

Exclu du prêt.

UNIVERSITE PARIS DAUPHINE
U.E.R SCIENCES DES ORGANISATIONS
thèse pour l'obtention du titre de Docteur de 3ème Cycle

spécialité
RECHERCHE OPERATIONNELLE

SUJET : Une théorie de Morse pour les systèmes hamiltoniens étoilés .

CANDIDAT : Claude VITERBO

Directeur de Recherche : Ivar EKELAND

JURY :

Président : F. LAUDENBACH
Suffrageants : D. BENNEQUIN
I. EKELAND
P-L. LIONS

Année de la soutenance : 1985

Th D 1703



Je remercie Ivar Ekeland - qui a dirigé ma thèse- pour ses conseils, ses explications, et l' intérêt qu'il a bien voulu porter à mon travail; François Laudénbach avec qui j' ai débuté dans la recherche et à qui je dois beaucoup de ce que je sais; Daniel Bennequin pour ses encouragements, et son enthousiasme communicatif pour les mathématiques; Pierre-Louis Lions qui a accepté de juger mon travail; et enfin, l' équipe du CEREMADE qui m' a accueilli.

Madame Leïla Lassoued m' a signalé de nombreuses erreurs, ce dont je lui suis reconnaissant; elle n' est en aucun cas responsable pour celles qui restent!

Enfin, un mot pour exprimer ma gratitude à tous ceux qui par leur affection, leur amitié, m' ont aidé à mener à bien ce travail; c' est pour eux qu' il prend tout son sens, c' est naturellement à eux qu' il est dédié.

NOTATIONS

$\tilde{E}(x)$ est la fonction définie par

$$\tilde{E}(x) = k \quad \text{si} \quad k-1 < x \leq k$$

$\theta(f)$ désigne une fonction de l'ordre de f

$\mathbb{Z}_N$ est le groupe additif $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, mais
aussi si N est premier le corps $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

UNE THEORIE DE MORSE POUR LES SYSTEMES HAMILTONIENS

ETOILES.

Claude VITERBO.

Table des matières.

Introduction	
I . Réduction à la dimension finie.	p. 16
II . Etude de la fonctionnelle réduite.	p. 13
III . Applications de la cohomologie équivariante à la recherche. des points critiques d'une fonctionnelle.	p. 28
IV . Amélioration des résultats précédents pour $\psi \circ r_p$.	p. 34
V . Comportement de l'indice par itération.	p. 51

Introduction.

Soit Σ une hypersurface strictement étoilée C^3 de $\mathbb{R}^{2n}$, on s'intéresse aux solutions périodiques de (1) $\dot{x} = JN(x)$ où $N(x)$ est la normale à Σ en x et J la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ +I_n & 0 \end{pmatrix}$.

Si H est une fonction sur $\mathbb{R}^{2n}$ telle que $\Sigma = H^{-1}(1)$ et 1 n'est pas niveau critique pour H , cela revient à chercher les solutions périodiques du système

$$\begin{cases} \dot{x} = J\nabla H(x) \\ H(x) = 1 \end{cases}$$

C'est un problème à énergie fixée. On se ramène à un problème à période fixée en prenant pour H une fonction telle que $H(\lambda x) = \varphi(\lambda) H(x)$, $\forall \lambda > 0$, $\forall x \in \Sigma$, où φ vérifie (voir (E) p. 26 Def. 1 et Lemme 2)

- (i) $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$, $\varphi(t) = t^{3/2}$ si $t \geq 1$
- (ii) φ est C^∞ , convexe, strictement croissante
- (iii) $\varphi'(0) = 0$, $\varphi''(0) = a > 0$
- (iv) $t \rightarrow t[\varphi(t)]^{-1/2}$ est strictement croissante.

La fonction H est alors C^3 sur $\mathbb{R}^{2n} - \{0\}$ et C^1 sur $\mathbb{R}^{2n}$.

Si $\bar{x}$ est une solution τ périodique sur $H = 1$, $x = \rho \bar{x}(t \frac{\tau}{T})$ sera une solution T périodique de $\dot{x} = J\nabla H(x)$ si et seulement si on a

$$\frac{\tau}{T} = \frac{\varphi(\rho)}{\rho^2} \quad \text{qui a une solution unique en } \rho$$

pourvu que $\frac{\tau}{T} < \frac{a}{2}$.

Notre problème se ramène donc à la recherche des solutions de

$$(H) \quad \begin{cases} \dot{x} = J \nabla H(x) \\ x(0) = x(T) \end{cases}$$

Pour mettre ce problème sous forme variationnelle, posons comme dans [B.L.M.R.]

$$H_K(x) = H(x) + \frac{K}{2} |x|^2$$

alors pour K assez grand H_K sera convexe.

Les solutions de (H) s'identifient aux points critiques de

$$F(x) = \int_0^T \left[\frac{1}{2} (J\dot{x} - Kx, x) + H_K(-J\dot{x} + Kx) \right] dt \quad \text{sur } H^1.$$

On démontre alors

Théorème 1 : La fonctionnelle F a une orbite critique (différente de 0) par nombre pair compris entre $2n E\left(\frac{KT}{2\pi}\right)$ et $2n \left[E\left(\frac{KT}{2\pi}\right) + E\left(\frac{aT}{2\pi R^2}\right) \right] - 1$ (R désigne un réel tel que Σ soit contenue dans la boule de rayon R). Si de plus les orbites critiques sont non dégénérées, il y en a au moins une pour chaque indice pair compris entre $2n E\left(\frac{KT}{2\pi}\right)$ et $2n \left[E\left(\frac{KT}{2\pi}\right) + E\left(\frac{aT}{2\pi R^2}\right) \right] - 1$.

Au § V on associe à une orbite périodique un indice $\tilde{i}^{(1)}$ qui diffère de l'indice de Morse par la quantité $2n E\left(\frac{KT}{2\pi}\right)$. Le réel a étant arbitrairement grand, on déduit du théorème 1 le :

Corollaire : Le système (H) a au moins une solution pour chaque indice $\tilde{i}$ pair positif.

(1) En réalité on définit i^s au § V, il suffit de poser $\tilde{i} = i^s - n$.

L'indice $\tilde{i}_k$ de la k-ième itérée d'une orbite étant obtenue comme dans [E] en fonction de la linéarisée de l'application de premier retour de Poincaré et de $\tilde{i}_1$, on en déduit

Théorème 2 : Si $n \geq 3$, si les orbites primitives de (1) sont en nombre fini et d'indice $\tilde{i}$ positif, alors ces orbites forment une famille résonante.

On entend par orbite primitive une orbite dont le groupe d'isotopie est trivial. Pour la définition d'une famille résonante, on se reportera à [E] (p. 62, Définition 3). Si la famille se réduit à une seule orbite, c'est la notion classique de résonance : notant $e^{\pm i\theta_k}$ les valeurs propres du linéarisé de l'application de Poincaré (en omettant une fois la valeur propre 1 qui a toujours la multiplicité 2 au moins) l'orbite est dite résonante si on a une relation non triviale

$$n_1\theta_1 + \dots + n_\beta\theta_\beta = 0 \quad n_k \in \mathbb{Z}$$

On a alors

Corollaire : Si $n \geq 3$ les hypersurfaces dont toutes les orbites primitives ont un indice $\tilde{i}$ positif forment un ensemble dans lequel la propriété d'admettre une infinité d'orbites périodiques est générique.

Enfin, remarquons que le théorème 1 nous permet de retrouver un résultat de [B.L.M.R.] .

En effet si ρ est le rayon d'une boule centrée en 0 ne rencontrant aucun plan tangent à Σ , on a comme dans le théorème de Croke Weinstein ([C-W]) que la période d'une solution de (H) $\frac{T}{k}$ est $\geq \frac{2\pi}{a} \rho^2$ donc $k \leq E \left(\frac{T}{2\pi} \frac{a}{\rho^2} \right)$ et chaque orbite géométrique fournit au plus $E \left(\frac{T}{2\pi} \frac{a}{\rho^2} \right)$ orbites critiques de F .

Comme il y a ,

L'indice γ étant défini comme dans (E) en fonction de la linéarisée de l'application de premier retour de Poincaré, on en déduit :

Théorème 2 : Soit $n \geq 3$, alors (1) n'a qu'un nombre fini d'orbites géométriquement distinctes, celles-ci forment une famille résonante.

Pour la définition d'une famille résonante, on se reportera à (E) (p. 62 Définition 3). Si la famille se réduit à une seule orbite, c'est la notion classique de résonance : notant $e^{\pm i\theta_k}$ les valeurs propres du linéarisé de l'application de Poincaré qui sont sur le cercle unité, l'orbite est dite résonante si on a une relation non triviale

$$n_1 \theta_1 + \dots + n_\beta \theta_\beta = n_0 \quad n_k \in \mathbb{Z}.$$

On a alors

Corollaire : Si $n \geq 3$, pour presque toute hypersurface étoilée, (1) a une infinité d'orbites géométriquement distinctes.

Enfin, remarquons que le théorème 1 nous permet de retrouver un résultat de [B.L.M.R.].

En effet si ρ est le rayon d'une boule centrée en 0 ne rencontrant aucun plan tangent à Σ , on a comme dans le théorème de Croke Weinstein ([C-W]) que la période d'une solution de (H) $\frac{T}{k}$ est $\geq \frac{2\pi}{a} \rho^2$ donc $k \leq E\left(\frac{T}{2\pi} \frac{a}{\rho^2}\right)$ et chaque orbite géométrique fournit au plus $E\left(\frac{T}{2\pi} \frac{a}{\rho^2}\right)$ orbites critiques de F .

Comme il y a, si on a bien choisi K :

$n \in \left(\frac{aT}{2\pi R^2} \right)$ orbites critiques de F , on trouve :

$n \cdot \frac{E \left(\frac{aT}{2\pi R^2} \right)}{E \left(\frac{aT}{2\pi \rho^2} \right)}$ orbites géométriques

Si $R^2 < 2\rho^2$ on peut choisir T pour retrouver n orbites géométriques.

I . Réduction à la dimension finie.

Posons $H_K(x) = \phi \circ j_1(x) + \frac{K}{2} |x|^2$ où ϕ définie dans [E] (p. 26 Def. 1 et Lemme 2) et K est choisi assez grand pour que H_K soit convexe (ce qui est possible car $\phi(t) = t^{3/2}$ si $t \geq 1$).

On va décrire les relations de (H) :

$$\begin{cases} \dot{x} = J \nabla H_0(x) \\ x(0) = x(T) \end{cases}$$

comme solutions d'un problème variationnel faisant intervenir H_K .

Pour cela considérons l'espace $H^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^{2n})$ ($\mathbb{R}^{2n}$ étant muni d'une structure complexe notée J) l'opérateur A défini par $Ax = \dot{x} + KJx$, où on suppose $\frac{KT}{2\pi} \notin \mathbb{Z}$.

Lemme 1 : L'opérateur $A : H^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^{2n}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^{2n})$ est inversible, son inverse notée M est donnée par

$$Mu = e^{-KJt} \left(\int_0^t e^{KJs} u(s) ds + \eta \right)$$

où η est donnée par

$$(e^{KJT} - I)\eta = \int_0^T e^{KJs} u(s) ds.$$

Démonstration : immédiate.

Proposition 1 : Les orbites périodiques de (H) correspondent de façon biunivoque aux points critiques sur $L^2(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^{2n})$ de

$$\psi(u) = - \int_0^T \left[\frac{1}{2} (Ju, Mu) + H_K^*(-Ju) \right] dt$$

Démonstration : Rappelons d'abord que H_K^* désigne la duale de Fenchel de H_K .

L'équation d'Euler sur la fonctionnelle ψ s'écrit

$$-JMu + J\mathcal{V}H_K^*(-Ju) = 0$$

posant $x = Mu$ on a donc

$$x = \mathcal{V}H_K^*(-J\dot{x} + Kx)$$

d'où

$$\mathcal{V}H_K(x) = -J\dot{x} + Kx$$

soit

$$\mathcal{V}H(x) + Kx = -J\dot{x} + Kx$$

d'où

$$\dot{x} = J\mathcal{V}H(x)$$

Définition 1 : On note, si $u \in L^2([0, \varepsilon], \mathbb{R}^{2n})$ $M_\varepsilon u = e^{-KJt} \int_0^t e^{KJs} u(s) ds$.

Considérons le problème variationnel suivant

$$P_{\varepsilon, \xi} \quad \begin{cases} \text{minimiser} & \int_0^\varepsilon \left[\frac{1}{2} (Jv, M_\varepsilon v) + H_K^*(-Jv) \right] dt \\ \text{avec} & v \in L^2([0, \varepsilon], \mathbb{R}^{2n}) \text{ et } \int_0^\varepsilon e^{KJs} v(s) ds = \xi \end{cases}$$

Proposition 2 : Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que si $\varepsilon < \varepsilon_0$, $P_{\varepsilon, \xi}$ a une solution unique $v(\varepsilon, \xi)$. On a $v(\varepsilon, 0) = 0$ et si $\xi \neq 0$, $v(\varepsilon, \xi)(t) \neq 0$ pour tout t . En fait $v(\varepsilon, \xi) = \dot{x} + KJx$ où x vérifie $\dot{x} = J\mathcal{V}H_0(x)$.

Démonstration : La première partie se démontre comme dans [E] Lemme 9, p. 39. Ecrivons l'équation d'Euler, soit :

$$- JM_{\varepsilon} u + \frac{1}{2} J e^{-KJt} \int_0^{\varepsilon} e^{KJs} u(s) ds + J \nabla H_K(-Ju) = e^{-KJt} \eta$$

$$\text{où } \eta \in \mathbb{R}^{2n} \quad (1)$$

Soit

$$(M_{\varepsilon} u + e^{-KJt} \zeta) = \nabla H_K(-Ju)$$

$$\text{où } \zeta \in \mathbb{R}^{2n}$$

d'où posant

$$x(t) = M_{\varepsilon} u + e^{-KJt} \zeta$$

on a

$$u = \dot{x} + KJx$$

et

$$J \nabla H_0(x) = \dot{x}$$

Comme

$$u = \dot{x} + KJx = J(\nabla H_0(x) + Kx) = J \nabla H_K(x)$$

dire que $u(t) = 0$ entraîne $x(t) = 0$ mais comme $\dot{x} = J \nabla H_0(x)$, x est identiquement nulle, donc u aussi.

Considérons l'espace $E = (\mathbb{R}^{2n})^N$, on note $(\xi_1, \dots, \xi_N)$ un élément de E , où $\xi_k \in \mathbb{R}^{2n}$.

Si $u \in L^2$ posons $p_N u = \left(\int_0^{\varepsilon} e^{KJs} u(s) ds, \dots, \int_{(N-1)\varepsilon}^{N\varepsilon} e^{KJs} u(s) ds \right)$
où $\frac{T}{N} = \varepsilon < \varepsilon_0$; alors $p_N u$ est un élément de E .

Par ailleurs si $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N) \in E$ on pose

(1) On a bien $e^{-KJt} \eta$ car la direction du sous-espace affine défini par

$\int_0^{\varepsilon} e^{KJs} v(s) ds$ est l'espace vectoriel orthogonal à $\{e^{-KJt} \eta / \eta \in \mathbb{R}^{2n}\}$:

$$\text{en effet } \int_0^{\varepsilon} (e^{-KJt} \eta, u(t)) dt = \left(\eta, \int_0^{\varepsilon} e^{KJt} u(t) dt \right).$$

$$r_N(\xi)(t) = v(\varepsilon, e^{-KJ(k-1)\varepsilon} \xi_k)(t - (k-1)\varepsilon) \\ \text{si } t \in [(k-1)\varepsilon, k\varepsilon[$$

Alors $r_N(\xi) \in L^2$ et $p_N \circ r_N(\xi) = \xi$

Proposition 3 : $\psi \circ r_N$ est une fonction C^1 sur E , C^3 sur $\Omega = \{(\xi_1, \dots, \xi_N) \in E / \forall k, \xi_k \neq 0\}$ et si ξ est un point critique $\neq 0$ de $\psi \circ r_N$, $r_N(\xi)$ est un point critique $\neq 0$ de ψ . Inversement, si u est un point critique de $\psi \neq 0$, $p_N u \in \Omega$ est un point critique de $\psi \circ r_N$.

Démonstration : La régularité de $\psi \circ r_N$ se démontre comme dans [E] Lemme 10 p. 40.

Explicitons $\psi \circ r_N(\xi)$ à l'aide de ξ et de V fonction de performance associée à $P_{\varepsilon, \xi}$.

Tout d'abord on a

$$\int_0^T (Ju, Mu) dt = \int_0^T \left(Ju, e^{-KJt} \left(\int_0^t e^{KJs} u(s) ds + \eta \right) \right) dt$$

$$(\text{avec } (e^{KJT} - I)\eta = \int_0^T e^{KJs} u(s) ds) .$$

$$\begin{aligned} \text{Considérons alors } & \int_{(k-1)\varepsilon}^{k\varepsilon} \left(Ju, e^{-KJt} \left(\int_0^t e^{KJs} u(s) ds + \eta \right) \right) dt \\ &= \int_{(k-1)\varepsilon}^{k\varepsilon} \left(J e^{KJt} u, \int_0^t e^{KJs} u(s) ds + \eta \right) dt \\ &= \int_0^{\varepsilon} \left(J e^{KJ(k-1)\varepsilon} e^{KJt} u_k(t), \int_0^{(k-1)\varepsilon} e^{KJs} u(s) ds + \eta + \right. \\ & \quad \left. + e^{KJ(k-1)\varepsilon} \int_0^t e^{KJs} u_k(s) ds \right) dt \end{aligned}$$

où

$$u_k(t) = u(t - (k-1)\varepsilon) \quad (\text{d'où } \int_0^{\varepsilon} e^{KJt} u_k(t) dt = e^{-KJ(k-1)\varepsilon} \xi_k)$$

et la quantité précédente égale

$$(J\xi_k, \xi_1 + \dots + \xi_{k+1} + \eta) + \int_0^\varepsilon (Ju_k, M_\varepsilon u_k) dt$$

En sommant le premier terme sur k on a

$$\sum_{k=1}^N (J\xi_k, \xi_1 + \dots + \xi_{k-1}) + \left(J \sum_{k=1}^N \xi_k, \eta \right)$$

or $\sum_{k=1}^N \xi_k = (e^{KJT} - I)\eta$ et le second terme de l'expression s'écrit

$$\left(J \sum_{k=1}^N \xi_k, (e^{KJT} - I)^{-1} \sum_{k=1}^N \xi_k \right) = -\frac{1}{2} \cotg \frac{KT}{2} \left(\sum_{k=1}^N \xi_k, \sum_{k=1}^N \xi_k \right)$$

Alors on a

$$\begin{aligned} \psi \circ r_N(\xi) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (J\xi_k, \xi_1 + \dots + \xi_{k-1}) + \\ &\quad - \frac{1}{2} \cotg \frac{KT}{2} \left(\sum_{k=1}^N \xi_k, \sum_{k=1}^N \xi_k \right) + \sum_{k=1}^N V(e^{-KJ(k-1)\varepsilon} \xi_k) \end{aligned}$$

Or un calcul montre que

$$V'(\xi) = e^{KJt} \left(-JM_\varepsilon u + \frac{J}{2} e^{-KJt} \xi + J \nabla H_K^*(-Ju) \right)$$

où u minimise le problème $P_{\varepsilon, \xi}$.

Donc la dérivée par rapport à ξ_k de $\psi \circ r_N$ est

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2} J (\xi_1 + \dots + \xi_{k-1} - \xi_{k+1} - \dots - \xi_N) - \frac{1}{2} \cotg \frac{KT}{2} \sum_{j=1}^N \xi_j \\ &\quad + e^{KJt} (-JM_\varepsilon u_k + J \nabla H_K^*(-Ju_k)) + \frac{J}{2} \xi_k \end{aligned}$$

où u_k est la restriction de u à $[(k-1)\varepsilon, k\varepsilon[$.

Annulons cette quantité, on obtient, en posant

$$\bar{\xi}_k = \xi_1 + \dots + \xi_{k-1} - \xi_k \dots - \xi_N - J \cotg \frac{KT}{2} \left(\sum_{j=1}^N \xi_j \right)$$

$$\left(M_\varepsilon u_k + \frac{1}{2} e^{-KJt} \bar{\xi}_k \right) = \nabla H_K^*(-Ju_k)$$

Vérifions que l'on a $Mu = M_\varepsilon u_k + \frac{1}{2} e^{-KJt} \bar{\xi}_k$ si $t \in [(k-1)\varepsilon, k\varepsilon[$, c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} e^{-KJt} \left(\int_0^t e^{KJs} u(s) ds + (e^{KJT} - I)^{-1} \sum_{j=1}^N \xi_j \right) \\ = e^{-KJt} \left(\int_{(k-1)\varepsilon}^t e^{KJs} u(s) ds + \frac{1}{2} \bar{\xi}_k \right) \end{aligned}$$

soit à vérifier que

$$\begin{aligned} (e^{KJT} - I)^{-1} \sum_{j=1}^N \xi_j + \sum_{j=1}^{k-1} \xi_k &= \frac{1}{2} (\xi_1 + \dots + \xi_{k-1} - \xi_k \dots - \xi_N) \\ &\quad - \frac{J}{2} \cotg \frac{KT}{2} \sum_{j=1}^N \xi_j \end{aligned}$$

ce qui est aisé puisque $(e^{KJT} - I)^{-1} = -\frac{J}{2} - \frac{J}{2} \cotg \frac{KT}{2}$.

Donc si ξ est point critique de $\psi \circ r_N$, $r_N(\xi)$ sera point critique de ψ . Inversement si u est point critique de ψ , on aura $r_N \circ p_N u = u$, et $p_N u$ sera dans Ω , et sera point critique de $\psi \circ r_N$.

Remarque 1 : Posons $(R_\theta u)(t) = u(\theta_1 t)$, on a alors

$$p_N(R_\varepsilon r_N(\xi)) = (e^{-KJ\varepsilon} \xi_2, e^{-KJ\varepsilon} \xi_3, \dots, e^{-KJ\varepsilon} \xi_N, e^{KJ(N-1)\varepsilon} \xi_1)$$

ce qui définit une action de $\mathbb{Z} / N\mathbb{Z}$ sur E . Le difféomorphisme donné par :

$$(\xi_1, \dots, \xi_N) \rightarrow (\xi_1, e^{-KJ\xi_2}, \dots, e^{-KJ(N-1)\xi_N})$$

conjugue cette action avec l'action de $\mathbb{Z} / N\mathbb{Z}$ qui associe à $\bar{I}$

$$(\eta_1, \dots, \eta_N) \rightarrow (\eta_N, \eta_1, \dots, \eta_{N-1})$$

Ceci termine la réduction à la dimension finie.

II . Etude de $\psi \circ r_N$.

1) Condition (C) de Palais-Smale.

Tout d'abord E n'étant pas compact, il nous faut montrer que $\psi \circ r_N$ vérifie la condition (C) de Palais-Smale.

Commençons par prouver

Proposition 1 : ψ vérifie la condition (C) de Palais-Smale.

Démonstration :

Dire que $\nabla\psi(u_n) \rightarrow 0$ dans L^2 , c'est dire que

$$-JMu_n + J\nabla H_K^*(-Ju_n) = J\varepsilon_n \quad \text{où } \varepsilon_n \rightarrow 0 \text{ dans } L^2$$

soit, posant $Mu_n = v_n$ on a $v_n \in H^1$ et

$$v_n + \varepsilon_n = \nabla H_K^*(-JAv_n)$$

d'où en appliquant ∇H_K

$$-J\dot{v}_n + Kv_n = \nabla H_O(v_n + \varepsilon_n) + Kv_n + K\varepsilon_n$$

soit

$$(1) \quad \nabla H_O(v_n + \varepsilon_n) + J\dot{v}_n = K\varepsilon_n .$$

Supposons que $\|v_n\|_{C^{0,\alpha}} \rightarrow +\infty$ et posons $x_n = \frac{v_n}{\|v_n\|_{C^{0,\alpha}}}$, $w_n = \frac{v_n + \varepsilon_n}{\|v_n\|_{C^{0,\alpha}}}$
(où $0 < \alpha < \frac{1}{2}$).

Notant $j_2(x) = j_1(x)^2$ la jauge quadratique de Σ (i.e. $j_2(0) = 0$ et $j_2(x) = \lambda^{-2}$ si $\lambda x \in \Sigma$) et $f(t) = \phi(\sqrt{t})$ on a $\nabla H_O(x) = f'(j_2(x)) \nabla j_2(x)$
d'où en portant dans (1)

$$f'(j_2(v_n + \varepsilon_n)) \nabla j_2(w_n) + J\dot{x}_n = K \frac{\varepsilon_n}{\|v_n\|_{C^{0,\alpha}}}$$

Comme $\|w_n\|_{L^2}$ est bornée, et f' est bornée on a $\|\dot{x}_n\|_{L^2}$ bornée, x_n est donc bornée dans H^1 , d'où une sous-suite convergeant dans $C^{0,\alpha}$.

Soit x cette limite, on a $\|x\|_{C^{0,\alpha}} = 1$. Comme $\dot{x}_n$ tend vers $\dot{x}$ faiblement dans L^2 et $f'(j_2(v_n + \varepsilon_n)) = a_n$ possède une limite faible dans L^2 (quitte à extraire une sous-suite, ceci parce que f' est bornée) on a donc $-J\dot{x} = a\nabla j_2(x)$.

Il résulte de cette équation que j_2 est constant sur une trajectoire d'où on déduit que soit x ne s'annule jamais, soit il est identiquement nul. Cette dernière hypothèse est absurde, car $\|x\|_{C^{0,\alpha}} = 1$. Donc par compacité $|x(t)| \geq 2\delta > 0$ d'où pour n assez grand $|x_n(t)| > \delta > 0$. Alors, notant $\rho_n = \|v_n\|_{C^{0,\alpha}}$ on a $\rho_n \delta \leq |v_n(t)| \leq \rho_n$ pour n assez grand.

Revenons à (1) que nous multiplions scalairement par $v_n + \varepsilon_n$, on obtient

$$(2) \quad \nabla H_0(v_n + \varepsilon_n) \cdot (v_n + \varepsilon_n) = (-J\dot{v}_n + K\varepsilon_n) \cdot (v_n + \varepsilon_n)$$

or Σ étant étoilée, on déduit vu le choix de $\emptyset$

$$\nabla H_0(x) \cdot x \geq \alpha |x| |\nabla H_0(x)| + \beta$$

En effet, sur Σ , $\nabla H_0(x) \cdot x$ est strictement positif, et on peut donc par compacité de Σ trouver α tel que $\nabla H_0(x) \cdot x \geq \alpha |x| |\nabla H_0(x)|$ si $x \in \Sigma$. Maintenant si on remplace x par λx , $\lambda \geq 1$, $\nabla H_0(x) \cdot x$ et $|x| |\nabla H_0(x)|$ sont multipliés par $\lambda^{3/2}$, et l'inégalité reste vraie. Il suffit alors de choisir β pour que $\nabla H_0(x) \cdot x \geq \alpha |x| |\nabla H_0(x)| + \beta$ soit vérifiée sur $\{\lambda x \mid 0 \leq \lambda \leq 1, x \in \Sigma\}$.

En portant dans (2) on trouve

$$(3) \quad \beta + \alpha |v_n + \varepsilon_n| |\nabla H_0(v_n + \varepsilon_n)| \leq (-J\dot{v}_n, v_n) + |\varepsilon_n| (|\dot{v}_n| + K|v_n + \varepsilon_n|)$$

comme vu le choix de $\emptyset$ on a $|\nabla H_0(x)| \geq \alpha_1 |x|^{1/2} + \beta_1$, d'où en portant dans (3) il existe $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2$ telles que

$$(4) \quad \delta_2 + \gamma_2 |v_n + \varepsilon_n|^{1/2} + \beta_2 |v_n + \varepsilon_n| + \alpha_2 |v_n + \varepsilon_n|^{3/2} \\ \leq (-J\dot{v}_n, v_n) + |\varepsilon_n| (|\dot{v}_n| + K |v_n + \varepsilon_n|)$$

Par ailleurs $\dot{v}_n = J\nabla H_0(v_n + \varepsilon_n) - KJ\varepsilon_n$ et comme $|\nabla H_0(x)| \leq \alpha_3 |x|^{1/2} + \beta_3$ on a

$$|\dot{v}_n| \leq \alpha_3 |v_n + \varepsilon_n|^{1/2} + \beta_3$$

en portant dans (4) on obtient

$$(\delta_2 - \beta_3 |\varepsilon_n|) + (\gamma_2 - \alpha_3 |\varepsilon_n|) |v_n + \varepsilon_n|^{1/2} + (\beta_2 - K |\varepsilon_n|) |v_n + \varepsilon_n| + \alpha_2 |v_n + \varepsilon_n|^{3/2} \\ \leq (-J\dot{v}_n, v_n)$$

or l'intégrale du terme de droite est majorée par

$$\frac{T}{2\pi} \int |\dot{v}_n|^2 \leq \frac{T}{2\pi} \int (\alpha_3 |v_n + \varepsilon_n|^{1/2} + \beta_3)^2$$

L'idée de la fin de la démonstration est de dire que ce terme est de l'ordre de ρ_n , alors que le terme de gauche de (5) est de l'ordre de $\rho_n^{3/2}$ ce qui contredit le fait que $\lim_n \rho_n = +\infty$.

Plus précisément, si on intègre les trois premiers termes du membre de gauche de (5) le résultat est un $\theta(\rho_n) + \theta(|\varepsilon_n|_{L^2})$, par exemple :

$$\int (\beta_2 - K |\varepsilon_n|) |v_n + \varepsilon_n| \leq \int (\beta_2 - K |\varepsilon_n|) (|v_n| + |\varepsilon_n|) \\ \leq \beta_2 \int |u_n| + K \int |\varepsilon_n| |v_n| + \beta'' \int |\varepsilon_n| + K \int |\varepsilon_n|^2$$

et

$$\int |\varepsilon_n| |v_n| \leq \left(\int |\varepsilon_n|^2 \right)^{1/2} \left(\int |v_n|^2 \right)^{1/2} \leq \rho_n T |\varepsilon_n|_{L^2}^2$$

$$\int |\varepsilon_n| \leq \rho_n T$$

d'où l'assertion.

Quant au terme $\int |v_n + \varepsilon_n|^{3/2}$ on le minore par

$$\sqrt{2} \int |v_n|^{3/2} + |\varepsilon_n|^{3/2} \quad (\text{car } (x+y)^{3/2} \leq \sqrt{2} (x^{3/2} + y^{3/2}))$$

et

$$\int |\varepsilon_n|^{3/2} \leq \left(\int |\varepsilon_n|^2 \right)^{3/4}$$

$$\int |v_n|^{2/3} \geq T (\rho_n \delta)^{3/2}$$

L'intégrale du terme de gauche de (5) est donc

$$\alpha_4 \rho_n^{3/2} + \theta(\rho_n^{3/2}) + \theta(|\varepsilon_n|_{L^2})$$

De façon analogue on prouverait que le terme de droite est

$$\leq (\alpha_3)^2 \rho_n + \theta(\rho_n) + \theta(|\varepsilon_n|_{L^2})$$

comme $|\varepsilon_n|_{L^2} \rightarrow 0$ on a une contradiction avec le fait que $\lim_n \rho_n = +\infty$.

On en déduit que $\rho_n = \|v_n\|_{C^{0,\alpha}}$ reste bornée, d'où une sous-suite convergeant dans L^∞ vers v , d'où en réinjectant dans (1) $v_n \rightarrow v$ dans H^1 et v est solution de $\dot{v} = J\nabla H_0(v)$. Donc $u = Av$ est point critique de ψ et $\lim u_n = u$.

Corollaire : $\psi \circ r_N$ vérifie la condition (C) sur E .

Démonstration :

$$(\psi \circ r_N)'(\xi) = \psi'(r_N(\xi)) r_N'(\xi)$$

si $|r_N'(\xi)|$ est minorée, on a

$$(\psi \circ r_N)'(\xi_n) \rightarrow 0 \Leftrightarrow \psi'(r_N(\xi_n)) \rightarrow 0$$

d'après la proposition 1, $r_N(\xi_n) = u_n \rightarrow u$ donc

$$\xi_n = p_N(r_N(\xi_n)) \rightarrow p_N u.$$

u étant point critique de ψ , $r_N(p_N(u)) = u$ et notant $\xi = p_N(u)$ on a $\xi_n \rightarrow \xi$ et ξ est point critique de $\psi \circ r_N$.

Il reste à minorer $|r_N'(\xi)|$. Si $u = r_N(\xi)$ alors $v = r_N'(\xi)\eta$ est défini par la condition suivante : si on pose $v_k(t) = v(t - (k-1)\varepsilon)$, $t \in [(k-1)\varepsilon; k\varepsilon]$, v_k est solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser} \quad \int_0^\varepsilon \left[\frac{1}{2} (Jw, M_\varepsilon w) + ((H_K)''(-Ju_k)Jw, Jw) \right] dt \\ \text{avec} \quad w \in L^2([0, \varepsilon], \mathbb{R}^{2n}) \quad \text{et} \quad \int_0^\varepsilon e^{KJs} w(s) ds = \eta_k \end{array} \right.$$

Or l'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne

$$|\eta_k|^2 \leq \varepsilon |v_k|_{L^2}^2$$

d'où

$$|v|_{L^2}^2 \geq \frac{1}{\varepsilon} |\eta|^2$$

et donc

$$|r_N'(\xi)| \geq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

2) Estimations pour $\psi \circ r_N$.

Rappelons que l'on a

$$\begin{aligned} \psi \circ r_N(\xi) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (J\xi_k, \xi_1 + \dots + \xi_{k-1}) - \frac{1}{2} \cotg \frac{KT}{2} \left(\sum_{k=1}^N \xi_k, \sum_{k=1}^N \xi_k \right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^N v(e^{-KJ(k-1)\varepsilon} \xi_k) \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (B\xi, \xi) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (J\xi_k, \xi_1 + \dots + \xi_{k-1}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \cotg \frac{KT}{2} \left(\sum_{k=1}^N \xi_k, \sum_{k=1}^N \xi_k \right) \end{aligned}$$

Proposition 2 : Les valeurs propres de B sont les

$$\frac{1}{2} \cotg \frac{-KT + 2\pi\ell}{2N} \quad \ell = 0, 1, \dots, N-1$$

et chaque espace propre est de dimension $2n$.

Démonstration :

Comme on le vérifie aisément, la k -ième composante de $B\xi$ est

$$(B\xi)_k = \frac{1}{2} J(\xi_N + \dots + \xi_{k+1} - \xi_{k-1} - \dots - \xi_1) - \frac{1}{2} \cotg \frac{KT}{2} \left(\sum_{j=1}^N \xi_j \right)$$

Posons $\beta = e^{KJ\varepsilon}$, $\alpha = e^{(-2\pi J)/N}$; si $\xi = (\xi_k)$ est donnée par

$$\xi_k = \beta^k \alpha^{\ell k} \zeta \quad \text{où } \zeta \in \mathbb{R}^{2n} \quad \ell \in \{0, 1, \dots, N-1\}$$

on a :

$$\begin{aligned} (B\xi)_k &= \frac{J}{2} (\beta^N \alpha^{\ell N} + \dots + \beta^{(k+1)} \alpha^{\ell(k+1)} - \beta^{(k-1)} \alpha^{\ell(k-1)} - \dots - \beta \alpha^{\ell}) \xi \\ &\quad - \frac{1}{2} \cotg \frac{KT}{2} \left(\sum_{j=1}^N \beta^j \alpha^{\ell j} \right) \zeta \end{aligned}$$

$$= \frac{J}{2} - \frac{\beta \alpha^\ell}{1 - \beta \alpha^\ell} (\beta^k \alpha^{k\ell} - \beta^N \alpha^{\ell N} - 1 + \beta^{k-1} \alpha^{\ell(k-1)}) \zeta$$

$$- \frac{1}{2} \cotg \frac{KT}{2} - \frac{\beta \alpha^\ell}{1 - \beta \alpha^\ell} (1 - \beta^N \alpha^{\ell N})$$

Or $\alpha^N = I$ d'où $\alpha^{\ell N} = I$, et $\cotg \frac{KT}{2} = J \frac{\beta^N + 1}{\beta^N - 1}$.

On trouve donc

$$(B\xi)_k = \frac{J}{2} \frac{\beta \alpha^\ell + 1}{1 - \beta \alpha^\ell} \beta^k \alpha^{\ell k} \zeta$$

$$= \frac{1}{2} \cotg \left(-\frac{KT}{2N} + \frac{2\ell\pi}{2N} \right) \xi_k$$

Ainsi ξ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\frac{1}{2} \cotg \frac{-KT + 2\pi\ell}{2N}$. Ces valeurs propres sont distinctes lorsque ℓ varie de 0 à $N-1$; ce qui nous donne N espaces propres de dimension $2n$.

Remarque 1 : Si F est le sous-espace des points de E fixes par l'action de $\mathbb{Z}_N$, en utilisant la remarque 1 au I, il est facile de montrer que F est le sous-espace propre de B associé à la valeur propre $-\frac{1}{2} \cotg \frac{KT}{2N}$.

Il nous faut maintenant étudier $\bar{V}(\xi) = \sum_{k=1}^N V(e^{-KJ(k-1)\varepsilon} \xi_k)$. Tout d'abord on a le :

Lemme 2 : Soit $G^\star(x) = \frac{1}{2\mu} |x|^2$ et $W(\xi)$ la fonction de performance associée au problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser} \quad \int_0^\varepsilon \left[\frac{1}{2} (Ju, M_\varepsilon u) + G^\star(-Ju) \right] dt \\ \text{où} \quad u \in L^2([0, \varepsilon], \mathbb{R}^{2n}) \quad \text{et} \quad \int_0^\varepsilon e^{KJs} u(s) ds = \xi \end{array} \right.$$

Alors $W(\xi) = \frac{|\xi|^2}{2\mu\varepsilon} (1 + \theta(\varepsilon^2))$ lorsque ε tend vers 0.

Démonstration :

L'équation d'Euler s'écrit ici

$$- JM_{\varepsilon} u + \frac{1}{2} e^{-KJs} J\xi + J \left(-\frac{1}{\mu} Ju \right) = e^{-KJs} J\eta$$

soit en posant $x(t) = \eta - \xi + \int_0^t e^{KJs} u(s) ds$

$$\dot{x} = \mu Jx \Rightarrow x(t) = e^{\mu Jt} x_0$$

la contrainte s'écrivant $x(\varepsilon) - x(0) = \xi$ soit

$$(e^{\mu J\varepsilon} - I) x_0 = \xi$$

d'où en particulier

$$|x_0| = \frac{1}{2 \sin \left(\frac{\mu\varepsilon}{2} \right)}$$

Alors

$$u(t) = e^{-KJt} J\dot{x}(t) = \mu e^{(\mu-K)Jt} Jx_0$$

$$(M_{\varepsilon} u)(t) = x(t) - x(0) = (e^{\mu Jt} - I) x_0$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{\varepsilon} (Ju, M_{\varepsilon} u) dt &= -\frac{\mu}{2} \int_0^{\varepsilon} (e^{(\mu-K)Jt} x_0, (e^{\mu Jt} - I) x_0) dt \\ &= -\frac{\mu\varepsilon}{2} \left[\frac{1}{K\varepsilon} \sin K\varepsilon - \frac{1}{(\mu-K)\varepsilon} \sin (\mu-K)\varepsilon \right] |x_0| \end{aligned}$$

si $\mu \neq K$. Si $\mu = K$ on trouve

$$-\frac{\mu\varepsilon}{2} \left[\frac{1}{K\varepsilon} \sin K\varepsilon - 1 \right] |x_0|^2$$

Pour déduire de (2) et (3) des encadrements de V au voisinage de 0 et $1' \infty$ il nous faut le :

Lemme 3 : On a :

- (i) lorsque $|\xi| \rightarrow 0$ $\sup_{t \in [0, \varepsilon]} |v(\varepsilon, \xi)(t)| \rightarrow 0$
- (ii) lorsque $|\xi| \rightarrow +\infty$ $\inf_{t \in [0, \varepsilon]} |v(\varepsilon, \xi)(t)| \rightarrow +\infty$

Démonstration :

Commençons par (ii). Si $\{x \mid H_0(x) \leq h\}$ est contenu dans une boule de rayon ρ et si $\dot{x} = J\nabla H(x)$, $H_0(x) = h$ on aura $|x(\varepsilon) - x(0)| \leq 2\rho$ d'où $|\xi| \leq 2\rho$. Donc pour $|\xi|$ assez grand x est sur un niveau d'énergie $h' > h$. Alors $v(\varepsilon, \xi)(t) = \dot{x} + KJx = J(\nabla H_0(x) + Kx)$. Mais si $H(x) \geq h$ on a $|\nabla H_0(x) + Kx| |x| \geq (\nabla H_0(x) + Kx, x) \geq K|x|^2$ d'où $|\nabla H_0(x) + Kx| \geq K|x|$ et si $H_0(x) \geq h$ on a $|x| \geq \frac{a}{2R^2} \phi^{-1}(h)$ et ceci tend vers $+\infty$ avec h , ce qui démontre (ii).

Pour (i) il suffit de prouver que lorsque $|\xi|$ tend vers 0 le niveau d'énergie $h = H_0(x)$ tend vers 0 car alors $v(\varepsilon, \xi)(t) = \dot{x} + KJx = J(\nabla H_0(x) + Kx)$ tend vers 0 uniformément en t . Il suffit donc de prouver que lorsque $|\xi|$ est petit, il existe $t_0 \in [0, \varepsilon]$ tel que $|x(t_0)|$ est petit car alors $h = H(x(t_0))$ sera petit. Soit $f(h) = \sup \{ |\nabla H_0(x)| \mid H_0(x) = h \}$. Alors si x vérifie $\dot{x} = J\nabla H_0(x)$ on a $|x(t) - x(0)| \leq |t| f(h)$.

Par ailleurs on a

$$|\nabla H_0(x(s)) - \nabla H_0(x(0))| \leq |x(s) - x(0)| \sup |H''(x)|$$

$$\int_0^\varepsilon G^*(-Ju) dt = \frac{\mu}{2\mu} \int_0^\varepsilon |x_0|^2 = \frac{\mu\varepsilon}{2} |x_0|^2$$

D'où

$$W(\xi) = \frac{\mu\varepsilon}{2} |x_0|^2 \left[1 - \frac{1}{K\varepsilon} \sin K\varepsilon + \frac{1}{(\mu+K)\varepsilon} \sin (\mu+K)\varepsilon \right]$$

or

$$|x_0|^2 = \frac{1}{4 \sin^2 \left(\frac{\mu\varepsilon}{2} \right)} |\xi|^2$$

d'où

$$W(\xi) = \frac{\varepsilon \mu}{8 \sin^2 \left(\frac{\mu \varepsilon}{2} \right)} \left(1 - \frac{1}{K\varepsilon} \sin K\varepsilon + \frac{1}{(\mu-K)\varepsilon} \sin (\mu-K)\varepsilon \right)$$

or $\sin \frac{\mu \varepsilon}{2} = \frac{\mu \varepsilon}{2} (1 + \theta(\varepsilon^2))$ lorsque ε tend vers 0 .

$$\frac{1}{K\varepsilon} \sin K\varepsilon = 1 + \theta(\varepsilon^2)$$

d'où

$$W(\xi) = \frac{|\xi|^2}{2\mu\varepsilon} (1 + \theta(\varepsilon^2))$$

Maintenant si Σ est compris entre les sphères de rayon r et la sphère de rayon R , on a

$$\frac{a}{2R^2} |x|^2 \leq H(x) \leq \frac{a}{2r^2} |x|^2 \quad \text{au voisinage de } 0$$

d'où

$$\frac{1}{2} \left[K + \frac{a}{R^2} \right] |x|^2 \leq H_K(x) \leq \frac{1}{2} \left[K + \frac{a}{r^2} \right] |x|^2$$

et on a donc par dualité

$$(2) \quad \frac{1}{2 \left[K + \frac{a}{r^2} \right]} |x|^2 \leq H_K^\star(x) \leq \frac{1}{2 \left[K + \frac{a}{R^2} \right]} |x|^2$$

au voisinage de 0 .

Enfin au voisinage de l'infini on a $H(x) \leq \frac{\eta}{2} |x|^2$ d'où

$$(3) \quad \frac{1}{2(K+\eta)} |x|^2 \leq H_K^\star(x) \leq \frac{1}{2K} |x|^2$$

or H'' est bornée sur $\mathbb{R}^{2n}$, soit C sa borne, on a donc :

$$|\nabla H_0(x(s)) - \nabla H_0(x(0))| \leq C|s| f(h)$$

et si

$$y(t) = x(0) + t J \nabla H_0(x(0))$$

$$|\dot{y}(t) - \dot{x}(t)| \leq C|t| f(h)$$

donc

$$\begin{aligned} |x(\varepsilon) - x(0)| &\geq |y(\varepsilon) - y(0)| - C \frac{\varepsilon^2}{2} f(h) \\ &\geq \varepsilon |\nabla H_0(x(0))| - c \frac{\varepsilon^2}{2} f(h) \end{aligned}$$

notant $g(h) = \inf \{ |\nabla H_0(x)| / H_0(x) = h \}$ il est clair que si $f(h)/g(h) < c$ on aura

$$|x(\varepsilon) - x(0)| \geq \varepsilon \left(1 - \frac{Cc}{2} \varepsilon \right) g(h)$$

et que si $\varepsilon < \frac{1}{Cc}$ on a $g(h)$ tendant vers 0 avec $|\xi| = |x(\varepsilon) - x(0)|$, donc h tend aussi vers 0. Il reste donc à prouver que $f(h)/g(h)$ est majoré, mais

$$H_0(x) = h \Leftrightarrow j_2(x) = \phi^{-1}(h)$$

$$2r^2 \phi^{-1}(h) \leq |x|^2 \leq 2R^2 \phi^{-1}(h)$$

et

$$\begin{aligned} \nabla H_0(x) &= \phi'(j_2(x)) \cdot \nabla j_2(x) \\ &= \phi' \circ \phi^{-1}(h) \cdot \nabla j_2(x) \end{aligned}$$

Or Σ étant strictement étoilée, on a

$$\alpha|x| \leq |\nabla j_2(x)| \leq \beta|x|$$

donc si $H_0(x) = h$ on a :

$$\phi' \phi^{-1}(h) \alpha \sqrt{2\phi^{-1}(h)} r \leq |\nabla H_0(x)| \leq \phi' \phi^{-1}(h) \beta \sqrt{2\phi^{-1}(h)} R$$

d'où

$$f(h)/g(h) \leq \frac{\beta}{\alpha} \frac{R}{r}$$

Nous pouvons maintenant énoncer

Proposition 3 : V vérifie les encadrements suivants

(i) au voisinage de 0 :

$$\frac{r^2}{2(Kr^2+a)\varepsilon} (1+\theta(\varepsilon^2)) |\xi|^2 \leq V(\xi) \leq \frac{R^2}{2(KR^2+a)\varepsilon} (1+\theta(\varepsilon^2)) |\xi|^2$$

(ii) au voisinage de l'infini :

$$\frac{(1+\theta(\varepsilon^2))}{2(\eta+K)\varepsilon} |\xi|^2 \leq V(\xi) \leq \frac{(1+\theta(\varepsilon^2))}{2K\varepsilon} |\xi|^2$$

Démonstration :

D'après le Lemme 3, le comportement de V au voisinage de 0 et $l' \infty$ ne dépend que du comportement de H_K^* dans ces voisinages. Or il est clair que si $H_K^* \leq G^*$ on aura $V \leq W$ (où W est associé à G^*), de même si $H_K^* \geq G^*$, $V \geq W$. La proposition s'obtient alors en prenant pour G^* des fonctions $\frac{1}{2u} |x|^2$ réalisant les encadrements (2) et (3) pour H_K^* , le lemme 2 donnant W .

Corollaire : les encadrements (i) et (ii) sont encore vrais si l'on remplace V par $\bar{V}$ (où $\bar{V}(\xi_1, \dots, \xi_N) = \sum_{k=1}^N V(e^{-KJ(k-1)\varepsilon} \xi_k)$).

Démonstration :

Comme si $\sum_{k=1}^N |\xi_k|^2$ est petit, chaque $|\xi_k|$ est petit, il est clair que (i) est encore vrai. Par contre $\sum_{k=1}^N |\xi_k|^2$ peut être grand sans que tous les $|\xi_k|$ le soient ! On procède donc comme suit :

Supposons (ii) vérifiée pour $|\xi| \geq A$, alors si

$$\sum_{k=1}^N |\xi_k|^2 = \sigma^2 A^2 \quad \text{et} \quad |\xi_1|, \dots, |\xi_p| \leq A$$

$$|\xi_{p+1}|, \dots, |\xi_N| \geq A$$

on a

$$\sum_{k=p+1}^N |\xi_k|^2 \geq (\sigma^2 - p) A^2$$

d'où

$$\begin{aligned} \bar{V}(\xi) &\geq \frac{(1+\theta(\varepsilon^2))}{2(\eta+K)\varepsilon} \sum_{k=p+1}^N |\xi_k|^2 \\ &\geq \frac{(1+\theta(\varepsilon^2))}{2(\eta+K)\varepsilon} \frac{\sigma^2 - p}{\sigma^2} \sum_{k=1}^N |\xi_k|^2 \end{aligned}$$

et lorsque $\sigma^2 \rightarrow +\infty$, $\frac{\sigma^2 - p}{\sigma^2} \rightarrow 1$, d'où

$$\bar{V}(\xi) \geq \frac{(1+\theta(\varepsilon^2))}{2(\eta+K)\varepsilon} |\xi|^2 \quad \text{au voisinage de l'infini}$$

L'autre inégalité se démontre de façon analogue.

On peut alors démontrer :

Proposition 4 : Il existe des sous-espaces vectoriels de E , Y et W , stables par $\mathbb{Z}_N$, tels que F , sous-espace des points de E fixes par $\mathbb{Z}_N$ soit inclus dans $Y^\perp$ et dans W ; et que

- (1) $\psi \circ r_N$ est minorée sur Y
- (2) $\psi \circ r_N$ est < 0 sur $W \cap S(\rho)$ où $S(\rho)$ est la sphère de rayon ρ , assez petit, de E .

De plus on peut supposer :

$$\dim W = 2n \left[\mathcal{V}_E \left(\frac{KT}{2\pi} \right) + E \left(\frac{aT}{2\pi R^2} \right) \right]$$

$$\text{codim } Y = 2n \sum \left((K+x) \frac{T}{2n} + \theta(\varepsilon) \right)$$

Démonstration :

Il suffit de prendre pour Y la somme directe des sous-espaces propres de B associés aux valeurs propres $\frac{1}{2} \cotg \frac{-KT + 2\ell\pi}{2N}$ telles que l'on ait

$$\frac{1}{4} \cotg \frac{-KT + 2\ell\pi}{2N} + \frac{1}{2} \lambda \geq 0$$

où on a $\frac{\lambda}{2} |\xi|^2 \leq \bar{V}(\xi)$ au voisinage de l'infini.

Or si $\tg \alpha = \frac{1}{2\lambda}$ on aura $-2\lambda = \cotg (\pi - \alpha)$ et il s'agit de trouver le nombre d'entiers ℓ tels que

$$\cotg \frac{-KT + 2\pi\ell}{2N} \geq \cotg (\pi - \alpha)$$

Comme c'est la codimension de Y qui nous intéresse, calculons plutôt le nombre d'entiers ℓ compris entre 0 et $N-1$ tels que

$$\cotg \frac{-KT + 2\pi\ell}{2N} < \cotg (\pi - \alpha)$$

Evaluons α : d'après le corollaire de la proposition 3, on a $\lambda = \frac{1+\theta(\varepsilon^2)}{(\eta+K)\varepsilon}$.

Lorsque ε tend vers 0, $\frac{1}{2\lambda}$ tend vers 0, et donc $\alpha = \frac{1}{2} (\eta+K)\varepsilon + O(\varepsilon^2)$.

Maintenant dire que $\cotg \frac{-KT + 2\pi\ell}{2N} < \cotg (\pi - \alpha)$ c'est dire

$$\frac{-KT + 2\pi\ell}{2N} \in]\pi - \alpha, \pi[+ \mathbb{Z}\pi$$

soit $\sum \left(\frac{N\alpha}{\pi} \right)$ solutions, ou encore

$$\sum \left((\eta+K) \frac{T}{2\pi} + O(\varepsilon) \right) \text{ solutions} \quad (1)$$

De façon analogue, W est la somme directe des sous-espaces propres pour lesquels :

(1) Cf. la remarque p. 27.

$$\frac{1}{4} \cotg \frac{KT + 2\ell\pi}{2N} + \frac{\mu}{2} < 0$$

où

$$\overline{V}(\xi) \leq \frac{\mu}{2} |\xi|^2 \quad \text{au voisinage de } 0$$

comme par le corollaire de la proposition 3 on a

$$\mu = \frac{1 + \theta(\varepsilon^2)}{\left(K + \frac{a}{R^2}\right)\varepsilon}$$

$\dim W$ est donné par la formule de l'énoncé (cf. la remarque).

Enfin F est le sous-espace propre associé à la valeur propre

$$-\frac{1}{2} \cotg \frac{KT}{2N} = \frac{1}{2} \cotg \left(\pi - \frac{KT}{2N} \right)$$

or

$$\pi - \frac{KT}{2N} \in]\pi - \alpha, \pi[=]\pi - (K + \eta)\frac{T}{2N}, \pi[$$

Donc $F \subset Y^\perp$. De même on vérifie $F \subset W$.

Remarque : Le nombre d'entiers ℓ tels que $\frac{-KT + 2\pi\ell}{2N}$ soit dans $]\pi - \alpha, \pi[+ \mathbb{Z}\pi$, avec ℓ dans $[0, N-1]$ est calculé ainsi. Pour $\ell = 0$, $\frac{-KT}{2N} = \pi - \alpha + \frac{1}{2}\eta\varepsilon$, on aura donc $\mathcal{N}_E \left(N \left(\alpha - \frac{1}{2}\eta\varepsilon \right) \right)$ solutions, soit $\mathcal{N}_E \left(\frac{KT}{2\pi} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right)$. Notons par ailleurs que $\frac{KT}{2\pi}$ n'étant pas entier on aura pour ε assez petit $\mathcal{N}_E \left(\frac{KT}{2\pi} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) = \mathcal{N}_E \left(\frac{KT}{2\pi} \right)$.

III . Application de la cohomologie équivariante à la recherche des points critiques d'une fonctionnelle.

Pour tout ce paragraphe, on pourra se reporter à [F-H-R] .

Soit G l'un des groupes $\mathbb{Z}_q$ (q premier impair) au S^1 . On suppose donnée une représentation orthogonale de G sur un e.v. E ayant F comme s.e.v. des points fixes. On note $H^\star$ et $H_\star$ les cohomologies et homologies à coefficients dans $\mathbb{Z}$ si $G = \mathbb{Z}$, dans $\mathbb{Q}$ si $G = S^1$. On note BG le classifiant de G , $EG \rightarrow BG$ le G -fibré universel. Si X est un espace muni d'une action de G on note $X_G = X \times EG/G$, $H_G^\star(X) = H^\star(X_G)$. Enfin $cH_G^\star$ désigne la cohomologie à supports compacts, et $cH_G^\star(X)$ désigne $\lim_n cH^\star(X \times (EG)^n/G)$ où $(EG)^n$ est un espace compact ayant le type d'homotopie de EG jusqu'à la dimension n . On peut par exemple prendre pour $(EG)^n$ la sphère unité de $\mathbb{C}^n$, munie de l'action $e^{i\theta}(z_1, \dots, z_n) = (e^{i\theta}z_1, \dots, e^{i\theta}z_n)$ ($\mathbb{Z}_q$ étant inclus dans S^1 , cela marche dans tous les cas). Rappelons encore que $H_{S^1}^\star(\text{pt}) = H^\star(BS^1) \simeq H^\star(\mathbb{CP}^\infty) \simeq \mathbb{Q}[x]$ où x est un élément de dimension 2 , et $H_{\mathbb{Z}_q}^\star(\text{pt}) \simeq H^\star(B\mathbb{Z}_q) \simeq \mathbb{Z}_q[x, a]/(a^2)$ où $\dim x = 2$, $\dim a = 1$.

Démontrons maintenant le

Lemme 1 : Posant $n+1 = \dim E$, $n+1 = \dim F$ on a :

$$H_G^\star(E - \{0\}, F - \{0\}) \simeq H^{\star-r-1}(BG) / (H^{n-r}(BG)) \quad (1)$$

l'isomorphisme étant un isomorphisme de $H^\star(BG)$ - modules. De plus si $E \subset E'$ et $F' = F$ l'application $H_G^\star(E' - \{0\}, F - \{0\}) \rightarrow H_G^\star(E - \{0\}, F - \{0\})$ est induite après passage au quotient par l'application identique de $H^\star(BG)$.

(1) $(H^{n-r}(BG))$ désigne l'idéal de $H^\star(BG)$ engendré par les éléments de degré $n-r$; soit dans le cas présent, l'ensemble des éléments de degré $\geq n-r$.

Démonstration :

Rappelons qu'étant donnée une paire (X, A) on a un cup-produit $H_G^\star(X, A) \otimes H_G^\star(X) \rightarrow H_G^\star(X, A)$ et l'application $\pi : X \rightarrow \text{pt}$ étant équivariante, on a $\pi^\star : H_G^\star(\text{pt}) \rightarrow H_G^\star(X)$ qui composée avec le cup produit fournit la structure de $H_G^\star(\text{pt}) = H^\star(BG)$ -module de $H_G^\star(X, A)$.

Maintenant, on a une rétroaction équivariante de $(E - \{0\}, F - \{0\})$ sur (S^N, S^r) (S^N = sphère unité de E , $S^r = S^N \cap F$). S^N étant compact, et S^r fermée, on a

$$H_G^\star(S^N, S^r) \simeq {}_c H_G^\star(S^N \setminus S^r) \quad (\text{cf. [G-H], p. 232, Corol. 27-4})$$

Or $S^N \setminus S^r$ est fibré au-dessus de $S^{n-r-1} = S^N \cap F^\perp$, la projection $p : S^N \setminus S^r \rightarrow S^{n-r-1}$ étant obtenue en composant la projection orthogonale sur $F^\perp - \{0\}$ avec la projection radiale sur $S^N \cap F^\perp = S^{n-r-1}$. Il est clair que la fibre de p est homéomorphe à $\mathbb{R}^{r+1}$. Par l'isomorphisme de Thom on a

$${}_c H_G^\star(S^N \setminus S^r) \simeq H_G^{\star-r-1}(S^{n-r-1})$$

Or G opère librement sur S^{n-r-1} si $G = \mathbb{Z}_p$, et avec des sous-groupes d'isotropie vérifiant $H^\star(BG_x) = H^\star(\text{pt})$ dans tous les cas. Il est alors facile de voir que

$$H_G^{\star-r-1}(S^{n-r-1}) \simeq H^{\star-r-1}(BG) / (H^{n-r}(BG))$$

La seconde partie du lemme est facile, et est démontrée après le lemme 1 au § IV.

On peut alors énoncer la

Proposition 1 : Soient V, W des s.e.v. de E stables par G tels que $V^+ \supset F, W \supset F$. Soient $A \subset X \subset E - \{0\}$ des fermés invariants par G tels que :

- (i) $A \cap V = \emptyset$
- (ii) $W \cap S^n(\rho) \subset X$ où $S^n(\rho)$ désigne la sphère de rayon ρ .

Soit i l'injection $i : (A, A \cap F) \rightarrow (X, X \cap F)$ alors en posant $l+v = \text{codim } V$, $l+w = \dim W$ il existe $z \in H_G^{v+1}(i)$ tel que l'application

$$\begin{aligned} H_G^\star(BG) &\rightarrow H_G^{\star+v+1}(i) \\ u &\rightarrow u \cup z \end{aligned}$$

soit injective si $\star \leq w-v-1$.

Démonstration :

$H_G^\star(i)$ intervient dans la suite exacte

$$H_G^\star(i) \rightarrow H_G^\star(X, X \cap F) \rightarrow H_G^\star(A, A \cap F) \rightarrow H_G^{\star+1}(i) \rightarrow$$

on va donc estimer $H_G^\star(X, X \cap F)$, $H_G^\star(A, A \cap F)$ et la flèche qui les relie.

Commençons par $H_G^\star(X, X \cap F)$: on a les inclusions

$$W \cap S^n(\rho) \rightarrow X \rightarrow E - \{0\}$$

$$H_G^\star(E - \{0\}, F - \{0\}) \rightarrow H_G^\star(X, X \cap F) \rightarrow H_G^\star(W \cap S^n(\rho), F \cap S^n(\rho))$$

or il est facile de voir que

$$H_G^\star(E - \{0\}, F - \{0\}) \rightarrow H_G^\star(W \cap S^n(\rho), F \cap S^n(\rho))$$

est un isomorphisme si $\star \leq \dim W - 1 = w$ est l'application nulle sinon.

Donc l'application

$$H_G^\star(E - \{0\}, F - \{0\}) \rightarrow H_G^\star(X, X \cap F)$$

est injective si $\star \leq w$.

Pour estimer $H_G^\star(A, A \cap F)$ considérons le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad} & E - \{0\} \\ & \searrow \pi & \nearrow \\ & V^\perp - \{0\} & \end{array}$$

où π est induite par la projection orthogonale sur $V^\perp$. Ce diagramme est non commutatif, mais homotopiquement commutatif au sens suivant : le chemin d'applications de A dans $E - \{0\}$ donné par $\varphi_t(x) = (1-t)x + t\pi(x)$ est une homotopie entre l'inclusion de A dans $E - \{0\}$ et la composée de π et de l'inclusion de $V^\perp - \{0\}$ dans $E - \{0\}$. On en déduit que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_G^\star(A, A \cap F) & \xleftarrow{\quad} & H_G^\star(E - \{0\}, F - \{0\}) \\ & \nwarrow \quad \nearrow & \\ & H_G^\star(V - \{0\}, F - \{0\}) & \end{array}$$

Or

$$H_G^\star(V - \{0\}, F - \{0\}) = 0 \quad \text{si } \star \geq v+1 \quad \text{d'où l'application}$$

$$H_G^\star(E - \{0\}, F - \{0\}) \rightarrow H_G^\star(A, A \cap F)$$

est nulle si $\star \geq v+1$. Ecrivons maintenant les suites exactes de cohomologie de i et de l'identité $\text{Id} : (E - \{0\}, F - \{0\}) \rightarrow (E - \{0\}, F - \{0\})$ ainsi que les flèches entre ces deux suites exactes, induites par

$$(A, A \cap F) \rightarrow (E - \{0\}, F - \{0\})$$

et

$$(X, X \cap F) \rightarrow (E - \{0\}, F - \{0\})$$

$$\begin{array}{ccccccc}
H_G^\star(i) & \xrightarrow{\alpha} & H_G^\star(X, X \cap F) & \rightarrow & H_G^\star(A, A \cap F) & \xrightarrow{\delta} & \star \\
\uparrow & & \uparrow \beta & & \uparrow \gamma & & \\
0 & \rightarrow & H_G^\star(E-\{0\}, F-\{0\}) & \xrightarrow{\text{Id}} & H_G^\star(E-\{0\}, F-\{0\}) & \rightarrow &
\end{array}$$

β est injective si $\star \leq w$, γ est nulle si $\star \geq v+1$. Il est facile de voir que $V^\perp$ étant stable par G et contenant F , on doit avoir $v-r$ pair, et donc $H_G^{v+1}(E-\{0\}, F-\{0\})$ est non nul. Soit y_0 un générateur de $H_G^{v+1}(E-\{0\}, F-\{0\})$, alors $\beta(y_0) \neq 0$ mais $i^n(\beta(y_0)) = \gamma(y_0) = 0$ donc $\beta(y_0) = \alpha(z)$ où $0 \neq z \in H_G^{v+1}$. Toutes les flèches étant des morphismes de $H^\star(BG)$ -modules, si $u \in H^\star(BG)$ et $\star \leq w-v-1$ on a alors $\beta(y_0 \cup u) \neq 0$ et comme $\beta(y_0 \cup u) = \alpha(z \cup u)$ on a $0 \neq z \cup u \in H_G^\star(i)$. Ceci termine la démonstration.

La cohomologie utilisée étant à coefficients dans un corps, on a une dualité entre $H^\star$ et $H_\star$ telle que la transposée du cup produit par un élément de $H^\star$ soit le cup produit par ce même élément. On déduit alors de la Proposition 1 le :

Corollaire 1 : Sous les hypothèses de la Proposition 1, il existe $\zeta \in H_{G,w}(i)$ tel que l'application

$$\begin{array}{ccc}
H^\star(BG) & \rightarrow & H_{G,w-\star}(i) \\
u & \rightarrow & \zeta \cap u
\end{array}$$

soit injective si $\star \leq w-v-1$.

Soit maintenant f une fonction G équivariante sur E , vérifiant la condition (C) de Palais-Smale. Du fait que F est l'ensemble des points fixes de G et que f est équivariante, si $x \in F$ on a $\forall f(x) \in T_x F$.

Alors le flot ϕ_s de $-\nabla f(x)$ préserve F , et les cycles modulo F de classe de cohomologie fixée forment une " $\emptyset$ famille" au sens de [K] p. 32. En appliquant alors le principe du minimax on aura :

Proposition 2 : Soit f une fonction G équivariante sur E , vérifiant la condition (C) de Palais-Smale. Soient V et W des s.e.v. de E stables par G tels que $W \supset F$, $V^\perp \supset F$ et supposons que

- (i) $f(0) = 0$ et f n'a pas de point critique sur $F - \{0\}$
- (ii) $f < 0$ sur $W \cap S^n(\rho)$
- (iii) f est minorée sur V

Alors si $G = S^1$, f a au moins $\frac{1}{2}(\dim W - \text{codim } V)$ orbites critiques. Si $G = \mathbb{Z}_q$, f a au moins $\frac{1}{2}(\dim W - \text{codim } V)$ orbites critiques, et si f a pour sous variétés critiques des cercles, il y en a au moins $\frac{1}{2}(\dim W - \text{codim } V)$. Si les cercles critiques sont non dégénérées au sens de Bott, il y en a un par paire d'indices consécutifs entre $\text{codim } V$ et $\dim W - 1$.

Démonstration :

Soit $X = \{x \in E \mid f(x) \leq -\epsilon\}$ et

$$A = \{x \in E \mid f(x) \leq c\} \quad \text{où} \quad c < \inf_{x \in V} f(x)$$

Alors $A \subset X \subset E - \{0\}$ vérifient les hypothèses de la proposition 1, donc les conclusions du corollaire 1.

Les inégalités de Morse fournissent immédiatement le cas non dégénéré. Pour le cas général, on utilisera le fait que les classes $\zeta \cap x^r$ et $\zeta \cap (x^r \cup a)$ sont non nulles pour $0 \leq r \leq \frac{1}{2}(\dim W - \text{codim } V) - 1$ et on raisonne comme dans [K] p. 38, Th. 2.1.10.

IV . Amélioration des résultats précédents pour $\psi \circ r_p$.

Les résultats démontrés dans les § I, II, III impliquent les résultats énoncés par le théorème I de l'introduction à l'exception du point suivant : si les orbites critiques sont non dégénérées, on a pour l'instant "une orbite critique par paire d'indices consécutifs compris entre ..." au lieu de "une orbite critique par indice pair compris entre ...". Le but de ce paragraphe est de combler cette lacune.

La première partie de ce paragraphe vise à localiser les points critiques d'une fonctionnelle obtenus par minimax. La deuxième partie montre, en utilisant le fait que $\psi \circ r_q$ est obtenue par réduction à la dimension finie de la fonctionnelle ψ qui est S^1 invariante, que les cercles critiques obtenus par minimax sur les classes $\zeta \cap x^r$ du § III sont d'indice pair.

1) Localisation des points critiques obtenus par minimax.

Soit X une variété riemannienne complète, G un groupe compact d'isométries de X , F l'ensemble des points fixes de G . Soit f une fonction C^2 sur X vérifiant la condition (C) de Palais-Smale. On suppose f non dégénérée au sens de Bott, et que ses niveaux critiques sont tous distincts (ce qu'on peut toujours faire en perturbant f , sans changer les sous-variétés critiques ni leur indice).

On note $a_0 < a_1 < \dots < a_n$ des réels séparant les valeurs critiques, $X^i = \{x \in X \mid f(x) \leq a_i\}$, N^i la sous-variété critique de $X^i - X^{i-1}$, $n(i)$ son indice. Enfin on supposera $N^i \cap F = \emptyset$. (1)

Alors, notant $\nu^-(N^i)$ le sous-fibré du fibré normal de N^i engendré par les vecteurs propres associés à une valeur propre < 0 de $d^2f|_{N^i}$, on a si $\nu^-(N^i)$ est G -orientable un isomorphisme de Thom :

(1) Il faut en fait supposer que les groupes d'isotropie d'éléments de N^i sont tous triviaux.

$H_G^{\star-n(i)}(N^i) \rightarrow H_G^{\star}(\alpha_i)$ où α_i est l'inclusion $\alpha_i(X^{i-1}, X^{i-1} \cap F) \rightarrow (X^i, X^{ir} \cap F)$. La démonstration est classique, il suffit de voir que F n'exerce pas d'influence ici, mais le flot de $-\nabla f(x)$ envoie $X^i \cap F$ dans $X^{i-1} \cap F$.

Soit maintenant V un s.e.v. de $H_G^{\star}(X, F)$ de la forme $V = \bigoplus V^p$ où $V^p = V \cap H_G^p(X, F)$, et posons

Définition 1 :

Soit $u \in H^{\star-n(i)}(N^i)$, on dira que u est associé à $z \in V$ si, notant $\xi = T(u)$ (T : isomorphisme de Thom) on a $\eta_i(x) = \phi_i(\xi) \neq 0$ où

$$\begin{array}{ccc} H_G^{\star}(X, F) & \xrightarrow{\eta_i} & H_G^{\star}(X^i, X^i \cap F) \\ & & \uparrow \phi_i \\ & & H_G^{\star}(\alpha_i) \end{array}$$

η_i étant induite par inclusion, ϕ_i étant dans la suite exacte longue définissant $H_G^{\star}(\alpha_i)$.

Un point de vue "plus global" consiste à considérer l'image de $\phi_i^{-1} \eta_i(V)$ dans $H_G^{\star}(\alpha_i) / \ker \phi_i$. Alors dire que u est associé à V , c'est dire que la classe de $T(u)$ dans $H_G^{\star}(\alpha_i) / \ker \phi_i$ est dans $\phi_i^{-1} \eta_i(V) - \{0\}$.

Définition 2 :

On note $c_i^p = \dim \phi_i^{-1} \eta_i(V^p) / \ker \phi_i$ et $c^p = \sum_i c_i^p$. On pose aussi $v^p = \dim V^p$.

On a alors :

Proposition 1 : $c^p = v^p$.

Démonstration :

Notons V_i^P l'image de V^P par η_i et calculons $\dim V_i^P - \dim V_{i-1}^P$.
Le diagramme suivant étant commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 H_G^\star(X, F) & \xrightarrow{\eta_{i-1}} & H_G^\star(X^{i-1}, X^{i-1} \cap F) \\
 & \searrow \eta_i & \uparrow \alpha_i^\star \\
 & & H_G^\star(X^i, X^i \cap F) \\
 & & \uparrow \phi_i \\
 & & H_G^\star(\alpha_i)
 \end{array}$$

$\alpha_i^\star$ envoie V_i^P surjectivement sur V_{i-1}^P . Donc

$$\begin{aligned}
 \dim V_i^P - \dim V_{i-1}^P &= \dim (\ker \alpha_i^\star \cap V_i^P) \\
 &= \dim (\operatorname{Im} \phi_i \cap V_i^P) \\
 &= \dim \phi_i (\phi_i^{-1} \eta_i(V^P)) \\
 &= \dim (\phi_i^{-1} \eta_i(V^P) / \ker \phi_i) \\
 &= c_i^P
 \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned}
 V^P &= \sum_i \dim V_i^P - \dim V_{i-1}^P \\
 V^P &= \sum_i c_i^P = c^P
 \end{aligned}$$

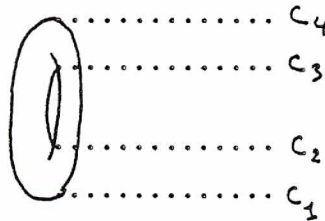
Exemples et remarques :

1) Si les N^i se réduisent à un point $G = \{e\}$ (on pose alors

$F = \emptyset$), $H^\star(\alpha_i) = H^\star(X^i, X^{i-1})$ est de dimension 1 si $\star = n(i)$, 0 sinon.

On a alors

- (i) le minimum absolu de f est associé au générateur de $H^0(X)$, le maximum absolu de f est associé au générateur de $H^n(X)$, $n = \dim X$ (si $n < +\infty$).
- (ii) par suite un maximum ou un minimum non absolu n'est jamais associé à un élément de $H^\star(X)$.
- (iii) La fonction f étant la fonction "hauteur" sur le tore T^2 (voir figure) chacun de ses points critiques d'indice 1 est associé à un générateur de $H^1(T^2)$



2) Soit $u \in H_G^{\star-n(i)}(N^i)$ associé à $z \in H_G^\star(X, F)$. Alors le niveau critique obtenu par minimax sur z est $f(N^i)$. En effet, comme $\eta_i(z) \neq 0$, $\eta_{i-1}(z) = 0$ le niveau critique obtenu par minimax sur z sera dans $[a_{i-1}, a_i]$, c'est donc nécessairement $f(N^i)$.

3) On retrouve la formulation usuelle du minimax en remplaçant cohomologie par homologie. On a un diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 H_{G,\star}(X, F) & \xrightarrow{\eta_i} & H_{G,\star}(X^i, X^i \cap F) \\
 & & \downarrow \partial_i \\
 & & H_{G,\star}(\alpha_i)
 \end{array}$$

et $\tilde{u} \in H_{G, \star-n(i)}(N^i)$ est associé à $\tilde{z} \in H_{G, \star}(X, F)$ si il existe $\omega \in H_{G, \star}(X^i, X^i \cap F)$ tel que

$$\tilde{\theta}_i \omega = T(\tilde{u}) \tilde{\eta}_i \omega = \tilde{z}$$

2) On veut maintenant démontrer que la fonctionnelle $\psi \circ r_N$ a en fait un cercle critique par indice pair compris entre $\text{codim } V$ et $\dim W - 1$. On va pour cela comparer les fonctionnelles $\psi \circ r_q$ et $\psi \circ r_{q^2}$ pour q assez grand.

Posons

$$\begin{aligned} E_1 &= (\mathbb{R}^{2n})^q \quad \text{muni de l'action de } \mathbb{Z}_q \\ E_2 &= (\mathbb{R}^{2n})^{q^2} \quad \text{muni de l'action de } \mathbb{Z}_{q^2} \end{aligned}$$

On a alors des applications σ de E_2 dans E_1 et ρ de E_1 dans E_2 définies comme suit :

$$\begin{aligned} \sigma(\xi_1, \dots, \xi_q, \xi_{q+1}, \dots, \xi_{2q}, \dots, \xi_{(q-1)q+1}, \dots, \xi_{q^2}) &= \\ &= (\xi_1 + \dots + \xi_q, \xi_{q+1} + \dots + \xi_{2q}, \xi_{(q-1)q+1} + \dots + \xi_{q^2}) \end{aligned}$$

$$\rho(\xi) = p_{q^2} \circ r_q(\xi)$$

Il est clair que l'on a $\sigma \circ \rho = \text{id}$. On notera par

$$\begin{aligned} E_1^a &= \{\xi \in E_1 \mid \psi \circ r_q(\xi) \leq a\} \\ E_2^a &= \{\xi \in E_2 \mid \psi \circ r_{q^2}(\xi) \leq a\} \end{aligned} \quad .$$

On a alors :

Proposition 2 : ρ et σ envoient respectivement E_1^a dans E_2^a et E_2^a dans E_1^a . De plus $\sigma \circ \rho = \text{id}$ et $\rho \circ \sigma$ est homotope à l'identité dans E_2^a .

Démonstration :

Tout d'abord on vérifie que pour tout N tel que $\frac{T}{N} < \varepsilon_0$ on a

- (1) $r_N(\xi)$ réalise le minimum de $\psi(u)$ parmi les u vérifiant $p_N u = \xi$.
- (2) ψ est convexe sur $\{u \mid p_N u = \xi\}$

En effet, comme dans la démonstration de la proposition 3 du I, ψ est la somme de $\frac{1}{2} (B\xi, \xi)$ et de $\sum_{k=1}^N \psi_\varepsilon(u_k)$ où u_k est la restriction de u à $a[(k-1)\varepsilon, k\varepsilon]$ et

$$\psi_\varepsilon(v) = \int_0^\varepsilon \left[\frac{1}{2} (Jv, M_\varepsilon v) + H_K^*(-Jv) \right] ds \quad \text{est convexe}$$

Les assertions (1) et (2) sont alors claires.

En particulier, $r_q(\xi)$ réalisant le minimum de $\psi(u)$ parmi les u tels que $p_q u = \xi$, il réalisera le minimum de $\psi(u)$ parmi les u tels que $p_2 u = p_2 r_q(\xi)$ d'où l'égalité $r_q(\xi) = r_2 \circ p_2 \circ r_q(\xi)$. Par suite $\psi \circ r_q(\xi) = \psi \circ r_2(p_2 r_q(\xi))$ et ρ envoie E_1^a dans E_2^a . Par ailleurs, comme $\sigma(\xi) = p_q \circ r_2(\xi)$ on aura

$$\psi \circ r_2(\xi) \geq \psi \circ r_q(\sigma(\xi)) \quad ,$$

et σ envoie bien E_2^a dans E_1^a .

Posons maintenant $u_t(\xi) = (1-t) r_2(\xi) + t r_2(\rho\sigma(\xi))$ alors :

$$p_q(u_t(\xi)) = (1-t)\sigma(\xi) + t\sigma(\xi) = \sigma(\xi)$$

et donc par l'assertion (2) on aura

$$\psi(u_t(\xi)) \leq (1-t)\psi(r_{q,2}(\xi)) + t\psi(r_{q,2}(\rho\sigma(\xi)))$$

Mais

$$\psi \circ r_{q,2}(\rho(\sigma(\xi))) = \psi \circ r_q(\sigma(\xi)) \leq \psi \circ r_{q,2}(\xi)$$

donc

$$\psi(u_t(\xi)) \leq \psi \circ r_{q,2}(\xi)$$

Alors posons $\xi_t = p_{q,2}(u_t)$, il est clair que $\xi_0 = \xi$, $\xi_1 = \rho\sigma(\xi)$ et on a

$$\psi \circ r_{q,2}(\xi_t) = \psi \circ r_{q,2} \circ p_{q,2}(u_t) \leq \psi(u_t) \leq \psi \circ r_{q,2}(\xi)$$

Donc ξ_t est une homotopie de id à $\rho\sigma$ qui préserve E_2^a .

Considérons maintenant l'inclusion canonique $j : \mathbb{Z}_q \rightarrow \mathbb{Z}_{q,2}$ donnée par $\bar{k} \mapsto \overline{kq}$. Alors l'application $\rho : E_1 \rightarrow E_2$ est "j-équivariante", c'est-à-dire

$$\forall g \in \mathbb{Z}_q, \forall x \in E_1 \quad \rho(q \cdot x) = j(g) \cdot \rho(x)$$

et l'image par ρ de F_1 , ensemble des points de E_1 fixes par $\mathbb{Z}_q$, est contenue dans F_2' , ensemble des points de E_2 fixes par $j(\mathbb{Z}_q)$.

De plus, soit $\xi \in F_2'$ tel que $\sigma(\xi) = 0$, alors $\psi \circ r_{q,2}(\xi) \geq \psi \circ r_q(\sigma(\xi)) = 0$. Donc si on note $F_1' = \{\xi \in F_2' \mid \sigma(\xi) = 0\}$ on a pour $a < 0$ une inclusion de E_2^a dans $E_2 - F_1'$, donc une inclusion

$$(E^a, E^a \cap F_1') \rightarrow (E_2 - F_1', F_2' - F_1')$$

On a alors la :

Proposition 3 :

$$H_{\mathbb{Z}_q^2}^{\star}(E_2 - F'_1, F'_2 - F'_1) \simeq H^{\star-r-1}(\mathbb{B} \mathbb{Z}_q^2) / (H^{\ell-r}(\mathbb{B} \mathbb{Z}_q^2))$$

où $r+1 = 2n$ et $\ell+1 = 2n(q^2-q+1)$.

Rappelons (Lemme 1 du II) que

$$H_{\mathbb{Z}_q}^{\star}(E_1 - \{0\}, F - \{0\}) \simeq H^{\star-r-1}(\mathbb{B} \mathbb{Z}_q) / (H^{m-r}(\mathbb{B} \mathbb{Z}_q))$$

où $m+1 = 2nq$.

Alors l'application $\rho^{\star} : H_{\mathbb{Z}_q^2}^{\star}(E_2 - F'_1, F'_2 - F'_1) \rightarrow H_{\mathbb{Z}_q^2}^{\star}(E_1 - \{0\}, F - \{0\})$ est induite par passage au quotient par l'application $j^{\star} : H^q(\mathbb{B} \mathbb{Z}_q^2) \rightarrow H^{\star}(\mathbb{B} \mathbb{Z}_q)$. Si on a posé

$$H^{\star}(\mathbb{B} \mathbb{Z}_q^2) \simeq \mathbb{Z}_q[x, a] / (a^2)$$

$$H^{\star}(\mathbb{B} \mathbb{Z}_q) \simeq \mathbb{Z}_q[y, b] / (b^2)$$

on a

$$j^{\star}(x) = y, \quad j^{\star}(a) = 0.$$

Démonstration :

La projection orthogonale sur (F'_1) donne un isomorphisme

$$H_{\mathbb{Z}_q^2}^{\star}(E_2 - F'_1, F'_2 - F'_1) \simeq H_{\mathbb{Z}_q^2}^{\star}((F'_1)^{\perp} - \{0\}, (F'_1)^{\perp} \cap F'_2 - \{0\})$$

or $(F'_1)^{\perp} \cap F'_2 = F$ est l'ensemble des points fixes de E_2 par l'action de $\mathbb{Z}_q^2$, et sur $(F'_1)^{\perp} - F$ l'action de $\mathbb{Z}_q^2$ est libre. On a alors comme dans la démonstration du Lemme 1 du III :

$$H_{\mathbb{Z}_q^2}^{\star}((F'_1) - \{0\}, F - \{0\}) \simeq H_{\mathbb{Z}_q^2}^{\star}(S^{\ell}, S^r)$$

l'action de $\mathbb{Z}_q^2$ sur S^{ℓ} étant libre hors de S^r qui est l'ensemble des points fixes. L'anneau de cohomologie cherché est alors isomorphe à

$$H_{\mathbb{Z}_q^2}^{\star}(S^{\ell} - S^r) \simeq T \cup H_{\mathbb{Z}_q^2}^{\star}(S^{\ell-r-1})$$

T étant la classe de Thom du fibré

$$S^{\ell} - S^r / \mathbb{Z}_q^2 \rightarrow S^{\ell-r-1} / \mathbb{Z}_q^2$$

obtenu par projection orthogonale sur $F^{\perp}$. L'action de $\mathbb{Z}_q^2$ sur $F^{\perp}$ étant libre, on a

$$H_{\mathbb{Z}_q^2}^{\star}(S^{\ell-r-1}) \simeq H^{\star}(S^{\ell-r-1} / \mathbb{Z}_p) \simeq H^{\star}(B\mathbb{Z}_q^2) / (H^{\ell-r}(B\mathbb{Z}_q^2))$$

ce qui termine le calcul de $H_{\mathbb{Z}_q^2}^{\star}(E_2 - F'_1, F'_2 - F'_1)$.

Calculons maintenant $j^{\star}$. L'application $j : \mathbb{Z}_q \rightarrow \mathbb{Z}_q^2$ induit une application de $B\mathbb{Z}_q$ dans $B\mathbb{Z}_q^2$ encore notée j .

Considérons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_q & \xrightarrow{j} & \mathbb{Z}_q^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^1 & \xrightarrow{id} & S^1 \end{array}$$

d'où

$$\begin{array}{ccc} H^{\star}(B\mathbb{Z}_q^2) & \xrightarrow{j^{\star}} & H^{\star}(B\mathbb{Z}_q) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H^{\star}(BS^1) & \xrightarrow{id} & H^{\star}(BS^1) \end{array}$$

comme $H^*(BS^1) \simeq H^*(\mathbb{CP}^\infty) \simeq \mathbb{Z}_q[t]$ où t est de dimension 2, et son image dans $H^*(B\mathbb{Z}_q^2)$ (resp. $H^*(B\mathbb{Z}_q)$) est x (resp. y). On a donc $j^*(x) = y$.

En dimension 1, comme $H^1(\cdot)$ s'identifie à $\text{Hom}(\pi_1(\cdot), \mathbb{Z}_q)$, j^* en dimension un correspond à l'application $\text{Hom}(\mathbb{Z}_q^2, \mathbb{Z}_q) \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{Z}_q, \mathbb{Z}_q)$ induite par j . Il est immédiat de vérifier que cette application est nulle. Donc $j^*(a) = 0$.

Nous allons pour terminer, avoir besoin du Lemme suivant : soit X un espace muni d'une action de G , X' muni d'une action de G' , h un morphisme de G dans G' et φ une application h équivariante $(X, A) \rightarrow (X', A')$. On note $\tilde{\varphi}$ l'application $(X_G, A_G) \rightarrow (X'_{G'}, A'_{G'})$ induite par φ . Considérons les fibrés $(X_G, A_G) \rightarrow BG$ et $(X'_{G'}, A'_{G'}) \rightarrow BG'$ de fibres (X, A) et (X', A') respectivement ; et supposons que les suites spectrales de ces fibrés (K_ℓ) et (K'_ℓ) soient telles que

$$K_2 \simeq H^*(X, A) \otimes H^*(BG)$$

et

$$K'_2 \simeq H^*(X', A') \otimes H^*(BG')$$

Lemme 1 : L'application $\varphi^* \otimes h^*$ de K'_2 dans K_2 induit une application entre les suites spectrales K'_ℓ et K_ℓ qui coïncide avec $\tilde{\varphi}^*$ pour $\ell = \infty$.

Démonstration :

C'est un corollaire immédiat du théorème 4 p. 82 de [BO 2].

Appliquons le lemme au cas où $(X, A) = (E - \{0\}, F - \{0\})$

$$(X', A') = (E_2 - F'_1, F'_2 - F'_1) \quad G = \mathbb{Z}_q \quad G' = \mathbb{Z}_{q^2}$$

$h = j$. Pour que les hypothèses du Lemme sur K_2 et K'_2 soient vérifiées, il suffit de prouver que $\pi_1(BG)$ et $\pi_1(BG')$ opèrent trivialement sur $H^\star(X, A)$ et $H^\star(X', A')$ (cf. [BO 2] p. 78, Remarque). Or à homotopie près, on a vu que $\mathbb{Z}_q$ et $\mathbb{Z}_2$ opèrent sur (X, A) et sur (X', A') comme par une action linéaire sur (S^m, S^r) et (S^ℓ, S^r) . La connexité de $SO(m-r)$ et $SO(\ell-r)$ prouve que de tels actions sont homotopiquement triviales. Les hypothèses du Lemme étant satisfaites, ses conclusions le sont aussi.

Examinons alors de plus près les suites spectrales K_ℓ et K'_ℓ .
Comme

$$\begin{aligned} H^\star(S^m, S^r) &\simeq \mathbb{Z}_q[\lambda] && \text{si } \star = r \\ &\simeq \mathbb{Z}_q[\mu] && \text{si } \star = m-r \\ &\simeq 0 && \text{sinon} \end{aligned}$$

il est facile de voir, connaissant les termes K_2 et K_∞ que

$$\begin{aligned} d_i &= 0 && \text{si } i \neq m-r \\ d_{m-r} &&& \text{est un isomorphisme de } \mu \otimes H^\star(BG) \\ &&& \text{sur } \lambda \otimes H^{\star+m-r}(BG) \end{aligned}$$

Donc K_∞ s'identifie à un quotient de $\lambda \otimes H^\star(BG)$. Comme $\rho^\star H^\star(S^\ell, S^r) \rightarrow H^\star(S^m, S^r)$ envoie λ' générateur de $H^r(S^\ell, S^r)$ sur λ , $\rho^\star \otimes j^\star$ enverra $\lambda' \otimes z$ sur $\lambda \otimes j^\star(z)$, ce qui démontre la proposition.

Remarque :

Le lemme 1 de ce paragraphe appliqué à

$$G = G' = \mathbb{Z}_q \quad h = \text{id} \quad (X, A) = (E - \{0\}, F - \{0\})$$

$$(X', A') = (E' - \{0\}, F - \{0\}) \quad \text{où } E \subset E',$$

permet aussi de terminer la démonstration du Lemme 1 du paragraphe III.

On peut aussi grâce au Lemme 1 démontrer :

Lemme 2 : Considérons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc}
 H_{\mathbb{Z}_q^2}^{\star}(E_2 - F'_1, F'_2 - F'_1) & \xrightarrow{\alpha_2^{\star}} & H_{\mathbb{Z}_q^2}^{\star}(E_2^a, E_2^a \cap F'_2) \\
 \downarrow \rho^{\star} & & \downarrow \rho^{\star} \\
 H_{\mathbb{Z}_q}^{\star}(E_1 - \{0\}, F - \{0\}) & \xrightarrow{\alpha_1^{\star}} & H_{\mathbb{Z}_q}^{\star}(E_1^a, E_1^a \cap F)
 \end{array}$$

où a est un réel < 0 et les flèches horizontales sont induites par inclusion. Alors l'image par $\alpha_2^{\star}$ de $T' \cup x^h$ est nulle si et seulement si l'image par $\alpha_1^{\star}$ de $T \cup y^h$ l'est.

Démonstration :

Soit E_3 l'espace $L^2([0, T], \mathbb{R}^{2n})$ identifié à $L^2(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^{2n})$ ce qui met en évidence l'action de S^1 sur E_3 . Soit $F_2'' = \{u \in E_3 \mid u \text{ est } \frac{T}{q}\text{-périodique}\}$. On a les applications $r_q : E_1 \rightarrow E_3$ et $p_q : E_3 \rightarrow E_1$. Comme à la proposition 2, r_q et p_q envoient E_1^a dans E_3^a et E_3^a dans E_1^a (où $E_3^a = \{u \in E_3 \mid \psi(u) \leq a\}$) et $p_q \circ r_q = \text{id}$, $r_q \circ p_q$ est homotope à l'identité dans E_3^a .

De plus r_q est h équivariante où h désigne l'inclusion $\mathbb{Z}_q \rightarrow S^1$. On peut alors définir des applications

$$\begin{array}{ccc}
 H_{S^1}^{\star}(E_3^a, E_3^a \cap F_2'') & \rightarrow & H_{\mathbb{Z}_q}^{\star}(E_3^a, E_3^a \cap F_2'') \\
 & \searrow & \\
 & & H_{\mathbb{Z}_q}^{\star}(E_1^a, E_1^a \cap F)
 \end{array}$$

La flèche $H_{\mathbb{Z}_q}^{\star}(E_3^a, E_3^a \cap F_2'') \rightarrow H_{\mathbb{Z}_q}^{\star}(E_1^a, E_1^a \cap F)$ est un isomorphisme; car $E_1^a \rightarrow E_3^a$ et $E_1^a \cap F \rightarrow E_3^a \cap F_2''$ sont des homotopies d'équivalence $\mathbb{Z}_q$ équivariantes, et on conclut par le lemme des cinq. Il est clair qu'on a des assertions analogues pour E_2 , et au total la flèche

$$\rho_{\mathbb{Z}_q}^{\star} H_{\mathbb{Z}_q}^{\star}(E_2^a, E_2^a \cap F_2') \rightarrow H_{\mathbb{Z}_q}^{\star}(E_1^a, E_1^a \cap F)$$

s'identifie à la flèche

$$H_{\mathbb{Z}_q}^{\star}(E_3^a, E_3^a \cap F_2'') \rightarrow H_{\mathbb{Z}_q}^{\star}(E_3^a, E_3^a \cap F_2'')$$

La démonstration du sous-lemme suivant sera donnée en appendice à la fin du paragraphe.

Sous-lemme : Soit X un espace muni d'une action de S^1 . On considère $\mathbb{Z}_q \subset \mathbb{Z}_2 \subset S^1$. Alors on a des isomorphismes

$$H_{\mathbb{Z}_q}^{\star}(X) \simeq H_{S^1}^{\star}(X) \otimes H^{\star}(S^1)$$

$$H_{\mathbb{Z}_2}^{\star}(X) \simeq H_{S^1}^{\star}(X) \otimes H^{\star}(S^1)$$

et l'identité induit une application $H_{\mathbb{Z}_2}^{\star}(X) \rightarrow H_{\mathbb{Z}_q}^{\star}(X)$ qui s'identifie à $\text{id} \otimes \nu$ (où $\nu = \text{id}$ sur $H^0(S^1)$, $\nu = 0$ sur $H^1(S^1)$).

Comme $H^{\star}(X, Y) \simeq H^{\star}(X/Y) \oplus H^{\star}(\text{pt})$ on peut appliquer le sous-lemme au paires. Le lemme 2 sera démontré si on prouve que $\alpha_2^{\star}(T' \cup x^h)$ identifié à un élément de $H_{\mathbb{Z}_q}^{\star}(E_3^a, E_3^a \cap F_2'')$ est dans l'image de $H_{S^1}^{\star}(E_3^a, E_3^a \cap F_2'')$; ou encore que $\alpha_2^{\star}(T' \cup x^h)$ est dans l'image de :

$$(r_2)_q^\star H_{S_1}^\star(E_3^a, E_3^a \cap F_2'') \rightarrow H_{\mathbb{Z}_2}^\star(E_2^a, E_2^a \cap F_2')$$

En effet sur ce facteur, le sous-lemme nous dit que $\tilde{\rho}^\star$ correspond à l'identité.

Maintenant, notons $F_1'' = \{u \in E_3 \mid p u = 0\}$, on vérifie que $E_3^a \cap F_1'' = \emptyset$ si $a < 0$.

Une démonstration pratiquement identique à celle de la proposition 3 nous donne $H_{S_1}^\star(E_3 - F_1'', F_2'' - F_1'') \simeq H^{\star-r-1}(BS^1)$ et une application

$$H_{S_1}^\star(E_3 - F_1'', F_2'' - F_1'') \rightarrow H_{\mathbb{Z}_2}^\star(E_2 - F_1', F_2' - F_1')$$

induite par $k^\star : H^\star(BS^1) \rightarrow H^\star(B\mathbb{Z}_2)$ c'est-à-dire, vu que x^h est égal à $k^\star(t^h)$ que $T' \cup x^h$ est image de $T'' \cup t^h$. On a donc le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_{\mathbb{Z}_2}^\star(E_2 - F_1', F_2' - F_1') & \xrightarrow{\alpha_2^\star} & H_{\mathbb{Z}_2}^\star(E_2^a, E_2^a \cap F_2') \\ \uparrow & & \uparrow (1) \\ H_{S_1}^\star(E_3 - F_1'', F_2'' - F_1'') & \rightarrow & H_{S_1}^\star(E_3^a, E_3^a \cap F_2'') \end{array}$$

qui prouve que $\alpha_2^\star(T \cup x^h)$ est dans l'image de (1). Ceci termine la démonstration.

Le corollaire suivant est alors évident :

Corollaire : Une orbite critique dans E_1 est associée à $T \cup y^h$ si et seulement si son image dans E_2 est associée à $T' \cup x^h$.

Soit alors $b < a$ tels que dans $E^a - E^b$ il y ait un unique cercle critique d'indice i . Supposons i impair et le cercle critique associé à $T' \cup x^h$ dans E_2 , donc à $T \cup y^h$ dans E_1 . On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 H_{\mathbb{Z}_q^2}^{\star-i}(S^1) & \emptyset' \circ \tau' & H_{\mathbb{Z}_q^2}^{\star}(E_2^a, E_2^a \cup F'') & & \\
 \downarrow v & & \downarrow \rho^{\star} & & \\
 H_{\mathbb{Z}_q}^{\star-i}(S^1) & \emptyset \circ \tau & H_{\mathbb{Z}_q}^{\star}(E_1^a, E_1^a \cup F) & &
 \end{array}$$

où τ' et τ désignent les isomorphismes de Thom $H^{\star-i}(S^1) \rightarrow H^{\star}(\alpha)$ et α induite sur les paires $E^b \subset E^a$.

Maintenant les cercles critiques sont $T' \cup x^h$ et $T \cup y^h$ critiques, donc T et T' étant des classes de dimension $r+1 = 2n$ paire, $T' \cup x^h$ et $T \cup y^h$ seront aussi de dimension paire. Il s'ensuit que $T' \cup x^h$ doit être image par $\emptyset' \circ \tau'$ d'un élément α de $H_{\mathbb{Z}_q^2}^1(S^1)$. La commutativité du diagramme implique alors

$$(\emptyset \circ \tau) v(\alpha) = \rho^{\star}(\emptyset' \circ \tau')\alpha = T \cup y^h$$

Mais $v(\alpha) = 0$; c'est absurde.

On a donc démontré

Proposition : Une orbite $T \cup y^h$ critique de E_1 est nécessairement d'indice pair.

On a maintenant complété la démonstration du Théorème 1.

Appendice :

Démontrons le sous-lemme :

Sous-lemme : Soit X un espace muni d'une action de S^1 . On considère $\mathbb{Z}_q \subset \mathbb{Z}_{q^2} \subset S^1$. Alors on a des isomorphismes

$$H_{\mathbb{Z}_q}^*(X) \simeq H_{S^1}^*(X) \otimes H^*(S^1)$$

$$H_{\mathbb{Z}_{q^2}}^*(X) \simeq H_{S^1}^*(X) \otimes H^*(S^1)$$

et l'identité induit une application $H_{\mathbb{Z}_{q^2}}^*(X) \rightarrow H_{\mathbb{Z}_q}^*(X)$ qui s'identifie à $\text{id} \otimes \nu$.

Démonstration :

On a trois fibrés :

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \rightarrow & X \times E \\ & \downarrow & \\ & X_{S^1} & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} S^1 & \rightarrow & X \times E / \mathbb{Z}_q \\ & \downarrow & \\ & X_{S^1} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \rightarrow & X \times E / \mathbb{Z}_{q^2} \\ & \downarrow & \\ & X_{S^1} & \end{array}$$

Les suites spectrales associées ont pour terme d'ordre 2

$$S_2 \simeq H_{S^1}^*(X_{S^1}) \otimes H^*(S^1) \quad (\text{voir [BO 2] p. 78, Remarque}).$$

$$S'_2 \simeq H_{S^1}^*(X_{S^1}) \otimes H^*(S^1)$$

$$S''_2 \simeq H_{S^1}^*(X_{S^1}) \otimes H^*(S^1)$$

les applications $X \times E \rightarrow X \times E / \mathbb{Z}_q \rightarrow X \times E / \mathbb{Z}_2$ induisent l'identité sur la base et un revêtement à q feuillets sur la fibre, donc les applications induites $S_2'' \rightarrow S_1' \rightarrow S_2$ correspondent toutes deux à $\text{id} \otimes v$. Il suffit alors de prouver que $d_2' = \dots = d_\ell' = 0$, $d_2'' = \dots = d_\ell'' = 0$.

Mais il est clair que seuls d_2' et d_2'' peuvent être non nuls, il suffit donc de prouver $d_2' = 0$, $d_2'' = 0$. Or $\text{id} \otimes v : S_2' \rightarrow S^2$ doit commuter avec d_2 et d_2' , c'est-à-dire $d_2(\text{id} \otimes v) = (\text{id} \otimes v)d_2'$ mais l'image de d_2' est dans $H^\star(X_{S_1}) \otimes 1$ donc $(\text{id} \otimes v)d_2'(z) = 0$ entraîne $d_2'(z) = 0$. D'autre part d_2 est nulle sur $H^\star(X_{S_1}) \otimes 1$ donc $d_2(\text{id} \otimes v) = 0$.

On a donc $d_2' = 0$. De même on aurait $d_2'' = 0$.

V . Comportement de l'indice par itération.

Soit ψ notre fonctionnelle, v une solution de $\psi'(v) = 0$, on a alors

$$\psi''(v)(u, u) = \int_0^T [(Ju, Mu) + (H_K(t)^{-1}Ju, Ju)] dt \quad (1)$$

où

$$H_K(t) = H''(x(t)) + KI \quad \text{et} \quad \dot{x}(t) + KJx(t) = v(t)$$

Il est clair que l'indice de $\psi''(v)$ dépend de K , on va montrer :

Lemme 1 : Notons $i(K)$ l'indice de $\psi''(v)$, alors on peut écrire

$$i(K) = 2n \sim \left(\frac{KT}{2\pi} \right) - n + i^s$$

où i^s ne dépend que de l'orbite périodique.

Démonstration :

On peut identifier $i(K)$ à l'indice sur $H^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^{2n})$ de

$$\int_0^T [(\dot{Jy} - Ky, y) + (H_K(t)^{-1}(\dot{Jy} - Ky), \dot{Jy} - Ky)] dt$$

Commençons par prouver que cet index ne dépend que du produit KT . Soient T, T' deux périodes propres $T = \alpha T'$. Si x est une solution T périodique de $\dot{x} = J\nabla H(x)$ on a que $\rho x(\alpha t)$ est une solution T' périodique où ρ est tel que, $\alpha \rho \nabla H(x) = \nabla H(\rho x)$. Considérons alors la forme

$$\int_0^{T'} [(\dot{Jy} - Ky, y) + (H''(\rho x(\alpha t) + K)^{-1}(\dot{Jy} - Ky), \dot{Jy} - Ky)] dt$$

et faisons le changement de variable $u = t\alpha$, on obtient alors :

-
- (1) En fait ψ n'est pas C^2 , mais ce que l'on note ψ'' vérifie $(\psi \circ r_q)''(\xi)(\eta, \eta) = \psi''(r_q(\xi))(r'_q(\xi)\eta, r'_q(\xi)\eta)$ si ξ est point critique de $\psi \circ r_q$.

$$\int_0^T [(J\dot{\alpha}y - Ky, y) + (\alpha H''(x(u)) + K)^{-1} (J\dot{\alpha}y - Ky) , J\dot{\alpha}y - Ky)] dt$$

en rappelant que $\alpha H''(x) = H'(\rho x)$. Notre forme s'écrit à un facteur près

$$\int_0^T [(J\dot{y} - \frac{K}{\alpha} y, y) + \left(H''(x(u)) + \frac{K}{\alpha} \right)^{-1} (J\dot{y} - \frac{K}{\alpha} y) , J\dot{y} - \frac{K}{\alpha} y)] dt$$

Ceci prouve donc que les formes quadratiques attachées au couples (K, T') et $(\frac{K}{\alpha}, T'\alpha)$ ont même indice.

Revenons maintenant à la forme

$$Q^K(y) = \int_0^T [(J\dot{y} - Ky, y) + (H_K(t))^{-1} (J\dot{y} - Ky) , J\dot{y} - Ky)] dt$$

Rappelons que les solutions de $y + H_K(t)^{-1} (J\dot{y} - Ky)$ s'identifient à celle du problème

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{y} = JH''(x(t))y \\ y(0) = y(T) \end{cases}$$

et sont dans le noyau de la forme quadratique considérée.

On va montrer que si $\frac{KT}{2\pi} \notin \mathbb{Z}$ les solutions de (1) sont tous les éléments du noyau, et si $\frac{KT}{2\pi} \in \mathbb{Z}$, il faut y ajouter les solutions de

$$J\dot{y} - Ky = 0 \quad y(0) = y(T)$$

soit

$$y(t) = e^{-KJt} y(0)$$

Notons A l'opérateur $Ay = \dot{y} + KJy$, et H_K l'application de multiplication par $H_K(t)$, notre forme quadratique s'écrit :

$$\begin{aligned} & \int_0^T [(JAy, y) + (H_K^{-1} JAy, JAy)] dt \\ &= \int_0^T ((JA + JAH_K^{-1} JA)y, y) dt \end{aligned}$$

$JA + JAH_K^{-1} JA$ étant autoadjoint, le noyau de notre forme s'identifie à celui de $JA + JAH_K^{-1} JA = JA(I + H_K^{-1} JA)$.

Lorsque $\frac{KT}{2\pi} \notin \mathbb{Z}$, A est inversible, le noyau de notre forme est donc celui de $I + H_K^{-1} JA$, qui est constitué par les solutions de (1).

Si $\frac{KT}{2\pi} \in \mathbb{Z}$, le noyau de A est constitué par les fonctions $z(t) = e^{-KJt} z_0$, l'équation $JA(I + H_K^{-1} JA)y = 0$ équivaut donc à

$$y(I + H_K^{-1} JA)y = e^{-KJt} z_0$$

soit, posant $\bar{y} = y - e^{-KJt} z_0$

$$(I + H_K^{-1} JA)\bar{y} = 0$$

et donc $\bar{y}$ est solution de (1), le noyau de notre forme est donc somme directe de $e^{-KJt} \mathbb{R}^{2n}$ et de l'espace des solutions de (1). Pour vérifier que la somme de ces espaces est bien directe, il suffit de voir que $y(t) = e^{-KJt} y_0$ n'est pas solution de (1), or cela entraînerait $(H''(x(t)) + KI)y = 0$ ce qui contredit l'hypothèse que $(H''(x(t)) + KI)$ est définie positive.

Maintenant, lorsque K varie sans que $\frac{KT}{2\pi}$ passe par une valeur entière, le noyau de Q^K est constitué par les solutions de (1), et son index reste constant car on voit aisément que les valeurs de K dont l'index de Q_K est donné forment un ensemble ouvert et fermé. Par contre lorsque K franchit une valeur $\frac{2\pi h}{T}$, $h \in \mathbb{Z}$, voyons comment varie l'indice. Il suffit

pour cela de calculer $\frac{d}{dK} Q^K(y)$ pour $y(t) = e^{-KJt} y_0$ (si y est solution de (1) $Q^K(y)$ reste nul) or

$$\frac{d}{dK} Q^K(y) = - \int_0^T (y, y) dt + \text{un terme ayant } J\dot{y} - Ky \text{ en facteur}$$

donc si $y = e^{-KJt} y_0$

$$\frac{d}{dK} Q^K(y) = - \int_0^T (y, y) dt = - T |y_0|^2 < 0$$

Ceci permet de dire que la variation de l'indice est $+2n$, d'où la formule du Lemme 1.

Soit maintenant x une solution T périodique de $\dot{x} = J\nabla H(x)$. Alors pour $k \in \mathbb{N}^*$, $x_k(t) = \rho x(kt)$ est aussi T périodique, et c'est une solution de $\dot{x} = J\nabla H(x)$ si $k\rho\nabla H(x) = \nabla H(\rho x)$. L'indice de x_k est celui de

$$Q_k(y) = \int_0^T [(J\dot{y} - Ky, y) + ((H''(x_k(t)) + KI)^{-1} (J\dot{y} - Ky), J\dot{y} - Ky)] dt$$

or

$$H''(\rho x(kt)) = k H''(x(kt))$$

effectuons le changement de variable $u = kt$, on aura

$$Q_k(y) = \int_0^{kT} [(Jk\dot{y} - Ky, y) + ((kH''(x(u)) + KI)^{-1} (Jk\dot{y} - Ky), Jk\dot{y} - Ky)] dt$$

Soit à un facteur près

$$\int_0^{kT} \left[\left(\dot{Jy} - \frac{K}{k} y, y \right) + \left(H_K(t)^{-1} \left(\dot{Jy} - \frac{K}{k} y \right), \dot{Jy} - \frac{K}{k} y \right) \right] dt$$

Le Lemme 1 nous dit comment l'indice de cette forme dépend de K .
Pour comparer les indices de Q_k et de Q_1 , il suffit de comparer l'indice de Q_1 à celui de

$$P_k(y) = \int_0^{kT} \left[\left(\dot{Jy} - Ky, y \right) + \left(H_K(t)^{-1} (\dot{Jy} - Ky), \dot{Jy} - Ky \right) \right] dt$$

Proposition 1 :

Par $\omega \in \mathbb{C}$, $|\omega| = 1$, posons

$$H_\omega^1 = \{ x \in H^1(\mathbb{R}/kT\mathbb{Z}, \mathbb{C}^{2n}) \mid x(t+T) = \omega x(t) \}$$

Alors

$$H^1(\mathbb{R}/kT\mathbb{Z}, \mathbb{C}^{2n}) = \bigoplus_{\omega^k=1} H_\omega^1$$

et les H_ω^1 sont orthogonaux pour P_k .

Démonstration :

Cf. [E] p. 50, on ne démontre que l'orthogonalité des H^1 pour P_k .
Or si $y \in H_\omega^1$, $z \in H_\rho^1$, $\omega \neq \rho$

$$\begin{aligned} & \int_0^{kT} \left[\left(\dot{Jy} - Ky, z \right) + \left(H_K(t)^{-1} (\dot{Jy} - Ky), \dot{Jz} - Kz \right) \right] dt \\ &= \sum_{m=1}^k \omega^m \rho^{-m} \int_0^T \left[\left(\dot{Jy} - Ky, z \right) + \left(H_K(t)^{-1} (\dot{Jy} - Ky), \dot{Jz} - Kz \right) \right] dt \\ &= 0 \quad \text{si} \quad \omega \bar{\rho} \neq 1. \end{aligned}$$

On note $P_{k,\omega}$ la restriction de P_k à H_ω^1 , $j(\omega)$ l'index de $P_{k,\omega}$, $m(\omega)$ sa nullité ; j_k et m_k les indices et nullités de P_k . On a alors

$$j_k = \sum_{\omega=1}^k j(\omega) \quad m_k = \sum_{\omega=1}^k m(\omega)$$

Définition : i_k et n_k sont les indices et nullités de Q_k .

Ainsi comme $P_{k,1}$ s'identifie à Q_1 on a $j(1) = i_1$, $m(1) = n_1$.

Supposons $\omega \neq e^{\pm iKT}$ on a

$$u(t) = e^{-KJt} \left(\int_0^t e^{KJs} Ay(s) ds + y(0) \right)$$

d'où

$$y(T) = e^{-KJT} \left(\int_0^T e^{JKs} Ay(s) ds + y(0) \right)$$

si $y(T) = y(0)$ on a donc

$$(\omega e^{KJT} - I) y(0) = \int_0^T e^{KJs} Ay(s) ds$$

et la donnée arbitraire de $Ay \in L^2([0, T], \mathbb{C}^{2n})$ nous permet de récupérer y . Alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} P_{k,\omega} &= \int_0^T \left(JAy(t), e^{-KJt} \int_0^t e^{KJs} Ay(s) ds + e^{-KJt} (\omega e^{KJT} - I) \right. \\ &\quad \left. \cdot \int_0^T e^{-KJs} Ay(s) ds \right) dt + \int_0^T (H_K(t)^{-1} JA(t), JAy(t)) dt \\ &= \int_0^T \left(JAy(t), e^{-KJt} \int_0^t e^{KJs} Ay(s) ds + H_K(t)^{-1} JAy(t) \right) dt \\ &\quad + \left(J \int_0^T e^{KJt} Ay(t) dt, (\omega e^{KJT} - I) \int_0^T e^{KJt} Ay(t) dt \right) \end{aligned}$$

Or une variation de l'indice de $\frac{1}{k} P_{k,\omega}$ (on peut considérer ces formes toutes définies sur $L^2([0,T], \mathbb{C}^{2n})$ par la donnée de Ay) n'est possible que si $\frac{1}{k} P_{k,\omega}$ a un noyau, et si celui-ci est unidimensionnel, le changement d'indice est donné par $-\operatorname{sgn} \frac{d}{d\theta} P_{k,e^{i\theta}}$.

D'après le calcul de $\frac{1}{k} P_{k,\omega}$ celui-ci est somme d'un terme indépendant de ω et de $\left(J \int_0^T e^{KJs} Ay(s) , (\omega e^{KJT} - I)^{-1} \int_0^T e^{KJt} Ay(t) dt \right)$

Décomposons $\mathbb{C}^{2n}$ en la somme directe des sous-espaces propres de J associées à $+i$ et $-i$. Si $y \in \mathbb{C}^{2n}$ on note $y = y_+ + y_-$ où $Jy_+ = iy_+$, $Jy_- = -iy_-$.

On a alors

$$(\omega e^{KJT} - I)y_+ = (e^{i(\theta+KT)} - 1)y_+$$

$$(\omega e^{KJT} - I)y_- = (e^{i(\theta-KT)} - 1)y_-$$

et $\frac{d}{d\alpha} (e^{i\alpha} - 1)^{-1} = \frac{i}{1 - \cos \alpha}$ d'où

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \left(J \int_0^T e^{KJt} Ay(t) dt , (\omega e^{KJT} - I)^{-1} \int_0^T e^{KJt} Ay(t) dt \right) \\ = \frac{-i}{1 - \cos(\theta+KT)} (J_{z_+, z_+}) - \frac{i}{1 - \cos(\theta-KT)} (J_{z_-, z_-}) \end{aligned}$$

où

$$z = \int_0^T e^{KJt} Ay(t) dt .$$

Or on a vu que $z = (\omega e^{KJT} - I)y(0)$ et comme $(\omega e^{KJT} - I)$ respecte les s.e.v. propres de J

$$z_+ = (\omega e^{KJT} - I)y_+(0) = (e^{i(\theta+KT)} - 1)y_+(0)$$

$$z_- = (\omega e^{KJT} - I)y_-(0) = (e^{i(\theta-KT)} - 1)y_-(0)$$

et utilisant l'égalité $|e^{i\alpha} - 1|^2 = 2(1 - \cos \alpha)$ on a

$$\frac{-i}{1 - \cos(\theta+KT)} (Jz_+, z_+) = -2i(Jy_+(0), y_+(0)) = 2(y_+(0), y_+(0))$$

$$\frac{-i}{1 - \cos(\theta+KT)} (Jz_-, z_-) = -2i(Jy_-(0), y_-(0)) = 2(y_-(0), y_-(0))$$

d'où

$$\operatorname{sgn} \frac{d}{d\theta} P_{k, e^{i\theta}}(y) = -\operatorname{sgn} i(Jy(0), y(0))$$

Soit $R(T)$ le linéarisé du difféomorphisme de premier retour, autrement dit $\dot{R}(t) = JH''(x(t))R(t)$ et $R(0)=I$, il est facile de voir que y est dans le noyau de $P_{K, e^{i\theta}}$ si et seulement si $R(T)y(0) = \omega y(0)$ ($\omega = e^{i\theta}$). D'après ce qui précède si ω est valeur propre simple, la variation de l'indice de $P_{k, e^{i\theta}}$ est l'opposé du signe de Krein du vecteur propre associé. Par perturbation, on voit que si ω est une valeur propre de type (p, q) (Cf. [E] p. 53) la variation d'indice sera $q-p$. D'où la

Proposition 2 : L'application j est constante par morceaux, et ses points de discontinuité autres que $\omega = e^{\pm iKT}$ sont les valeurs propres de $R(T)$. Si $\omega \neq e^{\pm iKT}$ est une valeur propre de $R(T)$, on a

$$\Delta j(\omega) = q - p \quad \text{si } \omega \text{ est de type } (p, q)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} j(e^{i\varepsilon}) = E\left(\frac{d}{2}\right) + i_1 \quad \text{si } \omega = 1 \text{ et } d = \dim \ker (R-I)^{2n}$$

Examinons maintenant le cas où $\omega e^{KJT} - I$ n'est pas inversible. On pourra supposer que ω n'est pas valeur propre de $R(T)$, sinon par perturbation on verra que les différentes contributions s'additionnent.

Calculons la variation d'indice de $P_{k,\omega}$ pour $\omega_0 = e^{i\theta_0}$ où $\theta_0 \equiv -KT [2\pi]$. Soit $y \in H_1^1$, alors $e^{i\theta t/T} y \in H_{e^{i\theta}}^1$ et on a défini un isomorphisme de H_1^1 sur $H_{e^{i\theta}}^1$. On a alors

$$\begin{aligned} P_{k,e^{i\theta}}(e^{i\theta t/T} y) &= \int_0^T \left(i \frac{\theta}{T} Jy + Jy - Ky, y \right) dt \\ &+ \int_0^T (H_K(t)^{-1} (i \frac{\theta}{T} Jy + J\dot{y} - Ky), i \frac{\theta}{T} Jy + J\dot{y} - Ky) dt \end{aligned}$$

Le noyau de $P_{k,e^{i\theta}}$ est constitué par les éléments de la forme $y(t) = e^{iKt} y(0)$ où on a $y(0) = y_+(0)$. Calculons pour un tel y $\frac{d}{d\theta} P_{k,e^{i\theta}}(y)$ en $\theta = \theta_0$. En utilisant l'expression précédente de P_{k,ω_0} mais avec $\theta = -KT$ au lieu de $\theta = \theta_0$ on voit immédiatement que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} P_{k,e^{i\theta}}(y) &= \frac{1}{T} \int_0^T i(Jy(0), y(0)) dt = i(Jy(0), y(0)) \\ &= -\|y(0)\|^2 \end{aligned}$$

car $y(0) = y_+(0)$.

Donc l'index augmente de n en passant par ω_0 . On verrait de même qu'il diminue de n en passant par $\bar{\omega}_0$. En résumé

Proposition 3 : Les points de discontinuité de j sont les valeurs propres de $R(T)$ et les points $\omega_0 = e^{-iKT}$, $\bar{\omega}_0 = e^{iKT}$. De plus on a

$$\text{si } \omega \neq 1, \omega_0, \bar{\omega}_0 \quad \Delta j(\omega) = q - p$$

si ω est de type (p, q)

$$\text{si } \omega = 1 \text{ et } d = \dim \ker (R(T) - I)^n \text{ on a}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 1} j(\omega) = E\left(\frac{d}{2}\right) + i_1$$

$$\begin{aligned} \text{si } \omega &= \omega_0 & \Delta j(\omega_0) &= +n \\ \omega &= \bar{\omega}_0 & \Delta j(\bar{\omega}_0) &= -n \end{aligned}$$

Enfin on a bien sûr $j(1) = i_1$.

Notons que lorsque $\omega_0 \rightarrow 1$ on retrouve les résultats de [E] p. 53-54.

Maintenant

$$\begin{aligned} i_k^s &= i_k + n - 2n \gamma \mathcal{E} \left(\frac{KT}{2\pi} \right) \\ &= j_k + n - 2n \gamma \mathcal{E} \left(\frac{kKT}{2\pi} \right) \end{aligned}$$

Remplaçons alors j par la fonction j_s suivante

Définition :

$$\begin{aligned} j_s(1) &= i_1^s \\ \Delta j_s(\omega) &= \Delta j(\omega) \quad \text{si } \omega \neq \omega_0, \bar{\omega}_0 \\ \Delta j_s(\omega_0) &= \Delta j(\omega_0) - n \\ \Delta j_s(\bar{\omega}_0) &= \Delta j(\bar{\omega}_0) + n \end{aligned}$$

Alors

$$\sum_{\omega, k=1} j_s(\omega) = \sum_{\omega, k=1} j(\omega) + \sum_{\omega, k=1} (j_s(\omega) - j(\omega))$$

or

$$j_s(1) - j(1) = i_1^s - i_1 = -2n \gamma \mathcal{E} \left(\frac{KT}{2\pi} \right) + n$$

Supposons par exemple que $\theta_0 = \text{Arg } \bar{\omega}_0$ vérifie $\theta_0 \in [0, \pi]$ (le cas où $\theta_0 \in [-\pi, 0]$ se traite de la même façon) alors on a

$$j_s(\omega) - j(\omega) = j_s(1) - j(1) \quad \text{si } \omega = e^{i\theta} \quad -\theta_0 < \theta < \theta_0$$

$$j_s(\omega) - j(\omega) = j_s(1) - j(1) + n \quad \text{sinon}$$

Or dans $] -\theta_o, \theta_o [$ il y a exactement $2 \tilde{E}\left(\frac{k\theta_o}{2\pi}\right) - 1$ points de la forme $\frac{2k\pi}{k}$ donc

$$\begin{aligned} \sum_{\omega=1}^k j_s(\omega) - j(\omega) &= k(j_s(1) - j(1) + n) - n \left(2 \tilde{E}\left(\frac{k\theta_o}{2\pi}\right) - 1 \right) \\ &= -2nk \tilde{E}\left(\frac{KT}{2\pi}\right) + kn + n - 2n \tilde{E}\left(\frac{k\theta_o}{2\pi}\right) \end{aligned}$$

Or

$$\frac{KT}{2\pi} = \tilde{E}\left(\frac{KT}{2\pi}\right) - 1 + \frac{\theta_o}{2\pi}$$

donc

$$k \frac{KT}{2\pi} = k \tilde{E}\left(\frac{KT}{2\pi}\right) - k + k \frac{\theta_o}{2\pi}$$

et

$$\tilde{E}\left(k \frac{KT}{2\pi}\right) = k \tilde{E}\left(\frac{KT}{2\pi}\right) - k + \tilde{E}\left(\frac{k\theta_o}{2\pi}\right)$$

d'où

$$\begin{aligned} &-2nk \tilde{E}\left(\frac{KT}{2\pi}\right) - 2n \tilde{E}\left(\frac{k\theta_o}{2\pi}\right) + (k+1)n \\ &= n - 2n \tilde{E}\left(k \frac{KT}{2\pi}\right) \\ &= i_k^s - j_k \end{aligned}$$

On a donc

Proposition 4

$$i_k^s = \sum_{\omega=1}^k j_s(\omega)$$

où $j_s(1) = i_1^s$

$$\Delta j_s(\omega) = q - p \text{ si } \omega \neq 1$$

est une valeur propre de $R(T)$ de type (p, q) au sens de Krein

$$\lim_{\omega \rightarrow 1} j_s(\omega) = i_1^s + E\left(\frac{d}{2}\right) .$$

Ceci démontre que dans le cas étoilé, l'indice se comporte comme dans le cas convexe. Plus précisément, dans le cas convexe, l'indice de Morse d'une solution défini dans [E] égale $i_1^s - n$. Dans le cas convexe et dans le cas étoilé, la formule d'itération donnant i_1^s à partir de i_1^s et de $R(T)$ est la même. Les démonstrations du § V de [E] n'utilisant rien d'autre que cette expression pour établir qu'en cas de non résonance il y a une infinité d'orbites géométriques, ces démonstrations restent valables dans le cas étoilé, pourvu que $i_1^s - n$ soit positif.

Enfin comme au § VI de [E] on voit que la condition de non résonance est générique. Ceci termine la démonstration du théorème 2.

- [B L M R] Berestycki, Lasry, Mancini, Ruf : "Existence of multiple periodic orbits on star shaped hamiltonian surfaces". Cahiers de Math. de la Décision n° 8304. Université de Paris-Dauphine, 1983.
- [BO 1] A. Borel, "Seminar on transformation groups" Annals of Math. Studies n° 46. Princeton Univ. Press. 1960.
- [BO 2] A. Borel, "Cohomologie des espaces localement compacts" Lecture Notes in Math. n° 2. Springer Verlag, 1964.
- [C W] Croke, Weinstein : "Closed curves on convex hypersurfaces and periods of nonlinear oscillations". Inv. Math. t. 64 (1981) p. 199 à 202.
- [E] I. Ekeland : "Une théorie de Morse pour les systèmes hamiltoniens convexes" Annales de l'I.H.P., Analyse non linéaire; vol. 1 n° 1, p. 19 à 78.
- [F H R] Fadell, Husseini, Rabinowitz : "Borsuk-Ulam Theorems for arbitrary S^1 actions and applications" T.A.M.S., vol. 274 n° 1 (1982).
- [E L] I. Ekeland, J.M. Lasry : "On the number of periodic trajectories for a hamiltonian flow on a convex energy surface" Annals of Math. 112 (1980) p. 283 à 319.
- [G H] M. Greenberg, J. Harper : "Algebraic Topology, a first course" Math. Lecture note series n° 58. Benjamin/Cummings Publishing co. 1981.
- [K] W. Klingenberg : "Lectures on closed geodesics" Grundlehren der Math. Wissenschaften, 230. Springer Verlag, 1978.
- [Sp] E. Spanier : "Algebraic Topology" Springer Verlag, 1966.



L'objet de ce travail est l'étude des solutions périodiques des systèmes hamiltoniens sur une hypersurface d'énergie étoilée.

On étudie pour cela une réduction à la dimension finie d'une fonctionnelle d'action duale.

Des résultats cohomologiques permettent de trouver par minimax une famille de points critiques d'indices donné. Une formule d'itération de l'indice d'une orbite critique permet dans certains cas de conclure à l'existence générique d'une infinité d'orbites critiques.