

# SUR LA CONJECTURE DE TATE ENTIÈRE POUR LE PRODUIT D'UNE COURBE ET D'UNE SURFACE $CH_0$ -TRIVIALE SUR UN CORPS FINI

JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE ET FEDERICO SCAVIA

ABSTRACT. We investigate the integral Tate conjecture for 1-cycles on the product of a curve and a surface over a finite field, under the assumption that the surface is geometrically  $CH_0$ -trivial. By this we mean that over any algebraically closed field extension, the degree map on the zero-dimensional Chow group of the surface is an isomorphism. This applies to Enriques surfaces. When the Néron-Severi group has no torsion, we recover earlier results of A. Pirutka. The results rely on a detailed study of the third unramified cohomology group of specific products of varieties.

RÉSUMÉ. Nous étudions la conjecture de Tate entière pour les 1-cycles sur le produit d'une courbe et d'une surface sur un corps fini, sous l'hypothèse que la surface est géométriquement  $CH_0$ -triviale. Nous entendons par cela que, sur toute extension de corps algébriquement clos, la flèche degré sur le groupe de Chow de dimension zéro de la surface est un isomorphisme. Cela s'applique aux surfaces d'Enriques. Lorsque le groupe de Néron-Severi n'a pas de torsion, nous retrouvons des résultats antérieurs de A. Pirutka. Le travail implique l'étude détaillée du troisième groupe de cohomologie non ramifiée pour les produits de variétés considérés.

## 1. INTRODUCTION

Soient  $k$  un corps d'exposant caractéristique  $p$  et  $X$  une  $k$ -variété projective, lisse, et géométriquement connexe et soit  $k(X)$  le corps des fonctions rationnelles de  $X$ . Pour chaque nombre premier  $\ell \neq p$  et chaque entier  $n \geq 1$ , on a un groupe de cohomologie non-ramifiée [CT95, Thm. 4.1.1]

$$H_{\text{nr}}^n(k(X)/k, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(n-1)) \subset H^n(k(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(n-1))$$

qui est un invariant  $k$ -birational (et même stablement  $k$ -birational) de  $X$ . Pour  $n = 2$ , c'est la partie  $\ell$ -primaire du groupe de Brauer de  $X$ . Pour  $n = 3$ , ce groupe intervient dans des questions de rationalité, de descente galoisienne des classes de cycles de codimension 2 modulo équivalence rationnelle, et aussi dans l'étude des zéro-cycles des variétés définies sur les corps globaux ; voir [CTK13].

On s'intéresse ici particulièrement au cas où  $k = \mathbb{F}$  est un corps fini. On sait que  $H_{\text{nr}}^3(\mathbb{F}(X)/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$  est nul si  $\dim X \leq 2$  : c'est trivial si  $\dim(X) = 1$ , et a été établi dans [CTSS83, Remarque 2, p. 790] par Sansuc et Soulé et le premier auteur si  $\dim(X) = 2$ , et aussi par Kato [Kato86, Thm. 0.7, Corollaire].

---

*Date:* 7 septembre 2020.

*2010 Mathematics Subject Classification.* 14C25; 14C35, 14G15.

Dans [Pir11], Pirutka a construit des exemples de  $\mathbb{F}$ -variétés projectives, lisses et géométriquement rationnelles  $X$  de dimension 5, et donc aussi de toute dimension  $\geq 5$ , avec  $H_{\text{nr}}^3(\mathbb{F}(X)/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \neq 0$ . Pour  $\dim(X) = 3$  et pour  $\dim(X) = 4$ , on ne sait pas s’il existe des variétés projectives et lisses avec  $H_{\text{nr}}^3(\mathbb{F}(X)/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \neq 0$ .

En dimension  $d = 3$ , la question de l’annulation du groupe  $H_{\text{nr}}^3(\mathbb{F}(X)/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$  entretient une relation étroite (détaillée au §5) avec la question si la conjecture de Tate entière vaut pour les 1-cycles : pour une variété projective et lisse, géométriquement connexe de dimension  $d$  sur un corps fini  $\mathbb{F}$ , l’application classe de cycles

$$CH^{d-1}(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \rightarrow H^{2d-2}(X, \mathbb{Z}_\ell(d-1))$$

est-elle surjective ?

Bruno Kahn et le premier auteur ont demandé si le groupe  $H_{\text{nr}}^3(\mathbb{F}(X)/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$  est trivial pour tout solide  $X$  (c’est-à-dire,  $\dim(X) = 3$ ) sur un corps fini  $\mathbb{F}$  et tout  $\ell \neq p$ ; voir [CTK13, Question 5.4]. Ils ont conjecturé que la réponse est affirmative si le solide  $X$  est géométriquement uniréglé; voir [CTK13, Conjecture 5.7]. L’annulation du groupe  $H_{\text{nr}}^3(\mathbb{F}(X)/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$  a été établie par Parimala et Suresh [PS16] si  $X$  est un fibré en coniques au dessus d’une surface. Elle a aussi été établie par Pirutka [Pir16, Théorème 1.1] lorsque le solide  $X$  est le produit d’une courbe  $C$  et d’une surface  $S$  géométriquement  $CH_0$ -triviale (propriété rappelée, avec ces conséquences remarquables, dans l’énoncé du théorème 1.1 et dans la section “Notations et rappels” ci-dessous) telle que  $H^1(S, \mathcal{O}_S) = 0$ , sous l’hypothèse supplémentaire que le groupe de Néron-Severi géométrique  $\text{NS}(\overline{S})$  de  $S$  n’a pas de torsion, ce qui est le cas par exemple lorsque  $S$  est une surface géométriquement rationnelle.

Notre principal résultat est le théorème suivant. Lorsque le groupe de Néron-Severi géométrique de la surface  $S$  dans le théorème est sans torsion, on retrouve le résultat d’Alena Pirutka (voir la Remarque 4.6).

**Théorème 1.1.** *Soit  $\mathbb{F}$  un corps fini de caractéristique  $p$ , et soit  $\overline{\mathbb{F}}$  une clôture algébrique de  $\mathbb{F}$ . Soit  $\ell$  un nombre premier distinct de  $p$ . Soit  $G = \text{Gal}(\overline{\mathbb{F}}/\mathbb{F})$ . Soient  $C$  et  $S$  deux variétés géométriquement connexes, projectives et lisses sur  $\mathbb{F}$ , de dimension 1 et 2 respectivement, et soit  $X := C \times S$ . Notons  $J(C)$  la jacobienne de  $C$ . On suppose que :*

- (i) *La surface  $S$  est géométriquement  $CH_0$ -triviale : pour toute extension algébriquement close  $\Omega$  de  $\mathbb{F}$ , le degré  $CH_0(S_\Omega) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  est un isomorphisme.*
- (ii) *On a  $\text{Hom}_G(\text{Pic}(\overline{S})\{\ell\}, J(C)(\overline{\mathbb{F}})) = 0$ .*

Alors on a

$$\text{Ker}[H_{\text{nr}}^3(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \rightarrow H_{\text{nr}}^3(\overline{\mathbb{F}}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))] = 0.$$

Supposons en outre que la conjecture de Tate pour toutes les surfaces sur les corps finis est vraie. Alors on a  $H_{\text{nr}}^3(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$ , et l’application cycle

$$CH^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \rightarrow H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$$

est surjective.

La condition (ii) est requise pour notre démonstration. Nous ne savons pas si elle est nécessaire.

On donne ci-dessous des rappels sur l’hypothèse (i). Comme  $S$  est géométriquement  $CH_0$ -triviale, on a  $b_1(\overline{S}) = 0$  et donc

$$\text{Hom}_G(\text{Pic}(\overline{S})\{\ell\}, J(C)(\overline{\mathbb{F}})) = \text{Hom}_G(\text{NS}(\overline{S})\{\ell\}, J(C)(\overline{\mathbb{F}})).$$

Comme exemple d'application, on peut prendre pour  $S$  une surface d'Enriques sur un corps fini  $\mathbb{F}$ , et pour  $C$  une courbe elliptique  $E$  sur  $\mathbb{F}$ . Pour  $\ell \neq 2$ , la condition (ii) est automatiquement satisfaite. Si  $\ell = 2$ , la condition (ii) est que la courbe elliptique n'a pas de point de 2-torsion non nul défini sur  $\mathbb{F}$ .

Des techniques de  $K$ -théorie algébrique combinées aux conjectures de Weil montrent ([CTK13, Théorème 6.8]) que, pour toute variété  $X$  projective, lisse et géométriquement connexe sur un corps fini  $\mathbb{F}$ , on a une suite exacte longue de groupes de torsion

$$(1.1) \quad 0 \rightarrow \text{Ker}[CH^2(X)\{\ell\} \rightarrow CH^2(\bar{X})\{\ell\}] \rightarrow H^1(\mathbb{F}, H^3(\bar{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))_{\text{tors}}) \\ \rightarrow \text{Ker}[H_{\text{nr}}^3(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \rightarrow H_{\text{nr}}^3(\bar{\mathbb{F}}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))] \\ \rightarrow \text{Coker}[CH^2(X) \rightarrow CH^2(\bar{X})^G]\{\ell\} \rightarrow 0.$$

Sous certaines hypothèses sur  $X$ , on cherche à établir la nullité du groupe

$$\text{Ker}[H_{\text{nr}}^3(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \rightarrow H_{\text{nr}}^3(\bar{\mathbb{F}}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))]$$

en analysant d'une part la nullité de la flèche

$$H^1(\mathbb{F}, H^3(\bar{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))_{\text{tors}}) \rightarrow H_{\text{nr}}^3(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \subset H^3(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$$

d'autre part la trivialité du groupe

$$\text{Coker}[CH^2(X) \rightarrow CH^2(\bar{X})^G]\{\ell\}$$

dans (1.1).

La première question est un pur problème de cohomologie  $\ell$ -adique : *Le noyau de la flèche  $H^3(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \rightarrow H^3(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$  a-t-il une image nulle dans le groupe  $H^3(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$  ?* À notre connaissance, c'est un problème ouvert pour toute variété  $X$  projective, lisse, géométriquement connexe sur un corps fini. C'est connu pour  $X$  de dimension au plus 2. C'est un des premiers résultats de la théorie du corps de classes supérieur [CTSS83, Kato86]. Au §2, nous montrons que c'est aussi le cas pour tout produit d'une courbe et d'une surface (Corollaire 2.6). C'est un cas particulier de notre Théorème 2.5, qui vaut pour le produit de deux variétés de dimensions quelconques satisfaisant la dite propriété, ainsi qu'une restriction technique supplémentaire sur le groupe de Néron-Severi de l'un des facteurs.

L'étude du groupe  $\text{Coker}[CH^2(X) \rightarrow CH^2(\bar{X})^G]$  (groupe qui est de torsion) pour un produit  $X = C \times S$  d'une courbe et d'une surface est plus délicate. Au §3, sous l'hypothèse (i) du Théorème 1.1, nous donnons une condition équivalente à l'injectivité de la restriction  $H_{\text{nr}}^3(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \rightarrow H_{\text{nr}}^3(\bar{\mathbb{F}}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$  en termes du groupe de Chow des zéro-cycles de degré 0 sur la surface  $S \times_{\mathbb{F}} \mathbb{F}(C)$ , à savoir la surjectivité de l'homomorphisme  $A_0(S_{\mathbb{F}(C)})\{\ell\} \rightarrow A_0(S_{\bar{\mathbb{F}}(C)})\{\ell\}^G$ . Ce résultat (Théorème 3.6) est obtenu par un calcul de correspondances sur le produit  $X = C \times S$ . Au §4, en utilisant des outils élaborés venant de la  $K$ -théorie algébrique, nous montrons que la condition est satisfaite sous l'hypothèse supplémentaire (ii) du théorème 1.1 car cette condition implique alors  $A_0(S_{\bar{\mathbb{F}}(C)})\{\ell\}^G = 0$ . Ceci achève la démonstration de la première partie du théorème 1.1. La seconde partie, portant sur la conjecture de Tate entière pour les 1-cycles, est aussi établie, via le théorème 3.7, qui repose sur des résultats rappelés au §5. Le §4 se termine par deux remarques. La première fait un parallèle avec un travail de Benoist et Ottem [BO18] sur la conjecture de Hodge entière pour le produit d'une courbe et d'une surface d'Enriques complexes. La seconde indique comment se simplifie notre démonstration

dans le cas où le groupe de Néron-Severi n'a pas de torsion, donnant ainsi une démonstration alternative du théorème de Pirutka. Au §5 on donne des rappels sur l'application cycle en cohomologie étale  $\ell$ -adique pour les variétés projectives et lisses sur un corps fini, la question de la surjectivité de cette application pour les 1-cycles, et le lien de cette question, dans le cas de variétés  $X$  de dimension 3, avec la nullité éventuelle du groupe  $H_{\text{nr}}^3(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ . Comme indiqué ci-dessus, ces rappels sont utilisés dans la démonstration du théorème 3.7, lui-même utilisé dans la démonstration de la seconde partie du théorème 1.1.

**Notations et rappels.** Si  $A$  est un groupe abélien,  $n \geq 1$  est un entier, et  $\ell$  est un nombre premier, on note  $A[n] := \{a \in A : na = 0\}$ ,  $A\{\ell\}$  le sous-groupe de torsion  $\ell$ -primaire de  $A$ , et  $A_{\text{tors}}$  le sous-groupe de torsion de  $A$ . Si  $B$  est un autre groupe abélien, on note  $A \otimes B := A \otimes_{\mathbb{Z}} B$  et  $\text{Hom}(A, B) := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, B)$ . Si  $p$  est un nombre premier, on note  $A_p := A \otimes \mathbb{Z}[1/p]$ .

Si  $k$  est un corps, on note  $k^* := k \setminus \{0\}$  le groupe multiplicatif de  $k$ , et  $\bar{k}$  une clôture séparable de  $k$ . Si  $k'/k$  est une extension galoisienne de corps,  $G = \text{Gal}(k'/k)$  est le groupe de Galois, et  $M$  est un  $G$ -module continu, on note  $H^i(G, M)$  le  $i$ -ème groupe de cohomologie galoisienne de  $G$  à valeurs dans  $M$ , et on écrit  $M^G := H^0(G, M)$  pour le sous-module des éléments fixés par  $G$ . Si  $k' = \bar{k}$ , on écrit  $H^i(k, M)$  pour  $H^i(G, M)$ . Si  $X$  est un schéma et  $F$  un faisceau sur  $X$  pour la topologie étale sur  $X$ , on note  $H^i(X, F) = H_{\text{ét}}^i(X, F)$  les groupes de cohomologie étale.

Si  $k$  est un corps,  $\ell$  un nombre premier différent de la caractéristique de  $k$ , et  $n \geq 1$  un entier, on note  $\mu_{\ell^n}$  le schéma en groupes fini étale des racines  $\ell^n$ -ièmes de l'unité. Si  $i > 0$ , on note  $\mu_{\ell^n}^{\otimes i} := \mu_{\ell^n} \otimes \cdots \otimes \mu_{\ell^n}$  ( $i$  fois), et si  $i < 0$  on note  $\mu_{\ell^n}^{\otimes i} := \text{Hom}(\mu_{\ell^n}^{\otimes (-i)}, \mathbb{Z}/\ell^n)$ , et  $\mu_{\ell^n}^{\otimes 0} := \mathbb{Z}/\ell^n$ . Si  $X$  est un  $k$ -schéma, on note  $H^i(X, \mu_{\ell^n}^{\otimes j})$  les groupes de cohomologie étale associés. On note  $H^i(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(j))$  la limite directe des  $H^i(X, \mu_{\ell^n}^{\otimes j})$  pour  $n$  tendant vers l'infini. On note  $H^i(X, \mathbb{Z}_\ell(j))$  la limite projective des  $H^i(X, \mu_{\ell^n}^{\otimes j})$  et  $H^i(X, \mathbb{Q}_\ell(j)) := H^i(X, \mathbb{Z}_\ell(j)) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$ . Si  $k$  est séparablement clos et  $X$  est propre et lisse, on note  $b_i(X) := \dim_{\mathbb{Q}_\ell} H^i(X, \mathbb{Q}_\ell)$  les nombres de Betti de  $X$ .

Si  $k'/k$  est une extension de corps et  $X$  est un  $k$ -schéma, on note  $X_{k'} := X \times_k k'$ . Si  $k' = \bar{k}$ , on écrit  $\bar{X}$  pour  $X \times_k \bar{k}$ .

Une variété sur  $k$  est un schéma séparé de type fini sur le corps  $k$ . Si  $X$  est un schéma, on note  $H^i(X, \mathcal{O}_X)$  les groupes de cohomologie de Zariski à valeurs dans le faisceau structural  $\mathcal{O}_X$ , on note  $\text{Pic}(X)$  le groupe de Picard  $H_{\text{Zar}}^1(X, \mathbb{G}_m) \simeq H_{\text{ét}}^1(X, \mathbb{G}_m)$ , et on note  $\text{Br}(X)$  le groupe de Brauer cohomologique  $H_{\text{ét}}^2(X, \mathbb{G}_m)$ . Si  $X$  est une variété connexe, propre et lisse sur un corps séparablement clos, on note  $\text{NS}(X)$  le groupe de Néron-Severi de  $X$  (qui est un groupe de type fini), et on note  $\rho(X)$  le rang de  $\text{NS}(X)$ . Si  $X$  est une variété propre, lisse, géométriquement connexe sur un corps  $k$ , on note  $q(X)$  la dimension du  $k$ -espace vectoriel  $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ .

Si  $X$  est une variété sur un corps  $k$ , on note  $CH_i(X)$  le groupe des cycles de dimension  $i$  modulo équivalence rationnelle. Si  $X$  est lisse et irréductible de dimension  $d$ , on note  $CH^i(X) := CH_{d-i}(X)$ . Si  $X$  est propre sur  $k$ , on note  $A_0(X)$  le noyau de l'homomorphisme de degré  $CH_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ . Si  $X$  est irréductible, on note  $X^{(j)}$  l'ensemble des points de codimension  $j$  de  $X$ .

Si  $\ell$  est un nombre premier inversible dans  $\mathcal{O}_X$ , on note  $\mathcal{H}^i(X, \mu_{\ell^n}^{\otimes j})$  le faisceau Zariski sur  $X$  associé au préfaisceau  $U \mapsto H^i(U, \mu_{\ell^n}^{\otimes j})$ . Si  $X$  est un schéma, on note

$\mathcal{K}_i$  le faisceau Zariski sur  $X$  associé au préfaisceau  $U \mapsto K_i(H^0(U, \mathcal{O}_X))$ ,  $K_i$  étant le  $i$ -ème groupe de  $K$ -théorie de Quillen.

Terminons par un rappel sur la condition (i) du théorème 1.1. Soit  $k$  un corps d'exposant caractéristique  $p$  et  $X$  une  $k$ -variété projective, lisse, géométriquement connexe. Supposons que  $X$  est *géométriquement  $CH_0$ -triviale*, c'est-à-dire que pour tout corps algébriquement clos  $\Omega$  contenant  $k$ , l'application degré  $CH_0(X_\Omega) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  est un isomorphisme (pour une propriété équivalente, voir le lemme 3.5). Si cette propriété est satisfaite, alors, pour tout corps  $F$  contenant  $k$ , le noyau  $A_0(X_F)$  de la flèche degré  $CH_0(X_F) \rightarrow \mathbb{Z}$  est un groupe de torsion. Supposons de plus  $k$  séparablement clos. Un argument de correspondances (voir [ACP17, §1]) montre qu'alors les propriétés suivantes sont satisfaites :

(i) Pour tout  $\ell$  premier,  $\ell \neq p$ , on a  $b_1(X) = \dim(H^1(X, \mathbb{Q}_\ell)) = 0$ . La variété de Picard réduite  $\text{Pic}_{X/k, \text{red}}^0$  est triviale, et la variété d'Albanese, dont la dimension est  $b_1$ , est triviale. Le groupe de Picard  $\text{Pic}(X)$  de  $X$  coïncide avec le groupe de Néron-Severi  $\text{NS}(X)$  de  $X$ , qui est un groupe de type fini. [On n'a pas nécessairement  $q = \dim(H^1(X, \mathcal{O}_X)) = 0$ , comme le montre l'exemple de certaines surfaces d'Enriques supersingulières en caractéristique 2, qui sont (inséparablement) unirationnelles.]

(ii) Pour tout premier  $\ell \neq p$ , la flèche naturelle  $\text{NS}(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z}_\ell(1))$  est un isomorphisme. En particulier le rang  $\rho$  du groupe de Néron-Severi  $\text{NS}(X) \otimes \mathbb{Q}_\ell$  est égal au rang  $b_2$  du  $\mathbb{Q}_\ell$ -vectoriel  $H^2(X, \mathbb{Q}_\ell)$ .

(iii) Si  $\dim(X) = 2$ , la forme d'intersection sur  $\text{Num}(X) = \text{NS}(X)/\text{NS}(X)_{\text{tors}}$  a son discriminant de la forme  $\pm p^r$  pour un entier  $r \geq 0$ .

Au moins en caractéristique zéro, Spencer Bloch a conjecturé que toute surface connexe  $X$  projective et lisse sur le corps des complexes avec  $b_1 = 0$  et  $b_2 - \rho = 0$ , est géométriquement  $CH_0$ -triviale. Cela a été établi pour certaines surfaces [BKL76], parmi lesquelles les surfaces d'Enriques.

En caractéristique  $p$  quelconque, y compris  $p = 2$ , les surfaces d'Enriques sont géométriquement  $CH_0$ -trivales. En caractéristique différente de 2, ceci se soit en suivant la démonstration de [BKL76], soit en utilisant le fait que ces surfaces se relèvent en des surfaces d'Enriques en caractéristique zéro [Lan83, Proof of Thm. 1.1], et en utilisant la flèche de spécialisation de Fulton sur les groupes de Chow. En caractéristique 2, les résultats de relèvement et d'unirationalité [Lan83, Bla82] donnent le résultat.

La conjecture de Bloch a été établie pour des surfaces de type général, par exemple pour la surface de Godeaux quotient de la surface de Fermat de degré 5 par  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ , si  $p \neq 5$  (voir [IM79, Theorem 1, Remark p. 210]).

## 2. LE NOYAU DE $CH^2(X) \rightarrow CH^2(\bar{X})$

**2.1. Rappels.** Rappelons d'abord des arguments remontant à des travaux de Spencer Bloch, et qu'on peut trouver détaillés dans [CTSS83] et [CT93].

Pour  $X/k$  une variété lisse sur un corps, et  $n > 0$  entier premier à la caractéristique de  $k$ , on dispose de suites exactes

$$0 \rightarrow H_{\text{Zar}}^1(X, \mathcal{K}_2)/n \rightarrow H_{\text{Zar}}^1(X, \mathcal{K}_2/n) \rightarrow CH^2(X)[n] \rightarrow 0$$

et si  $X$  est de plus intègre

$$0 \rightarrow H_{\text{Zar}}^1(X, \mathcal{H}^2(\mu_n^{\otimes 2})) \rightarrow H^3(X, \mu_n^{\otimes 2}) \rightarrow H^3(k(X), \mu_n^{\otimes 2});$$

voir [CT93, (3.11), (3.10)] (la première utilise la conjecture de Gersten pour la  $K$ -théorie, établie par Quillen, la deuxième utilise la conjecture de Gersten en cohomologie étale, établie par Bloch et Ogus). Ces deux résultats et le théorème de Merkurjev-Suslin donnent un isomorphisme de faisceaux  $\mathcal{K}_2/n \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^2(\mu_n^{\otimes 2})$ .

Soient désormais  $k = \mathbb{F}$  un corps fini et  $X$  une variété projective, lisse, géométriquement connexe sur  $\mathbb{F}$ . Soit  $\ell$  un nombre premier distinct de la caractéristique de  $\mathbb{F}$ . En passant à la limite directe sur les puissances de  $\ell$  on obtient des suites exactes

$$0 \rightarrow H_{\text{Zar}}^1(X, \mathcal{K}_2) \otimes \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell \rightarrow H_{\text{Zar}}^1(X, \mathcal{H}^2(\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))) \rightarrow CH^2(X)\{\ell\} \rightarrow 0$$

et

$$0 \rightarrow H_{\text{Zar}}^1(X, \mathcal{H}^2(\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))) \rightarrow H^3(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \rightarrow H^3(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)).$$

Il résulte des conjectures de Weil prouvées par Deligne que le groupe  $H^3(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$  est fini ; voir [CTSS83, Théorème 2, p.780]. Ainsi la flèche composée

$$H_{\text{Zar}}^1(X, \mathcal{K}_2) \otimes \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell \rightarrow H_{\text{Zar}}^1(X, \mathcal{H}^2(\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))) \hookrightarrow H^3(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$$

est nulle. On obtient en fin de compte la suite exacte

$$0 \rightarrow CH^2(X)\{\ell\} \rightarrow H^3(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \rightarrow H^3(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)).$$

Par passage à la limite sur les extensions de  $\mathbb{F}$  on obtient une suite exacte analogue pour  $\overline{X}/\overline{\mathbb{F}}$ . On a donc un diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & CH^2(X)\{\ell\} & \longrightarrow & H^3(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) & \longrightarrow & H^3(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & CH^2(\overline{X})\{\ell\} & \longrightarrow & H^3(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) & \longrightarrow & H^3(\overline{\mathbb{F}}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)). \end{array}$$

On en déduit une suite exacte

$$(2.1) \quad 0 \rightarrow \text{Ker}[CH^2(X)\{\ell\} \rightarrow CH^2(\overline{X})\{\ell\}] \rightarrow \text{Ker}[H^3(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \rightarrow H^3(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))] \rightarrow H^3(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)),$$

qui est le début de la suite exacte (1.1).

Soit  $n \geq 1$  un entier. Si  $U \subset X$  est un ouvert, on a la suite spectrale de Hochschild-Serre en cohomologie étale

$$E_2^{p,q} := H^p(\mathbb{F}, H^q(\overline{U}, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})) \implies H^{p+q}(U, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}).$$

Pour chaque ouvert  $U \subset X$ , on a donc une suite exacte

$$(2.2) \quad 0 \rightarrow H^1(\mathbb{F}, H^2(\overline{U}, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})) \rightarrow H^3(U, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}) \rightarrow H^3(\overline{U}, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})$$

et aussi une suite exacte

$$(2.3) \quad 0 \rightarrow H^1(\mathbb{F}, H^2(\overline{\mathbb{F}}(X), \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})) \rightarrow H^3(\mathbb{F}(X), \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}) \rightarrow H^3(\overline{\mathbb{F}}(X), \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}).$$

Par limite directe sur les coefficients  $\mu_{\ell^n}^{\otimes 2}$  pour  $n$  tendant vers l'infini, on a donc les suites exactes

$$(2.4) \quad 0 \rightarrow H^1(\mathbb{F}, H^2(\overline{U}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))) \rightarrow H^3(U, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \rightarrow H^3(\overline{U}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$$

et

$$(2.5) \quad 0 \rightarrow H^1(\mathbb{F}, H^2(\overline{\mathbb{F}}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))) \rightarrow H^3(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \rightarrow H^3(\overline{\mathbb{F}}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)).$$

On a donc une injection

$$\theta_\ell : \text{Ker}[CH^2(X)\{\ell\} \rightarrow CH^2(\overline{X})\{\ell\}] \hookrightarrow H^1(\mathbb{F}, H^2(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)))$$

Ces deux groupes sont finis, car le théorème de Deligne sur les valeurs propres de Frobenius implique que les groupes  $H^1(\mathbb{F}, H^2(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)))$  et  $H^3(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$  sont finis ; voir [CTSS83, Théorème 2, p.780]. Ce théorème implique aussi que l'on a un isomorphisme de groupes finis

$$\rho_\ell : H^1(\mathbb{F}, H^2(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))) \xrightarrow{\sim} H^1(\mathbb{F}, H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))_{\text{tors}}).$$

En composant avec l'application  $\theta_\ell$ , on obtient une injection de groupes finis

$$\varphi_\ell : \text{Ker}[CH^2(X)\{\ell\} \rightarrow CH^2(\overline{X})\{\ell\}] \hookrightarrow H^1(\mathbb{F}, H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))_{\text{tors}}).$$

## 2.2. La flèche $\varphi_\ell$ est-elle un isomorphisme ?

**Proposition 2.1.** *Soit  $X$  une variété projective, lisse, géométriquement connexe sur un corps fini  $\mathbb{F}$ . Soit  $\ell$  un premier distinct de la caractéristique de  $\mathbb{F}$ . Les énoncés suivants sont équivalents :*

- (i) *L'application  $\theta_\ell$  est un isomorphisme.*
- (ii) *L'application  $\varphi_\ell$  est un isomorphisme.*
- (iii) *Le composé de l'injection de groupes finis*

$$H^1(\mathbb{F}, H^2(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))) \rightarrow H^3(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$$

*et de l'application*

$$H^3(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \rightarrow H^3(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$$

*est nulle.*

- (iv) *Le noyau de la flèche  $H^3(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \rightarrow H^3(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$  a une image nulle dans le groupe  $H^3(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ .*
- (v) *La flèche naturelle  $H^1(\mathbb{F}, H^2(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))) \rightarrow H^1(\mathbb{F}, H^2(\overline{\mathbb{F}}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)))$  est nulle.*
- (vi) *Pour tout entier  $n \geq 1$ , le noyau de la flèche  $H^3(X, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}) \rightarrow H^3(\overline{X}, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})$  a une image nulle dans  $H^3(\mathbb{F}(X), \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})$ .*
- (vii) *La propriété précédente vaut pour tout entier  $n$  suffisamment grand.*
- (viii) *Pour tout entier  $n \geq 1$ , la flèche naturelle*

$$H^1(\mathbb{F}, H^2(\overline{X}, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})) \rightarrow H^1(\mathbb{F}, H^2(\overline{\mathbb{F}}(X), \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})) \subset H^3(\mathbb{F}(X), \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})$$

*est nulle.*

- (ix) *La propriété précédente vaut pour tout entier  $n$  suffisamment grand.*

*Démonstration.* L'équivalence des propriétés (i) à (v) est formelle à partir des suites exactes mentionnées ci-dessus, qui montrent aussi que les propriétés (vi) et (vii) sont équivalentes. La propriété (vii) implique la propriété (v) par limite inductive. Que la propriété (iv) implique la propriété (vi) est une conséquence du théorème de Merkurjev-Suslin [MS82], qui implique que pour tout corps  $k$  de caractéristique différente de  $\ell$ , les flèches naturelles  $H^3(k, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}) \rightarrow H^3(k, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$  sont injectives.  $\square$

*Remarque 2.2.* 1) L'application de groupes finis

$$H^1(\mathbb{F}, H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))_{\text{tors}}) \rightarrow H^1(\mathbb{F}, H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2)))_{\text{tors}}$$

est injective mais pas a priori surjective.

2) On observera que les énoncés (iii) à (vi) se formulent purement en termes de la cohomologie étale des variétés sur les corps finis, ils ne font pas intervenir la  $K$ -théorie algébrique. Mais pour passer des énoncés au niveau  $\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)$  à tout niveau fini  $\mu_{\ell^n}^{\otimes 2}$ , il faut utiliser le théorème de Merkurjev-Suslin.

3) Ces énoncés sont trivialement vrais pour  $X$  de dimension 1. Comme établi dans [CTSS83], ces énoncés équivalents sont connus pour  $X$  de dimension 2.

Le lemme suivant est bien connu.

**Lemme 2.3.** *Soit  $k$  un corps parfait dont le groupe de Galois absolu est procyclique. Soit  $M$  un  $k$ -groupe de type multiplicatif fini,  $\hat{M}$  son groupe des caractères. Supposons que la torsion de  $\hat{M}$  est d'ordre premier à la caractéristique de  $k$ . Alors il existe une suite exacte de  $k$ -groupes algébriques commutatifs lisses*

$$1 \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow 1$$

avec  $P$  un  $k$ -tore quasitrivial et  $Q$  un  $k$ -tore facteur direct d'un  $k$ -tore quasitrivial.

*Démonstration.* Rappelons qu'un  $k$ -tore  $T$  est appelé quasitrivial si son groupe de caractères  $\hat{T}$  est un module galoisien de permutation et qu'il est appelé coflasque si  $H^1(K, \hat{T}) = 0$  pour toute extension de corps  $K/k$ . D'après Endo et Miyata [EM75, Lemma 1.1], pour tout  $k$ -groupe de type multiplicatif  $M$  il existe une suite exacte de modules galoisiens  $0 \rightarrow \hat{Q} \rightarrow \hat{P} \rightarrow \hat{M} \rightarrow 0$  avec  $\hat{P}$  de permutation et  $\hat{Q}$  coflasque. Sous l'hypothèse que le groupe de Galois absolu est procyclique, tout module galoisien sans torsion de type fini qui est coflasque est un facteur direct d'un module de permutation (Endo et Miyata, [EM75, Theorem 1.5]). Par dualité de Cartier, on conclut.  $\square$

**Proposition 2.4.** *Soit  $X$  une variété projective et lisse, géométriquement connexe sur un corps fini  $\mathbb{F}$ . Soient  $\mathbb{F}(X)$  son corps des fonctions rationnelles, et*

$$\text{Br}_1(X) := \text{Ker}[\text{Br}(X) \rightarrow \text{Br}(\overline{X})].$$

*Supposons que le module galoisien défini par le groupe de Néron-Severi géométrique  $\text{NS}(\overline{X})$  de  $X$  est facteur direct d'un module de permutation (en particulier,  $\text{NS}(\overline{X})$  est sans-torsion). Alors :*

- (a) *On a  $\text{Br}_1(X_{\mathbb{F}'}) = 0$  pour toute extension finie  $\mathbb{F}'$  de  $\mathbb{F}$ .*
- (b) *Pour tout  $\mathbb{F}$ -tore  $R$  facteur direct d'un  $\mathbb{F}$ -tore quasitrivial, on a*

$$\text{Ker}[H^2(X, R) \rightarrow H^2(\overline{X}, R)] = 0.$$

(c) *Pour tout  $\mathbb{F}$ -groupe de type multiplicatif fini  $M$  d'ordre premier à la caractéristique de  $\mathbb{F}$ , l'image de  $\text{Ker}[H^2(X, M) \rightarrow H^2(\overline{X}, M)]$  dans  $H^2(\mathbb{F}(X), M)$  est nulle.<sup>1</sup>*

(d) *Pour tout  $\mathbb{F}$ -groupe de type multiplicatif fini  $M$  d'ordre premier à la caractéristique de  $\mathbb{F}$ , l'image de  $H^1(\mathbb{F}, H^1(\overline{X}, M))$  dans  $H^1(\mathbb{F}, H^1(\mathbb{F}(X), M))$  est nulle.*

1. La restriction  $\text{NS}(\overline{X})$  sans torsion est nécessaire. Soit  $X/\mathbb{F}$  une surface d'Enriques sur un corps fini  $\mathbb{F}$  de caractéristique impaire. Supposons  $\text{Pic}(X) = \text{Pic}(\overline{X})$ . Pour  $M = \mu_2$ , l'énoncé (c) est en défaut.

*Démonstration.* Pour une variété projective  $X$  géométriquement intègre sur un corps  $k$  et  $\bar{k}$  une clôture séparable de  $k$ , et  $\bar{X} = X \times_k \bar{k}$ , on a la suite exacte

$$\mathrm{Br}(k) \rightarrow \mathrm{Br}_1(X) \rightarrow H^1(k, \mathrm{Pic}(\bar{X})).$$

Si  $X$  de plus est lisse, on a une suite exacte de modules galoisiens

$$0 \rightarrow J_X(\bar{k}) \rightarrow \mathrm{Pic}(\bar{X}) \rightarrow \mathrm{NS}(\bar{X}) \rightarrow 0,$$

où  $J_X = \mathrm{Pic}_{X/k}^0$  est la variété de Picard, qui est une variété abélienne, et  $\mathrm{NS}(\bar{X})$  est le groupe de Néron-Severi géométrique. Pour  $k = \mathbb{F}$  un corps fini, on a  $H^1(\mathbb{F}, J) = 0$  (Lang) et  $\mathrm{Br}(\mathbb{F}) = 0$ . Sous l'hypothèse faite sur le groupe de Néron-Severi, on a  $H^1(\mathbb{F}, \mathrm{NS}(\bar{X})) = 0$ . On a donc  $\mathrm{Br}_1(X) = 0$ . Comme les hypothèses sont inchangées, ceci vaut encore sur toute extension finie. Ceci donne (a) et (b).

Soit

$$1 \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow 1$$

une suite exacte donnée par le lemme 2.3. Comme  $Q$  est facteur direct d'un tore quasi-trivial, le lemme de Shapiro et le théorème 90 de Hilbert donnent  $H^1(\mathbb{F}(X), Q) = 0$ . On a donc une injection  $H^2(\mathbb{F}(X), M) \hookrightarrow H^2(\mathbb{F}(X), P)$ .

On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^2(X, M) & \longrightarrow & H^2(X, P) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^2(\mathbb{F}(X), M) & \longrightarrow & H^2(\mathbb{F}(X), P). \end{array}$$

D'après (b), le noyau de  $\mathrm{Ker}[H^2(X, M) \rightarrow H^2(\bar{X}, M)]$  a une image nulle dans  $H^2(X, P)$ . Il résulte alors du diagramme que l'image de  $\mathrm{Ker}[H^2(X, M) \rightarrow H^2(\bar{X}, M)]$  dans  $H^2(\mathbb{F}(X), M)$  est nulle, soit (c). L'énoncé (d) résulte alors de la suite des termes de bas degré des suites spectrales de Hochschild-Serre.  $\square$

**Théorème 2.5.** *Soient  $\mathbb{F}$  un corps fini et  $\ell$  un premier distinct de la caractéristique de  $\mathbb{F}$ . Soient  $Y$  et  $Z$  deux variétés géométriquement connexes, projectives et lisses sur  $\mathbb{F}$ , de dimensions quelconques, et  $X := Y \times Z$ . Supposons que le module galoisien défini par le groupe de Néron-Severi géométrique  $\mathrm{NS}(\bar{Y})$  de  $Y$  est facteur direct d'un module de permutation. Si les propriétés équivalentes de la proposition 2.1 valent pour  $Y$  et pour  $Z$ , alors elles valent pour  $X$ .*

*Démonstration.* Soit  $n \geq 1$  un entier. Soient  $U \subset Y$  et  $V \subset Z$  des ouverts non vides. Soit  $W := U \times V$ . On a un homomorphisme Galois-équivariant

$$H^2(\bar{U}, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}) \oplus [H^1(\bar{U}, \mu_{\ell^n}) \otimes H^1(\bar{V}, \mu_{\ell^n})] \oplus H^2(\bar{V}, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}) \rightarrow H^2(\bar{W}, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}).$$

Les flèches  $H^2(\bar{U}, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}) \rightarrow H^2(\bar{W}, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})$  et  $H^2(\bar{V}, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}) \rightarrow H^2(\bar{W}, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})$  sont induites par les projections naturelles. La flèche  $H^1(\bar{U}, \mu_{\ell^n}) \otimes H^1(\bar{V}, \mu_{\ell^n}) \rightarrow H^2(\bar{W}, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})$  est induite par les projections naturelles et le cup-produit.

Skorobogatov et Zarhin [SZ14, Theorem 2.6] ont montré que lorsque  $U = Y$  et  $V = Z$  sont propres, cet homomorphisme est un isomorphisme

$$H^2(\bar{Y}, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}) \oplus [H^1(\bar{Y}, \mu_{\ell^n}) \otimes H^1(\bar{Z}, \mu_{\ell^n})] \oplus H^2(\bar{Z}, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}) \xrightarrow{\sim} H^2(\bar{X}, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}).$$

Ceci n'est pas une conséquence formelle de la formule de Künneth en cohomologie étale.

La projection  $X \rightarrow Z$  induit un diagramme commutatif d'homomorphismes

$$\begin{array}{ccccc} H^1(\mathbb{F}, H^2(\overline{Z}, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})) & \longrightarrow & H^3(Z, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}) & \longrightarrow & H^3(\mathbb{F}(Z), \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^1(\mathbb{F}, H^2(\overline{X}, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})) & \longrightarrow & H^3(X, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}) & \longrightarrow & H^3(\mathbb{F}(X), \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}) \end{array}$$

Par hypothèse, la composée  $H^1(\mathbb{F}, H^2(\overline{Z}, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})) \rightarrow H^3(\mathbb{F}(Z), \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})$  est nulle. Ainsi la flèche composée

$$H^1(\mathbb{F}, H^2(\overline{Z}, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})) \rightarrow H^1(\mathbb{F}, H^2(\overline{X}, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})) \rightarrow H^3(\mathbb{F}(X), \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})$$

est nulle. Le même argument vaut avec  $Y$  en place de  $Z$ .

Pour établir l'énoncé sur  $X$ , il reste à voir que, pour tout  $n \geq 1$ , la flèche de modules galoisiens

$$H^1(\overline{Y}, \mu_{\ell^n}) \otimes H^1(\overline{Z}, \mu_{\ell^n}) \rightarrow H^2(\overline{X}, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}) \rightarrow H^2(\overline{\mathbb{F}(X)}, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})$$

induit une application nulle par application de  $H^1(\mathbb{F}, -)$ .

Notons  $M_n := H^1(\overline{Z}, \mu_{\ell^n})$ .

Considérons le diagramme commutatif d'homomorphismes galoisiens

$$\begin{array}{ccccc} H^2(\overline{X}, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}) & \longleftarrow & H^1(\overline{Y}, \mu_{\ell^n}) \otimes H^1(\overline{Z}, \mu_{\ell^n}) = H^1(\overline{Y}, \mu_{\ell^n}) \otimes M_n & \longrightarrow & H^1(\overline{Y}, \mu_{\ell^n} \otimes M_n) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^2(\overline{\mathbb{F}(X)}, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}) & \longleftarrow & H^1(\overline{\mathbb{F}(Y)}, \mu_{\ell^n}) \otimes H^1(\overline{Z}, \mu_{\ell^n}) = H^1(\overline{\mathbb{F}(Y)}, \mu_{\ell^n}) \otimes M_n & \longrightarrow & H^1(\overline{\mathbb{F}(Y)}, \mu_{\ell^n} \otimes M_n). \end{array}$$

Dans ce diagramme, les flèches horizontales de droite sont données par les cup-produits sur la cohomologie étale de  $\overline{Y}$  et de  $\overline{\mathbb{F}(Y)}$  :

$$H^1(\overline{Y}, \mu_{\ell^n}) \otimes H^0(\overline{\mathbb{F}}, M_n) \rightarrow H^1(\overline{Y}, \mu_{\ell^n} \otimes M_n)$$

et

$$H^1(\overline{\mathbb{F}(Y)}, \mu_{\ell^n}) \otimes H^0(\overline{\mathbb{F}}, M_n) \rightarrow H^1(\overline{\mathbb{F}(Y)}, \mu_{\ell^n} \otimes M_n).$$

La flèche verticale de droite est injective car  $\overline{Y}$  est normale. La flèche horizontale inférieure droite est Galois-équivariante pour l'action de  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}(Y)}/\mathbb{F}(Y)) \simeq \text{Gal}(\overline{\mathbb{F}}/\mathbb{F})$  (voir [GSz, Prop. 3.4.10.4]). La flèche horizontale supérieure droite est donc  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}}/\mathbb{F})$  équivariante.

La flèche inférieure droite est par ailleurs un isomorphisme de modules galoisiens. Pour le voir, il suffit de considérer les groupes abéliens sous-jacents. Comme groupe abélien, le module  $M_n = H^1(\overline{Z}, \mu_{\ell^n})$  est une somme directe  $\bigoplus_i \mathbb{Z}/\ell^{r_i}$  avec  $r_i \leq n$ . Par la théorie de Kummer, l'application

$$H^1(\overline{\mathbb{F}(Y)}, \mu_{\ell^n}) \otimes M_n = H^1(\overline{\mathbb{F}(Y)}, \mu_{\ell^n}) \otimes H^0(\overline{\mathbb{F}}, M_n) \rightarrow H^1(\overline{\mathbb{F}(Y)}, \mu_{\ell^n} \otimes M_n)$$

est donc un isomorphisme.

L'hypothèse que  $\text{NS}(\overline{Y})$  est un facteur direct d'un module de permutation et la proposition 2.4 (d) donnent que l'application

$$H^1(\mathbb{F}, H^1(\overline{Y}, \mu_{\ell^n} \otimes M_n)) \rightarrow H^1(\mathbb{F}, H^1(\overline{\mathbb{F}(Y)}, \mu_{\ell^n} \otimes M_n))$$

est nulle.

On en déduit que l'application

$$H^1(\mathbb{F}, H^1(\overline{Y}, \mu_{\ell^n}) \otimes H^1(\overline{Z}, \mu_{\ell^n})) \rightarrow H^1(\mathbb{F}, H^1(\overline{\mathbb{F}(Y)}, \mu_{\ell^n}) \otimes H^1(\overline{Z}, \mu_{\ell^n}))$$

est nulle. Ceci implique alors que l'application

$$H^1(\mathbb{F}, H^1(\overline{Y}, \mu_{\ell^n}) \otimes H^1(\overline{Z}, \mu_{\ell^n})) \rightarrow H^1(\mathbb{F}, H^2(\overline{\mathbb{F}(X)}, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}))$$

déduite du diagramme ci-dessus est nulle, ce qu'il fallait démontrer.  $\square$

**Corollaire 2.6.** *Soit  $\mathbb{F}$  un corps fini et  $\ell$  un premier distinct de la caractéristique de  $\mathbb{F}$ . Soit  $S/\mathbb{F}$ , resp.  $C/\mathbb{F}$ , une surface, resp. une courbe, projective, lisse, géométriquement connexe. Alors :*

- (a) *Les propriétés équivalentes de la proposition 2.1 valent pour  $X = C \times S$ .*
- (b) *La flèche*

$$\varphi_\ell : \text{Ker}[CH^2(X)\{\ell\} \rightarrow CH^2(\overline{X})\{\ell\}] \hookrightarrow H^1(\mathbb{F}, H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))_{\text{tors}})$$

*est un isomorphisme de groupes finis.*

- (c) *On a un isomorphisme*

$$\begin{aligned} \text{Ker}[H_{\text{nr}}^3(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \rightarrow H_{\text{nr}}^3(\overline{\mathbb{F}}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))] \\ \xrightarrow{\sim} \text{Coker}[CH^2(X) \rightarrow CH^2(\overline{X})^G]\{\ell\}. \end{aligned}$$

*Démonstration.* On a  $\text{NS}(\overline{C}) = \mathbb{Z}$  avec action triviale du groupe de Galois. Les conditions équivalentes de la proposition 2.1 sont connues pour une surface projective, lisse, géométriquement connexe. On obtient donc (b). Dans la suite exacte (1.1), la flèche injective de groupes finis

$$\text{Ker}[CH^2(X)\{\ell\} \rightarrow CH^2(\overline{X})\{\ell\}] \hookrightarrow H^1(\mathbb{F}, H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))_{\text{tors}})$$

est donc surjective. La suite exacte (1.1) donne alors (c).  $\square$

### 3. CORRESPONDANCES ET DÉBUT DE PREUVE

La Nature est un temple où de vivants piliers  
Laissent parfois sortir de confuses paroles ;  
L'homme y passe à travers des forêts de symboles  
Qui l'observent avec des regards familiers.  
(Sonnet des Correspondances, Charles Baudelaire)

**3.1. Sur un corps algébriquement clos.** Soient  $k$  un corps algébriquement clos d'exposant caractéristique  $p$ . Soient  $C$  une courbe connexe, projective et lisse sur  $k$ ,  $S$  une surface connexe, projective et lisse sur  $k$ , et  $X := C \times S$ .

Notons  $p : X \rightarrow C$  et  $q : X \rightarrow S$  les deux projections<sup>2</sup>.

On a un homomorphisme

$$\mu : \text{Pic}(C) \otimes \text{Pic}(S) \xrightarrow{p^* \otimes q^*} \text{Pic}(X) \otimes \text{Pic}(X) \rightarrow CH^2(X),$$

où l'homomorphisme à droite est la flèche d'intersection. Soit

$$\lambda : CH^2(X) \rightarrow \text{Hom}(\text{Pic}(S), CH_0(C)), \quad \lambda(\Delta) := p_*(q^*(-) \cap \Delta),$$

tel que  $\lambda(\Delta) : \text{Pic}(S) \rightarrow CH_0(C)$  est l'homomorphisme standard induit par une correspondance  $\Delta$  ; voir par exemple [Ful98, Définition 16.1.2]. Enfin, on a un homomorphisme

$$\nu : \text{Pic}(C) \otimes \text{Pic}(S) \xrightarrow{\mu} CH^2(X) = CH_1(X) \xrightarrow{q_*} CH_1(S) = \text{Pic}(S).$$

<sup>2</sup>. La lettre  $p$  est ici utilisée dans deux acceptions distinctes, mais aucune confusion n'est possible.

**Lemme 3.1.** (i) *L'application composée*

$$\lambda \circ \mu : \text{Pic}(C) \otimes \text{Pic}(S) \rightarrow CH^2(X) \rightarrow \text{Hom}(\text{Pic}(S), CH_0(C))$$

*envoie un élément  $z \otimes D$  sur l'application qui envoie un élément  $E \in \text{Pic}(S)$  sur  $\deg(D \cdot E) \cdot z$ , où  $(D \cdot E) \in CH_0(S)$ .*

(ii) *L'application  $\nu : \text{Pic}(C) \otimes \text{Pic}(S) \rightarrow \text{Pic}(S)$  envoie un élément  $z \otimes D$  sur  $\deg(z) \cdot D$ .*

*Démonstration.* On utilisera le diagramme cartésien évident

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{q} & S \\ \downarrow p & & \downarrow r \\ C & \xrightarrow{s} & \text{Spec } k. \end{array}$$

(i) On veut démontrer que l'on a  $p_*((p^*(z) \cdot q^*(D)) \cdot q^*(D)) = \deg(D \cdot E) \cdot z$ . Par la formule de projection, on a

$$p_*((p^*(z) \cdot q^*(D)) \cdot q^*(E)) = p_*(p^*(z) \cdot q^*(D \cdot E)) = z \cdot p_*q^*(D \cdot E).$$

En utilisant le diagramme ci-dessus, on obtient

$$p_*q^*(D \cdot E) = s^*r_*(D \cdot E) = s^*(\deg(D \cdot E)) = \deg(D \cdot E)[C].$$

On conclut que l'on a  $z \cdot p_*q^*(D \cdot E) = \deg(D \cdot E) \cdot z$ .

(ii) On veut montrer que l'on a  $q_*((p^*(z) \cdot q^*(D)) = \deg(z) \cdot D$ . Par la formule de projection, on a

$$q_*((p^*(z) \cdot q^*(D)) = q_*p^*(z) \cdot D.$$

Par le diagramme ci-dessus, on a

$$q_*p^*(z) \cdot D = r^*s_*(z) \cdot D = r^*(\deg(z)) \cdot D = \deg(z) \cdot D. \quad \square$$

**Proposition 3.2.** *Soit  $k$  un corps algébriquement clos d'exposant caractéristique  $p$ . Soit  $C/k$  une courbe projective et lisse connexe. Soit  $S$  une surface projective, lisse sur  $k$  et connexe. Supposons que  $\text{Pic}(S)$  est de type fini et que le discriminant de la forme d'intersection sur  $\text{Num}(S) = \text{NS}(S)/\text{NS}(S)_{\text{tors}}$  est de la forme  $\pm p^r$  pour un entier  $r \geq 0$ , ce qui est le cas si l'on a  $b_1 = 0$  et  $b_2 - \rho = 0$ . Soit  $X = C \times S$ . Alors :*

(i) *La flèche composée*

$$\text{Pic}(C) \otimes \text{Pic}(S) \rightarrow CH^2(X) \xrightarrow{\lambda} \text{Hom}(\text{Pic}(S), \text{Pic}(C))$$

*se factorise comme*

$$\begin{aligned} \text{Pic}(C) \otimes \text{Pic}(S) &\rightarrow \text{Pic}(C) \otimes \text{Num}(S) \\ &\rightarrow \text{Hom}(\text{Num}(S), \text{Pic}(C)) \rightarrow \text{Hom}(\text{Pic}(S), \text{Pic}(C)) \end{aligned}$$

*où la première flèche est une surjection, la dernière flèche une injection et la flèche médiane a noyau et conoyau finis  $p$ -primaires.*

(ii) *Le noyau  $N$  de l'homomorphisme naturel*

$$\text{Pic}(C) \otimes \text{Pic}(S) \rightarrow CH^2(X)$$

*obtenu par image réciproque via chacune des projections, et intersection sur  $X$ , est un groupe fini  $p$ -primaire.*

(iii) Soit  $L = k(C)$  le corps des fonctions de la courbe  $C$ . La restriction de la projection  $p : X \rightarrow C$  au-dessus du point générique de  $C$  induit une flèche surjective  $CH^2(X) \rightarrow CH^2(S_L)$  et une suite exacte

$$0 \rightarrow N \rightarrow \text{Pic}(C) \otimes \text{Pic}(S) \rightarrow CH^2(X) \rightarrow CH^2(S_L) \rightarrow 0.$$

avec  $N$  un groupe fini  $p$ -primaire.

(iv) La flèche  $\lambda : CH^2(X) \rightarrow \text{Hom}(\text{Pic}(S), \text{Pic}(C))$  induit un homomorphisme  $CH^2(S_L) \rightarrow \text{Hom}(\text{Pic}(S)_{\text{tors}}, \text{Pic}(C))$ .

*Démonstration.* On utilise tacitement le fait que  $\text{Pic}(C) \simeq \mathbb{Z} \oplus \text{Pic}^0(C)$ , et que pour tout entier  $n > 0$  la multiplication par  $n$  sur  $\text{Pic}^0(C)$  est surjective à noyau fini.

(i) Vu le lemme 3.1(i), cette flèche composée se factorise par

$$\text{Pic}(C) \otimes \text{Num}(S) \rightarrow \text{Hom}(\text{Num}(S), \text{Pic}(C)).$$

L'hypothèse sur  $S$  et la forme d'intersection donnent une suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Num}(S) \rightarrow \text{Hom}(\text{Num}(S), \mathbb{Z}) \rightarrow R \rightarrow 0$$

avec  $R$  fini  $p$ -primaire. Si l'on tensorise cette suite exacte par  $\text{Pic}(C)$  et l'on utilise la structure de  $\text{Pic}(C)$ , on voit que l'homomorphisme

$$\text{Pic}(C) \otimes \text{Num}(S) \rightarrow \text{Hom}(\text{Num}(S), \mathbb{Z}) \otimes \text{Pic}(C) = \text{Hom}(\text{Num}(S), \text{Pic}(C))$$

a noyau et conoyau finis  $p$ -primaires. Notons  $p^r$  l'exposant du noyau.

(ii) Soit  $\alpha$  dans le noyau de  $\text{Pic}(C) \otimes \text{Pic}(S) \rightarrow CH^2(X)$ . Ce groupe est contenu dans le noyau de l'application composée avec  $\lambda$  :

$$\text{Pic}(C) \otimes \text{Pic}(S) \rightarrow \text{Hom}(\text{Pic}(S), \text{Pic}(C)).$$

L'image de  $p^r \cdot \alpha$  dans  $\text{Pic}(C) \otimes \text{Num}(S)$  est nulle.

On a la suite exacte

$$(3.1) \quad 0 \rightarrow \text{Pic}(S)_{\text{tors}} \rightarrow \text{Pic}(S) \rightarrow \text{Num}(S) \rightarrow 0$$

qui est scindée comme suite de groupes abéliens. On a donc une suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Pic}(C) \otimes \text{Pic}(S)_{\text{tors}} \rightarrow \text{Pic}(C) \otimes \text{Pic}(S) \rightarrow \text{Pic}(C) \otimes \text{Num}(S) \rightarrow 0.$$

Ainsi  $\beta = p^r \cdot \alpha$  est dans l'image du groupe fini  $\text{Pic}(C) \otimes \text{Pic}(S)_{\text{tors}}$ . Fixons un point  $P \in C(k)$ . Comme le groupe  $\text{Pic}^0(C)$  est divisible, et donc  $\text{Pic}^0(C) \otimes \text{Pic}(S)_{\text{tors}} = 0$ , l'élément  $\beta$  peut s'écrire  $n \cdot (P \otimes D)$  avec  $D \in \text{Pic}(S)_{\text{tors}}$  et  $n$  un entier.

Par hypothèse, l'image de  $\alpha$ , et donc de  $\beta$  dans  $CH^2(X)$  est nulle. Utilisons maintenant l'application  $CH^2(X) \rightarrow \text{Pic}(S)$  et le lemme 3.1(ii). On obtient  $n \cdot D = 0 \in \text{Pic}(S)$ . Donc  $\beta = 0$  et  $p^r \cdot \alpha = 0$ . On conclut que le noyau de

$$\text{Pic}(C) \otimes \text{Pic}(S) \rightarrow CH^2(X)$$

est contenu dans le sous-groupe de  $\text{Pic}(C) \otimes \text{Pic}(S)$  annulé par  $p^r$ . Ce sous-groupe est un groupe fini.

(iii) Pour toute courbe projective et lisse connexe  $C$  sur  $k$  algébriquement clos et toute variété projective et lisse connexe  $S$  sur  $k$ , la restriction de la projection  $X = C \times S \rightarrow C$  au point générique de  $C$  induit la suite exacte de localisation bien connue

$$\bigoplus_{x \in C^{(1)}} \text{Pic}(S_x) \rightarrow CH^2(X) \rightarrow CH^2(S_L) \rightarrow 0,$$

soit encore

$$\text{Div}(C) \otimes \text{Pic}(S) \rightarrow CH^2(X) \rightarrow CH^2(S_L) \rightarrow 0.$$

Elle induit une suite exacte

$$\mathrm{Pic}(C) \otimes \mathrm{Pic}(S) \rightarrow CH^2(X) \rightarrow CH^2(S_L) \rightarrow 0.$$

Dans le cas ici considéré, on a établi que la flèche  $\mathrm{Pic}(C) \otimes \mathrm{Pic}(S) \rightarrow CH^2(X)$  a son noyau fini  $p$ -primaire.

L'énoncé (iv) résulte de la suite exacte (3.1) et du fait que l'application composée  $\mathrm{Pic}(C) \otimes \mathrm{Pic}(S) \rightarrow CH^2(X) \rightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{Pic}(S), \mathrm{Pic}(C))$  se factorise par le groupe  $\mathrm{Hom}(\mathrm{Num}(S), \mathrm{Pic}(C))$ .  $\square$

**3.2. Sur un corps fini.** Soit  $\mathfrak{g}$  un groupe profini,  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  un sous-groupe normal ouvert. Soit  $G = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ . Soient  $M$  et  $N$  deux  $\mathfrak{g}$ -modules continus discrets.

On a un homomorphisme de groupes abéliens

$$\theta_{\mathfrak{h}} : M^{\mathfrak{h}} \otimes N^{\mathfrak{h}} \rightarrow M \otimes N$$

défini par

$$(m \otimes n) \mapsto \sum_{g \in G} g(m \otimes n) = \sum_{g \in G} g(m) \otimes g(n).$$

On vérifie immédiatement que l'image de  $\theta_{\mathfrak{h}}$  est dans  $(M \otimes N)^{\mathfrak{g}}$ . On considère l'application

$$\Theta_{M,N} := \bigoplus_{\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}} \theta_{\mathfrak{h}} : \bigoplus_{\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}} (M^{\mathfrak{h}} \otimes N^{\mathfrak{h}}) \rightarrow (M \otimes N)^{\mathfrak{g}}.$$

**Lemme 3.3.** *Soient  $\mathbb{F}$  un corps fini et  $\mathfrak{g} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}/\mathbb{F})$ . Soient  $M$  un  $\mathfrak{g}$ -module de type fini, et  $N$  un  $\mathfrak{g}$ -module. Supposons que  $N$  satisfait  $H^1(\mathfrak{h}, N) = 0$  pour tout sous-groupe ouvert  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ . Alors  $\Theta_{M,N}$  est surjective.*

*Démonstration.* On commence par l'établir pour un  $\mathfrak{g}$ -module de la forme  $M = \mathbb{Z}[\mathfrak{g}/\mathfrak{h}]$ . C'est un énoncé général. Notons que l'on a  $M = M^{\mathfrak{h}}$ . Dans ce cas, pour tout  $\mathfrak{g}$ -module  $N$ , on a  $N^{\mathfrak{h}} \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}[\mathfrak{g}/\mathfrak{h}] \otimes N)^{\mathfrak{g}}$ , la flèche étant donnée par  $n \mapsto \sum_{\sigma \in G} \sigma \otimes (\sigma \cdot n)$ . Ceci implique que la flèche  $M^{\mathfrak{h}} \otimes N^{\mathfrak{h}} \rightarrow (M \otimes N)^{\mathfrak{g}}$  donnée par

$$m \otimes n \mapsto \sum_{g \in G} g(m) \otimes g(n)$$

est surjective. On en déduit que pour tout  $\mathfrak{g}$ -module  $P$  de permutation et tout  $\mathfrak{g}$ -module  $N$  l'application  $\Theta_{P,N}$  est surjective.

Soit maintenant  $M$  un  $\mathfrak{g}$ -module de type fini. Comme rappelé au lemme 2.3, on a une suite exacte courte de  $\mathfrak{g}$ -modules

$$0 \rightarrow Q \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0,$$

où  $P$  est un  $\mathfrak{g}$ -réseau de permutation and  $Q$  est un facteur direct d'un  $\mathfrak{g}$ -réseau de permutation.

Tensorisons la suite exacte ci-dessus par  $N$ . On obtient une suite exacte

$$0 \rightarrow R \rightarrow Q \otimes N \rightarrow P \otimes N \rightarrow M \otimes N \rightarrow 0,$$

où  $R$  est un  $\mathfrak{g}$ -module de torsion. Cette suite se coupe en deux suites exactes

$$0 \rightarrow R \rightarrow Q \otimes N \rightarrow S \rightarrow 0$$

et

$$0 \rightarrow S \rightarrow P \otimes N \rightarrow M \otimes N \rightarrow 0.$$

La première donne la suite exacte

$$H^1(\mathfrak{g}, Q \otimes N) \rightarrow H^1(\mathfrak{g}, S) \rightarrow H^2(\mathfrak{g}, R).$$

L'hypothèse faite sur  $N$  dans le lemme, le fait que  $Q$  est un facteur direct d'un module de permutation, et le lemme de Shapiro, donnent  $H^1(\mathfrak{g}, Q \otimes N) = 0$ . Par ailleurs, comme  $\mathbb{F}$  est un corps fini et  $R$  est de torsion, on a  $H^2(\mathfrak{g}, R) = 0$ . On a donc  $H^1(\mathfrak{g}, S) = 0$ . La deuxième suite exacte donne alors que l'application  $(P \otimes N)^{\mathfrak{g}} \rightarrow (M \otimes N)^{\mathfrak{g}}$  est surjective.

L'homomorphisme  $P \rightarrow M$  induit le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}} (P^{\mathfrak{h}} \otimes N^{\mathfrak{h}}) & \xrightarrow{\Theta_{P,N}} & (P \otimes N)^{\mathfrak{g}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigoplus_{\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}} (M^{\mathfrak{h}} \otimes N^{\mathfrak{h}}) & \xrightarrow{\Theta_{M,N}} & (M \otimes N)^{\mathfrak{g}}. \end{array}$$

Le fait que  $\Theta_{P,N}$  est surjectif implique donc que  $\Theta_{M,N}$  est surjectif.  $\square$

**Proposition 3.4.** *Soit  $\mathbb{F}$  un corps fini de caractéristique  $p$ . Soit  $G = \text{Gal}(\overline{\mathbb{F}}/\mathbb{F})$ . Soit  $C/\mathbb{F}$  une courbe projective, lisse et géométriquement connexe. Soit  $K = \mathbb{F}(C)$  et  $L = \overline{\mathbb{F}}(C)$ . Soit  $S/\mathbb{F}$  une surface projective, lisse et géométriquement connexe. Supposons que  $\text{Pic}(\overline{S})$  est de type fini et que le discriminant de la forme d'intersection sur le réseau  $\text{Num}(\overline{S}) = \text{NS}(\overline{S})/\text{NS}(\overline{S})_{\text{tors}}$  est de la forme  $\pm p^r$  pour un entier  $r \geq 0$ , ce qui est le cas si l'on a  $b_1 = 0$  et  $b_2 - \rho = 0$ . Soit  $X = C \times_{\mathbb{F}} S$ . Alors :*

(i) *La suite exacte*

$$0 \rightarrow (\text{Pic}(\overline{S}) \otimes \text{Pic}(\overline{C}))_p \rightarrow CH^2(\overline{X})_p \rightarrow CH^2(S_L)_p \rightarrow 0$$

*obtenue à partir de celle de la proposition 3.2 par tensorisation par  $\mathbb{Z}[1/p]$  induit une suite exacte*

$$0 \rightarrow (\text{Pic}(\overline{S}) \otimes \text{Pic}(\overline{C}))_p^G \rightarrow CH^2(\overline{X})_p^G \rightarrow CH^2(S_L)_p^G \rightarrow 0.$$

(ii) *L'image de  $(\text{Pic}(\overline{S}) \otimes \text{Pic}(\overline{C}))_p^G \rightarrow CH^2(\overline{X})_p^G$  est incluse dans l'image de  $CH^2(X) \rightarrow CH^2(\overline{X})_p^G$ .*

(iii) *La restriction  $CH^2(\overline{X}) \rightarrow CH^2(S_L)$  induit un isomorphisme de groupes de torsion*

$$\text{Coker}[CH^2(X) \rightarrow CH^2(\overline{X})_p^G]_p \xrightarrow{\sim} \text{Coker}[CH^2(S_K) \rightarrow CH^2(S_L)_p^G]_p$$

*et ce dernier groupe est isomorphe à  $\text{Coker}[A_0(S_K) \rightarrow A_0(S_L)_p^G]_p$ .*

*Démonstration.* Sur  $\overline{X} = \overline{C} \times \overline{S}$ , les correspondances considérées dans la sous-section 3.1 induisent des homomorphismes  $G$ -équivariants.

On considère la suite de cohomologie galoisienne associée à la suite tensorisée par  $\mathbb{Z}[1/p]$ . Notons  $M$  le noyau de  $CH^2(\overline{X}) \rightarrow CH^2(S_L)$ . Par la suite de la proposition 3.2(iii), on a  $(\text{Pic}(\overline{C}) \otimes \text{Pic}(\overline{S}))_p \xrightarrow{\sim} M_p$ . Ceci donne la première suite exacte de (i). Par passage à la cohomologie galoisienne, on déduit formellement une suite exacte

$$0 \rightarrow (\text{Pic}(\overline{S}) \otimes \text{Pic}(\overline{C}))_p^G \rightarrow CH^2(\overline{X})_p^G \rightarrow CH^2(S_L)_p^G$$

et le fait que la dernière flèche est surjective si et seulement si la flèche

$$H^1(G, \text{Pic}(\overline{S}) \otimes \text{Pic}(\overline{C}))_p \rightarrow H^1(G, CH^2(\overline{X}))_p$$

est injective. Ici on utilise le fait que, comme  $\mathbb{Z}[1/p]$  est  $\mathbb{Z}$ -plat, la cohomologie et les  $G$ -invariants en particulier commutent avec tensorisation par  $\mathbb{Z}[1/p]$ . On a :

$$\text{Pic}(\overline{S}) \otimes \text{Pic}(\overline{C}) = \text{Pic}(\overline{S}) \oplus [\text{Pic}(\overline{S}) \otimes \text{Pic}^0(\overline{C})].$$

On va maintenant utiliser le fait que le corps de base  $\mathbb{F}$  est fini. Pour la courbe  $C$  projective et lisse sur le corps fini  $\mathbb{F}$ , on a  $H^1(\mathbb{F}, R \otimes \text{Pic}^0(\overline{C})) = 0$  pour tout module galoisien de type fini  $R$  (conséquence du théorème de Lang). La flèche  $H^1(\mathbb{F}, \text{Pic}(\overline{S})) \rightarrow H^1(\mathbb{F}, \text{Pic}(\overline{S}) \otimes \text{Pic}(\overline{C}))$  définie par le choix d'un zéro-cycle de degré 1 sur  $C$  est donc un isomorphisme. L'application composée

$$\text{Pic}(\overline{S}) \rightarrow \text{Pic}(\overline{S}) \otimes \text{Pic}(\overline{C}) \rightarrow CH^2(\overline{X}) \rightarrow \text{Pic}(\overline{S}),$$

où la troisième flèche est induite par la projection  $X \rightarrow S$ , est l'identité. On conclut que

$$H^1(\mathbb{F}, \text{Pic}(\overline{S}) \otimes \text{Pic}(\overline{C})) \rightarrow H^1(\mathbb{F}, CH^2(\overline{X}))$$

est injectif, ce qui établit (i).

Appliquons maintenant le lemme 3.3 à  $M = \text{Pic}(\overline{S})$  et  $N = \text{Pic}(\overline{C})$ . Comme  $\mathbb{F}$  est un corps fini, l'hypothèse  $H^1(\mathbb{F}', \text{Pic}(\overline{C})) = 0$  pour toute extension finie  $\mathbb{F}'/\mathbb{F}$  est satisfaite. Par ailleurs, pour  $\mathbb{F}'/\mathbb{F}$  extension finie, le sous-groupe  $M_{\mathbb{F}'}$  de  $M$  formé des invariants sous  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}}/\mathbb{F}')$  est égal à  $\text{Pic}(S_{\mathbb{F}'})$ . De même pour  $N = \text{Pic}(\overline{C})$ . D'après le lemme, l'image de  $(\text{Pic}(\overline{S}) \otimes \text{Pic}(\overline{C}))^G$  dans  $CH^2(\overline{X})^G$  coïncide avec la réunion des images des  $M_{\mathbb{F}'} \otimes N_{\mathbb{F}'}$  par l'application composée de  $M_{\mathbb{F}'} \otimes N_{\mathbb{F}'} \rightarrow CH^2(X_{\mathbb{F}'})$  et la norme, c'est-à-dire la somme  $\sum_{\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{F}'/\mathbb{F})} \sigma$ . L'application

$$\sum_{\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{F}'/\mathbb{F})} \sigma : CH^2(X_{\mathbb{F}'}) \rightarrow CH^2(X_{\mathbb{F}'})$$

se factorise comme la composée de la norme  $CH^2(X_{\mathbb{F}'}) \rightarrow CH^2(X)$  et de la flèche de restriction  $CH^2(X) \rightarrow CH^2(X_{\mathbb{F}'})$ . Ceci établit (ii).

Comme  $\mathbb{F}$  est un corps fini, la surface géométriquement intègre  $S/\mathbb{F}$  possède un zéro-cycle de degré 1 (Lang–Weil). Comme la restriction  $CH^2(X) \rightarrow CH^2(S_K)$  est surjective, l'énoncé (iii) résulte des deux autres énoncés.  $\square$

**Lemme 3.5.** *Soient  $k$  un corps et  $X/k$  une variété projective, lisse et géométriquement connexe. Supposons que  $A_0(X_\Omega) \otimes \mathbb{Q} = 0$  pour toute extension algébriquement close  $\Omega/k$ . Alors  $A_0(X_\Omega) = 0$  pour toute extension algébriquement close  $\Omega/k$ .*

*Démonstration.* Soit  $A$  la variété d'Albanese de  $X$ . Pour tout corps algébriquement clos  $\Omega$  on a un homomorphisme surjectif  $A_0(X_\Omega) \rightarrow A(\Omega)$ . Par hypothèse, pour tout corps algébriquement clos  $\Omega$ , on a  $A_0(X_\Omega) \otimes \mathbb{Q} = 0$ , et donc  $A(\Omega) \otimes \mathbb{Q} = 0$ . Comme  $A$  est une variété abélienne, si  $A \neq 0$  il existe  $\Omega$  tel que  $A(\Omega)$  n'est pas de torsion. Par exemple, si on prend  $\Omega$  contenant  $k(A)$ , le point de  $A(\Omega)$  correspondant à l'identité de  $A$  n'est pas de torsion. On en déduit que  $A = 0$ . Par le théorème de Roitman [Roj80, Blo79, Mil82], l'homomorphisme  $A_0(X_\Omega) \rightarrow A(\Omega)$  induit un isomorphisme sur la torsion. Comme  $A(\Omega) = 0$ , on obtient que  $A_0(X_\Omega)$  est sans torsion. D'après [Blo76, Lemma 1.3], le groupe  $A_0(X_\Omega)$  est divisible, et donc uniquement divisible. L'hypothèse  $A_0(X_\Omega) \otimes \mathbb{Q} = 0$  entraîne alors  $A_0(X_\Omega) = 0$ .  $\square$

**Théorème 3.6.** *Soit  $\mathbb{F}$  un corps fini de caractéristique  $p$ . Soit  $G = \text{Gal}(\overline{\mathbb{F}}/\mathbb{F})$ . Soit  $C/\mathbb{F}$  une courbe projective, lisse et géométriquement connexe. Soit  $K = \mathbb{F}(C)$  et  $L = \overline{\mathbb{F}}(C)$ . Soit  $S/\mathbb{F}$  une surface projective, lisse et géométriquement connexe satisfaisant  $b_1 = 0$  et  $b_2 - \rho = 0$ , et soit  $X := S \times C$ . Avec les notations de la proposition 3.4, les énoncés (a), (b) (c) suivants sont équivalents :*

(a) *On a  $\text{Ker}[H_{\text{nr}}^3(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \rightarrow H_{\text{nr}}^3(\overline{\mathbb{F}}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))] = 0$ .*

(b) *Le conoyau, de torsion, de l'application naturelle de groupes  $A_0(S_K) \rightarrow A_0(S_L)^G$  n'a pas de torsion  $\ell$ -primaire.*

Supposons de plus que la surface  $S$  est géométriquement  $CH_0$ -triviale. Alors les conditions ci-dessus sont équivalentes à :

(c) La flèche  $A_0(S_{\mathbb{F}(C)})\{\ell\} \rightarrow A_0(S_{\overline{\mathbb{F}(C)}})\{\ell\}^G$  est surjective.

*Démonstration.* Par le corollaire 2.6, on a un isomorphisme de groupes finis

$$\text{Ker}[CH^2(X) \rightarrow CH^2(\overline{X})]\{\ell\} \xrightarrow{\sim} H^1(\mathbb{F}, H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))).$$

Sans même avoir à identifier les flèches, un argument de comptage et la suite exacte (1.1) donnent un isomorphisme

$$\begin{aligned} \text{Ker}[H_{\text{nr}}^3(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \rightarrow H_{\text{nr}}^3(\overline{\mathbb{F}(X)}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))] \\ \xrightarrow{\sim} \text{Coker}[CH^2(X) \rightarrow CH^2(\overline{X})^G]\{\ell\}, \end{aligned}$$

et par la proposition 3.4 ce groupe est isomorphe à  $\text{Coker}[A_0(S_K) \rightarrow A_0(S_L)^G]\{\ell\}$ . Ceci donne l'équivalence de (a) et (b). Si la surface  $S$  est géométriquement  $CH_0$ -triviale, alors les groupes  $A_0(S_{\mathbb{F}(C)})$  et  $A_0(S_{\overline{\mathbb{F}(C)}})$  sont de torsion, ce qui donne l'équivalence de (b) et (c).  $\square$

**Théorème 3.7.** *Supposons que la conjecture de Tate vaut pour toutes les surfaces sur les corps finis. Avec les notations et hypothèses du théorème 3.6, sous l'hypothèse que la surface  $S$  est géométriquement  $CH_0$ -triviale, les énoncés (a), (b) ou (c) impliquent :*

*Le groupe  $H_{\text{nr}}^3(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$  est nul, et l'application cycle  $CH^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \rightarrow H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$  est surjective.*

*Démonstration.* Soit  $\iota : \overline{C} \hookrightarrow \overline{C} \times \overline{S}$  une immersion fermée associée à un  $\overline{\mathbb{F}}$ -point de  $\overline{S}$ . Soit  $\Omega$  un corps algébriquement clos contenant  $\mathbb{F}$ . Par le lemme 3.5, on a  $A_0(S_\Omega) = 0$ . On déduit aisément que l'homomorphisme  $CH_0(C_\Omega) \rightarrow CH_0(X_\Omega)$  induit par  $\iota$  est surjectif.

Par le corollaire 5.11 ci-dessous, qui utilise un théorème de C. Schoen (c'est ici qu'on utilise la conjecture de Tate pour les surfaces), on a alors

$$H_{\text{nr}}^3(\overline{\mathbb{F}(X)}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0.$$

Sous l'hypothèse (a) on a donc

$$H_{\text{nr}}^3(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0.$$

Par ailleurs, la surjectivité de  $CH_0(C_\Omega) \rightarrow CH_0(X_\Omega)$  et [CTK13, Prop. 3.23] donnent que l'application cycle  $CH^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \rightarrow H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$  pour le solide  $X$  a son conoyau fini. D'après le théorème 5.10 rappelé ci-dessous, ce quotient est alors égal à un quotient de  $H_{\text{nr}}^3(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ , et donc est nul. On a donc montré que l'application cycle

$$CH^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \rightarrow H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$$

est surjective.  $\square$

#### 4. ZÉRO-CYCLES DE DEGRÉ ZÉRO SUR $S_L$ ET FIN DE PREUVE

**Théorème 4.1.** *(Raskind) Soient  $k$  un corps d'exposant caractéristique  $p$  et  $Z$  une  $k$ -variété projective, lisse, géométriquement connexe. On a les propriétés suivantes :*

(a) *L'application de restriction  $CH^2(Z_{k[[t]]}) \rightarrow CH^2(Z_{k((t))})$  est un isomorphisme.*

(b) Pour chaque premier  $\ell \neq p$ , on a une injection

$$CH^2(Z_{\bar{k}[t]})\{\ell\} \hookrightarrow CH^2(Z_{\bar{k}})\{\ell\},$$

(c) Pour chaque premier  $\ell \neq p$ , on a une injection

$$CH^2(Z_{\bar{k}((t))})\{\ell\} \hookrightarrow CH^2(Z_{\bar{k}})\{\ell\},$$

*Démonstration.* Par [Ras89, Proposition 1.2], on a une suite exacte

$$H_{\text{Zar}}^1(Z_{k((t))}, \mathcal{K}_2) \rightarrow \text{Pic}(Z) \rightarrow CH^2(Z_{k[[t]])} \rightarrow CH^2(Z_{k((t))}) \rightarrow 0.$$

Si  $[\mathcal{L}] \in \text{Pic}(Z)$ , la flèche

$$\text{Pic}(Z) \otimes k((t))^* \rightarrow H_{\text{Zar}}^1(Z_{k((t))}, \mathcal{K}_2) \rightarrow \text{Pic}(Z)$$

envoie  $[\mathcal{L}] \otimes t$  sur  $\mathcal{L}$ ; voir le carré commutatif dans la preuve de [Ras89, Proposition 1.3]. La flèche  $H_{\text{Zar}}^1(Z_{k((t))}, \mathcal{K}_2) \rightarrow \text{Pic}(Z)$  est donc surjective. On a donc  $CH^2(Z_{k[[t]])} = CH^2(Z_{k((t))})$ . Par [Ras89, Theorem 1.9], pour chaque premier  $\ell \neq p$ , on a une injection

$$CH^2(Z_{\bar{k}[t]})\{\ell\} \hookrightarrow CH^2(Z_{\bar{k}})\{\ell\}.$$

La combinaison de ces résultats donne le théorème.  $\square$

On va utiliser le théorème 4.2 ci-dessous, dont la démonstration repose sur les résultats de Merkurjev et Suslin [MS82], sur le théorème 90 de Hilbert pour  $K_2$  [CT83], et sur de nombreux résultats du travail [CTR85] de Raskind et du premier auteur. En caractéristique zéro, on trouvera une démonstration détaillée de ce théorème dans l'article [CTV12] : c'est le théorème 8.7 de [CTV12], où l'hypothèse  $b_2 - \rho = 0$  est remplacée par l'hypothèse  $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$ , qui lui est équivalente en caractéristique nulle. En caractéristique  $p > 0$ , si on prend comme hypothèse  $b_2 - \rho = 0$  on voit en suivant les divers arguments donnés dans [CTV12, thm. 8.7] et en se référant à [CTR85] (voir en particulier [CTR85, Rem. 2.14] et [CTR85, Remark 3.7.1]) que tout vaut à la  $p$ -torsion près. Sur un corps parfait, le théorème est aussi établi dans [CTK13, Thm. 6.3] et [CTK13, Thm. 6.6]. C'est d'ailleurs ainsi que sur un corps fini la suite exacte (1.1) est établie dans [CTK13]. On notera que si l'on prend pour  $L$  un corps fini, on a la suite exacte décrite ci-dessous sans supposer  $b_2 - \rho = 0$ . Sur un corps  $L$  parfait de caractéristique  $p > 0$ , la  $p$ -torsion est aussi contrôlée (Gros et Suwa [GS88]).

**Théorème 4.2.** *Soit  $L$  un corps de caractéristique  $p \geq 0$ , et  $\ell \neq p$  un premier. Supposons  $\text{cd}_\ell(L) \leq 1$ . Soit  $\bar{L}$  une clôture séparable de  $L$ , et  $G = \text{Gal}(\bar{L}/L)$ . Soit  $X$  une  $L$ -variété projective, lisse, géométriquement connexe possédant un zéro-cycle de degré 1. Supposons que le rang  $\rho$  du groupe de Néron-Severi de  $\bar{X}$  est égal au deuxième nombre de Betti  $\ell$ -adique  $b_2 = \dim H^2(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell)$ . On a alors une suite exacte naturelle*

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Ker}[CH^2(X)\{\ell\} \rightarrow CH^2(\bar{X})\{\ell\}] &\rightarrow H^1(G, H^3(\bar{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))\{\ell\}) \\ &\rightarrow \text{Ker}[H_{\text{nr}}^3(L(X)/L, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \rightarrow H_{\text{nr}}^3(\bar{L}(X)/\bar{L}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))] \\ &\rightarrow \text{Coker}[CH^2(X) \rightarrow CH^2(\bar{X})^G]\{\ell\} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

**Corollaire 4.3.** *Soit  $L$  un corps de caractéristique  $p \geq 0$ , et  $\ell \neq p$  un premier. Supposons  $\text{cd}_\ell(L) \leq 1$ . Soit  $\bar{L}$  une clôture séparable de  $L$ , et  $G = \text{Gal}(\bar{L}/L)$ . Soit  $S$  une  $L$ -surface projective, lisse, géométriquement connexe.*

(a) *Si l'on a  $b_1 = 0$  et  $b_2 - \rho = 0$ , alors on a une suite exacte naturelle*

$$0 \rightarrow A_0(S)\{\ell\} \rightarrow H^1(G, H^3(\bar{S}, \mathbb{Z}_\ell(2))\{\ell\}) \rightarrow H_{\text{nr}}^3(L(S)/L, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)).$$

(b) Si de plus  $S$  est géométriquement  $CH_0$ -triviale et possède un zéro-cycle de degré 1, alors on a une suite exacte naturelle

$$0 \rightarrow A_0(S)\{\ell\} \rightarrow H^1(G, H^3(\bar{S}, \mathbb{Z}_\ell(2))\{\ell\}) \rightarrow H_{\text{nr}}^3(L(S)/L, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \rightarrow 0.$$

*Démonstration.* Comme  $S$  est une surface, le corps  $\bar{L}(S)$  est de  $\ell$ -dimension cohomologique 2, donc  $H^3(\bar{L}(S), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$ . Si  $b_1 = 0$ , alors  $A_0(\bar{S})\{\ell\} = 0$  par le théorème de Roitman [Roj80, Blo79]. L'énoncé (a) résulte alors du théorème 4.2.

Si la surface  $S$  est géométriquement  $CH_0$ -triviale, alors, d'après le lemme 3.5, la flèche degré  $CH_0(\bar{S}) \rightarrow \mathbb{Z}$  est surjective à noyau de torsion  $p$ -primaire, et l'existence d'un zéro-cycle de degré 1 sur la surface  $S$  donne alors

$$\text{Coker}[CH^2(S) \rightarrow CH^2(\bar{S})^G]\{\ell\} = 0.$$

L'énoncé (b) résulte alors du théorème 4.2.  $\square$

**Théorème 4.4.** Soient  $k$  un corps parfait d'exposant caractéristique  $p$  et  $\bar{k}/k$  une clôture séparable. Soient  $C$  et  $S$  des  $k$ -variétés projectives, lisses, géométriquement connexes de dimension 1 et 2, respectivement. Soit  $X = S \times_k C$ . Notons  $K := k(C)$  et  $L := \bar{k}(C)$ .

(a) Si la surface  $S$  satisfait  $b_1 = 0$  et  $b_2 - \rho = 0$ , alors pour tout premier  $\ell \neq p$ , on a une suite exacte<sup>3</sup>  $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ -équivariante de groupes finis

$$0 \rightarrow A_0(S_L)\{\ell\} \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\text{Pic}(\bar{S})\{\ell\}, J(C)(\bar{k})) \rightarrow H_{\text{nr}}^3(\bar{k}(X)/\bar{k}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)).$$

(b) Si de plus  $S$  est géométriquement  $CH_0$ -triviale et possède un zéro-cycle de degré 1, alors, pour tout premier  $\ell \neq p$ , on a une suite exacte  $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ -équivariante de groupes finis

$$0 \rightarrow A_0(S_L)\{\ell\} \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\text{Pic}(\bar{S})\{\ell\}, J(C)(\bar{k})) \rightarrow H_{\text{nr}}^3(\bar{k}(X)/\bar{k}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \rightarrow 0.$$

*Démonstration.* Soit  $L = \bar{k}(C)$ . Pour chaque  $x \in \bar{C}^{(1)}$ , on note par  $L_x \simeq \bar{k}((t))$  le corps des fractions de l'anneau local complété de  $\bar{C}$  en  $x$ .

Donnons la démonstration de (b). La démonstration de (a) est identique, on enlève simplement le zéro à droite dans les suites exactes ci-dessous. Le théorème de Sato et Saito cité ci-dessous n'intervient que pour la partie (b).

On applique le corollaire 4.3 à  $S_L$  et  $S_{L_x}$  pour chaque  $x \in \bar{C}^{(1)}$ . Comme  $\text{cd}(L) = \text{cd}(L_x) = 1$ , pour tout  $\ell \neq p$  on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A_0(S_L)\{\ell\} & \longrightarrow & H^1(L, H^3(\bar{S}, \mathbb{Z}_\ell(2))_{\text{tors}}) & \longrightarrow & H_{\text{nr}}^3(L(S)/L, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \prod_{x \in \bar{C}^{(1)}} A_0(S_{L_x})\{\ell\} & \longrightarrow & \prod_{x \in \bar{C}^{(1)}} H^1(L_x, H^3(\bar{S}, \mathbb{Z}_\ell(2))_{\text{tors}}) & \longrightarrow & \prod_{x \in \bar{C}^{(1)}} H_{\text{nr}}^3(L_x(S)/L_x, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \longrightarrow 0. \end{array}$$

L'hypothèse  $b_1 = 0$  et le théorème de Roitman [Roj80, Blo79] donnent  $A_0(\bar{S})\{\ell\} = 0$ . D'après le Théorème 4.1, on a donc  $A_0(S_{L_x})\{\ell\} = 0$  pour tout  $x \in \bar{C}^{(1)}$ .

Le noyau de

$$H_{\text{nr}}^3(L(S)/L, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \rightarrow \prod_{x \in \bar{C}^{(1)}} H_{\text{nr}}^3(L_x(S)/L_x, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$$

est un sous-groupe de  $H_{\text{nr}}^3(\bar{k}(X)/\bar{k}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ , comme on voit en considérant les résidus aux points génériques des diviseurs  $S_x \subset X$ . Ce noyau coïncide en fait avec

3. Nous ne savons pas si la flèche  $A_0(S_L)\{\ell\} \rightarrow \text{Hom}(\text{Pic}(\bar{S})\{\ell\}, J(C)(\bar{k}))$ , qui est définie par la  $K$ -théorie algébrique, est induite par la flèche  $CH^2(S_L) \rightarrow \text{Hom}(\text{Pic}(\bar{S})_{\text{tors}}, \text{Pic}(\bar{C}))$  obtenue par les correspondances à la proposition 3.2 (iv).

$H_{\text{nr}}^3(\bar{k}(X)/\bar{k}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$  : cela résulte d'un théorème de K. Sato et S. Saito ([SS10, Thm. 2.13], [CT15, Thm. 3.16]) appliqué au schéma  $S \times_{\bar{k}} \bar{k}[[t]]$ .

Du diagramme ci-dessus on déduit donc une suite exacte

$$0 \rightarrow A_0(S_L) \{\ell\} \rightarrow B \rightarrow H_{\text{nr}}^3(\bar{k}(X)/\bar{k}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \rightarrow 0.$$

où

$$B := \text{Ker}[H^1(L, H^3(\bar{S}, \mathbb{Z}_\ell(2))_{\text{tors}}) \rightarrow \prod_{x \in \bar{C}^{(1)}} H^1(L_x, H^3(\bar{S}, \mathbb{Z}_\ell(2))_{\text{tors}})].$$

Il nous reste à identifier ce groupe  $B$ . Comme  $L$  contient  $\bar{k}$ , les actions des groupes  $\text{Gal}(\bar{K}/L)$  et  $\text{Gal}(\bar{L}_x/L_x)$  sur le module  $H^1(L, H^3(\bar{S}, \mathbb{Z}_\ell(2))_{\text{tors}})$  sont triviales. Pour tout  $n \geq 1$ , il est clair que

$$H^1(\bar{C}, \mathbb{Z}/\ell^n) \subseteq \text{Ker}[H^1(L, \mathbb{Z}/\ell^n) \rightarrow \prod_{x \in \bar{C}^{(1)}} H^1(L_x, \mathbb{Z}/\ell^n)].$$

Par ailleurs, on a une suite exacte

$$0 \rightarrow H^1(\bar{C}, \mathbb{Z}/\ell^n) \rightarrow H^1(L, \mathbb{Z}/\ell^n) \rightarrow \prod_{x \in \bar{C}^{(1)}} H^0(\bar{k}(x), \mu_{\ell^n}^{\otimes(-1)});$$

voir [CT95, (3.7)]. Pour tout  $x \in \bar{C}^{(1)}$ , le résidu  $H^1(L, \mathbb{Z}/\ell^n) \rightarrow H^0(\bar{k}(x), \mu_{\ell^n}^{\otimes(-1)})$  se factorise comme

$$H^1(L, \mathbb{Z}/\ell^n) \rightarrow H^1(L_x, \mathbb{Z}/\ell^n) \rightarrow H^0(\bar{k}(x), \mu_{\ell^n}^{\otimes(-1)}),$$

et donc

$$\text{Ker}[H^1(L, \mathbb{Z}/\ell^n) \rightarrow \prod_{x \in \bar{C}^{(1)}} H^1(L_x, \mathbb{Z}/\ell^n)] = H^1(\bar{C}, \mathbb{Z}/\ell^n).$$

On en déduit que le noyau de

$$H^1(L, H^3(\bar{S}, \mathbb{Z}_\ell(2))_{\text{tors}}) \rightarrow \prod_{x \in \bar{C}^{(1)}} H^1(L_x, H^3(\bar{S}, \mathbb{Z}_\ell(2))_{\text{tors}})$$

coïncide avec  $H^1(\bar{C}, H^3(\bar{S}, \mathbb{Z}_\ell(2))_{\text{tors}})$ .

On a une suite exacte courte

$$0 \rightarrow \text{Br}(\bar{X})^\circ \{\ell\} \rightarrow \text{Br}(\bar{X}) \{\ell\} \rightarrow H^3(\bar{S}, \mathbb{Z}_\ell(2)) \{\ell\} \rightarrow 0,$$

où  $\text{Br}(\bar{X})^\circ \{\ell\} \simeq (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{b_2 - \rho}$  est le sous-groupe divisible maximal de  $\text{Br}(\bar{X}) \{\ell\}$ ; voir [Gro68, (8.9)]. Comme  $b_1 = 0$ , on a  $\text{Pic}(\bar{S}) = \text{NS}(\bar{S})$ . D'après [Gro68, (8.12)], on a donc des isomorphismes

$$H^3(\bar{S}, \mathbb{Z}_\ell(2)) \{\ell\} \simeq \text{Hom}(\text{NS}(\bar{S}) \{\ell\}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(1)) \simeq \text{Hom}(\text{Pic}(\bar{S}) \{\ell\}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(1)).$$

Notons  $M := H^3(\bar{S}, \mathbb{Z}_\ell(2)) \{\ell\}$ . L'isomorphisme ci-dessus dit que le dual de Cartier  $\hat{M} = \text{Hom}(M, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(1))$  de  $M$  est le module galoisien  $\text{Pic}(\bar{S}) \{\ell\}$ . L'accouplement  $M \times \hat{M} \rightarrow \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(1)$  et la dualité de Poincaré sur la courbe  $\bar{C}$  donnent un accouplement équivariant non dégénéré de groupes abéliens finis

$$H^1(\bar{C}, \hat{M}) \times H^1(\bar{C}, M) \rightarrow \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell.$$

Par ailleurs, on a un accouplement équivariant non dégénéré de groupes abéliens finis

$$\hat{M} \times H^1(\bar{C}, M) \rightarrow H^1(\bar{C}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(1)) = J(C)(\bar{\mathbb{F}}) \{\ell\}.$$

On a donc des isomorphisme de modules galoisiens finis

$$B \simeq H^1(\overline{C}, H^3(\overline{S}, \mathbb{Z}_\ell(2))) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\hat{M}, J(C)(\overline{\mathbb{F}})\{\ell\}) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\text{Pic}(\overline{S})\{\ell\}, J(C)(\overline{\mathbb{F}})).$$

Ceci complète la démonstration.  $\square$

*Preuve du théorème 1.1.* Reprenons les hypothèses du théorème 1.1. Soit  $\ell \neq p$  un nombre premier. Par le théorème 4.4, on a une inclusion de groupes finis

$$A_0(S_L)\{\ell\}^G \hookrightarrow \text{Hom}_G(\text{Pic}(\overline{S})\{\ell\}, J(C)(\overline{\mathbb{F}})).$$

Sous l'hypothèse (ii) du théorème 1.1, ceci donne  $A_0(S_L)\{\ell\}^G = 0$ . Comme la surface  $S$  est géométriquement  $CH_0$ -triviale, le théorème 3.6 donne la première partie de l'énoncé du théorème 1.1, et le théorème 3.7 en donne la seconde partie.  $\square$

*Remarque 4.5.* Soient  $B$  une courbe projective, lisse et géométriquement connexe sur  $\mathbb{C}$ ,  $S$  une surface d'Enriques sur  $\mathbb{C}$ , et  $X := B \times S$ . On a  $\text{Pic}(S)_{\text{tors}} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Le théorème 4.4 donne alors une suite exacte courte de groupes finis

$$0 \rightarrow A_0(S_{\mathbb{C}(B)}) \rightarrow J(B)(\mathbb{C})[2] \rightarrow H_{\text{nr}}^3(\mathbb{C}(X)/\mathbb{C}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow 0.$$

On note que  $H_{\text{nr}}^3(\mathbb{C}(X)/\mathbb{C}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$  pour tout  $\ell \neq 2$ . On a un isomorphisme naturel  $J(B)(\mathbb{C})[2] \simeq H^1(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ , et l'homomorphisme de restriction  $\rho : CH^2(X) \rightarrow CH^2(S_{\mathbb{C}(B)})$  est surjectif. On a donc une suite exacte

$$CH_1(X)_0 \rightarrow H^1(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H_{\text{nr}}^3(\mathbb{C}(X)/\mathbb{C}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow 0,$$

où  $CH_1(X)_0 := \rho^{-1}(A_0(S_{\mathbb{C}(B)}))$ . D'après [CTV12, Théorème 1.1], on déduit que l'homomorphisme  $CH_1(X)_0 \rightarrow H^1(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  est surjectif si et seulement si la conjecture de Hodge entière pour les 1-cycles vaut pour  $X$ .

Soit  $\alpha \in H^2(S, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  l'élément correspondant au revêtement double par la surface  $K3$  associée à  $S$ . On peut espérer que la flèche  $CH_1(X)_0 \rightarrow H^1(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  soit donnée par  $Z \mapsto Z^*\alpha$ , où  $Z^* : H^1(S, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H^1(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  est l'homomorphisme associé à la correspondance  $Z : S \rightsquigarrow B$ . Ceci donnerait une démonstration alternative de l'énoncé [BO18, Proposition 1.1] de Benoist et Ottem.

Sur le corps des complexes, ces auteurs établissent l'existence de paires  $(S, B)$  avec  $B$  courbe elliptique et  $S$  surface d'Enriques telles que la conjecture de Hodge entière pour les 1-cycles vaille, et d'autres pour lesquelles elle ne vaille pas. Ainsi, via [CTV12], suivant la paire  $(S, B)$ , le groupe  $H_{\text{nr}}^3(\mathbb{C}(X)/\mathbb{C}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$  est nul ou non. Par contraste, si l'on remplace  $\mathbb{C}$  par  $\overline{\mathbb{F}}$ , le théorème 5.11 ci-dessous, conséquence d'un théorème de Schoen, dit que pour un tel solide  $X = B \times S$  avec  $S$  surface d'Enriques, on devrait toujours avoir  $H_{\text{nr}}^3(\overline{\mathbb{F}}(X)/\overline{\mathbb{F}}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$  et l'application cycle  $CH^2(\overline{X}) \otimes \mathbb{Z}_\ell \rightarrow H^4(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))$  devrait être surjective.

*Remarque 4.6.* Soient  $\mathbb{F}$  un corps fini de caractéristique  $p$ ,  $C$  et  $S$  deux variétés géométriquement connexes, projectives et lisses sur  $\mathbb{F}$  de dimension 1 et 2 respectivement, et  $X := C \times S$ .

Supposons que  $S$  satisfait (i) du théorème 1.1 et que  $\text{NS}(\overline{S})$  n'a pas de torsion. L'hypothèse (ii) du théorème 1.1 est donc satisfaite. D'après le théorème 4.4, on a  $H_{\text{nr}}^3(\overline{\mathbb{F}}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$  pour tout premier  $\ell \neq p$ , sans recours au corollaire 5.11, conséquence du théorème 5.8 de Schoen et du théorème 5.10 de Kahn et du premier auteur, et donc sans supposer que la conjecture de Tate pour les surfaces sur les corps finis soit vraie. On a donc  $H_{\text{nr}}^3(\overline{\mathbb{F}}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$  inconditionnellement,

et on retrouve alors le théorème de Pirutka [Pir16], par une méthode sensiblement différente.

Supposons que  $S$  est géométriquement rationnelle, ce qui entraîne (i) du théorème 1.1, et implique que  $\text{Pic}(\overline{S})$  est sans torsion, et donne donc (ii) du théorème 1.1. Sans invoquer le théorème 4.4, on a dans ce cas

$$H_{\text{nr}}^3(\overline{\mathbb{F}}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \subset H_{\text{nr}}^3(\overline{\mathbb{F}}(X)/\overline{\mathbb{F}}(C), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = H^3(\overline{\mathbb{F}}(C), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0,$$

où la première égalité vient de l'invariance birationnelle stable de la cohomologie non ramifiée, et la seconde du fait que la  $\ell$ -dimension cohomologique de  $\overline{\mathbb{F}}(C)$  est 1. Le groupe  $H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))_{\text{tors}}$  est nul, parce que  $\text{Br}(\overline{X})\{\ell\} \simeq \text{Br}(\overline{C})\{\ell\} = 0$ . Par ailleurs, la nullité de  $A_0(S_L) = 0$ , qui suit du théorème 4.4, résulte ici déjà du théorème de Hilbert 90 pour  $K_2$ ; voir [CT83, Proposition 4, Remark 5.2]. Ainsi notre démonstration du théorème 1.1 dans le cas où  $\overline{S}$  est rationnelle ne requiert pas la conjecture de Tate pour les surfaces; et la partie nouvelle de la démonstration est dans la section 3.

## 5. APPLICATIONS “CLASSE DE CYCLE” EN COHOMOLOGIE $\ell$ -ADIQUE

On donne ici des rappels de résultats que l'on peut trouver pour l'essentiel dans un article de B. Kahn et du premier auteur [CTK13]. Comme déjà indiqué, le théorème 5.10 et le corollaire 5.11 sont utilisés dans la démonstration du théorème 3.7, lequel est utilisé au §4 dans la fin de la démonstration de la seconde partie du théorème principal 1.1.

Soit  $k$  un corps de caractéristique  $p \geq 0$ . Soit  $\ell$  un nombre premier différent de  $p$ . Si  $k$  est un corps fini, ou un corps algébriquement clos, situations auxquelles on va se restreindre dans ce paragraphe, pour toute  $k$ -variété  $X$  les groupes de cohomologie étale  $H^i(X, \mu_{\ell^n}^{\otimes j})$  sont finis et les groupes de cohomologie  $\ell$ -adiques  $H^i(X, \mathbb{Z}_\ell(j)) = \varprojlim_n H^i(X, \mu_{\ell^n}^{\otimes j})$  sont des  $\mathbb{Z}_\ell$ -modules de type fini.

On a des applications cycles

$$CH^i(X)/\ell^n \rightarrow H^{2i}(X, \mu_{\ell^n}^{\otimes i})$$

et des applications induites de  $\mathbb{Z}_\ell$ -modules

$$\varprojlim_n CH^i(X)/\ell^n \rightarrow H^{2i}(X, \mathbb{Z}_\ell(i)).$$

On a les applications composées de  $\mathbb{Z}_\ell$ -modules

$$CH^i(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \rightarrow \varprojlim_n CH^i(X)/\ell^n \rightarrow H^{2i}(X, \mathbb{Z}_\ell(i)).$$

En utilisant le fait que les  $H^{2i}(X, \mathbb{Z}_\ell(i))$  sont des  $\mathbb{Z}_\ell$ -modules de type fini, on voit que l'application  $\varprojlim_n CH^i(X)/\ell^n \rightarrow H^{2i}(X, \mathbb{Z}_\ell(i))$  est surjective si et seulement si l'application composée ci-dessus est surjective.

Pour toute variété projective et lisse géométriquement intègre  $X$  sur un corps fini  $\mathbb{F}$  et tous entiers  $i \geq 0$ , J. Tate [Tate94] a conjecturé que les applications cycle rationnelles

$$CH^i(X) \otimes \mathbb{Q}_\ell \rightarrow H^{2i}(X, \mathbb{Q}_\ell(i))$$

sont surjectives. Pour  $i = 1$ , cet énoncé est équivalent à la surjectivité de la flèche déduite de la flèche de Kummer

$$\text{Pic}(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z}_\ell(1)),$$

et ceci est équivalent à la finitude de  $\text{Br}(X)\{\ell\}$ .

On s'intéresse ici à la validité de la conjecture suivante pour certaines classes de variétés projectives et lisses sur un corps fini.

**Conjecture 5.1.** *Soient  $\mathbb{F}$  un corps fini et  $X$  une variété projective et lisse géométriquement intègre sur  $\mathbb{F}$  de dimension  $d$ . Alors, pour tout  $\ell$  premier distinct de la caractéristique de  $\mathbb{F}$ , l'application cycle*

$$CH^{d-1}(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \rightarrow H^{2d-2}(X, \mathbb{Z}_\ell(d-1))$$

*est surjective.*

**Proposition 5.2.** *Soit  $X/\mathbb{F}$  projective, lisse, géométriquement connexe de dimension  $d$ . Soit  $\ell$  premier,  $\ell \neq p$ . Supposons que le groupe  $\text{Br}(X)\{\ell\}$  est fini. Alors le conoyau de l'application cycle*

$$CH^{d-1}(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \rightarrow H^{2d-2}(X, \mathbb{Z}_\ell(d-1))$$

*est fini.*

*Démonstration.* On peut supposer  $d \geq 3$ . Comme aucune propre valeur de Frobenius sur les groupes de cohomologie  $H^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell(j))$  pour  $i \neq 2j$  n'est une racine de l'unité (Deligne), la suite spectrale de Hochschild-Serre donne que les applications de  $\mathbb{Z}_\ell$ -modules de type fini

$$H^2(X, \mathbb{Z}_\ell(1)) \rightarrow H^2(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(1))^G$$

et

$$H^{2d-2}(X, \mathbb{Z}_\ell(d-1)) \rightarrow H^{2d-2}(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(d-1))^G$$

sont surjectives à noyau fini (cf. [CTSS83, Théorème 2, p.780]).

Si  $\text{cl}(L) \in H^2(X, \mathbb{Z}_\ell(1))$  est la classe d'une section hyperplane  $L$  de  $X$ , le théorème de Lefschetz difficile dit que le cup-produit par  $\text{cl}(L)^{d-2}$  définit un homomorphisme  $G$ -équivariant  $H^2(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(1)) \rightarrow H^{2d-2}(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(d-1))$  à noyau et conoyau fini.

La combinaison de ces résultats donne que la flèche

$$CH^{d-1}(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \rightarrow H^{2d-2}(X, \mathbb{Z}_\ell(d-1))$$

a son conoyau fini. □

**Lemme 5.3.** *Soient  $\mathbb{F}$  un corps fini,  $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{F}}^N$  une variété projective et lisse intègre de dimension  $d$ ,  $Y \subset X$  une section hyperplane, et  $U \subset X$  l'ouvert complémentaire.*

(i) *Soit  $M$  le faisceau étale sur  $U$  associé à un module galoisien fini sur  $\mathbb{F}$ .*

*Alors pour tout  $i \geq d+2$ , on a  $H^i(U, M) = 0$ .*

(ii) *Si  $d \geq 4$  et  $n$  est premier à la caractéristique de  $\mathbb{F}$ , alors l'application*

$$H^{2d-4}(Y, \mu_n^{\otimes(d-1)}) \rightarrow H^{2d-2}(X, \mu_n^{\otimes d})$$

*induite par l'isomorphisme de pureté*

$$H^{2d-4}(Y, \mu_n^{\otimes(d-1)}) \simeq H_Y^{2d-2}(X, \mu_n^{\otimes d})$$

*est surjective.*

*Démonstration.* Comme  $\text{cd}(\mathbb{F}) = 1$ , la suite spectrale

$$H^p(\mathbb{F}, H^q(\overline{U}, M)) \implies H^{p+q}(U, M)$$

donne des suites exactes courtes

$$0 \rightarrow H^1(\mathbb{F}, H^{i-1}(\overline{U}, M)) \rightarrow H^i(U, M) \rightarrow H^i(\overline{U}, M)^G \rightarrow 0,$$

où  $G$  est le groupe de Galois absolu de  $\mathbb{F}$ . Comme  $\overline{U}$  est affine et  $M$  est fini, par le théorème de Lefschetz affine on a  $H^i(\overline{U}, M) = 0$  pour  $i \geq d + 1$ . Ceci démontre (i). La partie (ii) suit de (i) pour  $i = d - 1$  et  $M = \mu_n^{\otimes(d-1)}$ , en utilisant la suite de Gysin.  $\square$

**Proposition 5.4.** *Pour établir la conjecture 5.1 pour toute variété de dimension  $d \geq 3$ , il suffit de le faire pour toute variété de dimension  $d = 3$ .*

*Démonstration.* On procède par récurrence sur  $d \geq 3$ . Soit  $X/\mathbb{F}$  une variété projective, lisse et géométriquement intègre de dimension  $d \geq 4$ . Par le théorème de Bertini sur les corps finis [Poo04], il existe une immersion fermée  $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$  et une section hyperplane  $Y$  de  $X$  qui est lisse et géométriquement intègre de dimension  $d - 1$ . Pour tout  $n \geq 1$ , on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} CH^{d-2}(Y)/\ell^n & \longrightarrow & H^{2d-4}(Y, \mu_{\ell^n}^{\otimes(d-2)}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ CH^{d-1}(X)/\ell^n & \longrightarrow & H^{2d-2}(X, \mu_{\ell^n}^{\otimes(d-1)}). \end{array}$$

On passe à la limite projective sur  $n$ . On obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim_n CH^{d-2}(Y)/\ell^n & \longrightarrow & H^{2d-4}(Y, \mathbb{Z}_\ell(d-2)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \varprojlim_n CH^{d-1}(X)/\ell^n & \longrightarrow & H^{2d-2}(X, \mathbb{Z}_\ell(d-1)). \end{array}$$

Par l'hypothèse de récurrence, la flèche horizontale en haut est surjective. D'après le lemme 5.3(ii), la flèche verticale à droite est surjective. On conclut que la flèche horizontale en bas est surjective.  $\square$

*Remarque 5.5.* Pour établir la conjecture 5.1 pour une variété  $X$  avec un plongement  $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{F}}^n$  donné, par un argument de normes, il suffit de l'établir sur des extensions finies  $\mathbb{F}'/\mathbb{F}$  de degrés premiers entre eux. On peut donc se contenter d'utiliser le théorème de Bertini sur les corps finis "suffisamment" gros, et dans l'argument ci-dessus de prendre les sections hyperplanes pour le plongement donné. Ainsi, pour établir la conjecture 5.1 pour les hypersurfaces cubiques lisses dans  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^n$  pour  $n \geq 4$ , il suffit de l'établir pour les hypersurfaces cubiques lisses dans  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}'}^4$ , pour tout corps fini  $\mathbb{F}'$ . En caractéristique différente de 2, ceci est connu (voir [CT19a, Thm. 5.1]).

*Remarque 5.6.* Supposons vraie la conjecture de Tate pour les surfaces sur un corps fini. Pour démontrer la conjecture 5.1, il suffirait de montrer : pour  $X$  de dimension 3 et toute classe  $\xi$  dans  $H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$  il existe une section hyperplane lisse  $Y \subset X$  telle que  $\xi$  soit supportée sur  $Y$ , c'est-à-dire telle que la restriction de  $\xi$  dans  $H^4(Y, \mathbb{Z}_\ell(2)) = H^1(\mathbb{F}, H^3(\overline{Y}, \mathbb{Z}_\ell(2)))$  soit nulle.

Soit  $G$  un groupe profini. Pour tout  $\mathbb{Z}_\ell$ -module  $M$  équipé d'une action continue de  $G$ , on note  $M^{(1)} \subset M$  le sous-module formé des éléments dont le stabilisateur est un sous-groupe ouvert de  $G$ .

**Lemme 5.7.** [CTK13, Lemme 4.1] *Si  $G$  est un groupe profini et  $M$  est un  $\mathbb{Z}_\ell$ -module  $M$  de type fini muni d'une action continue de  $G$ , alors le quotient  $M/M^{(1)}$  est sans torsion.*

Soient  $\mathbb{F}$  un corps fini,  $\overline{\mathbb{F}}$  une clôture algébrique de  $\mathbb{F}$  et  $G := \text{Gal}(\overline{\mathbb{F}}/\mathbb{F})$ . Soit  $X/\mathbb{F}$  une variété projective, lisse, géométriquement connexe de dimension  $d$ . Soit  $\overline{X} = X \times_{\mathbb{F}} \overline{\mathbb{F}}$ . Pour tout entier  $i \geq 0$ , l'application cycle

$$CH^i(\overline{X}) \otimes \mathbb{Z}_\ell \rightarrow H^{2i}(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(i))$$

a son image dans le sous-groupe  $H^{2i}(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(i))^{(1)}$ .

**Théorème 5.8.** (Schoen) *Supposons vraie la conjecture de Tate pour les surfaces sur les corps finis. Alors pour toute variété  $X/\mathbb{F}$  projective, lisse, géométriquement connexe, de dimension  $d$ , l'image de l'application cycle*

$$CH^{d-1}(\overline{X}) \otimes \mathbb{Z}_\ell \rightarrow H^{2d-2}(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(i))$$

*est le sous-groupe de  $H^{2d-2}(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(i))^{(1)}$  formé des éléments dont le stabilisateur est un sous-groupe ouvert de  $G$ .*

*Démonstration.* Voir [Sch98, Theorem 0.5] et [CTS10]. □

**Corollaire 5.9.** *Soient  $k$  une clôture algébrique d'un corps fini de caractéristique  $p$  et  $\overline{X}$  une  $k$ -variété projective et lisse, géométriquement connexe, de dimension  $d$ . Soit  $\ell$  un premier distinct de  $p$ . Si la conjecture de Tate vaut pour toutes les surfaces sur les corps finis, alors :*

(i) *Le conoyau de l'application cycle*

$$CH^{d-1}(\overline{X}) \otimes \mathbb{Z}_\ell \rightarrow H^{2d-2}(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(d-1))$$

*est un  $\mathbb{Z}_\ell$ -module de type fini sans torsion.*

(ii) *Si  $\text{Br}(\overline{X})\{\ell\}$  est fini, l'application cycle*

$$CH^{d-1}(\overline{X}) \otimes \mathbb{Z}_\ell \rightarrow H^{2d-2}(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(d-1))$$

*est surjective.*

*Démonstration.* Comme expliqué dans la démonstration de [CTK13, Prop. 4.2], la combinaison du théorème 5.8 et du lemme 5.7 donnent l'énoncé (i).

Montrons (ii). On procède comme à la proposition 5.2. Sous l'hypothèse de finitude du groupe de Brauer, le module de Tate  $T_\ell(\text{Br}(\overline{X}))$  est nul, et l'application cycle

$$CH^1(\overline{X}) \otimes \mathbb{Z}_\ell \xrightarrow{\text{cl}} H^2(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(1))$$

est surjective ; voir [Gro68, (8.7)]. Soit  $L \in CH^1(\overline{X})$  la classe d'un diviseur ample. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} CH^1(\overline{X}) \otimes \mathbb{Z}_\ell & \xrightarrow{\text{cl}} & H^2(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(1)) \\ \downarrow \cap L^{d-2} & & \downarrow \cap \text{cl}(L)^{d-2} \\ CH^{d-1}(\overline{X}) \otimes \mathbb{Z}_\ell & \xrightarrow{\text{cl}} & H^{2d-2}(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(d-1)). \end{array}$$

D'après le théorème de Lefschetz difficile, l'homomorphisme vertical de droite devient un isomorphisme après tensorisation par  $\mathbb{Q}_\ell$ . Il s'ensuit que la flèche

$$CH^{d-1}(\overline{X}) \otimes \mathbb{Z}_\ell \rightarrow H^{2d-2}(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(d-1))$$

a un conoyau fini. L'énoncé (i) assure alors la nullité de ce conoyau. □

**Théorème 5.10.** [Kah12, Thm. 1.1], [CTK13, Thm. 2.2] *Soit  $k$  un corps fini ou un corps algébriquement clos. Soit  $X$  une  $k$ -variété projective, lisse, géométriquement connexe. Soit  $k(X)$  son corps des fonctions rationnelles. Soit  $\ell$  premier distinct de la caractéristique de  $k$ . Les deux groupes suivants sont finis et sont isomorphes entre eux :*

(i) *Le quotient du groupe  $H_{\text{nr}}^3(k(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$  par son sous-groupe divisible maximal.*

(ii) *Le sous-groupe de torsion du  $\mathbb{Z}_\ell$ -module de type fini conoyau de l'application cycle*

$$CH^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \rightarrow H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2)).$$

En dimension 3, la combinaison de ce résultat et des corollaires du théorème de Schoen donne :

**Corollaire 5.11.** [CTK13, Prop. 4.2, Prop. 3.2] *Soient  $k$  une clôture algébrique d'un corps fini de caractéristique  $p$  et  $\bar{X}$  une  $k$ -variété projective et lisse, géométriquement connexe, de dimension 3. Soit  $\ell$  un premier distinct de  $p$ . Supposons vraie la conjecture de Tate pour les surfaces sur les corps finis. Alors :*

(i) *Le groupe  $H_{\text{nr}}^3(k(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$  est un groupe divisible.*

(ii) *Si de plus il existe une surface projective et lisse  $S/k$ , et un  $k$ -morphisme  $S \rightarrow X$  tel que pour tout corps algébriquement clos  $\Omega$  contenant  $k$  l'application induite  $CH_0(S_\Omega) \rightarrow CH_0(X_\Omega)$  est surjective, alors  $H_{\text{nr}}^3(k(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$ .*

*Démonstration.* D'après le théorème 5.10, le quotient de  $H_{\text{nr}}^3(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$  par son sous-groupe divisible maximal s'identifie au sous-groupe de torsion du conoyau de

$$CH^2(\bar{X}) \otimes \mathbb{Z}_\ell \rightarrow H^4(\bar{X}, \mathbb{Z}_\ell(2)).$$

Mais sous l'hypothèse sur la conjecture de Tate, le corollaire 5.9 assure que ce conoyau n'a pas de torsion. Ceci établit (i).

Dans la situation de (ii), l'hypothèse sur les groupes de Chow de dimension zéro et un argument de correspondances bien connu [CTK13, Prop. 3.2] implique que le groupe  $H_{\text{nr}}^3(k(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$  est annulé par un entier  $N > 0$ . Comme le groupe  $H_{\text{nr}}^3(k(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$  est divisible, il est nul.  $\square$

*Remarque 5.12.* Sur le corps  $\mathbb{C}$  des complexes, soit  $X = E \times S$  le produit d'une courbe elliptique  $E$  et d'une surface d'Enriques. Pour  $s \in S(\mathbb{C})$  fixé, l'inclusion  $E \rightarrow X$  donnée par  $m \mapsto (m, s)$  satisfait que  $CH_0(C_\Omega) \rightarrow CH_0(X_\Omega)$  est surjectif pour tout corps algébriquement clos  $\Omega$  contenant  $\mathbb{C}$ . Ceci implique que le groupe  $\text{Br}(X)$  est d'exposant fini, et donc est fini. Mais il existe de tels couples  $(E, S)$  pour lesquels le groupe  $H_{\text{nr}}^3(\mathbb{C}(X), \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}_2(2))$  est non nul et la conjecture de Hodge entière pour les cycles de codimension 2 n'est pas satisfaite [BO18, CT19b]. La situation sur le corps des complexes est donc différente de celles des corollaires (conditionnels) 5.9 et 5.11. Voir aussi [CTS10].

## 6. REMERCIEMENTS

Federico Scavia bénéficie d'une bourse d'études de University of British Columbia. Il remercie le Département de Mathématiques d'Orsay (Université Paris Saclay) pour son hospitalité pendant l'automne 2019. Cette recherche a été rendue possible grâce au financement qui lui a été fourni par Mitacs.

RÉFÉRENCES

- [ACP17] Asher Auel, Jean-Louis Colliot-Thélène and R. Parimala. Universal unramified cohomology of cubic fourfolds containing a plane. *Brauer groups and obstruction problems*, 29–55, Progr. Math., 320, Birkhäuser/Springer, Cham, 2017. [5](#)
- [BO18] Olivier Benoist and John Christian Ottem. Failure of the integral Hodge conjecture for threefolds of Kodaira dimension zero. *arXiv preprint arXiv :1802.01845*. *Accepted by Comm. Math. Helv.*, 2018. [3](#), [21](#), [26](#)
- [Bla82] Piotr Blass. Unirationality of Enriques surfaces in characteristic two. *Compositio mathematica* 45(3) (1982) 383–398. [5](#)
- [Blo76] Spencer Bloch. Some elementary theorems about algebraic cycles on Abelian varieties. *Invent. math.* 37 (1976), no. 3, 215–228. [16](#)
- [Blo79] Spencer Bloch. Torsion algebraic cycles and a theorem of Roitman. *Compositio mathematica* 39 (1979), no. 1, 107–127. [16](#), [19](#)
- [BKL76] S. Bloch, A. Kas and D. Lieberman. Zero-cycles on surfaces with  $p_g = 0$ . *Compositio mathematica* 33(2) : 135–145, 1976. [5](#)
- [CT83] Jean-Louis Colliot-Thélène. Hilbert’s theorem 90 for  $K_2$ , with application to the Chow groups of rational surfaces. *Inventiones mathematicae*, 71(1) : 1–20, 1983. [18](#), [22](#)
- [CT93] Jean-Louis Colliot-Thélène. Cycles algébriques de torsion et  $K$ -théorie algébrique. In *Arithmetic algebraic geometry (Trento, 1991)*, volume 1553 of *Lecture Notes in Math.*, pages 1–49. Springer, Berlin, 1993. [5](#), [6](#)
- [CT95] Jean-Louis Colliot-Thélène. Birational invariants, purity and the Gersten conjecture. In  *$K$ -theory and algebraic geometry : connections with quadratic forms and division algebras (Santa Barbara, CA, 1992)*, volume 58 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 1–64. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995. [1](#), [20](#)
- [CT15] Jean-Louis Colliot-Thélène. Groupe de Chow des zéro-cycles sur les variétés  $p$ -adiques, d’après S. Saito, K. Sato et al. Séminaire Bourbaki, 62ème année, 2009-2010, n. 2012, 1–30, *Astérisque* 339, 2011. [20](#)
- [CT19a] Jean-Louis Colliot-Thélène. Troisième groupe de cohomologie non ramifiée des hypersurfaces de Fano, *Tunisian Journal of Mathematics*, 1(1) : 47–57, 2019. [24](#)
- [CT19b] Jean-Louis Colliot-Thélène. Cohomologie non ramifiée dans le produit avec une courbe elliptique. *Manuscripta math.*, 160(3-4) : 561–565, 2019. [26](#)
- [CTK13] Jean-Louis Colliot-Thélène et Bruno Kahn. Cycles de codimension 2 et  $H^3$  non ramifié pour les variétés sur les corps finis. *J. K-Theory*, 11(1) : 1–53, 2013. [1](#), [2](#), [3](#), [17](#), [18](#), [22](#), [24](#), [25](#), [26](#)
- [CTR85] Jean-Louis Colliot-Thélène and Wayne Raskind.  $K_2$ -cohomology and the second Chow group. *Mathematische Annalen*, 270(2) : 165–199, 1985. [18](#)
- [CTS10] Jean-Louis Colliot-Thélène et Tamás Szamuely. Autour de la conjecture de Tate à coefficients  $\mathbf{Z}_\ell$  pour les variétés sur les corps finis. In *The geometry of algebraic cycles*, volume 9 of *Clay Math. Proc.*, pages 83–98. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010. [25](#), [26](#)
- [CTSS83] Jean-Louis Colliot-Thélène, Jean-Jacques Sansuc et Christophe Soulé. Torsion dans le groupe de Chow de codimension deux. *Duke Math. J.*, 50(3) : 763–801, 1983. [1](#), [3](#), [5](#), [6](#), [7](#), [8](#), [23](#)
- [CTV12] Jean-Louis Colliot-Thélène et Claire Voisin. Cohomologie non ramifiée et conjecture de Hodge entière. *Duke Math. J.* 161 (2012), no. 5, 735–801. [18](#), [21](#)
- [EM75] Shizuo Endô and Takehiko Miyata. On a classification of the function fields of algebraic tori. *Nagoya Math. J.*, 56 : 85–104, 1975. [8](#)
- [Ful98] William Fulton. *Intersection theory*. Second edition. *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics*, 2. Springer-Verlag, Berlin, 1998. xiv+470 pp.. [11](#)
- [GS88] M. Gros et N. Suwa, Application d’Abel-Jacobi  $p$ -adique et cycles algébriques, *Duke Math. J.*, 579–613, 1988. [18](#)

- [Gro68] Alexander Grothendieck. Le groupe de Brauer. III. Exemples et compléments. In *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, volume 3 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 88–188. North-Holland, Amsterdam, 1968. [20](#), [25](#)
- [GSz] P. Gille and T. Szamuely. *Central Simple Algebras and Galois Cohomology*, Second Edition. Cambridge studies in advanced mathematics **165**, 2017. [10](#)
- [IM79] H. Inose and M. Mizukami. Rational equivalence of 0-cycles on some surfaces of general type with  $p_g = 0$ . *Math. Ann.* 244 (1979), no. 3, 205–217. [5](#)
- [Kah12] Bruno Kahn. Classes de cycles motiviques étales. *Algebra & Number Theory*, 6(7) : 1369–1407, 2012. [26](#)
- [Kato86] Kazuya Kato. A Hasse principle for two-dimensional global fields. *J. reine angew. Math.*, 366 ; 142–181, 1986. [1](#), [3](#)
- [Lan83] William E. Lang. On Enriques surfaces in characteristic  $p$ . I *Math. Ann.* 265 (1983) 45–65. [5](#)
- [MS82] A. S. Merkurjev and A. A. Suslin.  $K$ -cohomology of Severi-Brauer varieties and the norm residue homomorphism. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 46(5) : 1011–1046, 1135–1136, 1982. [7](#), [18](#)
- [Mil82] J. S. Milne. Zero cycles on algebraic varieties in nonzero characteristic : Rojzman’s theorem. *Compositio mathematica*, 47(3) : 271–287, 1982. [16](#)
- [Pir11] Alena Pirutka. Sur le groupe de Chow de codimension deux des variétés sur les corps finis. *Algebra & Number Theory*, 5(6) : 803–817, 2011. [2](#)
- [Pir16] Alena Pirutka. Sur la cohomologie non ramifiée en degré trois d’un produit. *Bull. Soc. Math. France*, 144(1) : 53–75, 2016. [2](#), [22](#)
- [PS16] Raman Parimala and Venapally Suresh. Degree 3 cohomology of function fields of surfaces. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (14) : 4341–4374, 2016. [2](#)
- [Poo04] Bjorn Poonen. Bertini theorems over finite fields. *Ann. of Math. (2)* 160 (2004), no. 3, 1099–1127. [24](#)
- [Ras89] Wayne Raskind. Torsion algebraic cycles on varieties over local fields. In *Algebraic K-theory : connections with geometry and topology (Lake Louise, AB, 1987)*, volume 279 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, pages 343–388. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1989. [18](#)
- [Roj80] A. A. Rojzman. The torsion of the group of 0–cycles modulo rational equivalence. *Ann. of Math. (2)* 111 (1980), no. 3, 553–569. [16](#), [19](#)
- [SS10] Kanetomo Sato and Shuji Saito. A finiteness theorem for zero-cycles over  $p$ -adic fields. *Ann. of Math. (2)* 172 : 1593–1639, 2010, no. 3. [20](#)
- [Sch98] Chad Schoen. An integral analog of the Tate conjecture for one-dimensional cycles on varieties over finite fields. *Math. Ann.*, 311(3) :493–500, 1998. [25](#)
- [SZ14] Alexei N. Skorobogatov and Yuri G. Zarhin. The Brauer group and the Brauer-Manin set of products of varieties. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 16(4) :749–768, 2014. [9](#)
- [Tate94] John Tate. Conjectures on algebraic cycles in  $\ell$ -adic cohomology. *Motives* Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 55.1, pages 71–83, American Mathematical Society, 1994. [22](#)

UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY, CNRS, LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES D’ORSAY, 91405, ORSAY, FRANCE.

*E-mail address:* [jlct@math.u-psud.fr](mailto:jlct@math.u-psud.fr)

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF BRITISH COLUMBIA, VANCOUVER, BC V6T 1Z2, CANADA

*E-mail address:* [scavia@math.ubc.ca](mailto:scavia@math.ubc.ca)