaux et 2π -périodique. Alors :*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$$

Si f est à valeurs réelles, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(a_n(f) - ib_n(f)) &= c_n(f) \quad n \geq 1 \\ \frac{1}{2}(a_n(f) + ib_n(f)) &= c_{-n}(f) \end{aligned}$$

donc $|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2 = \frac{1}{2}(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2)$

et $|c_0(f)|^2 = |a_0(f)|^2$, d'où :

$$a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$$

REMARQUE 6.41. La formule de Parseval est vraie même si on n'est pas dans les conditions d'application du théorème de Dirichlet.

DÉMONSTRATION POUR $f \in C^2$. Dans ce cas, on sait que la série de Fourier converge normalement.

Soit alors $S_n(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt}$, alors :

$$|S_n(t)|^2 = \sum_{\substack{|p| \leq n \\ |q| \leq n}} c_p \overline{c_q} e^{i(p-q)t}$$

donc :

$$\int_0^{2\pi} |S_n(t)|^2 dt = 2\pi \sum_{p=-n}^n |c_p|^2$$

car $\int_0^{2\pi} e^{i(p-q)t} dt = 0$ si $p \neq q$.

Or S_n converge uniformément vers f (par convergence normale) donc $S_n(t)^2$ converge uniformément vers $|f(t)|^2$ car :

$|a - b| < \varepsilon \Rightarrow ||a| - |b|| < \varepsilon$ et

$$|a|^2 - |b|^2 < \varepsilon(|a| + |b|)$$

donc $|S_n(t) - f(t)| < \varepsilon \Rightarrow$

$$\begin{aligned} |S_n(t)|^2 - |f(t)|^2 &< \varepsilon(|S_n(t)| + |f(t)|) \\ &< (2M + \varepsilon)\varepsilon \end{aligned}$$

où $M = \sup_t |f(t)|$.

Donc $\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \lim_n \int_0^{2\pi} |S_n(t)|^2 dt = \lim_n \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2$. □

COROLLAIRE 6.42. Soient f, g deux fonctions continues par morceaux et 2π -périodiques. Alors

$$\int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(f) \overline{c_k(g)}$$

DÉMONSTRATION. On utilise la formule $\operatorname{Re}(x\overline{y}) = \frac{1}{4} \operatorname{Re}(|x+y|^2 - |x-y|^2)$. Alors

$$\operatorname{Re} \left(\int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt \right) = \frac{1}{4} \operatorname{Re} \left(\int_0^{2\pi} |f(t)+g(t)|^2 - |f(t)-g(t)|^2 dt \right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f+g)|^2 - |c_k(f-g)|^2$$

Or $c_k(f+g) = c_k(f) + c_k(g)$ et $c_k(f-g) = c_k(f) - c_k(g)$. Donc

$$\operatorname{Re} \left(\int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt \right) = \frac{1}{4} \operatorname{Re} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f) + c_k(g)|^2 - |c_k(f) - c_k(g)|^2 \right) = \operatorname{Re}(c_k(f) \overline{c_k(g)})$$

Pour obtenir l'égalité des parties imaginaires, on remplace f par if donc $c_k(f)$ par $ic_k(f)$ et on utilise que $\operatorname{Re}(-ix) = \operatorname{Im}(x)$. On obtient donc

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left(\int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt \right) &= \operatorname{Re} \left(\int_0^{2\pi} -if(t) \overline{g(t)} dt \right) = \\ &= \frac{1}{4} \operatorname{Re} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |-ic_k(f) + c_k(g)|^2 - |-ic_k(f) - c_k(g)|^2 \right) = \\ &= \operatorname{Im} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) \overline{c_k(g)} \right) \end{aligned}$$

□

EXEMPLE 6.43. Soit la fonction 2π -périodique égale à $f(t) = t$ sur $[0, 2\pi[$. Ses coefficients de Fourier sont donnés par $a_0(f) = \pi$, $a_n(f) = 0$ pour $n > 0$, $b_n(f) = -\frac{2}{n}$ et $\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \int_0^{2\pi} t^2 dt = \frac{8\pi^3}{3}$.

La formule de Parseval donne :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} t^2 dt = \pi^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{k^2}$$

qui devient :

$$\frac{4\pi^2}{3} = \pi^2 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

On en conclut

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

8. Applications

8.1. Applications théoriques.

THÉORÈME 6.44. a) Soit f une fonction continue 2π -périodique. Si tous les coefficients de Fourier de f sont nuls, alors $f = 0$.

b) Soient f, g continues 2π -périodiques ayant mêmes coefficients de Fourier. Alors $f = g$.

DÉMONSTRATION. a) Si $c_n(f) = 0$, on a :

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = 0$$

Mais si $f(t_0) \neq 0$, il existera $\varepsilon > 0, \eta > 0$ tels que $|f(t)| > \varepsilon$ sur $]t_0 - \eta, t_0 + \eta[$, d'où :

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \geq 2\varepsilon^2 \eta > 0$$

Donc $f \equiv 0$.

b) On applique a) à $f - g$, car $c_n(f - g) = c_n(f) - c_n(g)$. □

COROLLAIRE 6.45. Si f est continue et 2π -périodique. On suppose que la série de Fourier de f converge uniformément vers g . Alors $f = g$.

DÉMONSTRATION. La convergence étant uniforme, $g(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{ikt}$ est continue, et par le théorème 6.15, $c_n(g) = c_n(f)$, donc $f = g$ par le théorème précédent. □

9. Applications aux équations aux dérivées partielles

Considérons par exemple l'équation des cordes vibrantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad \text{conditions aux limites} \\ u(x, 0) = f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad \text{conditions initiales} \end{array} \right.$$

Si on oublie les conditions initiales, on voit que $u_n(x, t) = e^{inct} \sin(nx)$ est solution, mais :

$$u_n(x, 0) = \sin(nx)$$

Mais par linéarité, on a que $\sum c_n e^{inct} \sin(nx)$ est solution avec $u(x, 0) = \sum c_n \sin(nx)$. Si $f(x)$ avait un développement en série de Fourier de la forme :

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} f_n \sin(nx)$$

on aurait comme solution :

$$\sum f_n e^{inct} \sin(nx) = u(x, t)$$

Notons que si la série définissant f est normalement convergente, il en est de même pour celle définissant u , car $|f_n e^{inct}| = |f_n|$. C'est en particulier le cas si f est C^2 et 2π -périodique. Or si on étend f en une fonction impaire sur $[-\pi, \pi]$, elle s'étend en une fonction impaire, 2π -périodique et C^2 par morceaux. Elle est donc somme de sa série de Fourier, et étant impaire, on n'a pas de termes en $\cos(nx)$. D'où :

$$f(x) = \sum f_n \sin(nx)$$

et l'équation des cordes vibrantes a pour solution :

$$\sum f_n e^{inct} \sin(nx)$$

en complexe, et :

$$u(x, t) = \sum f_n \cos(nct) \sin(nx)$$

en réel.

Si la condition initiale est :

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = g(x) = \sum g_n \sin(nx)$$

la solution devient :

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1} f_n \cos(nct) \sin(nx) + \sum_{n \geq 1} \frac{g_n}{nc} \sin(nct) \sin(nx)$$

10. Inégalité isopérimétrique

On veut montrer

THÉORÈME 6.46 (Inégalité isopérimétrique). *Soit $\gamma(t)$ une courbe fermée de classe C^2 du plan. Si on pose $L(\gamma)$ pour la longueur de la courbe et $A(\gamma)$ l'aire entourée, on a*

$$A(\gamma) \leq \frac{L(\gamma)^2}{4\pi}$$

Et on a égalité si et seulement si γ est un cercle.

Le théorème dit que que l'aire entourée par la courbe est maximale –la longueur de γ étant fixée– lorsque γ est un cercle.

DÉMONSTRATION. Posons $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ avec γ 2π -périodique (donc x et y aussi). La longueur de la courbe est donnée par l'intégrale du vecteur vitesse :

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

Si on parcourt la courbe à vitesse constante v , on aura $\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 = v^2$ et :

$$E(\gamma) = \int_0^{2\pi} (\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2) dt = 2\pi v^2 = \frac{L^2}{2\pi}$$

où $E(\gamma)$ est appelée énergie de la courbe. L'aire de la courbe² est donnée par :

$$A = \int_0^{2\pi} y(t)\dot{x}(t)dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (y(t)\dot{x}(t) - x(t)\dot{y}(t))dt$$

en utilisant l'intégration par parties.

Posons $z(t) = x(t) + iy(t) \in \mathbb{C}$, alors $\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) = |\dot{z}(t)|^2$.

$$\dot{x}y - y\dot{x} = \operatorname{Re}(i\dot{z}(t)\overline{z(t)})$$

Si $z(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} z_k e^{ikt}$, la série est normalement convergente car $z \in C^2$ et :

$$\frac{L(\gamma)^2}{2\pi} = \int_0^{2\pi} (\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)dt = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} k^2 |z_k|^2$$

par Parseval. Maintenant d'après le Corollaire 6.42 on a

$$\int_0^{2\pi} i\dot{z}(t)\overline{z(t)}dt = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} -k z_k \overline{z_k} = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} -k |z_k|^2 \leq 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} k^2 |z_k|^2$$

Comme $-k \leq k^2$, on a

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} -k |z_k|^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} k^2 |z_k|^2$$

donc $A(\gamma) \leq \frac{1}{2} \sum k^2 |z_k|^2 \leq \frac{L^2}{4\pi}$.

De plus, si on a égalité on doit avoir $z_k = 0$ si $k \neq 0, 1$, i.e. $z(t) = z_0 + z_1 e^{it}$, donc :

$$x(t) = x_0 + x_1 \cos(t) - y_1 \sin(t)$$

$$y(t) = y_0 + x_1 \sin(t) + y_1 \cos(t)$$

et $(x(t), y(t))$ est un cercle de centre (x_0, y_0) et de rayon $\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$. □

REMARQUE 6.47. Dans cette approche l'aire a un signe, positif si on parcourt la courbe dans le sens anti-trigonométrique (i.e. le sens des aiguilles d'une montre), négatif dans le cas contraire. Il est clair qu'on peut toujours renverser le sens de parcours d'une courbe pour que celui-ci soit positif.

2. On fera attention à ce que avec cette définition, si la courbe est parcourue dans le sens horaire son aire sera négative, mais sa valeur absolue ne change pas.

11. Exercices

- (1) Soit $f(x)$ la fonction égale à x^2 sur $[-\pi, \pi]$ et rendue 2π -périodique.
- (a) Calculer les coefficients de Fourier a_n (faire deux intégrations par parties).
 - (b) Montrer sans calculs que $b_n = 0$.
 - (c) En déduire que

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

- (d) En évaluant en $x = \pi$ calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Chapitre 7

La Transformée de Fourier

1. Introduction

On va introduire la transformée de Fourier de fonctions à support compact, puis on généralisera, ce qui ne présente pas de difficulté avec ce que l'on a vu sur la convergence des intégrales, aux fonctions à décroissance rapide.

Il s'agit d'un analogue des séries de Fourier dans le cas de fonctions non-périodiques. L'idée de base est de décomposer un signal (par exemple un signal sonore) en ses fréquences, c'est à dire des signaux de la forme $e^{i\omega t}$.

Dire que le "La" est à 440 Hz signifie que le signal émis par un instrument jouant la note "La" est "principalement" $e^{2i\pi(440)t}$, mais chaque instrument ayant un son différent le son émis est en fait

$$f(t) = e^{2i\pi(440)t} + r(t)$$

où $r(t)$ est "principalement" composé d'harmoniques du "La" c'est à dire de "La" des octaves supérieures, i.e. 880 Hz, 1760 Hz i.e. $e^{k \cdot 2i\pi(440)t}$ mais aussi d'autres fréquences, le tout caractérisant l'instrument. C'est ce qui fait que d'une part on reconnaît lorsqu'un violon et un piano jouent un "La" que c'est la même note, mais qu'on distingue le "La" joué par un violon du "La" joué par un piano.

Ce chapitre a pour but d'introduire aussi les différentes applications et interprétations physiques de la transformée de Fourier. Bien que dans certains domaines (le traitement de l'image par exemple) elle soit souvent remplacée par les transformées en ondelettes (par exemple dans JPEG), elle reste un outil incontournable, aussi par sa simplicité et sa naturalité.

2. Transformée de Fourier de fonctions à support compact et premières propriétés

Commençons par la

DÉFINITION 7.1. On appelle fonction à support compact une fonction nulle en dehors d'un intervalle borné. On note $C_c^k(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (resp $C_c^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$) l'espace des fonctions C^k à valeurs complexes (resp. réelles) à support compact.

REMARQUES 7.2. (1) Un ensemble compact dans $\mathbb{R}$ est un ensemble fermé contenu dans un intervalle borné. Une fonction à support compact est donc

simplement une fonction dont le support est borné. Mais la terminologie universellement admise est celle de « fonction à support compact » même si pour nous on pourrait dire « fonction à support borné ».

- (2) Il est facile de construire des fonctions continues à support compact. À peine plus difficile de construire une fonction C^1 à support compact : prendre la primitive d'une fonction continue à support compact et d'intégrale totale (i.e. de $-\infty$ à $+\infty$) nulle. L'existence de fonctions C^∞ à support compact n'est devenue claire qu'au 19ème siècle, par exemple la fonction

$$(7.1) \quad f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est bien C^∞ . Du coup $g(x) = f(x) \cdot f(1-x)$ s'annule en dehors de $[0, 1]$.

- (3) On fera attention à ce que les fonctions de $C_c^k(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ n'ont pas toutes le même support ! Cependant la somme de deux fonctions à support compact et le produit de deux fonctions dont l'une au moins est à support compact, sont à support compact.

Nous pouvons alors poser

DÉFINITION 7.3. Soit f une fonction continue par morceaux et à support compact. Sa transformée de Fourier est la fonction

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ikt} dt$$

La question de la convergence de l'intégrale ne se pose pas, puisque la fonction à intégrer est à support compact.

Tout d'abord on a

PROPOSITION 7.4. *La transformée de Fourier est linéaire de $C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ dans $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. En d'autres termes*

$$\begin{aligned} \widehat{f+g} &= \widehat{f} + \widehat{g} \\ \widehat{(\lambda \cdot f)} &= \lambda \widehat{f} \end{aligned}$$

REMARQUE 7.5. Attention, la transformée de Fourier d'une fonction à support compact N'EST PAS, en général (en fait jamais, sauf si la fonction est nulle) à support compact. Malheureusement nous ne sommes pas à ce stade capables d'en donner une preuve ou même un exemple.

Voyons quelques autres propriétés de la transformée de Fourier

PROPOSITION 7.6. *Pour f continue par morceaux et à support compact, notons $T_a f$ la fonction définie par $T_a f(t) = f(t-a)$. Alors*

$$\begin{aligned} \widehat{T_a f}(k) &= e^{-iak} \widehat{f}(k) \\ \widehat{(e^{iat} f)}(k) &= T_a f(k) = \widehat{f}(k-a) \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. En effet

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-a)e^{-ikt} dt = \int_{t=a+u}^{+\infty} f(u)e^{-ik(a+u)} du = e^{-ika} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-iku} du$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ika} f(t)e^{-ikt} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i(k-a)t-a} du = \widehat{f}(k-a)$$

□

Intuitivement $|\widehat{f}(k)|$ est la "taille" de la composante du signal de fréquence $\frac{k}{2\pi}$. Si un signal est décalé dans le temps, cette composante ne change pas : comme $|e^{-iak}| = 1$, on a $|\widehat{T_a f}(k)| = |\widehat{f}(k)|$.

Dans la suite on notera indifféremment $\int_{-\infty}^{+\infty}$ ou $\int_{\mathbb{R}}$ et $\widehat{f}$ ou $\mathcal{F}(f)$

PROPOSITION 7.7. On a pour $f \in C_c^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$\mathcal{F}(f')(k) = ik\mathcal{F}(f)(k)$$

et

$$\mathcal{F}(tf)(k) = i\mathcal{F}(f)'(k)$$

DÉMONSTRATION. On a

$$\mathcal{F}(f')(k) = \int_{\mathbb{R}} f'(t)e^{-ikt} dt = \left[f(t)e^{-ikt} \right]_{-\infty}^{+\infty} + ik \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-ikt} dt$$

et

$$\mathcal{F}(f)'(k) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{d}{dk} e^{-ikt} dt = \underset{\text{dérivation sous le signe intégrale}}{=} -i \int_{\mathbb{R}} f(t) t e^{-ikt} dt$$

Notons que dans les deux cas les intégrales sont des intégrales de fonctions nulles hors d'un intervalle borné et donc l'interversion de l'intégration et de la dérivation ne pose pas de difficulté. □

On veut dans la section suivante étendre la définition de la transformée de Fourier à une classe de fonctions plus large.

3. Fonctions à décroissance rapide : l'espace $\mathcal{S}$ de Schwartz

Les fonctions à décroissance rapide sont des fonctions pour lesquelles on peut définir la transformée de Fourier et qui ont de bonnes propriétés vis-à-vis de celle-ci.

DÉFINITION 7.8. Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ On dit que f est à **décroissance rapide** si quels que soient $p, q \in \mathbb{N}$, les fonctions $x \mapsto x^p f^{(q)}(x)$ ont pour limite 0 en $\pm\infty$. On note $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ou simplement $\mathcal{S}$ l'espace des fonctions à décroissance rapide. On l'appelle aussi espace de Schwartz¹.

1. En l'honneur de Laurent Schwartz (1915-2001), mathématicien, inventeur de la théorie des Distributions, médaille Fields 1952, militant des droits de l'homme et anticolonialiste.

REMARQUE 7.9. On aurait aussi bien pu simplement demander que $x^p f^{(q)}(x)$ soit bornée en $\pm\infty$ puisque si $x^{p+1} f^{(q)}(x)$ est bornée, $x^p f^{(q)}(x)$ tend vers 0 en $\pm\infty$.

On peut définir la transformée de Fourier dans le cas des fonctions de $\mathcal{S}$

PROPOSITION 7.10. Soit $f \in \mathcal{S}$. Alors l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ikt} dt$ est absolument convergente. On note

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ikt} dt$$

DÉMONSTRATION. En effet, on a $|f(t)| \leq \frac{M}{1+t^2}$, et comme $|f(t)e^{-ikt}| = |f(t)| \leq \frac{M}{1+t^2}$ et que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ converge, on en déduit l'absolue convergence de l'intégrale définissant $\hat{f}$. $\square$

THÉORÈME 7.11. Si $f \in \mathcal{S}$ alors $f^{(q)}$ et $t^p f(t)$ sont dans $\mathcal{S}$ et la transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)(k) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-ikt} dt$ est bien définie et vérifie les propriétés des Propositions 7.6 et 7.7.

DÉMONSTRATION. Il suffit de faire le cas $p = 1, q = 1$ et de raisonner par récurrence. Il faut vérifier que si $t^p f^{(q)}(t)$ est bornée quel que soient les entiers p, q , il en est de même pour $t^p (f')^{(q)}(t) = t^p f^{(q+1)}(t)$ ce qui est évident. Pour $tf(t)$ il suffit de remarquer que $(tf(t))^{(q)} = f^{(q-1)}(t) + tf^{(q)}(t)$ donc $t^p (tf(t))^{(q)} = t^p f^{(q-1)}(t) + t^{p+1} f^{(q)}(t)$ et chacun des termes étant borné, on en conclut que $tf(t)$ est bien dans $\mathcal{S}$. Par hypothèse on a $(1+t^2)f(t)$ est bornée, donc il existe une constante M telle que $|f(t)| \leq \frac{M}{1+t^2}$ et donc l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-ikt} dt$ est absolument convergente.

Montrons que $\mathcal{F}(f')(k) = ik\mathcal{F}(f)(k)$, les autres identités sont laissées au lecteur, leur démonstration étant analogue. La convergence de l'intégrale définissant $\mathcal{F}(f')$ entraîne que celle-ci égale $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a f'(t)e^{-ikt} dt$ et en intégrant par parties

$$\int_{-a}^a f'(t)e^{-ikt} dt = \int_{-a}^a f'(t)e^{-ikt} dt = \left[f(t)e^{-ikt} \right]_{-a}^a + ik \int_{-a}^a f(t)e^{-ikt} dt$$

Comme $\lim_{a \rightarrow \infty} f(t)e^{-ikt} \Big|_{-a}^a = 0$ on en déduit

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-ikt} dt &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a f'(t)e^{-ikt} dt = \\ &= ik \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a f(t)e^{-ikt} dt = ik \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ikt} dt \end{aligned}$$

REMARQUE 7.12. Les fonctions de $\mathcal{S}$ ont de bonnes approximations par des fonctions à support compact. En effet, comme pour $|t| \geq \frac{\varepsilon}{1+t^2}$, si g est une fonction continue à support compact égale à f sur $[-a, a]$ et majorée par $\frac{\varepsilon}{1+t^2}$ hors

de $[-a, a]$ on aura

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ikt} dt - \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-ikt} dt \right| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (f(t) - g(t))e^{-ikt} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t) - g(t)| dt \leq 2\varepsilon \int_a^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \leq 2\pi\varepsilon$$

□

4. Convolution

Un filtre est un processus qui associe à un signal d'entrée $e(t)$ un signal de sortie $s(t)$. Deux propriétés des filtres sont utiles et souvent vérifiées en première approximation :

(1) linéarité : si $e_1(t)$ donne $s_1(t)$ et $e_2(t)$ donne $s_2(t)$ alors $e_1(t) + e_2(t)$ donne $s_1(t) + s_2(t)$ et $\lambda e_1(t)$ donne $\lambda s_1(t)$

(2) indépendance du temps : si $e_1(t)$ donne $s_1(t)$, alors $e_1(t-a)$ donne $s_1(t-a)$

Avec quelques hypothèses naturelles supplémentaires, le filtrage est alors donné par une convolution

$$s \longmapsto s * h$$

$$\text{où } (s * h)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(x-t)h(t)dt$$

DÉFINITION 7.13. Soient f, g deux fonctions de $C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On pose

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt$$

THÉORÈME 7.14. Si $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$,

- (1) $f * g \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$
- (2) $f * g = g * f$
- (3) $\widehat{f * g}(k) = \sqrt{2\pi} \widehat{f}(k) \widehat{g}(k)$.

DÉMONSTRATION. (1) Si f est nulle hors de $[a, b]$ et g nulle hors de $[c, d]$, alors si x est hors de $[a+c, b+d]$ on a que si $t \in [c, d]$, $x-t \notin [a, b]$ donc

$$f(x-t)g(t) = 0.$$

— si $t \notin [c, d]$ $f(x-t)g(t) = 0$ donc l'intégrale est nulle.

(2) Le changement de variable $u = x-t$ donne $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt = - \int_{+\infty}^{-\infty} f(u)g(x-u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(x-u)du$ donc $f * g = g * f$.

(3) On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(x) e^{-ikx} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) g(t) e^{-ikx} dt dx$$

D'après Fubini on peut intervertir les intégrations d'où on obtient

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) e^{-ikx} dx \right) dt = \\ \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-ikt} \widehat{f}(k) dt \end{aligned}$$

en utilisant $\widehat{T_t f}(k) = e^{-ikt} \widehat{f}(k) = \sqrt{2\pi} \widehat{g}(k) \widehat{f}(k)$ d'où la formule. $\square$

De même

PROPOSITION 7.15. Soient $f, g \in \mathcal{S}$. Alors l'intégrale

$$f \star g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) g(t) dt$$

est absolument convergente et se note $f * g$. La fonction $f * g$ est aussi dans $\mathcal{S}$.

DÉMONSTRATION. On verra une démonstration plus rapide, mais utilisant la transformée de Fourier en Corollaire. En effet, considérons $(f * g)(x)$. Comme $|g(t)| \leq \frac{M}{1+t^2}$ et $|f(x-t)| \leq M'$ on aura $|f(x-t)g(t)| \leq \frac{MM'}{1+t^2}$ ce qui montre que l'intégrale est convergente.

LEMME 7.16. On a $(f * g)'(x) = (f * g')(x) = (f' * g)(x)$

DÉMONSTRATION. Elle est laissée en exercice. Il faut simplement justifier la dérivation commute avec l'intégration, lorsque la dérivée est une intégrale absolument convergente. $\square$

On utilise maintenant $|x|^p \leq \sum_{r=0}^p \binom{p}{r} |x-t|^r |t|^{p-r}$ donc

$$\left| x^p \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) g(t) dt \right| \leq \sum_{r=0}^p \binom{p}{r} \int_{-\infty}^{+\infty} |(x-t)^r f(x-t)| \cdot |t^{p-r} g(t)| dt$$

Or $\int_{-\infty}^{+\infty} |(x-t)^r f(x-t)| \cdot |t^{p-r} g(t)| dt$ est convergente, car $|(x-t)^r f(x-t)|$ est bornée et $\int_{-\infty}^{+\infty} |t^r g(t)| dt$ est convergente. $\square$

5. Inversion de Fourier et Plancherel

On a alors les résultats suivants. Le premier nous dit que la connaissance des composantes fréquences permet de reconstituer un signal

THÉORÈME 7.17 (Formule d'inversion de Fourier). Si $f \in \mathcal{S}$ alors $\mathcal{F}(f)$ est dans $\mathcal{S}$ et on a

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(x) = f(-x)$$

En d'autres termes

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

REMARQUE 7.18. (1) La formule d'inversion de Fourier écrit donc f comme superposition de fonctions² $x \mapsto e^{i\xi x}$ de fréquence $\frac{\xi}{2\pi}$, chacune pondérée par $\hat{f}(\xi)$.

(2) Cet énoncé n'a de sens que parce qu'on a défini la transformée de Fourier sur les fonctions de $\mathcal{S}$ et que le Théorème ?? nous dit que la transformée de Fourier d'une fonction de $\mathcal{S}$ est dans $\mathcal{S}$. Si on n'avait défini la transformée de Fourier que pour les fonctions de $C_c^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ on ne pourrait pas énoncer un tel théorème, car on peut montrer que la transformée de Fourier d'une fonction à support compact n'est jamais à support compact (sauf pour la fonction nulle!).

(3) On utilise de manière interchangeable $\hat{f}$ ou $\mathcal{F}(f)$, les choix de l'une ou l'autre notation répondent surtout à des raisons typographiques.

On peut se demander dans quels cas le module de $\hat{f}$ suffit à déterminer f . Ce n'est pas le cas en général, mais on a le cas particulier suivant :

EXERCICE 7.19. Montrer que $\hat{f}$ est réelle si et seulement si f est réelle et paire.

COROLLAIRE 7.20. Si f, g sont dans $\mathcal{S}$ alors $f \star g$ est dans $\mathcal{S}$ et on a $\mathcal{F}(f \star g) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)$

DÉMONSTRATION. En effet, on considère le cas des fonctions à support compact f, g . On sait alors que $\mathcal{F}(f \star g) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)$ donc par inversion de Fourier que $f \star g = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(\hat{f} \cdot \hat{g})$. Or il est clair puisque $\hat{f}, \hat{g}$ sont dans $\mathcal{S}$ que $\hat{f} \cdot \hat{g}$ sont dans $\mathcal{S}$ donc que $\mathcal{F}(\hat{f} \cdot \hat{g})$ est dans $\mathcal{S}$. On peut donc choisir $f_\varepsilon, g_\varepsilon$ sont à support compact et $|f - f_\varepsilon|, |g - g_\varepsilon| \leq \frac{\varepsilon}{1+t^2}$ et $|g(t)|, |f(t)| \leq M$. On en déduit que

$$|f_\varepsilon \star g_\varepsilon - f \star g| = |(f_\varepsilon - f) \star g_\varepsilon - f \star (g - g_\varepsilon)| \leq |(f_\varepsilon - f) \star g_\varepsilon| + |f \star (g - g_\varepsilon)|$$

Comme

$$|(f_\varepsilon - f) \star g_\varepsilon| \leq M \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{1+t^2} dt \leq M\varepsilon\pi$$

et on a la même majoration pour l'autre terme. □

Un autre théorème important est

THÉORÈME 7.21 (Formule de Plancherel). On a pour f dans $\mathcal{S}$ l'égalité

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

2. suivant les domaines, on dira "ondes monochromatiques" ou "son de fréquence pure", etc.

Ce théorème est important car il permet d'étendre la transformée de Fourier à toutes les fonctions de carré intégrable, i.e. telles que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt$ est convergente, mais nous ne le ferons pas ici. Par contre une conséquence de la formule de Plancherel est la suivante

COROLLAIRE 7.22. *Si f est dans $\mathcal{S}$ et que g a une transformée de Fourier continue, on a*

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t)} dt$$

DÉMONSTRATION. On se contente de démontrer le cas où f, g sont toutes deux dans $\mathcal{S}$. Rappelons que $u\bar{v} + \bar{u}v = 2\operatorname{Re}(u\bar{v}) = |u+v|^2 - |u|^2 - |v|^2$. Écrivons

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t)} dt &= 2 \int_{\mathbb{R}} \operatorname{Re}(f(t) \overline{g(t)}) dt = \int_{\mathbb{R}} |f(t) + g(t)|^2 dt - \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt - \int_{\mathbb{R}} |g(t)|^2 dt = \\ &= \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi) + \widehat{g}(\xi)|^2 d\xi - \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi - \int_{\mathbb{R}} |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi = 2 \int_{\mathbb{R}} \operatorname{Re}(\widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}(\xi)}) d\xi = 2\operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}(\xi)} d\xi \end{aligned}$$

En remplaçant $f(t)$ par $-if(t)$ et donc $\widehat{f}(\xi)$ par $-i\widehat{f}(\xi)$, et en utilisant $\operatorname{Re}(-iu) = \operatorname{Im}(u)$ on obtient

$$\operatorname{Im} \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t)} dt = \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}} -if(t) \overline{g(t)} dt = \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}} -i\widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}(\xi)} d\xi = \operatorname{Im} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}(\xi)} d\xi$$

En conclusion les parties réelles et imaginaires de $\int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t)} dt$ et $\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}(\xi)} d\xi$ coïncident. Ces quantités sont donc égales. $\square$

Nous allons maintenant donner des applications de ces résultats qui seront démontrés à la fin de ce chapitre.

EXEMPLE 7.23 (Filtre passe-bas). Soit f une fonction de $\mathcal{S}$. Un filtre "passe-bas" est un filtre qui conserve les basses fréquences en supprimant les hautes fréquences. On pose donc

$$\chi_a(k) = \begin{cases} 1 & \text{for } |k| \leq a \\ 0 & \text{for } |k| > a \end{cases}$$

et on pose

$$\begin{aligned} F_a f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_a(k) \widehat{f}(k) e^{ikx} dk = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_a(k) f(t) e^{ik(x-t)} dk dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\chi}_a(t-x) f(t) dt \end{aligned}$$

Le filtre passe-bas est donc obtenu en faisant une convolution avec la symétrique de la transformée de Fourier de χ_a divisée par $\sqrt{2\pi}$, i.e. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{\chi}_a(-x)$. On doit donc calculer

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{\chi}_a(-k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_a(t) e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{+a} e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi ik} e^{-ikt} \Big|_{-a}^a = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{e^{ika} - e^{-ika}}{ik} = \frac{\sin(ka)}{\pi k}\end{aligned}$$

Donc, posant $\psi_a(k) = \frac{\sin(ka)}{\pi k}$ (qui vaut a en $k = 0$) on a

$$F_a f(x) = \psi_a * f$$

Attention : ψ_a n'est pas une fonction de $\mathcal{S}$, sinon sa transformée de Fourier serait dans $\mathcal{S}$ ce qui n'est pas le cas de χ_a . Cela n'empêche pas $\psi_a * f$ d'être bien définie.

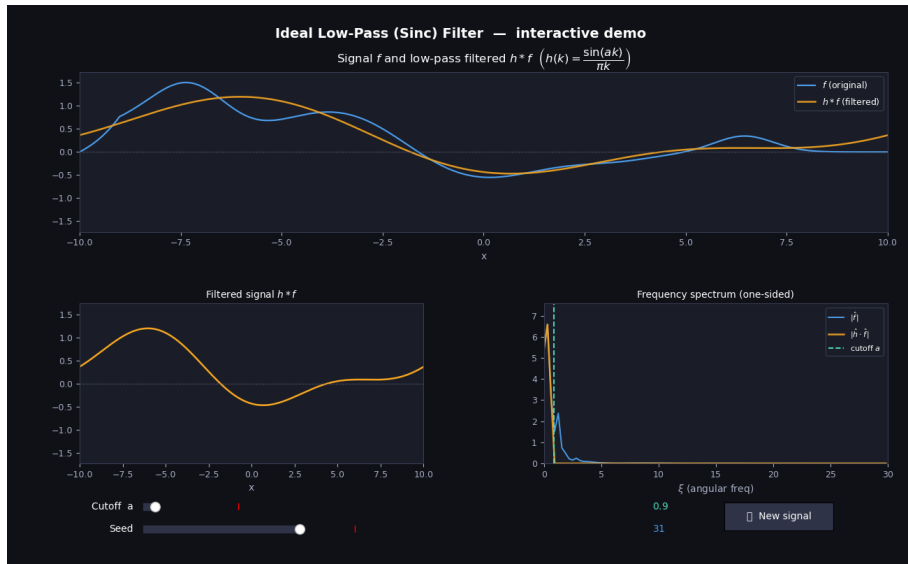


FIGURE 7.1 – Effet d'un filtre passe-bas

6. Exemples et Applications

6.1. La Gaussienne. On définit la fonction de Gauss $G(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ et $G_\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\alpha}}$.

PROPOSITION 7.24. La fonction G_α est dans $\mathcal{S}$ et $\hat{G}_\alpha = \sqrt{\alpha} G_{1/\alpha}$.

DÉMONSTRATION. On montre par récurrence que $G^{(q)}(t) = P_q(t) e^{-\frac{t^2}{2}}$ où P_q est un polynôme de degré q . Par comparaison des polynômes et des exponentielles, on voit

que $G^{(p)}(t)$ et $t^p G^{(p)}(t)$ tendent vers 0 en $\pm\infty$. Or on a bien $G^{(q)}(t) = P_q(t)e^{-\frac{t^2}{2}}$ pour $q = 0$! Supposons la propriété vérifiée à l'ordre q et montrons la pour $q + 1$. On a

$$G^{(q+1)}(t) = (G^{(q)})'(t) = (P_q(t)e^{-\frac{t^2}{2}})' = P_q'(t)e^{-\frac{t^2}{2}} - tP_q(t)e^{-\frac{t^2}{2}} = [P_q'(t) + tP_q(t)]e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Comme $[P_q'(t) + tP_q(t)]$ est un polynôme de degré $q + 1$, la propriété est bien vraie à l'ordre $q + 1$. Maintenant $G'(t) = -tG(t)$ donc en prenant la transformée de Fourier $-i\xi\widehat{G}(\xi) = i\widehat{G}'(\xi)$, soit $\widehat{G}'(\xi) + \xi\widehat{G}(\xi) = 0$. On en déduit que $\widehat{G}(\xi)e^{\frac{\xi^2}{2}}$ a une dérivée nulle et donc $\widehat{G}(\xi) = Ce^{-\frac{\xi^2}{2}}$. Il faut donc identifier la constante C . Or $\widehat{G}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} G(t)dt$ et on sait que cette intégrale vaut $\sqrt{2\pi}$ donc $\widehat{G}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ et donc $\widehat{G} = G$. Le cas de G_α se démontre par un changement de variable.

On a $G'(x) = -xG(x)$ donc $ik\widehat{G}(k) = -i(\widehat{G})'(k)$ soit $(\widehat{G})'(k) = -k\widehat{G}(k)$ Donc G et $\widehat{G}$ vérifient la même équation différentielle du 1^{er} ordre

$$u'(x) + xu(x) = 0$$

Il suffit de vérifier que $G(0) = \widehat{G}(0)$ pour conclure $G = \widehat{G}$. Or $G(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ et $\widehat{G}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ Or si $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ on a

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr d\theta \end{aligned}$$

en posant $x = r \cos \theta$ $y = r \sin \theta$

$$\begin{aligned} dx \cdot dy &= \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} dr \cdot d\theta \\ &= r dr d\theta \end{aligned}$$

□

6.2. Première démonstration de la formule d'inversion de Fourier. On va d'abord expliquer une **démonstration fautive** que l'on rendra ensuite rigoureuse. On doit calculer

$$\begin{aligned} \widehat{\widehat{f}}(-\xi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt} dt \right) e^{i\xi x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ix(t-\xi)} dt dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix(t-\xi)} dx \right) f(t) dt \end{aligned}$$

Mais $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix(t-\xi)} dx$ est la transformée de Fourier de $x \mapsto e^{ix\xi}$ qui est "la masse de Dirac en ξ et l'intégrale vaut donc $f(\xi)$ Bien sûr la transformée de Fourier de $x \mapsto e^{ix\xi}$ n'a pas de sens pour nous, car l'intégrale ne converge pas, quelle que soit la manière

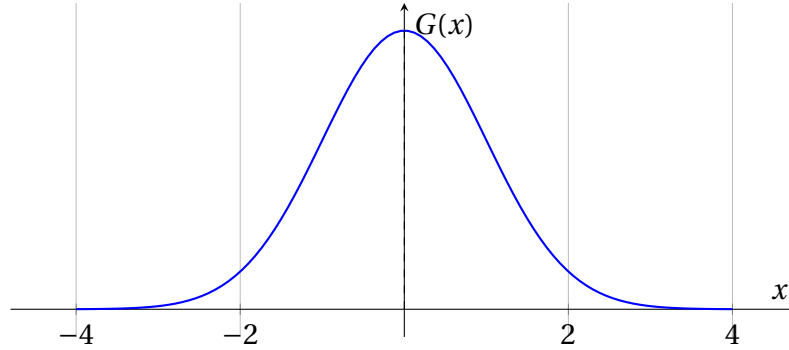


FIGURE 7.2 – Courbe de la fonction densité de la loi de Gauss.

dont on s'y prene. Cette transformée de Fourier aurait un sens si nous avions étudié la théorie des distributions de Laurent Schwartz, ce qui est au delà du programme de L2. On va donc contourner cette difficulté

DÉMONSTRATION DE LA FORMULE D'INVERSION DE FOURIER. Dans la formule de $\widehat{\widehat{f}}(-\xi)$ on va remplacer $\widehat{f}(x)$ par $\widehat{f}(x)e^{-\frac{\varepsilon x^2}{2}}$ et ensuite faire tendre ε vers 0. On calcule donc la transformée de Fourier (en $-\xi$) de $\widehat{f}(x)e^{-\frac{\varepsilon x^2}{2}}$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ixt} dt \right) e^{i\xi x} e^{-\frac{\varepsilon x^2}{2}} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ix(t-\xi)} e^{-\frac{\varepsilon x^2}{2}} dt dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix(t-\xi)} dx \right) f(t) dt$$

Maintenant l'intégrale

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix(t-\xi)} e^{-\frac{\varepsilon x^2}{2}} dx$$

a un sens et c'est la transformée de Fourier en $t-\xi$ de $e^{-\frac{\varepsilon x^2}{2}}$, qui comme on l'a vu égale $\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\varepsilon}} e^{-\frac{(t-\xi)^2}{2\varepsilon}}$. On en déduit que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ixt} dt \right) e^{i\xi x} e^{-\frac{\varepsilon x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\varepsilon}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-\frac{(t-\xi)^2}{2\varepsilon}} dt$$

Pour finir lorsque ε tend vers 0, la fonction $e^{-\frac{(t-\xi)^2}{2\varepsilon}}$ se concentre de plus en plus autour de $t = \xi$ et on va vérifier que l'intégrale tend vers $f(\xi)$. Faisons le changement de variable $t = \xi + \sqrt{\varepsilon}u$, on aura

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\varepsilon}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-\frac{(t-\xi)^2}{2\varepsilon}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi + \sqrt{\varepsilon}u) e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

Donc

$$\left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi + \sqrt{\varepsilon}u) e^{-\frac{u^2}{2}} du - f(\xi) \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi + \sqrt{\varepsilon}u) e^{-\frac{u^2}{2}} du - f(\xi) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\xi + \sqrt{\varepsilon}u) - f(\xi)| e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

Maintenant soit $\delta > 0$ et A choisi pour que $\int_{|t|>A} |f(t)| dt < \delta$. On choisit alors $\varepsilon > 0$ assez petit pour que $|f(\xi + y) - f(\xi)| < \delta$ lorsque $|y| < \sqrt{\varepsilon}A$, ce qui est possible par continuité de f . Alors

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\xi + \sqrt{\varepsilon}u) - f(\xi)| e^{-\frac{u^2}{2}} du \leq \int_{-A}^A \delta e^{-\frac{u^2}{2}} du + \int_{|u|>A} 2|f(u)| e^{-\frac{u^2}{2}} du \leq 3\delta$$

On en conclut que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F} \left(\widehat{f}(x) e^{-\frac{\varepsilon x^2}{2}} \right) (-\xi) = f(\xi)$$

Mais

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F} \left(\widehat{f}(x) e^{-\frac{\varepsilon x^2}{2}} \right) (-\xi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \widehat{\widehat{f}}(-\xi) \star \widehat{e^{-\frac{\varepsilon x^2}{2}}}(-\xi)$$

et on a comme plus haut pour $g \in \mathcal{S}$ on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (g * G_{\varepsilon})(\xi) = g(\xi)$$

donc en appliquant à $\widehat{\widehat{f}} \in \mathcal{S}$

□

6.3. Quelques exemples de Transformées de Fourier. Il se trouve que les cas les plus simples à calculer, en dehors du cas de la Gaussienne G_{α} , ne sont pas dans $\mathcal{S}$. On ne démontrera pas ici, mais si f et $\widehat{f}$ ont des intégrales absolument convergentes sur $\mathbb{R}$, la formule d'inversion de Fourier et la formule de Plancherel restent vraies.

6.3.1. *La fonction χ_a .* On a vu que la transformée de Fourier de χ_a est $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(ak)}{k}$

6.3.2. *La fonction $f(t) = e^{-a|t|}$.* Il faut calculer pour $a > 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|-ikt} dt$. Or cette intégrale s'écrit

$$\int_0^{+\infty} e^{-at-ikt} dt + \int_{-\infty}^0 e^{at-ikt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-at-ikt} \int_0^{+\infty} e^{-au+iku} du$$

en posant $u = -t$ dans la seconde intégrale. Nous sommes donc ramenés à

$$\int_0^{+\infty} (e^{-at-ikt} + e^{-at+ikt}) dt = \int_0^{+\infty} e^{-at} (e^{-ikt} + e^{ikt}) dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-at} \cos(kt) dt$$

On écrit alors $e^{-at} \cos(kt) = \operatorname{Re}(e^{(-a+ki)t})$ et $2 \int_0^{+\infty} e^{(-a+ki)t} dt = \frac{1}{-a+ki} e^{(-a+ki)t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{a-ki}$. Donc sa partie réelle vaut $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{a-ki} + \frac{1}{a+ki} \right) = \frac{a}{a^2+k^2}$ et

$$\widehat{e^{-a|x|}}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2+k^2}$$

6.4. Fonction triangle. Il s'agit de la fonction

$$\tau_a(x) = \max(1 - \frac{|x|}{a}, 0)$$

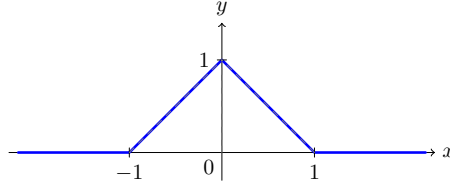


FIGURE 7.3 – Fonction triangle

On remarque que

$$(\chi_a * \chi_a)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_a(x-t) \chi_a(t) dt = \int_{-a}^a \chi_a(x-t) dt =$$

$$\text{Long}(\{t \in [-a, a] \mid x-t \in [-a, a]\}) = \text{Long}([-a, a] \cap [x-a, x+a]) = \tau_{2a}(x)$$

On en déduit

$$\widehat{\tau_{2a}}(k) = \widehat{(\chi_a * \chi_a)}(k) = \sqrt{2\pi} \widehat{\chi_a}(k)^2 = \sqrt{2\pi} \frac{2 \sin(ak)^2}{\pi k^2} = \frac{2\sqrt{2} \sin(ak)^2}{\sqrt{\pi} k^2}$$

6.5. Formule de Poisson et applications. On commence par montrer

PROPOSITION 7.25 (Formule de Poisson). *Soit $f \in \mathcal{S}$. Alors on a*

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}} f(t + pT) = \frac{\sqrt{2\pi}}{T} \sum_{q \in \mathbb{Z}} \widehat{f}\left(\frac{2q\pi}{T}\right) e^{\frac{2i\pi q t}{T}}$$

DÉMONSTRATION. L'idée est de rendre f périodique de période T et d'appliquer le théorème de convergence des séries de Fourier pour les fonctions C^∞ T -périodiques. Tout d'abord montrons que si $f \in \mathcal{S}$ la fonction $\sum_{p \in \mathbb{Z}} f(t + pT)$ est bien définie, C^∞ et T -périodique. En d'autres termes il suffit de montrer que la série converge uniformément sur tout intervalle borné ainsi que la série de ses dérivées à tous les ordres. Mais comme si f est dans $\mathcal{S}$ ses dérivées à tous les ordres le sont aussi il suffit de démontrer

LEMME 7.26. *Si $f \in \mathcal{S}$ la série $\sum_{p \in \mathbb{Z}} f(t + pT)$ converge uniformément sur tout intervalle borné vers une fonction T -périodique et C^∞ .*

DÉMONSTRATION. On a par hypothèse que $|f(t)| \leq \frac{C}{1+t^2}$ donc

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}} |f(t + pT)| \leq \sum_{p \in \mathbb{Z}} \frac{C}{1 + (t + pT)^2}$$

et si $t \in [-aT, aT]$ on a que $\frac{t+pT}{pT}$ converge uniformément vers 1 (a est fixé!) donc il en est de même pour $\frac{p^2 T^2}{1+(t+pT)^2}$ c'est à dire que pour p assez grand $\frac{1}{1+(t+pT)^2} \leq \frac{2}{p^2 T^2}$ et comme la série de terme général $\frac{1}{p^2}$ converge, la série $\sum_{p \in \mathbb{Z}} f(t + pT)$ converge normalement donc uniformément sur $[-aT, aT]$. Sa somme est donc continue, nous la noterons F . Comme sa dérivée vérifie la même propriété, on a en utilisant le Théorème 5.18 que F est C^1 et $F'(t) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} f'(t + pT)$. Par récurrence on voit que F est C^∞ . Enfin

$$F(t + T) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} f(t + T + pT) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} f(t + (p+1)T) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} f(t + pT) = F(t).$$

□

D'après le Lemme on a donc que $F(t) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} f(t + pT)$ est T -périodique et C^∞ . Elle est donc somme de sa série de Fourier. Calculons ses coefficients de Fourier :

$$c_q(F) = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) e^{\frac{-iq2\pi t}{T}} dt = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{p \in \mathbb{Z}} f(t + pT) e^{\frac{-iq2\pi t}{T}} dt$$

Comme la série est uniformément convergente sur $[0, T]$ on peut intervertir sommation et intégration et en effectuant sur chaque terme un changement de variable $u = t + pT$

$$\begin{aligned} c_q(F) &= \frac{1}{T} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \int_0^T f(t + pT) e^{\frac{-iq2\pi t}{T}} dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \int_{pT}^{(p+1)T} f(u) e^{\frac{-2iq\pi(u-pT)}{T}} du \\ &= \frac{1}{T} \sum_{p \in \mathbb{Z}} e^{\frac{-2iq\pi pT}{T}} \int_{pT}^{(p+1)T} f(u) e^{\frac{-2iq\pi u}{T}} du \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{\frac{-iq2\pi u}{T}} du \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{T} \hat{f}\left(\frac{2\pi q}{T}\right) \end{aligned}$$

La série de Fourier de F est donc

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{T} \sum_{q \in \mathbb{Z}} \hat{f}\left(\frac{2\pi q}{T}\right) e^{i \frac{2q\pi t}{T}}$$

comme annoncé.

□

6.5.1. *Formule d'inversion de Fourier et Plancherel via la formule de Poisson.* On écrit la formule de Poisson en faisant tendre T vers $+\infty$. Donc

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}} f(t + pT) = \frac{\sqrt{2\pi}}{T} \sum_{q \in \mathbb{Z}} \hat{f}\left(\frac{2q\pi}{T}\right) e^{\frac{2i\pi q t}{T}}$$

On prétend que pour $t = 0$, lorsque T tend vers $+\infty$ le terme de gauche tend vers $f(t)$. En effet pour $|p| \geq 1$ on aura $|f(pT)| \leq \frac{M}{1+p^2 T^2} \leq \frac{M}{T^2} \frac{T^2}{1+p^2 T^2} \leq \frac{M}{T^2} \frac{1}{p^2}$ donc $\sum_{p \neq 0} |f(pT)| \leq \frac{C}{T^2}$ (où $C = M \cdot \frac{\pi^2}{6}$).

On prétend maintenant que le terme de droite a pour limite $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) dk$, en remarquant que c'est une somme de Riemann. Cependant nous n'avons pas montré que les sommes de Riemann convergent vers l'intégrale dans le cas indéfini. Nous avons donc besoin du Lemme suivant

LEMME 7.27. *Soit $h \in \mathcal{S}$. Alors*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k\varepsilon)$$

DÉMONSTRATION. Soit $A > 0$ tel que pour $|t| > A$ on ait $h(t) \leq \frac{\delta}{1+t^2}$. Alors par définition de l'intégrale de Riemann, on a $\int_{-A}^A h(t) dt = \lim_N \frac{A}{N} \sum_{k=-N}^N h(k \frac{A}{N})$. On pose $N = \frac{A}{\varepsilon}$. Alors quel que soit $\delta > 0$, pour N assez grand (donc ε assez petit), la différence

$$\int_{-A}^A h(t) dt - \frac{A}{N} \sum_{k=-N}^N h(k \frac{A}{N}) = \int_{-A}^A h(t) dt - \varepsilon \sum_{k=-N}^N h(k\varepsilon)$$

est majorée par δ . Il suffit maintenant d'estimer les restes, qui sont d'une part $\int_A^{+\infty} h(t) dt + \int_{-\infty}^{-A} h(t) dt$ et d'autre part $\frac{A}{N} \sum_{|k| \geq N} |h(kN)|$.

La somme des intégrales se majore par $2 \int_A^{+\infty} \frac{\delta}{1+t^2}$ qui est majoré par $\delta \frac{\pi}{2}$ et la somme est majorée par

$$\frac{2}{N} \sum_{k \geq N} \frac{\delta}{1 + (\frac{kA}{N})^2} \leq \frac{2}{N} \sum_{k \geq N} \frac{\delta}{1 + k^2 \varepsilon^2} \leq \frac{2}{N \varepsilon^2} \sum_{k \geq N} \frac{\delta}{k^2} \leq \frac{2}{N \varepsilon^2} \delta \frac{1}{N} \leq \frac{2\delta}{N^2 \varepsilon^2} \leq \frac{2\delta}{A^2}$$

le dernier terme tend évidemment vers 0 avec A . On en déduit que pour ε assez petit,

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt - \varepsilon \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k\varepsilon) \right| < 2\delta$$

Finalement, on a établi la formule d'inversion en $t = 0$, mais pour le cas général, on applique à $T_t f$, en utilisant que $T_t f(0) = f(-t)$ et $\mathcal{F}(\mathcal{F}(T_t f))(0) = (\mathcal{F}(e^{it\xi} \hat{f}))(0) = T_{-t} \hat{\hat{f}}(0) = \hat{f}(t)$ □

REMARQUE 7.28. On aurait pu montrer directement que pour t dans un intervalle borné, le terme de droite converge uniformément vers $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi t} d\xi$. Cela nous

aurait obligés à vérifier que les estimations sont uniformes pour t dans un intervalle borné, ce qui est vrai, mais se ramener au cas $t = 0$ est plus simple.

6.5.2. *Formule de Plancherel via la formule de Poisson.* On revient à

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}} f(t + 2\pi p) e^{-i(t+2\pi p)y} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{q \in \mathbb{Z}} \hat{f}(y + q) e^{iqt}$$

On prend le carré du module du terme de gauche et on obtient

$$\sum_{p, r \in \mathbb{Z}} f(t + 2\pi p) \overline{f(t + 2\pi r)} e^{2i\pi(r-p)y}$$

et on intègre en y sur $[0, 1]$ (Il faut vérifier que la somme commute avec l'intégrale, mais c'est encore un argument de convergence normale de la série, utilisant le fait que $f \in \mathcal{S}$). Tous les termes sauf celui correspondant à $p = r$ s'annulent par la formule qui donne $\int_0^1 e^{2i\pi(r-p)y} dy$ ce qui nous donne $\sum_{p \in \mathbb{Z}} |f(t + 2\pi p)|^2$ et en intégrant en t sur $[0, 2\pi]$ on obtient $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt$, utilisant la conséquence de la formule de Chasles

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^1 g(t + k) dt = \int_0^1 \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(t + k) dt$$

Faisons les mêmes opérations sur le terme de droite. On obtient

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k, l \in \mathbb{Z}} \hat{f}(y + k) \overline{\hat{f}(y + l)} e^{i(k-l)t}$$

En intégrant d'abord en t de 0 à 2π on obtient

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(y + k)|^2$$

puis en intégrant en y de 0 à 1, $\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(y)|^2 dy$

7. Le théorème de Shannon-Nyquist

On suppose avoir un signal (i.e. une fonction) dont on sait a priori que la transformée de Fourier est dans un intervalle $[-a, a]$ ce qui signifie que ses fréquences sont dans $[\frac{-a}{2\pi}, \frac{a}{2\pi}]$. Notons que pour une fonction réelle $\hat{f}$ est paire ce qui fait qu'on ne parle pas en pratique de fréquences négatives³...

Lorsqu'on enregistre un signal numérique on l'**échantillonne** ce qui signifie qu'on mesure N fois par seconde sa valeur $f(t)$, ou encore on évalue les $f(\frac{q}{N})$. Dans la pratique ces valeurs sont discrétisées, par exemple sur un CD l'échantillonnage est de 44,1 kHz en 16 bits, c'est à dire que l'amplitude est arrondie à une valeur la plus proche parmi $2^{16} \simeq 65000$ valeurs possibles.

La question pratique qui se pose est de savoir pour des fréquences dans $[\frac{-a}{2\pi}, \frac{a}{2\pi}]$ quelle fréquence d'échantillonnage permettra de reconstituer le signal? On a donc $\hat{f}$

3. Donc en pratique on regarde la restriction de $\hat{f}$ à $[0, a]$

à support dans $[-a, a]$ et en utilisant la formule de Poisson avec $T = 2a$ pour $\hat{f}$ et la formule d'inversion de Fourier

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\xi + 2pa) = \frac{\sqrt{2\pi}}{T} \sum_{q \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{2\pi q}{a}\right) e^{i \frac{2q\pi t}{2a}}$$

Donc la connaissance des $f\left(\frac{2\pi q}{2a}\right)$ pour $q \in \mathbb{Z}$ permet de connaître $G(\xi) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\xi + 2pa)$. Mais comme on ajoute des translatés de $\hat{f}$ par $2a$, et que $\hat{f}$ est à support dans $[-a, a]$, la restriction de G à $[-a, a]$ coïncide avec $\hat{f}$. On peut donc retrouver $\hat{f}$ et donc, par inversion de Fourier, f .

On doit donc échantillonner à la fréquence $\frac{2a}{2\pi}$ c'est-à-dire une fréquence double de la limite de la plage de fréquence du signal d'origine. Ainsi pour un signal de fréquence comprise entre 0 et 20000 Hz (la plage de sensibilité de l'oreille humaine), il faut échantillonner à 44000 Hz.

- REMARQUES 7.29. (1) Si on sous-échantillonne on a un phénomène d'aliasing ou "repli spectral". Dans la somme $G(\xi) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\xi + 2pa)$ restreinte à $[-a, a]$ sera somme de la fonction $\hat{f}$ et de ses décalés. Si on a sous-échantillonné de peu, on aura juste les termes de $\hat{f}(\xi + \pm 2a)$ et cela ne modifiera que les fréquences proches de $\frac{a}{2\pi}$ (donc les aigus).
- (2) Si on sur-échantillonne, cela n'apporte rien. Il est inutile de payer plus cher pour avoir un signal suréchantillonné. Par contre une discrétisation en 24 bits au lieu de 16 bits, pourrait –en théorie du moins– améliorer la reproduction du son.

8. Principe d'incertitude de Heisenberg

Il s'agit du point de vue mathématique de dire qu'une fonction et sa transformée de Fourier ne peuvent pas être trop bien localisées dans le sens suivant.

On dira que $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = 1$ est localisée près de a si $\sigma_a(f) = \int_{\mathbb{R}} (t-a)^2 |f(t)|^2 dt$ est proche de 0. Cela signifie que la fonction $|f(t)|^2$ est concentrée près de a . En effet si $\int_{|t-a| \geq \varepsilon} |f(t)|^2 dt \geq 1 - \delta$ on a

$$\int_{\mathbb{R}} (t-a)^2 |f(t)|^2 dt \geq \varepsilon^2 \int_{|t-a| \geq \varepsilon} |f(t)|^2 dt \geq \varepsilon^2 (1 - \delta)$$

Donc $\sigma_a(f)$ mesure à quel point f est localisée près de a . On a alors

PROPOSITION 7.30 (Principe d'incertitude de Heisenberg). Si $f \in \mathcal{S}$ on a pour tout $(a, \alpha) \in \mathbb{R}^2$,

$$\sigma_a(f) \sigma_{\alpha}(\hat{f}) \geq \frac{1}{4}$$

en d'autres termes

$$\left(\int_{\mathbb{R}} (t-a)^2 |f(t)|^2 dt \right) \left(\int_{\mathbb{R}} (\xi-\alpha)^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right) \geq \frac{1}{4}$$

DÉMONSTRATION. tout d'abord on se ramène au cas $a = \alpha = 0$. On pose $g(t) = f(t + a)$ puis $h(t) = e^{i\alpha t} g(t) = e^{i\alpha t} f(t + a)$. On a donc $|h(t)|^2 = |f(t + a)|^2$ et $|\widehat{h}(\xi)|^2 = |\widehat{g}(\xi - \alpha)|^2 = |e^{i\alpha\xi} \widehat{f}(\xi - \alpha)|^2$ donc

$$\int_{\mathbb{R}} (t - a)^2 |f(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} u^2 |g(u)|^2 du = \int_{\mathbb{R}} u^2 |h(u)|^2 du$$

et

$$\int_{\mathbb{R}} (\xi - \alpha)^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} \eta^2 |\widehat{f}(\eta - \alpha)|^2 d\eta = \int_{\mathbb{R}} \eta^2 |\widehat{h}(\eta)|^2 d\eta$$

Maintenant $\xi \widehat{h}(\xi) = \widehat{h}'(\xi)$ et en utilisant Parseval, $\int_{\mathbb{R}} \eta^2 |\widehat{h}(\eta)|^2 d\eta = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{h}'(\eta)|^2 d\eta = \int_{\mathbb{R}} |h'(\eta)|^2 d\eta$ Il faut donc montrer que

$$\left(\int_{\mathbb{R}} t^2 |h(t)|^2 dt \right) \left(\int_{\mathbb{R}} |h'(t)|^2 dt \right) \geq \frac{1}{4}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz (voir ci-dessous Proposition 7.32 nous dit que

$$\int_{\mathbb{R}} \operatorname{Re} \left(u(t) \overline{v(t)} \right) dt \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |u(t)|^2 dt \right) \left(\int_{\mathbb{R}} |v(t)|^2 dt \right)$$

Dans notre cas, il suffit de calculer $\int_{\mathbb{R}} t \operatorname{Re} (h(t) \overline{h'(t)}) dt$. Or en intégrant par parties, et en remarquant que $(|h(t)|^2)' = h(t) \overline{h'(t)} + \overline{h(t)} h'(t) = 2 \operatorname{Re} (h(t) \overline{h'(t)})$

$$\int_{\mathbb{R}} t \operatorname{Re} (h(t) \overline{h'(t)}) dt = \frac{1}{2} [t h(t)^2]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |h(t)|^2 dt = \frac{-1}{2}$$

□

REMARQUE 7.31. En physique quantique, f est la fonction d'onde d'une particule, $|f(t)|^2$ sa probabilité de présence en t et donc $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = 1$. D'autre part $\widehat{f}(\xi)$ est la probabilité que l'impulsion de la particule soit ξ . Enfin $\sigma_a(f)$ et $\sigma_\alpha(\widehat{f})$ mesurent la concentration de la probabilité de la particule d'être proche de a avec une quantité de mouvement proche de α . Si on avait $\sigma_a(f) = 0$ et $\sigma_\alpha(\widehat{f}) = 0$ on aurait la certitude de trouver la particule en a avec impulsion α .

PROPOSITION 7.32 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). Soient $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On a l'inégalité suivante

$$\int_{\mathbb{R}} \operatorname{Re} (u(t) \overline{v(t)}) dt \leq \left| \int_{\mathbb{R}} u(t) \overline{v(t)} dt \right| \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |u(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |v(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

REMARQUE 7.33. Cette inégalité est l'analogue de l'inégalité qui affirme que dans un espace hilbertien ou euclidien, le produit scalaire de deux vecteurs est majoré par le produit des normes.

DÉMONSTRATION. On considère le polynôme du second degré en $\lambda \int_{\mathbb{R}} |u(t) + \lambda v(t)|^2 dt$ qui est évidemment toujours positif. En le développant on obtient (ne pas oublier que u, v sont à valeurs complexes)

$$\int_{\mathbb{R}} |u(t)|^2 dt + 2\lambda \operatorname{Re} \left(\int_{\mathbb{R}} u(t) \overline{v(t)} dt \right) + \lambda^2 \int_{\mathbb{R}} |v(t)|^2 dt$$

Pour un polynôme ne prenant que des valeurs positives, son discriminant doit être négatif, donc

$$\left(\operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}} u(t) \overline{v(t)} dt \right)^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |u(t)|^2 dt \right) \left(\int_{\mathbb{R}} |v(t)|^2 dt \right)$$

Maintenant, si θ est l'argument de $\int_{\mathbb{R}} u(t) \overline{v(t)} dt$, on a

$$\left| \int_{\mathbb{R}} u(t) \overline{v(t)} dt \right| = \int_{\mathbb{R}} (e^{-i\theta} u(t)) \overline{v(t)} dt$$

(car $e^{-i\theta}$ est exactement le facteur qui rend l'intégrale réelle et positive).

Donc, en remplaçant u par $e^{-i\theta} u$ dans l'inégalité précédente, on obtient :

$$\left| \int_{\mathbb{R}} u(t) \overline{v(t)} dt \right| \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |u(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |v(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

□

REMARQUES 7.34. Le discriminant est strictement négatif, sauf si le trinôme s'annule. Cela n'est possible que si $u(t) = \lambda v(t)$ pour tout t , c'est-à-dire si les fonctions sont proportionnelles. Dans l'inégalité de Heisenberg, on ne peut donc avoir égalité que si $\lambda t h(t) = h'(t)$ soit $h(t) = C e^{\alpha \frac{t^2}{2}}$, donc si h est une Gaussienne. Notons que l'on peut centrer la Gaussienne en a, α , donc $f(t) = C e^{-i\alpha t} e^{\frac{\alpha(t-a)^2}{2}}$

9. Résolution d'équations différentielles

On va donner deux exemples d'équations différentielles que l'on peut résoudre avec la transformée de Fourier. Notons que la transformée de Fourier joue un rôle central dans l'étude des équations différentielles et en théorie des distributions (cf. [Sch50]).

9.1. L'équation $u''(t) - u(t) = g(t)$. Considérons d'abord l'équation

$$u''(t) - u(t) = g(t)$$

avec $g \in \mathcal{S}$ et $t \in \mathbb{R}$. Appliquons une transformée de Fourier. Par linéarité et les formules classiques, cela devient

$$-\xi^2 \widehat{u}(\xi) - \widehat{u}(\xi) = \widehat{g}(\xi)$$

donc

$$\widehat{u}(\xi) = -\frac{\widehat{g}(\xi)}{1 + \xi^2}$$

On a en utilisant la formule d'inversion de Fourier

$$u(x) = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{g}(\xi)}{1+\xi^2} e^{ix\xi} d\xi$$

On peut utiliser la formule liant produit de fonctions et convolution de leur transformée de Fourier puisque $\mathcal{F}(\frac{\widehat{g}(\xi)}{1+\xi^2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}(\widehat{g}) * \mathcal{F}(\frac{1}{1+\xi^2})$ et on a vu en cours que $\mathcal{F}(\frac{1}{1+\xi^2}) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|x|}$ donc

$$u(x) = \frac{-1}{2} (g * e^{-|t|})(x) = \frac{-1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-|x-t|} dt$$

9.2. L'équation de la chaleur. Considérons l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = g(x, t)$$

avec condition initiale $u(x, 0) = u_0(x)$ On suppose que $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[$. Lorsque $g = 0$ cela représente la distribution de température sur une barre infinie à l'instant t , la température à l'instant $t = 0$ étant donnée par u_0 .

Supposons que u_0 et $g(\bullet, t)$ sont dans $\mathcal{S}$. Prenons la transformée de Fourier en x , soit

$$v(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{-ix\xi} dx$$

On a alors

$$\frac{\partial v}{\partial t}(\xi, t) + \xi^2 v(\xi, t) = h(\xi, t)$$

où h est la transformée de Fourier de g en x . Alors posant $w(\xi, t) = e^{t\xi^2} v(\xi, t)$ on a

$$\frac{\partial w}{\partial t}(\xi, t) = e^{t\xi^2} \frac{\partial v}{\partial t}(\xi, t) + \xi^2 e^{t\xi^2} v(\xi, t) = e^{t\xi^2} h(\xi, t)$$

d'où

$$w(\xi, t) = w(\xi, 0) + \int_0^t e^{s\xi^2} h(\xi, s) ds$$

et

$$v(\xi, t) = v_0(\xi) + \int_0^t e^{(s-t)\xi^2} h(\xi, s) ds$$

et

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[e^{-t\xi^2} v_0(\xi) e^{i\xi x} + \int_0^t e^{(s-t)\xi^2 + i\xi x} h(\xi, s) ds \right] d\xi$$

On vérifie que l'on peut appliquer le théorème de Fubini (Théorème 3.46) sur la seconde intégrale. Les deux intégrales sont alors du type $\mathcal{F}(\varphi \cdot \psi)(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}(\varphi) * \mathcal{F}(\psi)$.

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t\xi^2 + i\xi x} v_0(\xi) d\xi + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(s-t)\xi^2 + i\xi x} h(\xi, s) d\xi ds$$

Or la transformée de Fourier en ξ de $e^{(s-t)\xi^2}$ est $\frac{1}{\sqrt{2(t-s)}} e^{\frac{x^2}{4(s-t)}}$ (transformée d'une Gaussienne), celle de ν_0 est u_0 . On a donc

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(y) e^{\frac{-(x-y)^2}{4t}} dy + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{4(s-t)}} e^{\frac{(x-y)^2}{4(s-t)}} g(y, s) dy ds$$

On vérifie que $\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = u_0(x)$.

10. Le théorème central limite

On sait que si une pièce est équilibrée (ou non-pipée), il y a une chance sur deux qu'un lancer la fasse tomber sur pile (et une chance sur deux qu'elle tombe sur face, en supposant qu'elle ne tombe jamais sur la tranche!). Maintenant si on fait 100 lancers, suivant le résultat peut on dire qu'on est plus ou moins certain que la pièce soit équilibrée?

Évidemment si on tombe 100 fois sur pile, on sera assez certain qu'elle est pipée (ou que les deux côtés sont pile!). Si elle tombe 90 fois sur pile et 10 fois sur face, on sera toujours très méfiant. À partir de quel ratio fera-t-on confiance à la pièce? Évidemment, si on fait suffisamment de séries de 100 lancers, il arrivera -même pour une pièce non pipée- que l'on ait une fois une série de 100 piles. Pour être précis, une fois sur $2^{100} \simeq 10^{30}$, la réponse ne peut donc être que probabiliste : si la pièce est non-pipée on a une grande probabilité que le ratio de piles et de faces soit proche de 1.

Pour les pièces, le calcul n'est pas très difficile, c'est de la combinatoire. On trouve que pour des séries de N lancers si la pièce est équilibrée, on a une probabilité $P(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{t^2}{2\varepsilon}}^{\frac{t^2}{2\varepsilon}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ d'avoir entre $\frac{N}{2} - \sqrt{N}\varepsilon$ et $\frac{N}{2} + \sqrt{N}\varepsilon$ piles. Donc pour 100 lancers, on estime avoir 68% de chances d'avoir entre 45 et 55 piles et 95% de chances d'avoir entre 40 et 60 piles. En fait le calcul exact (direct) donne 72% de chances dans le premier cas, 96,5% de chances dans le second. L'erreur tendant vers 0 lorsque le nombre de lancers augmente. Pour 1000 lancers, on obtient dans les deux cas 99,86% de chances d'avoir entre 450 et 550 piles

Scénarios	Intervalle	Valeur exacte (Binomiale)	Approximation normale
100 lancers	[40, 60]	0.9648	0.9648
100 lancers	[45, 55]	0.7287	0.7287
1000 lancers	[450, 550]	0.9986	0.9986

Ce qui est remarquable, c'est que l'on a le même phénomène, avec la même fonction de Gauss lorsque l'on répète une expérience quelconque, à condition que l'on répète bien la même expérience, et que celles-ci soient indépendantes. Ainsi si 30 étudiants font la même expérience dans un TD d'électricité, les résultats des mesures seront répartis comme une Gaussienne.

Mathématiquement, le problème se formule comme suit. On considère un ensemble Ω d'événements (par exemple chaque expérience est un événement), et une

variable aléatoire, qui est simplement une fonction X sur Ω (le résultat de l'expérience). On appelle loi de la variable aléatoire, que l'on note $f_X(t)$, la probabilité que X prenne la valeur t . Plus précisément, la probabilité que $X(\omega)$ soit entre a et b est donnée par $\int_a^b f_X(t) dt$.

La valeur moyenne ou espérance de X est $\mu_X = \int_{\mathbb{R}} t f_X(t) dt$ c'est à dire la moyenne de t multiplié par la probabilité que $X(\omega) = t$.

La variance est donnée par $\sigma_X^2 = \int_{\mathbb{R}} (t - \mu_X)^2 f_X(t) dt$. Elle mesure à quel point les valeurs aléatoires de X sont concentrées autour de la valeur moyenne. On appelle σ_X l'écart-type. On voit que par rapport au cas de la fonction d'onde de la section précédente, on retrouve la probabilité de présence de la particule en posant $f_X(t) = |f(t)|^2$.

DÉFINITION 7.35. On dit que deux variables aléatoires X, Y sont indépendantes si en notant $f_{X,Y}(s, t)$ la probabilité $f_{X,Y}(s, t)$ que $X = s$ et $Y = t$ vérifie $f_{X,Y}(s, t) = f_X(s) \cdot f_Y(t)$. En d'autres termes la probabilité que $X \in [a, b]$ et $Y \in [c, d]$, est le produit des probabilités

$$\int_a^b \int_c^d f_{X,Y}(s, t) ds dt = \int_a^b f_X(s) ds \int_c^d f_Y(t) dt$$

Notons en particulier que $X + Y = u$ équivaut à dire qu'il existe s tel que $X = s$ et $Y = u - s$. On en déduit que si X, Y sont indépendantes

$$f_{X+Y}(u) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(s, u-s) ds = \int_{\mathbb{R}} f_X(s) f_Y(u-s) ds = (f_X \star f_Y)(u)$$

On a alors

THÉORÈME 7.36 (Théorème central limite). Soient X_j une suite de variables aléatoires, de même loi et même variance et indépendantes. Soit $\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$. Alors la

loi $f_{\bar{X}_n}$ de $\bar{X}_n$ a pour moyenne μ et $Z_n = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}$ a une loi f_{Z_n} qui **converge en loi**

lorsque n tend vers l'infini vers $\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$.

REMARQUE 7.37. La convergence en loi de la suite de variables aléatoires Z_n vers Z signifie que la probabilité que $Z_n \in [a, b]$ converge vers la probabilité que $Z \in [a, b]$. Ou encore quels que soient $a, b \in \mathbb{R}$ on a $\int_a^b f_{Z_n}(t) dt$ converge vers $\int_a^b f_Z(t) dt$. On appelle $F_Z(x) = \int_{-\infty}^x f_Z(t) dt$ la fonction de répartition de la variable aléatoire Z . Elle donne la probabilité que $Z \in]-\infty, x]$.

DÉMONSTRATION. On peut supposer que $\mu_{X_j} = 0$ en remplaçant X_j par $X_j - \mu_{X_j}$. On note φ_X la transformée de Fourier de f_X . Alors si X, Y sont indépendantes, $\varphi_{X+Y} = \sqrt{2\pi} \widehat{f_X} \cdot \widehat{f_Y}$ et donc $\varphi_{X_1+\dots+X_n} = \sqrt{2\pi}^{n-1} \varphi_{X_1} \dots \varphi_{X_n}$. Notons que comme les f_{X_j} sont toutes égales, on a $\varphi_{X_1+\dots+X_n} = (\varphi_X)^n$. Maintenant $f_{X/\lambda}(u) = \lambda f_X(\lambda u)$, car la probabilité que

X/λ soit dans $[a, b]$ est $\int_a^b f_{X/\lambda}(t) dt$ mais c'est aussi la probabilité que X soit dans $[\lambda a, \lambda b]$ car

$$\int_{\lambda a}^{\lambda b} f_X(t) dt =_{t=\lambda u} \lambda \int_a^b f_X(\lambda u) du$$

On en déduit

$$\varphi_{X/\lambda}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \lambda f_X(\lambda u) e^{-iu\xi} du =_{t=\lambda u} \int_{\mathbb{R}} f_X(t) e^{-\frac{it\xi}{\lambda}} du = \varphi_X\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$$

On a donc $\varphi_{Z_n} = (\sqrt{2\pi})^{n-1} [\varphi_X(\frac{\xi}{\sigma\sqrt{n}})]^n$. Or on a un développement limité de φ_X près de 0, donné par la formule de Taylor, car

$$\varphi_X(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f_X(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\varphi'_X(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} t f_X(t) dt = \mu_X = 0$$

$$\varphi''_X(0) = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} t^2 f_X(t) dt = \frac{-\sigma_X^2}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\text{Donc } \varphi_X(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (1 - \sigma_X^2 \eta^2) + o(\eta^2), \text{ donc}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{Z_n}(\xi) &= (\sqrt{2\pi})^{n-1} \left[\varphi_X\left(\frac{\xi}{\sigma_X \sqrt{n}}\right) \right]^n = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) \left(1 - \sigma_X^2 \frac{\xi^2}{n\sigma_X^2} + o\left(\frac{\xi^2}{n\sigma_X^2}\right)\right)^n \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) \left(1 - \frac{\xi^2}{n} + o\left(\frac{\xi^2}{n}\right)\right)^n \end{aligned}$$

qui converge uniformément sur tout intervalle borné vers $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}}$. La démonstration rigoureuse de ce dernier point est laissée au lecteur.

Nous n'en avons pas tout à fait fini, car nous avons seulement montré que $\varphi_{Z_n}(\xi)$ converge uniformément sur tout intervalle borné vers la fonction de Gauss $G(\xi)$, mais pas que $f_{Z_n}(t)$ converge vers sa transformée de Fourier (qui est encore $G(t)$!). Il nous faut encore montrer

PROPOSITION 7.38 (Théorème de Lévy, version faible). *Si φ_n converge uniformément sur tout compact vers φ alors $f_n = \widehat{\varphi}_n$ converge faiblement vers $f = \widehat{\varphi}$ c'est-à-dire $F_n(x) = \int_{-\infty}^x f_n(t) dt$ converge simplement vers $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$.*

DÉMONSTRATION. La convergence faible est équivalente à dire que pour toute fonction g dans $\mathcal{S}$, $\int_{\mathbb{R}} f_n(t) g(t) dt$ converge vers $\int_{\mathbb{R}} f(t) g(t) dt$.

Maintenant dire que φ_n converge uniformément sur tout compact vers φ , c'est dire que $\int_{\mathbb{R}} e^{-it\xi} f_n(t) dt$ converge uniformément sur tout compact vers $\int_{\mathbb{R}} e^{-it\xi} f(t) dt$, donc si $g \in \mathcal{S}$ on a $\widehat{\widehat{g}}(-t) = g(t)$ et donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} g(t) f_n(t) dt &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{\widehat{g}}(-t) f_n(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \widehat{g}(-t) \widehat{f}_n(t) dt = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{g}(-t) \varphi_n(-t) dt = \int_{\mathbb{R}} \widehat{g}(t) \varphi_n(t) dt \end{aligned}$$

Comme g est à support compact et φ_n converge vers φ sur tout compact et de plus $|\varphi_n| \leq 1$, et $\widehat{g}$ est dans $\mathcal{S}$ donc intégrable, le Lemme suivant permet de conclure que cette dernière intégrale a pour limite $\int_{\mathbb{R}} \widehat{g}(t) \varphi(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \widehat{g}(t) \widehat{f}(t) dt = \int_{\mathbb{R}} g(t) f(t) dt$. $\square$

LEMME 7.39 (Convergence dominée élémentaire). *Si f_n est une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telle que*

(1) *f_n converge uniformément sur tout compact vers f*

(2) *Il existe une fonction g telle que $\int_{\mathbb{R}} g(t) dt$ converge et pour tout n , $|f_n(t)| \leq g(t)$.*

Alors $\int_{\mathbb{R}} f_n(t) dt$ converge vers $\int_{\mathbb{R}} f(t) dt$.

DÉMONSTRATION. Soit $\varepsilon > 0$ et a, b tels que $\int_b^{+\infty} g(t) dt + \int_{-\infty}^a g(t) dt < \varepsilon/2$. Comme f_n converge uniformément vers f sur $[a, b]$ on a pour n assez grand

$$\left| \int_a^b f_n(t) dt - \int_a^b f(t) dt \right| < \varepsilon$$

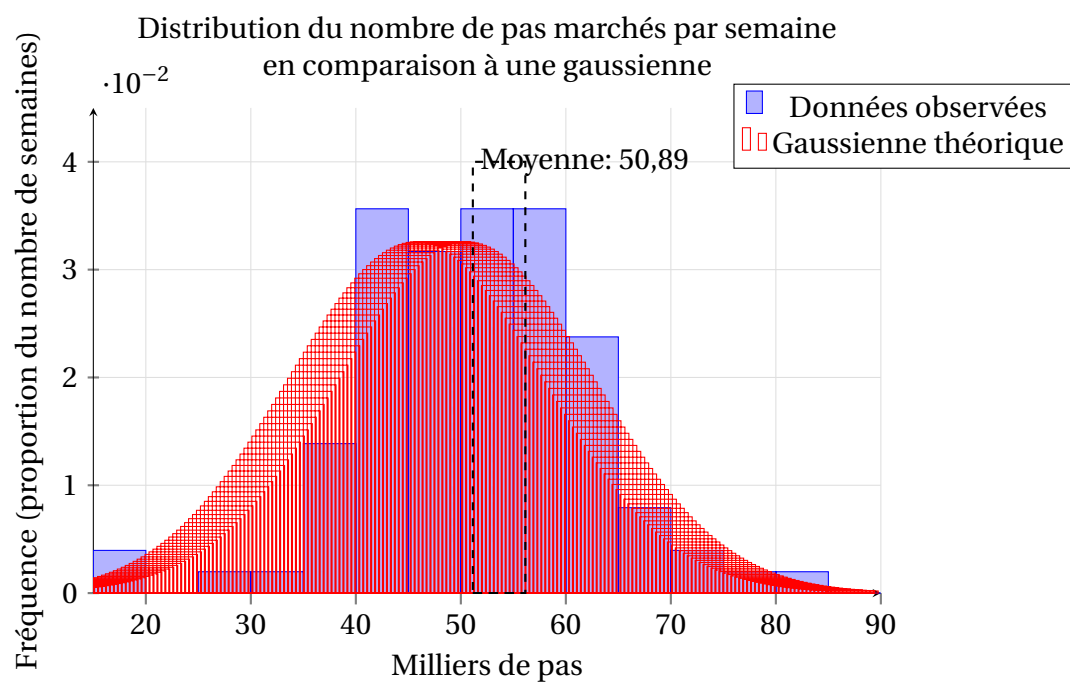
et donc

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) dt - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt \right| \leq \\ & \left| \int_a^b f_n(t) dt - \int_a^b f(t) dt \right| + \int_b^{+\infty} |f_n(t) - f(t)| dt + \int_{-\infty}^a |f_n(t) - f(t)| dt \leq \\ & \varepsilon + \int_b^{+\infty} 2g(t) dt + \int_{-\infty}^a 2g(t) dt \leq 3\varepsilon \end{aligned}$$

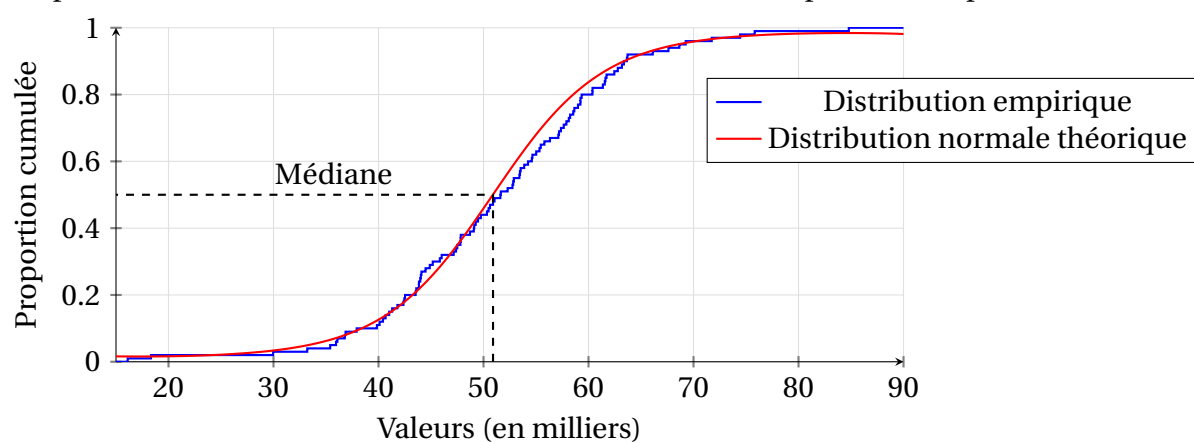
$\square$

$\square$

EXEMPLE 7.40 (Statistique du nombre de pas hebdomadaire de l'auteur sur un an.). Pour une personne donnée, la distribution n'est pas tout à fait Gaussienne, ne serait-ce que parce que le nombre de pas est positif, alors qu'une Gaussienne devrait être non bornée inférieurement. D'un autre côté, la déviation du nombre de pas de la moyenne (par exemple un aller retour domicile-travail) est somme de petites perturbations aléatoires et indépendantes, ce qui par le théorème central limite, rapproche d'une Gaussienne. On s'attend donc à avoir une courbe ressemblant à une Gaussienne, mais pas exactement Gaussienne.



Fonction de répartition empirique vs normale:
Proportion du nombre de semaines où l'auteur a marché au plus x mille pas



Statistique	Valeur
Nombre de données	100
Minimum	29 965
Maximum	84 788
Moyenne	52 107
Médiane	52 829
Écart-type	11 748

11. Exercices

(1) (a) Soit $G(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. Montrer que $\widehat{G}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2} + i\xi x} dx$

(b) Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2} + i\xi x} dx = e^{-\frac{\xi^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x+i\xi)^2}{2}} dx$.

(c) En utilisant le Théorème 3.47 de l'Appendice du Chapitre 3, montrer que

$$\frac{d}{d\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x+i\xi)^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x+i\xi) e^{-\frac{(x+i\xi)^2}{2}} dx$$

(d) Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} (x+i\xi) e^{-\frac{(x+i\xi)^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx} e^{-\frac{(x+i\xi)^2}{2}} dx = 0$

(e) En déduire que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x+i\xi)^2}{2}} dx$ ne dépend pas de ξ et donc égale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

(f) Conclure que

$$\widehat{G}(\xi) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right) G(\xi)$$

(g) Utiliser un théorème du cours pour montrer que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$ et conclure.

Problèmes

12. Examen, première session 2022

1. Intégrales généralisées, séries numériques

- (1) Répondre par VRAI ou FAUX en justifiant (citer un théorème ou donner un contre-exemple)
- (a) Si $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$ et f est continue sur $[1, +\infty[$ alors $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge
 - (b) Si f est continue décroissante et positive et si $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge alors $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ converge
- (2) L'intégrale $\int_1^{+\infty} (1 - \cos(\frac{1}{t})) dt$ est elle convergente ou divergente (on ne demande pas de la calculer)

2. Suites et séries de fonctions

- (1) Répondre par VRAI ou FAUX en justifiant (citer un théorème ou donner un contre-exemple)
- (a) Une suite de fonctions qui converge simplement converge uniformément
 - (b) Si $(u_n(x))_{n \geq 1}$ est une suite de fonctions qui converge uniformément vers la fonction $u(x)$ et si les u_n sont continues alors u est continue.
- (2) Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions suivantes
- (a) $f_n(x) = \frac{x}{x^2 + n}$ définie sur $\mathbb{R}$
 - (b) $f_n(x) = xe^{x/n}$ définie sur $\mathbb{R}$
- On pourra faire les tableaux de variation des fonctions $x \mapsto \frac{x}{x^2 + n}$ et $x \mapsto x(e^{x/n} - 1)$

3. Séries de Fourier

On considère la fonction f définie par $f(x) = x \sin(x)$ sur $[-\pi, \pi]$ étendue à $\mathbb{R}$ tout entier pour être 2π -périodique

- (1) Calculer $f(\pi), f(\frac{3\pi}{2}), f(2\pi)$

- (2) La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
- (3) La fonction est-elle paire, impaire? Ni l'un ni l'autre?
- (4) On veut calculer la série de Fourier réelle de f i.e. $a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))$.
Peut-on dire a priori que certains des coefficients sont nuls?
- (5) Exprimer $\sin(x) \cos(kx)$ en fonction de $\sin((k+1)x)$ et $\sin((k-1)x)$
- (6) Calculer les coefficients de Fourier de f (on calculera a_0, a_1 séparément) et écrire sa série de Fourier (on pourra utiliser que $\cos(k\pi) = (-1)^k$).
- (7) Étudier la convergence simple de la série de Fourier de f .
- (8) Calculer la somme de la série de Fourier de f .
- (9) Montrer la formule

$$\frac{\pi}{2} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}$$

- (10) (Question bonus) En utilisant que la primitive de $x^2 \sin(x)^2$ est donnée par

$$\frac{x^3}{6} - \frac{x^2 \sin(2x)}{4} - \frac{x \cos(2x)}{4} + \frac{1}{8} \sin(2x) + Cste$$

(on en demande pas de le démontrer) montrer que

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + 2 \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(k^2 - 1)^2}$$

13. Examen deuxième session 2022

4. Intégrales généralisées, séries numériques _____

- (1) Répondre par VRAI ou FAUX en justifiant (citer un théorème ou donner un contre-exemple)
- (a) Si $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge et $|b_n| \leq |a_n|$ alors $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge
- (b) Si f est continue décroissante et $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$, alors $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge
- (2) L'intégrale $\int_1^{+\infty} (e^{1/t} - 1) dt$ est-elle convergente ou divergente (on ne demande pas de la calculer)

5. Suites et séries de fonctions _____

- (1) Répondre par VRAI ou FAUX en justifiant (citer un théorème ou donner un contre-exemple)
- (a) Une série de fonctions qui converge normalement converge uniformément

- (b) Si $(u_n(x))_{n \geq 1}$ est une suite de fonctions qui converge simplement vers la fonction $u(x)$ et si les u_n sont paires alors u est paire.
- (2) Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions (dont on recommande de faire le tableau de variations) $f_n(x) = nx^n \ln(x)$ pour $x \in]0, 1[$ et $f_n(0) = 0$.
- (a) La suite converge-t-elle simplement sur $[0, 1[$?
- (b) La suite converge-t-elle uniformément sur $[0, 1[$?
- (c) La suite converge-t-elle uniformément sur $[0, \frac{1}{2}]$?

6. Séries de Fourier

On considère la fonction f définie par $f(t) = e^t$ pour $t \in [-\pi, \pi[$ étendue à $\mathbb{R}$ tout entier pour être 2π -périodique.

On posera $\sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ et $\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ (et on lit respectivement “sinus hyperbolique de t ” et “cosinus hyperbolique de t ”). Dans la suite $\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)$ désignent les parties réelles et imaginaires de z .

- (1) Que valent $f(\pi), f(\frac{3\pi}{2})$?
- (2) Calculer les limites à droite et à gauche de f en π i.e. $\lim_{t \rightarrow \pi^-} f(x), \lim_{t \rightarrow \pi^+} f(x)$.
- (3) La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? paire? impaire?
- (4) On veut calculer la série de Fourier réelle de $f : a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)$.
- (a) Calculer a_0
- (b) Pour k entier positif, calculer $\int_{-\pi}^{\pi} e^{t(1+ik)} dt$ (on rappelle que $e^{\pm i k \pi} = (-1)^k$)
- (c) En utilisant $\int_{-\pi}^{\pi} e^t \cos(kt) dt = \operatorname{Re}(\int_{-\pi}^{\pi} e^{t(1+ik)} dt)$ et $\int_{-\pi}^{\pi} e^t \sin(kt) dt = \operatorname{Im}(\int_{-\pi}^{\pi} e^{t(1+ik)} dt)$ montrer que

$$a_k = \frac{2(-1)^k \sinh(\pi)}{\pi(k^2 + 1)}, \quad b_k = \frac{2k(-1)^{k+1} \sinh(\pi)}{\pi(k^2 + 1)}$$

- (5) Étudier la convergence simple de la série de Fourier de f .
- (6) Calculer la somme de la série de Fourier de f .
- (7) Montrer la formule

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + 1} = \frac{\pi \cosh(\pi) - \sinh(\pi)}{2 \sinh(\pi)}$$

Index

- Affixe d'un nombre complexe, 7
- Argument d'un nombre complexe, 9
- Changement de variable dans les intégrales, 31
- Conjugué d'un nombre complexe, 8
- Convergence
 - absolue d'une série, 46
 - en loi d'une suite de variables aléatoires, 104
 - faible, 105
 - normale, 57
 - simple, 51
 - uniforme, 51
- Convolution, 87
- Coordonnées polaires, 9
- Critère de Cauchy, 20
- Équation des cordes vibrantes, 78
- Fonction
 - C^1 par morceaux, 69
 - à support compact, 83
 - continue par morceaux, 27
 - périodique, 61
- Forme trigonométrique d'un nombre complexe, 9
- Formule d'Euler, 9
- Formule d'inversion de Fourier, 88
- Formule de Parseval, 76
- Formule de Poisson, 95
- Intégrale
 - absolument convergente, 38
 - convergente, 34
- Intégration par parties, 30
- Inégalité
 - de Cauchy-Schwarz, 100
- Inégalité isopérimétrique, 79
- Inégalité triangulaire, 8
- Module d'un nombre complexe, 8
- Nombres complexes, 7
- $O(\bullet)$, $\bullet \sim \bullet$, 44
- Partie imaginaire, 7
- Partie réelle, 7
- Phénomène de Gibbs, 73
- Raison d'une suite arithmétique, 15
- Relation de Chasles, 26
- Représentation géométrique des nombres complexes, 7
- Règle
 - de Cauchy, 47
 - de d'Alembert, 47
 - de L'Hôpital, 21
- Similitude, 7
- Suite
 - arithmétique, 15
 - bornée, 14
 - croissante, 14
 - de complexes, 13
 - de Fibonacci, 13
 - de réels, 13
 - décroissante, 14
 - formule de récurrence, 13
 - géométrique, 15
 - majorée, 14
 - minorée, 14
 - strictement croissante, 14
 - strictement décroissante, 14
- Série
 - absolument convergente, 46
 - alternée, 48
- Série de Fourier de f , 67

Théorème

- central limite, 103
 - d'inversion de Fourier, 88
 - de Cauchy, 20
 - de Comparaison des séries, 44
 - de Comparaison des séries et intégrales, 45
 - de Dirichlet, 69
 - de dérivation sous l'intégrale, 33
 - de dérivation sous l'intégrale-cas impropre, 40
 - de Fubini, 33
 - de Fubini, cas impropre, 40
 - de Leibniz sur les séries alternées, 48
 - de Nyquist, 98
 - de Parseval, 76
 - de Poisson, 95
 - fondamental du calcul intégral, 29
- Transformée de Fourier, 83

Bibliographie

- [3 Blue 1 Brown] *But what is a Fourier series? From heat flow to drawing with circles.*
URL: <https://www.youtube.com/watch?v=r6sGWTCMz2k>
(cf. p. 6).
- [Bra00] R. N. BRACEWELL. *The Fourier Transform and Its Applications*. 3^e éd. McGraw-Hill Series in Electrical and Computer Engineering. New York : McGraw-Hill, 2000 (cf. p. 6).
- [DR98] J. DHOMBRES et J.-B. ROBERT. *Fourier, Créateur de la Physique-Mathématique*. Un savant, une époque. Belin, 1998 (cf. p. 5).
- [ElJi] *L'éléphant de Fermi et Neumann*. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=uazPP0ny3XQ> (cf. p. 6).
- [Fou22] J. FOURIER. *Théorie analytique de la chaleur*. Firmin Didot, 1822 (cf. p. 5).
- [Kat04] Y. KATZNELSON. *An Introduction to Harmonic Analysis*. 3^e éd. Cambridge Mathematical Library. Cambridge : Cambridge University Press, 2004. ISBN : 978-0-521-54359-0 (cf. p. 6).
- [Kör88] T. W. KÖRNER. *Fourier Analysis*. Cambridge : Cambridge University Press, 1988 (cf. p. 6).
- [Mal00] S. MALLAT. *Une exploration des signaux en ondelettes*. Éditions de l'École polytechnique, 2000 (cf. p. 5).
- [Sch50] L. SCHWARTZ. *Théorie des Distributions*. T. 9, 10. Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg. Hermann, Paris, 1950 (cf. p. 101). *Dernière édition en un volume*, 1997.
- [SS03] E. M. STEIN et R. SHAKARCHI. *Fourier Analysis : An Introduction*. T. 1. Princeton Lectures in Analysis. Princeton : Princeton University Press, 2003 (cf. p. 6).