Buchbesprechungen

Verantwortlich: Norbert Schappacher, U.F.R. de mathématique et d'informatique, Université Louis Pasteur, 7 rue René Descartes, F-67084 Strasbourg Cedex

Mathematikern wird gerne ihre Knappheit nachgerühmt. Der schlanke Band von Ernst Witts Gesammelten Abhandlungen stellt ein auch für die mathematische Literatur seltenes Beispiel an kondensiertem Gehalt dar. Wir nehmen daher gerne das freundliche Angebot an, die folgende eingehende Besprechung durch Colliot-Thélène und Ojanguren, deren französisches Original in der Gazette des mathématiciens *erscheinen wird, hier in deutscher Übersetzung wiederzugeben. Die beiden Autoren stellen Witts Werk vom heutigen mathematischen Standpunkt aus vor. Leider mußte die hier besprochene Werkausgabe letztlich ohne die ursprünglich vorgesehene biographische Einleitung erscheinen, so daß sich auch die folgende Besprechung auf das Werk beschränkt. — N. Sch.*

Ernst Witt: Gesammelte Abhandlungen / Collected Papers, edited by Ina Kersten, with an essay by Günter Harder on Witt Vectors; Berlin - Heidelberg - New York (Springer Verlag) , 1998; XVI + 420 pages, 198,00 DM.

Dieser Band enthält alle Veröffentlichungen Witts, einige Faksimiles (Witt hatte eine Vorliebe für Ein-Seiten-Beweise, siehe seinen Beweis des Primzahlsatzes Seite 397) und gewisse unveröffentlichte Arbeiten, von denen einige aus nachgelassenen Manuskripten rekonstruiert wurden. Zahlreiche Kommentare der Herausgeberin und hinzugezogener Kollegen erläutern den Hintergrund der Arbeiten. Einige, wie Ulf Rehmanns Bemerkungen über Witts Beitrag zur Klassifikation der einfachen Liealgebren, sind besonders aufschlußreich. Witts Arbeiten sind, von zwei spanischen Artikeln abgesehen, auf Deutsch abgefaßt. Das Gesetz des Marktes will es, daß fast alle Kommentare auf Englisch geschrieben (oder übersetzt) wurden. Eine nützliche Ergänzung des Bandes stellt Ina Kerstens Aufsatz im *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **95** (1993) dar, in dem ein Überblick über das Werk und die Persönlichkeit dieses Mathematikers gegeben wird.

Witt hat seine Hauptarbeiten zwischen dem 23. und dem 30. Lebensjahr veröffentlicht: zwischen 1934 und 1941. Die meisten davon sind Klassiker geworden. Die Arbeiten gehören der deutschen algebraischen und zahlentheoretischen Schule der zwanziger und dreißiger Jahre an (Artin, Schreier, Brauer, Hasse, E. Noether, H.L. Schmid, F.K. Schmidt, Tsen, Arf, Teichmüller). Witts Ergebnisse aus der Zeit nach dem Kriege sind weniger eindrucksvoll, zeugen aber immer noch von einer großen intellektuellen Offenheit und einem scharfsinnigen Gespür für elegante Beweise.

In dem einen oder anderen Zusammenhang ist jeder Algebraiker schon einmal Sätzen von Witt begegnet. Aber jeder Leser wird sicher, so wie wir, die wir doch einige seiner Arbeiten gut kannten, mit Überraschung entdecken, in wie vielen Gebieten Witt seine Spuren hinterlassen hat, und er wird die Eleganz seines Stils und seiner Sprache bewundern, die kaum veraltet sind.

Die Hauptgebiete, zu denen Witt Beiträge geliefert hat, sind auf einen Blick:
1) Klassenkörpertheorie, algebraische Geometrie in Charakteristik > 0 (Hasse-Witt-Matrix), Galoiskohomologie (insbesondere in Charakteristik > 0).
2) Lokale Körper (Erfindung der Witt-Vektoren).
3) Quadratische Formen über einem beliebigen Körper (Klassifikation, Wittscher Kürzungssatz).
4) Reelle algebraische Kurven.
5) Liealgebren und Coxeter-Systeme (Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt; Klassifikation einfacher Liealgebren).
6) Endliche Gruppen und Kombinatorik (Mathieugruppen und Steinersche Systeme), unimodulare Gitter.

Bei der Vorbereitung dieser Besprechung haben wir viele Artikel und Bücher zu Rate gezogen, die hier nicht im einzelnen aufgeführt werden können. Wir verweisen den Leser auf Ina Kerstens oben erwähnten Artikel, sowie auf die verschiedenen Kommentare in den Gesammelten Werken. Wir beschränken uns darauf, die Hauptarbeiten Witts in Erinnerung zu rufen und deren Einfluß auf die weitere Entwicklung kurz anzudeuten. Dieser Einfluß war bedeutend, und verdankt sich der Tiefe der Resultate ebenso wie der Prägnanz der Darstellung ("umfassend und in gewisser Weise abschließend", wie P. Roquette schreibt). Mehrere Arbeiten Witts dienten über Jahre hinweg als Standardverweise. — Wir verweisen auf Witts Arbeiten nach ihrer Numerierung in den Gesammelten Anhandlungen.

1) Klassenkörpertheorie, algebraische Geometrie in Charakteristik > 0, Galoiskohomologie (insbesondere in Charakteristik > 0)

Das bekannteste Resultat Witts in diesem Bereich findet sich in der Arbeit Nr. **14** (aus dem Jahre 1936, zusammen mit Hasse): *Zyklische unverzweigte Erweiterungskörper vom Primzahlgrade p über einem algebraischen Funktionenkörper der Charakteristik p*, wo die sogenannte "Hasse-Witt-Matrix" eingeführt wird. Sie ermöglicht es, die Gruppe der unverzweigten $\mathbf{Z}/p$-Überlagerungen einer projektiven glatten Kurve X über einem Körper k der Charakteristik p zu bestimmen. Die moderne Interpretation dieser Matrix hat Serre in einem Artikel gegeben, in dem er die Kohomologie mit Werten in Garben von Witt-Vektoren einführt (J.-P. Serre, *Œuvres*, article **38** (1958)). Betrachten wir die sogenannte Artin-Schreier exakte Sequenz über der Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$ der Kurve. Wenn k separabel abgeschlossen ist, erscheint die Gruppe $H^1_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}/p)$ der unverzeigten $\mathbf{Z}/p$-Überlagerungen als der Kern von $\mathfrak{p} = \text{Frob}^* - \text{id}$, der auf der étalen oder kohärenten Kohomologie $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ operiert. Die Hasse-Witt-Matrix ist die additive Abbildung, die durch Frob* auf dem g-dimensionalen k-Vektorraum $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ definiert wird (g das Geschlecht von X). Diese Abbildung ist p-linear. Der Kern von $\mathfrak{p}$ ist die Gruppe $(\mathbf{Z}/p)^\rho$, für ein $1 \leq \rho \leq g$ (das Resultat ist in Wirklichkeit genauer). Der Fall $g = 1$ war vorher von Hasse studiert worden. Zum Studium der nicht verzweigten Überlagerungen mit Gruppe $\mathbf{Z}/p^n$, für $n > 1$ (Schmid und Witt, **15** (1937)), benötigt man die Witt-Vektoren (**23**, siehe unten). Dies war übrigens ihre erste Anwendung. Dieselben Argumente behalten in beliebiger Dimension ihre Gültigkeit (Serre, *Œuvres*, article **38** (1958); vg. Milne, *Étale Cohomology*, p. 127-128). Die Kohomologie mit Werten in Garben von Witt-Vektoren hat außerordentlich bedeutsame Entwicklungen erfahren : siehe Illusie, *Ann. Sc. E.N.S.* **12** (1979) 501–561.

In **8** (1934): *Riemann-Rochscher Satz und Z-Funktion im Hyperkomplexen*, beweist Witt für eine projektive glatte Kurve C über einem Körper k einen Satz von Riemann-Roch für gewisse Spezialfälle dessen, was man später 'Vektorbündel über C' genannt hat. Dieser Artikel ist vor kurzem unter diesem Gesichtspunkt von Brzezinski (*Math. Ann.* **276**) wieder vorgenommen worden. Seiner Zeit war die Suche nach einem Satz von Riemann-Roch für derartige Objekte das Ziel einiger Arbeiten gewesen, siehe insbesondere Weil, *Œuvres Scientifiques*, [1935a], [1938c], und die zugehörigen Kommentare. Wenn k ein endlicher Körper ist und A eine zentrale einfache Algebra über dem Funktionenkörper $K = k(C)$ von C, so definiert Witt eine zu A gehörige Zetafunktion. Mithilfe seines Satzes von Riemann-Roch beweist er die Funktionalgleichung dieser Zetafunktion und leitet daraus (im vorliegenden Funktionenkörperfall) einen Beweis des folgenden Satzes der Klassenkörpertheorie ab : Eine zentrale einfache K-Algebra, die bzgl. jeder Vervollständigung eine Matrixalgebra wird, ist schon selber eine Matrixalgebra. Über Zahlkörpern war dies von Käthe Hey 1929 gezeigt worden; eine neuere Fassung findet sich in A. Weil, *Basic Number Theory* (1967).

Ebenfalls aus den Eigenschaften der Zetafunktion erhält Witt (ohne gesondertes Argument für die p-Torsion) die Beschreibung der Brauergruppe des Funktionenkörpers einer Kurve über einem endlichen Körper durch lokale Invarianten in $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, deren Summe verschwindet.

Der Artikel **10** (1935): *Der Existenzsatz für abelsche Funktionenkörper*, vervollständigt die klassenkörpertheoretischen Arbeiten von Herbrand und Hasse im Funktionenkörperfall. Es handelt sich um den "Existenzsatz", dessen p-Anteil damals neu war. Benutzt werden die hier formulierte Artin-Schreier Theorie und der Satz von Riemann-Roch. Im Vorübergehen sei der Beweis des additiven Analogons $H^i(G, K^+) = 0$ von Hilberts Satz 90 für eine galoissche Erweiterung K/k mit Gruppe G erwähnt — wenigstens in den hier einzig betrachteten Fällen $i = 1, 2$ (denn damals sprach man von Faktorensystemen anstelle von Kohomologiegruppen, und der Fall $i \geq 3$ wäre schwieriger hinzuschreiben gewesen). In der unveröffentlichten Arbeit **11** (1936) wendet sich Witt dem Problem der Funktionalgleichung der L-Funktionen im Funktionenkörperfall zu, das in **10** aufgeworfen wurde.

Die Nummer **20** (1936): *Konstruktion von galoisschen Körper der Charakteristik p zu vorgegebener Gruppe der Ordnung p^f*, ist den Erweiterungen eines Körpers k von Charakteristik p mit Gruppe $\mathbf{Z}/p^n$ gewidmet. Das Corollaire 1 des chap. II, 2.2, von Serres Buch *Cohomologie galoisienne*, Springer LNM **5** (1994), demzufolge der maximale pro-p Quotient der absoluten Galoisgruppe eine freie pro-p Gruppe ist, sowie die nachfolgende Bemerkung über den Rang dieser Gruppe in Abhängigkeit von $k/\mathfrak{p}(k)$, stellen eine nur geringfügig modernisierte Fassung dieser Arbeit dar. Die Hilfsmittel für den Beweis sind die gleichen : Verschwinden der Gruppen $H^1(g, k_s^+)$, $H^2(g, k_s^+)$ (vgl. **10**), also von $H^2(g, \mathbf{Z}/p)$ vermöge der Artin-Schreier Sequenz (hier bezeichnet k_s den separablen Abschluß von k und g die Galoisgruppe von k_s über k).

Dieser Aufsatz ließ die Frage nach einem Analogon der aus der Artin-Schreier Sequenz ersichtlichen Formel $k/\mathfrak{p}(k) \simeq H^1(k, \mathbf{Z}/p)$, für $H^1(k, \mathbf{Z}/p^n)$ mit $n \geq 2$, offen. Für einen perfekten Körper k wird dieses Problem in **23** (1937) über die Witt-Vektoren gelöst: **23**, §5.

In **22** (1958): *p-Algebren und Pfaffsche Formen*, zeigt Witt "auf völlig neue Weise", daß sich der p-Anteil der Brauergruppe eines nicht perfekten Körpers k der Charakteristik p durch Kähler-Differentiale ausdrücken läßt. K. Kato hat 1980 die Bemerkung gemacht, daß ein solches Resultat auch aus Arbeiten von Cartier von 1958 folgt. Und 1982 verallgemeinerte Kato dieses Ergebnis auf höhere Kohomologiegruppen und gab eine sehr genaue Beschreibung des p-Anteils der Kohomologie eines lokalen Körpers, dessen Restklassenkörper nicht perfekt von Charakteristik p ist.

Der Aufsatz **9** (1935): *Über ein Gegenbeispiel zum Normensatz*, ist oft zitiert worden. Er beginnt (§1) mit einem Beweis der auf F. K. Schmidt (1931) zurückgehenden Tatsache, daß jede (geometrisch integre) Kurve C über einem endlichen Körper F einen Divisor vom Gerade eins besitzt. Witts Beweis ist algebraischer und benutzt allgemeine Argumente zur Galoiskohomologie von Kurven über einem beliebigen Körper. Die Endlichkeit von F geht dadurch ein, daß sie die Surjektivität der Norm von Erweiterungen von F und die Endlichkeit der Divisorenklassengruppe vom Grad 0 garantiert.

§2 stellt dar, was man heute die Theorie der Severi-Brauer Varietäten (d.s. getwistete Formen des projektiven Raumes) in Dimension 1 nennt : die Korrespondenz zwischen k-Isomorphieklassen von Quaternionenalgebren und Kegelschnitten. Ist $k(C)$ der Funktionenkörper eines Kegelschnittes C über einem Körper k mit $\mathrm{Char}(k) \neq 0$, so ist der Kern der Abbildung zwischen den Brauergruppen $\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(k(C))$ höchstens von der Ordnung 2 und wird von der Klasse der C zugeordneten Quaternionenalgebra erzeugt.

Unter den Arbeiten, die diese Ideen fortsetzten, erwähnen wir zuallererst F. Châtelets thèse (*Ann. Sc. E.N.S.*, 1945), der man die Theorie der Severi-Brauer Varietäten in beliebiger Dimension verdankt, und weiter Arbeiten von Amitsur (1955) und Roquette (1963). Diese Varietäten haben bei Merkur'ev und Suslin (1982) eine bedeutende Rolle gespielt und ihre Verallgemeinerungen dürften von andauernder Wichtigkeit sein, etwa in den aktuellen Forschungen von Rost und Voevodsky.

Der Grund, warum der Artikel häufig zitiert wird, liegt im §3 : hier stellt Witt einen Kegelschnitt C über dem Körper $\mathbf{Q}$ der rationalen Zahlen vor, mit einem nichttrvialen (tatsächlich von $\mathrm{Br}(\mathbf{Q})$ kommenden) Element in der Brauergruppe $\mathrm{Br}(K)$ seines Funktionenkörpers $K = \mathbf{Q}(C)$, dessen Bild in $\mathrm{Br}(K_v)$ null ist, für alle Komplettierungen K_v von K (in einer Bewertung v von K). Dies kann als erstes Beispiel in einer ganzen Serie angesehen werden. Für Kurven vom Geschlecht ≥ 1, die einen rationalen Punkt haben, erhält man solche Beispiele aus nicht-trivialen Elementen der Tate-Shafarevich Gruppe. Sei K ein Funktionenkörper in d Veränderlichen. Wie K. Kato zeigte (*Crelle*, 1986), die Kohomologiegruppe, welche ein Lokal-global-Prinzip erfüllen sollte, ist die Gruppe $H^{d+2}(K, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(d+1))$. Im Falle $d = 0$ ist dies die Brauergruppe von K. Für Kurven ($d = 1$) wurde diese Vermutung von Kato selbst a.a.O. bewiesen.

2) Theorie der lokalen Körper (Erfindung der Witt-Vektoren)

Hier handelt es sich um folgende beiden Arbeiten : **23** (1937): *Zyklische Körper und Algebren der Charakteristik p vom Grad p^n (Struktur diskret bewerteter Körper mit vollkommenen Restklassenkörper der Charakteristik p)*, und **24** (unveröffentlicht, 1969): *Vektorkalkül und Endomorphismen der Einspotenzreihengruppe.*

Der Artikel **23** ist die Grundlage für sehr wichtige Arbeiten in der gegenwärtigen arithmetischen Geometrie. Seine Einleitung ist sehr aufschlußreich, sie beschreibt die früheren Beiträge von Artin, Artin-Schreier, Albert, Hasse, F.K. Schmidt, H.L. Schmid, Teichmüller und Witt. Witt definiert die *Nebenkomponenten* und leitet die grundlegenden Ganzheitseigenschaften der Formeln für die Addition und die Multiplikation auf den *Hauptkomponenten* ab. Für jeden kommutativen Ring mit Einselement A definieren diese Formeln eine Ringstruktur auf der Menge $W(A)$ aller Folgen $(x_0, x_1, ..., x_n, ...)$, wo $x_i \in A$. Sei p eine Primzahl und sei A von Charakteristik p. Sei $F : A \to A$ die Abbildung, welche $(x_0, x_1, ..., x_n, ...)$ die Folge $(x_0^p, x_1^p, ..., x_n^p, ...)$ zuordnet. Witt führt die *Verschiebung* durch die Regel $(x_0, x_1, ...) \mapsto (0, x_0, x_1, ..)$ ein. Er beweist die Formeln $p.x = VFx = FVx$ (für alle $x \in W(A)$) und $V^i x.V^j x = V^{i+j}(F^j x.F^i y)$. Dann nimmt er A als Körper der Charakteristik p an, geschrieben $\mathfrak{k}$. Er zeigt, daß dann $W(\mathfrak{k})$ ein lokaler Inegritätsbereich mit Restklassenkörper $\mathfrak{k}$ ist, der mit einer Bewertung (Index des ersten nicht verschwindenden Vektors) ausgestattet ist, bzgl. der $W(\mathfrak{k})$ vollständig ist. Wenn $\mathfrak{k}$ darüber hinaus perfekt ist (in dem Sinne, daß $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}^p$; Witt nennt solche Körper *vollkommen*, und redet von *perfekt*, wo wir heute 'vollständig' sagen), so ist $W(\mathfrak{k})$ ein absolut unverweigter (sein maximales Ideal wird von p erzeugt) diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper von Charakteristik null.

Anschließend gibt Witt Teichmüllers Satz an : für jeden vollständigen diskreten Bewertungsring R, mit vollständigem Restklassenkörper $\mathfrak{k}$ der Charakteristik p, gibt es ein eindeutiges multiplikativ abgeschlossenes Repräsentantensystem $S \subset R$, das $S^p = S$ erfüllt. Ist R von Charakteristik p, so ist S auch additiv abgeschlossen : es ist ein Körper, der $\mathfrak{k}$ in R repräsentiert, und R identifiziert sich mit dem Ring der formalen Potenzreihen in einer Veränderlichen über $\mathfrak{k}$. Ist R dagegen von Charakteristik null, so gibt es eine natürliche Einbettung von $W(\mathfrak{k})$ nach R, die R zu einer total verzweigten (Eisensteinschen) Erweiterung von $W(\mathfrak{k})$ macht.

Im §5 studiert Witt die zyklischen Erweiterungen vom Grade p^n eines Körpers k der Charakteristik p. Sei $W_n(k)$ der Ring der Wittvektoren der Länge n.

Der Kern der Abbildung $\mathfrak{p} = F - 1 : W_n(k) \to W_n(k)$ identifiziert sich mit $W_n(\mathbf{F}_p) = \mathbf{Z}/p^n$. Aus der exakten Sequenz

$$0 \to \mathbf{Z}/p^n \to W_n(k_s) \to W_n(k_s) \to 0$$

und aus $H^1(k, W_n(k_s)) = 0$ (verallgemeinerte Fassung des additiven Analogons von Hilberts Satz 90) leitet Witt den Isomorphismus $W_n(k)/\mathfrak{p}(W_n(k)) \simeq H^1(k, \mathbf{Z}/p^n)$ ab. Er stellt die gesuchte Verallgemeinerung des Artin-Schreier Isomorphismus (Fall $n = 1$) dar.

Im §6 studiert Witt die zentralen einfachen Algebren vom Grade p^n über einem Körper k der Charakteristik p. Er definiert im Wesentlichen die Paarung $k^* \times H^2(k, \mathbf{Z}) \to \mathrm{Br}(k)$ — genauer gesagt, für jedes n die Paarung $k^* \times H^1(k, \mathbf{Z}/p^n) \to \mathrm{Br}(k)_{p^n}$, mit Werten in der p^n-Torsionsuntergruppe der Brauergruppe. Die Surjektivität dieser Paarung, d.h. die Aussage, daß jede p-Algebra einer Summe zyklischer Algebren ähnlich ist, wird 1936 von Teichmüller gezeigt.

Der Artikel **24** behandelt die "großen Witt-Vektoren", die anscheinend unabhängig von Witt und mehreren anderen Autoren entdeckt wurden (siehe die Einleitung des Buches von Demazure-Gabriel zum Stichwort: "anneau universel").

Harders Essay zeichnet die Hauptentwicklungen nach, zu denen Witts Artikel Anlaß gegeben hat. Es möge hier genügen, die folgenden Namen zu nennen: Cohen, Lazard, Dieudonné, Cartier, Manin, Serre, Barsotti, Grothendieck, Berthelot, Ogus, Illusie, Messing, Fontaine (dessen große Periodenringe ein großartige Weiterentwicklung von Witts Konstruktionen darstellen), seine Schüler, sowie Kato und seine Schüler. Die Entwicklungen der p-adischen Kohomologie aus den letzten Jahren (siehe *Astérisque* **223** (1994)) lassen sich hier nicht in wenigen Worten zusammenfassen.

3) Klassifikation quadratischer Formen über einem beliebigen Körper

Über die Arbeit **1** (1937): *Theorie der quadratischen Formen in beliebigen Körpern*, ist viel Tinte vergossen worden. Für quadratische Formen über einem Körper k (Char(k)$\neq 2$) wird der Wittsche Kürzungssatz und der Struktursatz abgeleitet : jede Form ist Summe einer anisotropen Form, einer hyperbolischen Form und ihres Kerns. Witt zeigt, daß zwei isomorphe Diagonalformen durch eine Folge von Transformationen ineinander übergehen, die jeweils nur zwei Koordinaten betreffen. Er definiert die Witt-Gruppe der quadratischen Formen und errichtet auf ihr eine Ringstruktur. Es war bekannt, wie jeder quadratischen Form über einem Körper k ihre Diskriminante mit Werten in $k^*/k^{*2} = H^1(k, \mathbf{Z}/2)$ zuzuordnen ist. In Verallgemeinerung von Minkowskis (über $\mathbf{Q}$) und Hasses (über einem beliebigen Zahlkörper gültigen) Ergebnissen hatte E. Artin eine zweite Invariante mit Werten in der 2-Torsion $H^2(k, \mathbf{Z}/2)$ der Brauergruppe $\mathrm{Br}(k)$ definiert. Eine Form dieser Invariante ist in der Literatur nach Hasse, Hasse-Witt oder Clifford benannt (siehe T.Y. Lam, *The Algebraic Theory of Quadratic Forms*, p. 122). Diese Invariante war über eine Diagonalisierung der Form definiert. Witt in seinem Artikel definiert direkt die von ihm sogenannte Clifford-Algebra einer quadratischen Form über einem beliebigen Körper, studiert ihr Verhalten unter orthogonalen Summen und stellt die Beziehung zu Artins Invariante her.

In der Folge seines Artikels gibt Witt einen Überblick über die Theorie der quadratischen Formen über lokalen Körpern und Zahlkörpern. Seine Arbeit wird ein Standardverweis für diese Resultate, obwohl sie im Wesentlichen von Minkowski und Hasse stammen. Er schließt mit einem hübschen Satz über quadratische Formen über Funktionenkörpern einer Veränderlichen über den reellen Zahlen. In **12** wird er hierauf zurückkommen.

Ende der sechziger Jahre kehrt Witt zu diesem Themenkreis zurück und gibt vereinfachte Beweise neuerer Sätze von Pfister über multiplikative Formen (**6**, siehe F. Lorenz, Springer LNM **130**) und für den Knebusch'schen Normensatz (**7**).

Von den weiteren Entwicklungen erwähnen wir :

(a) Den Begriff der anisotropen algebraischen Gruppe, siehe: A Witt-type theorem for the semisimple groups, auf Seite 43 des Artikels von J. Tits, *Classification of algebraic semisimple groups*, 33-62, in: *Algebraic groups and discontinuous subgroups*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol IX, Amer. Math. Soc. 1966.
(b) Die "algebraische Theorie der quadratischen Formen", vor allem über einem Körper : Multiplikative Formen (Pfister, sowie Witt), Normensatz von Knebusch und Scharlau, Satz von Arason-Pfister, demzufolge der Durchschnitt der Potenzen des Grundideals $I(k) \subset W(k)$ (das aus den Klassen der Formen mit geradem Rang besteht) null ist, die exakte Sequenz von Milnor (und Tate), die die Wittgruppe des rationalen Funktionenkörpers $k(t)$ berechnet. In dem oben zitierten Buch Lams sowie in W. Scharlaus Buch finden sich die wesentlichen Entwicklungen dargestellt, die vor den grundlegenden Arbeiten von Merkur'ev und Suslin lagen.
(c) Die Suche nach höheren Invarianten über einem Körper k: Beziehungen zwischen der Milnorschen K-Theorie von k und dem Wittring von k und der Galoiskohomologie von k mit Koeffizienten in $\mathbf{Z}/2$ (Fragen, die in einem Artikel Milnors aufgeworfen wurden). Die Arbeiten von Arason, Merkur'ev, Suslin, Rost, sowie die von Voevodsky und anderen angekündigten Ergebnisse.
(d) Definition und Studium der Wittgruppen und der L-Theorie von Ringen und Schemata.

4) Reelle algebraische Kurven

Witts Beiträge hierzu finden sich in den Arbeiten **1** (siehe oben) und **12** (1934): *Zerlegung reeller algebraischer Funktionen in Quadrate. Schiefkörper über reellem Funktionenkörper.* Das Gebiet ist im neunzehnten Jahrhundert von Hurwitz, Klein, Weichold und Harnack (dem man die Ungleichung $s \leq g+1$ für die Anzahl s der reellen Zusammenhangskomponenten einer reeller Kurve vom Geschlecht g verdankt) betrachtet worden. Hilbert stellte in seinem 17. Problem die Frage der Quadratsummen in Funktionenkörpern. Nach den Beiträgen Hilberts und Landaus führte die Arbeit von Artin und Schreier über reell abgeschlossene Körper und die Charakterisierung der Quadratsummen als total positive Elemente zum brillanten Ergebnis E. Artins von 1926 : wenn eine rationale Funktion f auf einer irreduziblen rellen Varietät X auf $X(\mathbf{R})$ nur positive Werte annimmt, so ist f Summe von Quadraten im Funktionenkörper $\mathbf{R}(X)$.

In Italien hatte Comessatti andersartige interessante Resultate in der reellen algebraischen Geometrie gefunden (über reelle abelsche Varietäten und rationale Flächen). Siehe dazu den Artikel von C. Ciliberto und C. Pedrini, Annibale Comessatti and real algebraic geometry, *in* Algebra e geometria (1860-1940): il contributo italiano, Brigaglia, A. (ed.) *et al.*, Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser. **36** (1994), 71–102.

Modern ausgedrückt benützt Witt einerseits die Ergebnisse von Weichold, andererseits den Satz von Tsen und Galoiskohomologie. Sei $C/\mathbf{R}$ eine reelle, projektive, glatte, geometrisch zusammenhängende algebraische Kurve, und sei $\mathbf{R}(C)$ ihr Funktionenkörper. Witt beweist :
(a) Jede auf $C(\mathbf{R})$ positive rationale Funktion ist Summe zweier Quadrate.
(b) Ist eine Zerlegung von $C(\mathbf{R})$ als (von den Endpunkten abgesehen) paarweise disjunkte endliche Vereinigung von Intervallen, und auf jedem Intervall ein Vorzeichen ($\pm$) gegeben, so gibt es eine rationale Funktion, die (wo sie definiert ist) auf den Intervallen die entsprechenden Vorzeichen annimmt. Unter den Folgerungen heben wir hervor : Für die Jacobische J einer Kurve C mit $s \geq 1$ reellen Zusammenhangskomponenten haben die Gruppen $\hat{H}^0(\mathbf{C}/\mathbf{R}, J(\mathbf{C}))$ und $\hat{H}^1(\mathbf{C}/\mathbf{R}, J(\mathbf{C}))$ dieselbe Ordnung 2^{s-1}.
(c) Eine quadratische Form über $\mathbf{R}(C)$ in mindestens drei Veränderlichen ist genau dann isotrop, wenn für alle Punkte $P \in C(\mathbf{R})$ aus einer dichten Teilmenge die in P ausgewertete Form isotrop ist.

Auch hier machte sich Witts Einfluß geltend. Einige der späteren Forschungsrichtungen waren :
(a) Studium der Sylvesterschen Signatur $W(k) \to \mathrm{Cont}(X, \mathbf{Z})$, wo X der Raum der Anordnungen eines formal reellen Körpers k ist, mit einer passenden Topologie, und $\mathrm{Cont}(X, \mathbf{Z})$ ist der Raum, der stetigen $\mathbf{Z}$-wertigen Abbildungen auf X (Arbeiten von Becker, Bröcker (*Stabilitätsindex*), Prestel, Arason, Elman und Lam).
(b) Verallgemeinerungen von Witts Ergebnissen auf reell abgeschlossene Grundkörper (Geyer, Pfister, Delfs-Knebusch).

(c) Quadratsummen in Funktionenkörpern (Ax, Pfister). Pfister zeigte 1967, daß jede Quadratsumme in einem Funktionenkörper in d Veränderlichen über $\mathbf{R}$ (und allgemeiner über einem reell abgeschlossenen Körper) Summe von höchstens 2^d Quadraten ist. Verallgemeinerungen auf Summen von n-ten Potenzen hat Becker geliefert.
(d) Studium der “Zykelabbildung” von der Chowgruppe einer reell algebraischen Varietät X in die Homologie von $X(\mathbf{R})$.
(e) Vektorbündel auf einer reell algebraischen Varietät und induzierte topologische Bündel auf dem Raum der reellen Punkte.
(f) Trennung der Zusammenhangskomponenten durch quadratische Bündel (Frage von Knebusch, die durch Mahé gelöst wurde).
(g) Etalkohomologie der reell algebraischen Varietäten (siehe C. Scheiderer, *Real and Étale Cohomology*, Springer LNM **1588**).
(h) Studium der (prinzipal) homogenen Räume unter einer linearen Gruppe über einem Körper k in dem Falle, daß die kohomologische Dimension von $k(\sqrt{-1})$ entweder 1 oder 2 ist.
(i) Interpretation der Aussage $\hat{H}^0(\mathbf{C}/\mathbf{R}, J(\mathbf{C})) \simeq \hat{H}^1(\mathbf{C}/\mathbf{R}, J(\mathbf{C}))$ als reelles Analogon des Tateschen Dualitätssatzes von 1957 für abelsche Varietäten über einem p-adischen Körper (siehe die daran anschließende Untersuchung von Lichtenbaum über die Kohomologie von Kurven über p-adischen Körpern).

Zum Schluß sei eine interessante Frage erwähnt, die Pfister aufgeworfen hat : Sei $\mathbf{R}(X)$ der Funktionenkörper einer algebraischen $\mathbf{R}$-Fläche X ohne reellen Punkt. Man weiß, daß jede quadratische Form in mindestens 7 Veränderlichen über dem Körper $\mathbf{R}(X)$ eine nicht triviale Nullstelle besitzt. Gilt das auch für alle Formen in höchstens 5 Veränderlichen ?

5) Liealgebren und Coxeter Systeme

Witt scheint parallel zu Jacobson die ersten Beispiele von Ausnahme-Liealgebren in Charakteristik p gegeben zu haben (siehe den Aufsatz **30**, S. 276). Dieses Gebiet hat vielfältige Entwicklungen erfahren (p-Liealgebren).

In **25** (1937): *Treue Darstellung Liescher Ringe*, führt Witt zunächst die Einhüllende einer Liealgebra über einem Körper ein, die er durch ihre universelle Eigenschaft kennzeichnet. Dann beweist er den Satz, der heute als der Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt bekannt ist.

Weiter untersucht er die freie Liealgebra L_q über q Erzeugenden und ihre Einhüllende A_q. Er zeigt, daß der Raum der homogenen Elemente vom Grade n in L_q die Dimension

$$\psi_n = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) \cdot q^{\frac{d}{n}}$$

hat, wo μ die Möbiusfunktion ist und A_q eine freie Algebra auf q Erzeugenden. Im letzten Teil der Arbeit wendet er, angeregt durch Arbeiten von Magnus, diese Ergebnisse auf das Studium der Quotienten $F^{(n)}/F^{(n+1)}$ an, wo F eine freie Gruppe auf q Erzeugenden ist und $F^{(2)} = [F, F]$, $F^{(3)} = [F, F^{(2)}]$, usw. Er zeigt, daß $F^{(n)}/F^{(n+1)}$ eine freie abelsche Gruppe vom Rang ψ_n ist, daß der Durchschnitt aller $F^{(n)}$ nur aus dem neutralen Element besteht, und daß das Zentrum von $F/F^{(n+1)}$ gerade $F^{(n)}/F^{(n+1)}$ ist.

In **26** (1953): *Treue Darstellung beliebiger Liescher Ringe*, kommt er auf diese Fragen zurück. Dort beweist er die Existenz einer einhüllenden Ω-Algebra A, für jede Liealgebra L über einem kommutativen Ring Ω, sowie die Injektivität von $L \to A$, für eine Klasse von Ringen Ω, die alle Hauptidealringe enthält. Dieses Resultat wurde auch von Širšov erzielt, der auch ein Gegenbeispiel zur Injektivität im allgemeinen Fall angegeben hat. In **29** (1956): *Die Unterringe der freien Lieschen Ringe*, studiert Witt Erzeugende und Relationen einer Unter-Liealgebra U einer Ω-Liealgebra L, welche durch Erzeugende und Relationen gegeben ist. Es gelingt ihm unter gewissen Bedingungen (die stets erfüllt sind, wenn Ω ein Körper ist), ein System von Erzeugenden und Relationen für U anzugeben. Insbesondere ist U frei, falls L frei ist. Dies ist das Analogon für Liealgebren über einem Körper des Satzes von Schreier für Gruppen. Ist Ω ein Ring ganzer Zahlen, so beweist er, daß jede homogene Unteralgebra U frei ist, falls nur L/U eine freie abelsche Gruppe oder L endlich erzeugt und L/U torsionsfrei ist.

Es ist hier nicht der Ort, die Entwicklung der Theorie der einhüllenden Algebren weiterzuverfolgen. Einen Eindruck davon erhält man zum Beispiel aus dem Buch von J. Dixmier *Algèbres enveloppantes*

(Gauthier-Villars, 1974). Die Beziehungen zwischen den Quotienten der absteigenden zentralen Kompositionsreihe und den Liealgebren sind in Lazards thèse (*Ann. Sci. ENS* **71** (1954)) und danach u.a. von russischen Mathematikern untersucht worden. Siehe z.B. die Literaturangaben im Buch von J.A. Bahturin *Lectures on Lie Algebras*, Berlin, 1978.

Der Artikel **27** (1937): *Spiegelungsgruppen und Aufzählung halbeinfacher Liescher Ringe* setzt eine Reihe älterer Arbeiten von Killing, Elie Cartan, Weyl, Schouten, van der Waerden und Coxeter fort. Van der Waerden hatte gezeigt, daß die Klassifikation der einfachen komplexen Liealgebren äquivalent zu derjenigen der reduzierten Wurzelsysteme ist. Oder genauer: er hatte gezeigt, daß zu einem gegebenen Wurzelsystem höchstens eine einfache komplexe Liealgebra gehört. Coxeter hatte die heute nach ihm bennanten Gruppen studiert und klassifiziert. Witt fügt alles zusammen. Als erstes gibt er einen eleganten Beweis der Coxeterschen Ergebnisse. Weiter klassifiziert er "Vektordiagramme". Letztere verallgemeinern die reduzierten Wurzelsysteme (die Bedingung $s_\alpha(\beta) - \beta \in \mathbf{Z}\alpha$ entfällt). Ihnen ordnet er eine Coxetergruppe zu, der wiederum, wie bei Coxeter, *Figuren* entsprechen (offensichtliche Varianten der Diagramme, die heute nach Coxeter genannt werden, und die eine Darstellung der Coxetergruppen liefern). Er klassifiziert diese *Figuren.* Zwei Typen treten auf: diejenigen, die zu einer endlichen Gruppe gehören (er findet Coxeters Liste wieder), und diejenigen, deren Gruppe unendlich ist : die Liste, die er hier findet, ist ganz neu. Unter Benutzung von Ergebnissen Elie Cartans und Hermann Weyls ordnet er jeder einfachen komplexen Liealgebra ein *Vektordiagramm* zu. Danach gibt er die Liste der *Figuren* an, die solchen Diagrammen entsprechen können. Schließlich beweist er für jeden Diagrammtyp die Existenz entsprechender Algebren. Witt hat somit als erster Diagramme zur Klassifizierung einfacher Algebren benutzt. Dynkins Arbeit aus den Jahren 1944/1947 ist unabhängig aber später entstanden. Witts Arbeit bezieht auch die unendlichen Coxetergruppen mit ein.

6) Endliche Gruppen (Mathieugruppen und Steinersche Systeme), unimodulare Gitter

1861 hatte Émile Mathieu die Konstruktion seiner Gruppe M_{12} publiziert und ohne Beweis die Existenz von M_{24} behauptet. Diese Entdeckung scheint unter seinen Zeitgenossen nicht viel Interesse erweckt zu haben, wenn auch Jordan in seinem *Traité des substitutions* ein Erzeugendensystem von M_{12} aufgestellt hat und Frobenius, in einem Artikel über die Charaktere mehrfach transitiver Gruppen, von M_{24} wie von einer wohlbekannten Gruppe redet. Die erste wirklich zugängliche Konstruktion der Mathieugruppen ist zweifelsohne die in **32** (1938): *Die 5-fach transitiven Gruppen von Mathieu.* In diesem Aufsatz leitet Witt zuerst ein Kriterium zur Konstruktion einer t-transitiven Gruppe auf $s+t$ Elementen aus einer 2-transitiven Gruppe auf $s+2$ Elementen auf. Danach wendet er es auf die Gruppe $SL(3, \mathbf{F}_4)$ an, die zweifach transitiv auf den 21 Punkten von $\mathbf{P}^2(\mathbf{F}_4)$ operiert, und erhält so eine Gruppe M_{24}, die fünffach transitiv auf einer Menge von 24 Punkten operiert. Aus der Einfachheit von $SL(3, \mathbf{F}_4)$ leitet er leicht diejenige von M_{24} ab. Seine Konstruktion von M_{12} beruht auf demselben Prinzip.

In derselben Arbeit zeigt Witt, wie man einer t-transitiven Gruppe auf n Punkten Steinersche Systeme vom Typ $S(t, m, n)$ zuordnen kann. Es handelt sich darum, ein System von $\binom{n}{t}/\binom{m}{t}$ Blocks von m Punkten so zu konstruieren, daß jede Menge von t Punkten in genau einem Block enthalten ist. Unter Benutzung dieses allgemeinen Resultats ordnet Witt der Gruppe M_{24} ein Steinersches System $S(5, 8, 24)$, und der Gruppe M_{12} ein System $S(5, 6, 12)$ zu. Zum Abschluß zeigt er, daß M_{24} bzw. M_{12} die Automorphismengruppen der konstruierten Systeme $S(5, 8, 24)$ bzw. $S(5, 6, 12)$ sind.

Der Artikel **33** (1938): *Über Steinersche Systeme*, der im selben Band der Hamburger Abhandlungen auf **32** folgt, behandelt Steinersche Systeme. Er enthält u.a. den Beweis der Eindeutigkeit von $S(4, 5, 11)$, $S(5, 6, 12)$, $S(4, 7, 23)$ und $S(5, 8, 24)$, sowie die beiden Hauptvermutungen über Steinersche Systeme:

(a) $S(2, q^2, q)$ und $S(2, q^2+q+1, q+1)$ existieren nur wenn q eine Primzahlpotenz ist.
(b) Jedes $S(q^2, q, 2)$ (bzw. jedes $S(q^2+q+1, q+1, 2)$) ist eine affine (bzw. projektive) Ebene über $\mathbf{F}_q$, wobei die Blocks in beiden Fällen den Geraden entsprechen.

Beide Vermutungen sind noch offen.

Diese Artikel hatten beträchtlichen Einfluß. Derjenige über die Mathieugruppen ist eine der angenehmsten Einführungen in dieses Gebiet geblieben. Die Mathieugruppen sind zu den Golay Codes in Beziehung gesetzt worden (M_{24} z.B. ist die Automorphismengruppe des erweiterten binären Golay Codes) und die Steinerschen Systeme sind in den viel allgemeineren Zusammenhang der "block designs" gestellt worden (hier verlangt man, daß t Punkte genau zu einer festen Anzahl λ von Blocks gehören). Dennoch bleiben die von Witt behandelten Beispiele in dieser ganzen Theorie Fälle von bezaubernder Schönheit.

Dank gebührt der Herausgeberin für die Sorgfalt, mit der sie sich der Veröffentlichung der nachgelassenen Schriften angenommen hat. So erfahren wir, was die Steinerschen Systeme angeht, daß Witt 1940 anläßlich des Studiums von $S(5,8,24)$ das Leechgitter entdeckt und die Ordnung seiner Automorphismengruppe bestimmt hat. Er brach diese Untersuchung ab, weil sie nur einen sehr kleinen Beitrag zur Minkowski-Siegel Dichte der 24-dimensionalen unimodularen Gitter liefert.

In **37** (1941): *Eine Identität zwischen Modulformen zweiten Grades*, studiert Witt die Klassen gerader unimodularer positiv-definiter Formen in Dimension 16. Er beschreibt, was wir heute üblicherweise mit E_8^2 und D_{16} bezeichnen. Er berechnet die Ordnung ihrer Automorphismengruppe und zeigt mithilfe der Minkowski-Siegelschen Maßformel, daß sie die einzigen sind. Er findet auch eine Bedingung dafür, wann eine Modulform vom Grad zwei identisch verschwindet und benutzt dieses Ergebnis, nicht nur um zu zeigen, daß alle natürlichen Zahlen gleich oft durch E_8^2 und durch D_{16} dargestellt werden, sondern daß das auch für alle binären Formen gilt. Das gleiche Resultat für ternäre Formen wird 1967 unabhängig von Igusa und Kneser bewiesen. Eine interessante Folgerung aus der Existenz dieser beiden Formen ist die 1964 von Milnor gemachte Bemerkung, daß die Riemannsche Mannigfaltigkeiten $\mathbf{R}^{16}/E_8^2$ und $\mathbf{R}^{16}/D_{16}$ isospektral bezüglich dem Laplace Operator aber nicht isometrisch zueinander sind.

In derselben Arbeit sagt Witt, er habe mehr als 10 Klassen gerader unimodularer positiv-definiter Formen in Dimension 24 gefunden und fügt hinzu, daß die Bestimmung ihrer genauen Anzahl ein schwieriges Problem zu sein scheine. In der Tat wurde es erst 1973 von Niemeier gelöst. Wir können hier der Weiterentwicklung dieser Fragen nicht nachgehen. Der Leser mag sich dem Buch von Conway und Sloane: (*Sphere Packings, Lattices and Groups*, Grundlehren **290**, Springer-Verlag) anvertrauen, das auch den Zusammenhang mit fehlerkorrigierenden Codes erläutert.

Ein anderer Artikel für Feinschmecker ist **36** (1955): *Über die Kommutatorgruppe kompakter Gruppen*, in dem Witt zeigt, daß die Kommutatorgruppe jeder kompakten Gruppe, die eine abelsche Gruppe von endlichem Index besitzt, abgeschlossen ist. Der Beweis ist nicht schwer, aber Witts Beispiel einer kompakten Gruppe, deren abgeleitete Gruppe nicht abgeschlossen ist, ist ein Juwel.

Jean-Louis Colliot-Thélène (Orsay), Manuel Ojanguren (Lausanne)