Groupe de Brauer non ramifié des espaces principaux homogènes de groupes linéaires

J.-L. Colliot-Thélène et B. È. Kunyavskiĭ

Introduction

Soient k un corps de caractéristique nulle, G un k-groupe linéaire connexe, E un espace principal homogène sur k sous G et X une k-compactification lisse de E. Le groupe de Brauer-Grothendieck $\mathrm{Br}(X) = H^2_{\text{ét}}(X, \mathbf{G}_m)$ ne dépend pas du choix de la compactification X. Quel est ce groupe qui ne dépend que de G/k et de E ? Dans ce travail, dont l'idée remonte à quelques années, sous certaines hypothèses, nous donnons une formule "algébrique" pour le groupe $\mathrm{Br}(X)$. Lorsque k est un corps de nombres et G un k-groupe semi-simple connexe, cette formule est due à Voskresenskiĭ et Sansuc (voir [Sa], Prop. 9.8). Notre démonstration dans le cas d'un corps k *quelconque* s'inspire de leur démonstration. Elle est arithmétique, un point crucial étant l'utilisation du théorème de Tchebotarev sous sa forme générale. Peut-on obtenir cette formule par une méthode purement algébrique ?

Lorsque k est un corps de nombres, le calcul du groupe de Brauer de X est important pour le calcul (et l'explicitation) de l'obstruction de Brauer–Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible. Inversement, les résultats dans ce domaine (Borovoi [Brv]) suggèrent une formule analogue pour le groupe de Brauer d'une compactification lisse d'un espace homogène sous un groupe semi-simple simplement connexe, lorsque le stabilisateur géométrique est connexe.

§ 1. Préliminaires et rappels

Soit G un groupe profini et M un G-module continu discret. On définit $Ш^i_\omega(G, M)$ $(i = 1, 2)$ comme le sous-groupe du groupe de cohomologie galoisienne $H^i(G, M)$ formé des éléments dont la restriction à tout sous-groupe fermé procyclique H de G est nulle.

Soient k un corps, $\overline{k}$ une clôture séparable de k et $g = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$. On appelle module galoisien sur k un g-module continu discret. On note $H^i(k, M) = H^i(g, M)$. Soit M un module galoisien sur k de type fini en tant que groupe abélien. La suite de restriction-inflation montre que $Ш^1_\omega(k, M)$ coïncide avec la réunion de ses sous-groupes

$$Ш^1_\omega(\mathrm{Gal}(K/k), M^{\mathrm{Gal}(\overline{k}/K)})$$

pour toutes les extensions galoisiennes finies K/k déployant le module M, i.e. telles que $M = M^{Gal(\overline{k}/K)}$. Si de plus M est $\mathbb{Z}$-libre de type fini, alors $Ш^1_\omega(k, M)$ coïncide avec chacun de ses sous-groupes $Ш^1_\omega(\mathrm{Gal}(K/k), M^{\mathrm{Gal}(\overline{k}/K)})$ pour K/k extension finie galoisienne déployant le module M.

Pour les propriétés de base du groupe de Brauer $\mathrm{Br}(X)$ d'un schéma X, on renvoie le lecteur aux articles de Grothendieck [GB 1,2,3], et pour le groupe de Brauer non ramifié $\mathrm{Br}_{nr}(k(X)/k)$ du corps des fonctions $k(X)$ d'une k-variété intègre X, on renvoie à [CT]. Etant donnés k un corps, $\overline{k}$ une clôture séparable de k et X une k-variété, on note $\overline{X} = X \times_k \overline{k}$.

Rappel 1 Soient k un corps, $\overline{k}$ une clôture séparable et X une k-variété projective, lisse et géométriquement intègre. On a alors la suite exacte :

$$\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(\overline{X})] \to H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{X})) \to H^3(k, \overline{k}^*).$$

La recherche du deuxième auteur a été partiellement subventionnée par le Ministère d'Absorption (Israël) et ISF.

Si X possède un point k-rationnel, alors on a la suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(\overline{X})] \to H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{X})) \to 0.$$

Il s'agit d'une partie des termes de bas degré de la suite spectrale de Leray pour le morphisme $X \to \mathrm{Spec}(k)$ et le faisceau $\mathbf{G}_m$ (cf. [CT/S3], (1.5.0), p. 386) ; le deuxième énoncé résulte de l'existence de rétractions pour les applications $H^i(k, \mathbf{G}_m) \to H^i_{\text{ét}}(X, \mathbf{G}_m)$.

Rappel 2 Soient k un corps séparablement clos et G un k-groupe algébrique linéaire lisse connexe, supposé réductif si k est de caractéristique positive. Alors la k-variété G est k-rationnelle, i.e. k-birationnelle à un espace affine ([Brl], Cor.14.14 et 18.8).

Rappel 3 (cf. [CT], 2.1.9 et 2.2.2) Soient k un corps et X une k-variété projective, lisse, intègre, k-birationnelle à un espace projectif $\mathbf{P}^d_k$. Alors les applications naturelles

$$\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}_{nr}(k(X)/k)$$

sont des isomorphismes.

§ 2. Deux propositions arithmétiques

Proposition 1 *Soient $\mathbb{F}$ un corps fini, G un $\mathbb{F}$-groupe linéaire connexe, $E/\mathbb{F}$ un espace principal homogène et X une $\mathbb{F}$-compactification lisse de E. On a alors $H^1(\mathbb{F}, \mathrm{Pic}(\overline{X})) = 0$ et $\mathrm{Br}(X) = 0$.*

Démonstration Sur un corps fini $\mathbb{F}$, tout espace principal homogène $E/\mathbb{F}$ sous un groupe algébrique connexe est trivial (théorème de Lang). La $\mathbb{F}$-variété E est donc $\mathbb{F}$-isomorphe à G. Sur un corps fini $\mathbb{F}$, tout groupe réductif connexe G est quasi-déployé ([Brl], 16.6), donc est $\mathbb{F}$-birationnel au produit d'un $\mathbb{F}$-tore S et d'une variété $\mathbb{F}$-rationnelle (cf. [CT/S1], Corollaire 6, p. 202/203). On sait par ailleurs, sur un corps k quelconque, que pour tout k-tore T déployé par une extension cyclique il existe un k-tore T_1 tel que le produit $T \times_k T_1$ soit k-rationnel, i.e. k-birationnel à un espace projectif $\mathbf{P}^n_k$ (Endo et Miyata, voir [CT/S1], Lemme 3, p. 18, et Prop. 2, p. 184). Ainsi il existe une $\mathbb{F}$-variété intègre T_1 possédant un point $\mathbb{F}$-rationnel lisse, telle que $Y = X \times_{\mathbb{F}} T_1$ soit $\mathbb{F}$-birationnel à un espace projectif $\mathbf{P}^m_{\mathbb{F}}$. La fibre générique de la projection $Y = X \times_{\mathbb{F}} T_1 \to X$ admet donc un point $\mathbb{F}(X)$-rationnel lisse. Soit A l'anneau local en un tel point. Les applications naturelles $\mathrm{Br}(\mathbb{F}(X)) \to \mathrm{Br}(A) \to \mathrm{Br}(\mathbb{F}(Y))$, sont toutes deux des injections, la première puisque l'on peut spécialiser en le point rationnel, la seconde par un théorème de Auslander-Goldman–Grothendieck ([GB2], Cor. 1.10). Ainsi la projection $Y = X \times_{\mathbb{F}} T_1 \to X$ induit une injection $\mathrm{Br}(\mathbb{F}(X)) \hookrightarrow \mathrm{Br}(\mathbb{F}(Y))$, et de façon formelle, cette injection induit une injection $\mathrm{Br}_{nr}(\mathbb{F}(X)/\mathbb{F}) \hookrightarrow \mathrm{Br}_{nr}(\mathbb{F}(Y)/\mathbb{F})$. Mais comme l'extension $\mathbb{F}(Y)/\mathbb{F}$ est transcendante pure, on a $\mathrm{Br}_{nr}(\mathbb{F}(Y)/\mathbb{F}) = \mathrm{Br}(\mathbb{F})$ (rappel 3) et $\mathrm{Br}(\mathbb{F}) = 0$ puisque $\mathbb{F}$ est un corps fini. Ainsi $\mathrm{Br}_{nr}(\mathbb{F}(X)/\mathbb{F}) = 0$, et donc a fortiori $\mathrm{Br}(X) = 0$. D'après le rappel 1 et la nullité de $H^3(\mathbb{F}, \overline{\mathbb{F}}^*)$, on conclut $H^1(\mathbb{F}, \mathrm{Pic}(\overline{X})) = 0$. □

Proposition 2 *Soient k un corps de caractéristique zéro, G un k-groupe linéaire connexe, E/k un espace principal homogène sous G et X une k-compactification lisse de E. Pour tout sous-groupe fermé procyclique h du groupe de Galois absolu $g = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$, on a $H^1(h, \mathrm{Pic}(\overline{X})) = 0$.*

Démonstration Le radical unipotent $R_u(G)$ de G est défini et déployé sur k, la fibration $G \to R_u(G)$ est triviale, la k-variété G est k-isomorphe au produit de l'espace affine $R_u(G)$ et du groupe réductif $G/R_u(G)$. On est donc ramené ([CT/S1], Lemme 11 p. 188) au cas où G est réductif, ce que nous supposons désormais. Notons que comme G et donc X est une variété rationnelle (sur $\overline{k}$) (rappel 2), le groupe abélien $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ est libre de type fini sur $\mathbb{Z}$ ([CT/S3], Cor.2.A.2, p.461). Soit K/k une extension finie galoisienne déployant $\mathrm{Pic}(\overline{X})$, i.e. $\mathrm{Pic}(X \times_k K) \simeq \mathrm{Pic}(\overline{X})$. Soit $\Gamma = Gal(K/k)$. Pour établir l'énoncé ci-dessus, il suffit, comme on vérifie aisément, de montrer que pour tout sous-groupe cyclique $\gamma \subseteq \Gamma$, on a $H^1(\gamma, \mathrm{Pic}(X \times_k K)) = 0$.

On peut écrire $K = k[t]/P(t)$ avec $P(t)$ un polynôme irréductible.

Il existe un corps k_0 de type fini sur $\mathbf{Q}$ sur lequel G, E, X et le plongement $E \subset X$ sont définis. Quitte à agrandir k_0, on peut assurer que le polynôme $P(t)$ est à coefficients dans k_0, et même que l'extension $K_0 = k_0[t]/P(t)$ est galoisienne sur k_0. Enfin on peut s'arranger pour que les inclusions naturelles

$$\mathrm{Pic}(X \times_{k_0} K_0) \subset \mathrm{Pic}(X \times_k K) \subset \mathrm{Pic}(\overline{X})$$

soient des isomorphismes. Dans la suite, on notera $k = k_0$ et $K = K_0$.

Par des principes généraux, on peut trouver un anneau A de type fini sur $\mathbb{Z}$, régulier, de corps des fractions k, tel que sa clôture intégrale B dans K soit finie étale sur A, galoisienne de groupe Γ, des modèles $\tilde{G}$, $\tilde{E}$ et $\tilde{X}$ au-dessus de A de G, E, X au-dessus de k, tels que :

(i) $\tilde{G}/A$ est un A-schéma en groupes réductifs à fibres connexes de fibre générique G/k ;

(ii) $\tilde{E}$ est un espace principal homogène au-dessus de A sous $\tilde{G}$;

(iii) $\tilde{X}$ est projectif et lisse au-dessus de A ;

(iv) on a une A-immersion fermée $\tilde{E} \hookrightarrow \tilde{X}$ étendant $E \subset X$;

(v) pour tout point x de $\mathrm{Spec}(A)$, de corps résiduel $\kappa(x)$, la fibre $\tilde{E}_x \subset \tilde{X}_x$ est une $\kappa(x)$-compactification lisse de $\tilde{E}_x$.

Observons que de la rationalité de G, donc de X sur $\overline{k}$ (rappel 2), on déduit l'annulation des groupes de cohomologie cohérente $H^i(X, \mathcal{O}_X)$ pour tout $i \geq 1$ (en caractéristique nulle, ce sont des invariants birationnels) ainsi que le fait, déjà noté, que le groupe abélien $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ est libre de type fini. En utilisant les théorèmes de semi-continuité de Grothendieck [G], on voit que quitte à inverser un élément de A (ce qui laisse A de type fini sur $\mathbb{Z}$), on peut supposer que le foncteur $\underline{\mathrm{Pic}}_{\tilde{X}/A}$ est un groupe constant tordu localement libre pour la topologie étale sur $\mathrm{Spec}(A)$, plus précisément, que cet A-schéma en groupes devient isomorphe à un groupe constant $\mathbb{Z}^n$ sur $\mathrm{Spec}(B)$.

Soit alors $\gamma \subseteq \Gamma$ un sous-groupe cyclique, puis $C = B^\gamma$. On dispose donc du revêtement étale cyclique B/C d'anneaux intègres réguliers de type fini sur $\mathbb{Z}$. La version généralisée du théorème de Tchebotarev ([Se1], Theorem 7) assure l'existence d'une infinité d'idéaux maximaux m de $\mathrm{Spec}(C)$ tels que la fibre en m, soit $B \otimes_C C/m$ soit un corps $\mathbb{E}$, extension finie du corps fini $\mathbb{F} = C/m$. Soit $Y = \tilde{X} \times_A \mathbb{F}$ (la flèche $A \to \mathbb{F}$ étant la composée de $A \to C \to C/m$). Comme l'extension fibre de B/C en m est une extension de corps, le fait que $\underline{\mathrm{Pic}}_{\tilde{X}/A} \times_A B$ soit un schéma en groupes constant assure l'égalité

$$H^1(\gamma, \mathrm{Pic}(X \times_k K)) = H^1(\gamma, \mathrm{Pic}(Y \times_{\mathbb{F}} \mathbb{E})).$$

Ce dernier groupe se plonge dans $H^1(\mathbb{F}, \mathrm{Pic}(Y \times_{\mathbb{F}} \overline{\mathbb{F}}))$. La $\mathbb{F}$-variété Y est une $\mathbb{F}$-compactification lisse d'un espace principal homogène sous le groupe linéaire connexe $\tilde{G} \times_A \mathbb{F}$. D'après la proposition précédente, on a donc $H^1(\mathbb{F}, \mathrm{Pic}(Y \times_{\mathbb{F}} \overline{\mathbb{F}})) = 0$, ce qui achève la démonstration. $\square$

Remarque Soit k un corps de caractéristique zéro. Supposons que son groupe de Galois absolu soit un pro-p-groupe procyclique h. Alors ce groupe est soit le groupe des p-adiques $\mathbb{Z}_p$ pour p premier, soit le groupe $\mathbb{Z}/2$ (théorème d'Artin-Schreier). Dans le premier cas, la dimension cohomologique du corps k est un. Sur un tel corps, tout espace principal homogène sous un k-groupe linéaire connexes est trivial (Steinberg, [Se2] p. 139), et tout groupe réductif connexe est quasi-déployé ([Se2] p. 137). La démonstration donnée à la proposition 1 vaut encore dans ce cas. Pour un corps non formellement réel, ceci donne donc une démonstration de la Proposition 2 ci-dessus et du théorème 1 ci-après, démonstration qui ne fait pas appel au théorème de Tchebotarev. Si $h = \mathbb{Z}/2$, alors k est un corps réel clos $\mathbb{R}$. Pour $\mathbb{R}$ corps réel clos, peut-on établir directement la nullité de $H^1(\mathbb{R}, \mathrm{Pic}(\overline{X}))$? (C'est une question ouverte de savoir si tout $\mathbb{R}$-groupe algébrique linéaire connexe est $\mathbb{R}$-rationnel.)

§ 3. Formules algébriques pour le groupe de Brauer non ramifié

Nous commençons par traiter le cas des groupes semi-simples.

Théorème 1 *Soient k un corps de caractéristique zéro, G un k-groupe linéaire semi-simple connexe, E/k un espace principal homogène sous G et X une k-compactification lisse de E. Soit μ le groupe fondamental de G, i.e. le k-groupe fini abélien noyau du revêtement simplement connexe $\tilde{G} \to G$, et soit $\hat{\mu} = Hom_k(\mu, \mathbf{G}_m)$ le module galoisien dual.*

(a) On a $H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{X})) = Ш^1_\omega(k, \hat{\mu})$.

(b) On a une injection $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Im}(\mathrm{Br}(k)) \hookrightarrow Ш^1_\omega(k, \hat{\mu})$, qui est un isomorphisme si $X(k) \neq \emptyset$ ou si $H^3(k, \overline{k}^*) = 0$.

Démonstration Soit $E \subset X$ une k-compactification lisse de E. Comme G est semi-simple connexe, les seules fonctions inversibles sur $\overline{E} \simeq \overline{G}$ sont les constantes non-nulles dans $\overline{k}$. Par ailleurs, le module galoisien $\mathrm{Pic}(\overline{E})$ s'identifie au module galoisien $\mathrm{Pic}(\overline{E})$ (Sansuc, [Sa], Lemme 6.7 p. 41), lequel s'identifie au module galoisien $\hat{\mu}$ ([Sa], lemme 6.9, p. 41). On dispose donc de la suite exacte courte de modules galoisiens :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Div}_\infty(\overline{X}) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\overline{X}) \longrightarrow \hat{\mu} \longrightarrow 0$$

où le module galoisien $\mathrm{Div}_\infty(\overline{X})$ est le groupe des diviseurs de $\overline{X}$ à support en dehors de $\overline{G}$ ([Sa] (9.0.2) p. 67). C'est un module de permutation. En particulier, $H^1(g, \mathrm{Div}_\infty(\overline{X})) = 0$ et $Ш^2_\omega(g, \mathrm{Div}_\infty(\overline{X})) = 0$. De la suite exacte ci-dessus et de la proposition 2, on déduit immédiatement l'énoncé (a). L'énoncé (b) s'en déduit par les rappels 1 à 3. □

Dans l'étude des groupes algébriques linéaires connexes non nécessairement semi-simples, on a souvent recours aux isogénies du type considéré dans l'énoncé suivant (cf. [Sa], Lemme 1.7 p. 18 et Lemme 1.10 p. 20). Le résultat suivant englobe le théorème 1, mais la démonstration en est plus tortueuse (on ne dispose pas ici de la suite exacte à trois termes utilisée ci-dessus).

Théorème 2 *Soient k un corps de caractéristique zéro, G un k-groupe réductif connexe, G_1 un k-groupe semi-simple simplement connexe, T un k-tore quasi-trivial. Supposons qu'il existe une k-isogénie $G_1 \times_k T \longrightarrow G$ de noyau le k-groupe abélien fini μ. Soit $\hat{\mu}$ le module galoisien dual de μ. Soient E un espace principal homogène sous G et soit X une k-compactification lisse de E. Alors :*

(a) Il existe un isomorphisme $H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{X})) \simeq Ш^1_\omega(k, \hat{\mu})$.

(b) Il existe une injection $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Im}(\mathrm{Br}(k)) \hookrightarrow Ш^1_\omega(k, \hat{\mu})$, qui est un isomorphisme si $X(k) \neq \emptyset$ ou si $H^3(k, \overline{k}^*) = 0$.

Démonstration Supposons d'abord $E = G$. On commence par construire une résolution

$$0 \longrightarrow \hat{Q} \longrightarrow \hat{T}_1 \longrightarrow \hat{\mu} \longrightarrow 0 \tag{3.1}$$

avec $\hat{T}_1$ de permutation et $\hat{Q}$ coflasque, i.e. H^1-trivial ([CT/S2], Lemma 0.6, p.155). Ceci donne lieu à une suite exacte duale de k-groupes de type multiplicatif

$$1 \longrightarrow \mu \longrightarrow T_1 \longrightarrow Q \longrightarrow 1,$$

où T_1 est un k-tore quasi-trivial et Q un k-tore coflasque.

On construit alors le diagramme croisé (cf. [Sa] p. 61) :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \to & \mu & \to & G_1 \times_k T & \to & G & \to & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \simeq & & \\
1 & \to & T_1 & \to & G_2 & \to & G & \to & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
1 & \to & Q & \to & Q & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 1 & & 1 & & & &
\end{array}$$

De la suite exacte

$$1 \longrightarrow T_1 \longrightarrow G_2 \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

et du théorème 90 de Hilbert (T_1 est quasi-trivial) on déduit que G_2 est k-birationnel au produit du k-tore k-rationnel T_1 et de G. Un argument standard (cf. [CT/S1], Lemme 11 p. 188) montre alors que le groupe $H^1(g, \mathrm{Pic}(\overline{X}))$ coïncide avec le groupe $H^1(g, \mathrm{Pic}(\overline{X}_2))$ où X_2 désigne une k-compactification lisse de G_2.

La suite verticale médiane du diagramme ci-dessus fait de G_2 un torseur sur Q sous le k-groupe réductif connexe $G_1 \times_k T$. On peut donc appliquer à cette situation la proposition 6.10 de l'article de Sansuc [Sa], au niveau de $\overline{k}$. En utilisant la valeur bien connue du groupe des fonctions inversibles sur un groupe algébrique (lemme de Rosenlicht, cf. [Sa], Lemme 6.5, p. 39), on obtient la suite exacte de modules galoisiens :

$$0 \longrightarrow \hat{Q} \longrightarrow \overline{k}[G_2]^*/\overline{k}^* \longrightarrow \hat{T} \longrightarrow 0$$

l'exactitude à droite provenant de la nullité de $\mathrm{Pic}(\overline{Q})$.

Comme le module $\hat{Q}$ est coflasque et $\hat{T}$ de permutation, la suite exacte de modules galoisiens ci-dessus est scindée ([CT/S1] Lemme 1, p. 179 ; [CT/S2], p. 155) et l'on obtient

$$\overline{k}[G_2]^*/\overline{k}^* \simeq \hat{Q} \oplus \hat{T}. \tag{3.2}$$

La même suite de Sansuc donne aussi la nullité de $\mathrm{Pic}(\overline{G}_2)$ compte tenu de la nullité de $\mathrm{Pic}(\overline{Q})$ et de celle de $\mathrm{Pic}(\overline{G}_1 \times \overline{T})$, elle-même conséquence de la nullité de $\mathrm{Pic}(\overline{G}_1)$ pour le groupe semi-simple simplement connexe G_1 (cf. [Sa], Lemme 6.9, p. 41).

On a par ailleurs la suite exacte de modules galoisiens

$$0 \longrightarrow \overline{k}[G_2]^*/\overline{k}^* \longrightarrow \mathrm{Div}_\infty(\overline{X}_2) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\overline{X}_2) \longrightarrow 0.$$

En utilisant la Proposition 2 (démontrée par voie arithmétique) et en raisonnant comme dans la démonstration du théorème 1, on obtient

$$H^1(g, \mathrm{Pic}(\overline{X}_2)) \simeq Ш^2_\omega(g, \overline{k}[G_2]^*/\overline{k}^*).$$

De (3.1) et (3.2), et du fait que $\hat{T}$ et $\hat{T}_1$ sont des modules de permutation, on déduit

$$Ш^2_\omega(g, \overline{k}[G_2]^*/\overline{k}^*) \simeq Ш^2_\omega(g, \hat{Q} \oplus \hat{T}) \simeq Ш^2_\omega(g, \hat{Q}) \simeq Ш^1_\omega(g, \hat{\mu}),$$

ce qui achève la démonstration de l'isomorphisme

$$H^1(g, \mathrm{Pic}(\overline{X})) \simeq Ш^1_\omega(g, \hat{\mu}),$$

et donc aussi, compte tenu des rappels 1 à 3, de l'isomorphisme

$$\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k) \simeq Ш^1_\omega(g, \hat{\mu}).$$

Ceci achève la démonstration du théorème 2 dans le cas où l'espace principal homogène E est trivial. Pour établir (a) dans le cas général, on utilise l'astuce du passage au point générique ([CT/S3], Appendice 2B, p. 462/463). Soit X une k-compactification lisse de l'espace principal homogène E. Soit $K = k(E)$, $L = \overline{k}(E)$ et M une clôture algébrique de K contenant L. On a $\mathrm{Gal}(L/K) = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$. Comme $\overline{X}$ est une variété propre et lisse rationnelle, les inclusions naturelles de groupes abéliens libres de type fini

$$\mathrm{Pic}(X \times_k \overline{k}) \hookrightarrow \mathrm{Pic}(X \times_k L) \hookrightarrow \mathrm{Pic}(X \times_k M)$$

sont des égalités, et l'action de $\mathrm{Gal}(M/L)$ sur $\mathrm{Pic}(X \times_k M)$ est triviale. La suite de restriction-inflation pour les extensions $M/L/K$ induit donc un isomorphisme

$$H^1(\mathrm{Gal}(\overline{k}/k), \mathrm{Pic}(X \times_k \overline{k})) \simeq H^1(\mathrm{Gal}(M/K), \mathrm{Pic}(X \times_k M)).$$

La K-variété $X \times_k K$ est une K-compactification lisse de l'espace principal homogène $E \times_k K$, espace homogène qui a un point rationnel évident et est donc K-isomorphe à $G \times_k K$. La formule précédemment établie montre donc que l'on a un isomorphisme entre $H^1(\mathrm{Gal}(\overline{k}/k), \mathrm{Pic}(X \times_k \overline{k}))$ et le groupe $Ш^1_\omega(\mathrm{Gal}(M/K), \hat{\mu})$. Il reste alors à observer que l'application naturelle

$$Ш^1_\omega(\mathrm{Gal}(\overline{k}/k), \hat{\mu}) \to Ш^1_\omega(\mathrm{Gal}(M/K), \hat{\mu})$$

est un isomorphisme. Ceci résulte immédiatement de la suite de restriction-inflation et du fait que l'action de $\mathrm{Gal}(M/L)$ sur $\hat{\mu} = \hat{\mu}(M)$ étant triviale, on a

$$Ш^1_\omega(\mathrm{Gal}(M/L), \hat{\mu}) = 0.$$

L'énoncé (b) résulte de (a) et des rappels 1 à 3. $\square$

Remarque Dans [CT/S2] (Prop. 9.5), on a établi l'énoncé :

Théorème *Soient k un corps de caractéristique zéro, T un k-tore et X une k-compactification lisse de X. Soit $\hat{T}$ le module des caractères de T. Alors on a des isomorphismes*

$$\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k) \simeq H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{X})) \simeq Ш^2_\omega(k, \hat{T}). \; \square$$

En utilisant l'astuce du point générique comme dans la démonstration précédente, on peut aussi donner une version de cet énoncé pour les espaces principaux de tores. Le passage de l'énoncé ci-dessus à la version donnée au théorème 2 se fait en utilisant le lemme d'Ono ([Sa], Lemme 1.7). La démonstration de [CT/S2] est purement algébrique ; la proposition 2 ci-dessus admet en effet une démonstration purement algébrique dans le cas des tores (tout tore déployé par une extension cyclique du corps de base est facteur direct birationnel d'une k-variété k-rationnelle ; voir la démonstration du Lemme 1.)

§ 4. Une conjecture

Les résultats de Borovoi [Brv] sur l'approximation faible et le principe de Hasse pour les espaces homogènes non nécessairement principaux et le résultat de Bogomolov [Bog] sur la nullité du groupe de Brauer non ramifié des quotients G/H (G et H comme ci-dessous) dans le cas géométrique, i.e. lorsque $k = \overline{k}$, amènent à proposer la conjecture suivante.

Conjecture *Soient k un corps de caractéristique zéro, G est un k-groupe semi-simple simplement connexe, H un k-sous-groupe algébrique connexe. Soit H^{u} le radical unipotent de H, et soit T_H le k-tore quotient du groupe réductif H/H^{u} par son sous-groupe dérivé.*

Soit X une k-compactification lisse de l'espace quotient G/H. Alors on a

$$\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k) \simeq H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{X})) \simeq Ш^1_\omega(k, \hat{T}_H).$$

BIBLIOGRAPHIE

[Bog] F. A. Bogomolov, Brauer group for invariant fields of algebraic groups, Mat. Sb. **180** (1989) 279–293

[Brl] A. Borel, *Linear Algebraic Groups*, 2nd edition Graduate Texts in Mathematics **126**, Springer, Berlin 1991

[Brv] M. Borovoi, The Brauer–Manin obstructions for homogeneous spaces with connected or abelian stabilizer, J. reine angew. Math. **473** (1996) 181–194

[CT] J.-L. Colliot-Thélène, Birational invariants, purity and the Gersten conjecture, in *K-Theory and Algebraic Geometry : Connections with Quadratic Forms and Division Algebras*, AMS Summer Research Institute, Santa Barbara 1992, ed. W. Jacob and A. Rosenberg, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **58**, Part I (1995) 1–64

[CT/S1] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, La R-équivalence sur les tores, Ann. Sc. E.N.S. **10** (1977) 175–229

[CT/S2] J.-L. Colliot-Thélène and J.-J. Sansuc, Principal homogeneous spaces under flasque tori : applications, J. Algebra **106** (1987) 148–205

[CT/S3] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, La descente sur les variétés rationnelles, II, Duke Math. J. **54** (1987) 375–492

[G] A. Grothendieck, Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique, V. Les schémas de Picard : théorèmes d'existence (exposé Bourbaki **232** (1961/62)) ; VI. Les schémas de Picard : propriétés générales (exposé Bourbaki **236** (1961/62)). Reproduit in : *Fondements de la Géométrie Algébrique*, Secrétariat mathématique de l'Institut Henri Poincaré, Paris 1962

[GB 1,2,3] A. Grothendieck, Le groupe de Brauer, I, II, III, in *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, Masson/North-Holland, Paris/Amsterdam, 1968, pp. 46–188

[Sa] J.-J. Sansuc, Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres, J. reine angew. Math. **327** (1981) 12–80

[Se1] J.-P. Serre, Zeta and L-functions, in *Arithmetical Algebraic Geometry, Proceedings of a conference held at Purdue, 1963*, ed. O.F.G. Schilling, Harper's Series in Higher Mathematics, Harper and Row, New York, pp. 82–92

[Se2] J.-P. Serre, *Cohomologie galoisienne*, Cinquième édition, L. N. M. **5**, Springer-Verlag (1994).

J.-L. Colliot-Thélène,

C.N.R.S.,
URA D0752, Mathématiques,
Bâtiment 425,
Université de Paris-Sud,
F-91405 Orsay
France

e-mail : colliot@math.u-psud.fr

B. È. Kunyavskiĭ
Bar-Ilan University
Department of Mathematics and Computer Science
52900 Ramat-Gan
Israel

e-mail : kunyav@macs.biu.ac.il