NOTES SUR LE GROUPE DE BRAUER

par

Jean-Louis Colliot-Thélène

Table des matières

1. Propriétés de base

Pour les propriétés du groupe de Brauer d'un corps, nous renvoyons à Serre (Cohomologie galoisienne) et Gille-Szamuely [62].

Soit A un anneau de valuation discrète (de rang 1), de corps des fractions K, de corps résiduel κ de caractéristique zéro. On dispose alors d'une application résidu

$$\mathrm{Br}\,(K) \to H^1(\kappa, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

qui s'insère dans une suite exacte naturelle

$$0 \to \mathrm{Br}\,(A) \to \mathrm{Br}\,(K) \to H^1(\kappa, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to 0.$$

Soit L/K une extension de corps (non néccessairement finie), soit B $subsetL$ un anneau de valuation discrète étendant l'anneau de valuation discrète $A \subset K$. Soit $e \geq 1$ l'indice de ramification, c'est-à-dire la valuation dans B d'une uniformisante de A. Le corps résiduel κ_A de A est un sous-corps du corps résiduel κ_B de B. On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Br}\,(K) & \longrightarrow & H^1(\kappa_A, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \\ \downarrow{\scriptstyle Res_{K,L}} & & \downarrow{\scriptstyle e.Res_{\kappa_A,\kappa_B}} \\ \mathrm{Br}\,(L) & \longrightarrow & H^1(\kappa_B, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \end{array} \tag{1.1}$$

Soit X une k-variété lisse intègre sur un corps k de caractéristique zéro. À tout point de codimension 1 sur X on associe un résidu.

On a alors une suite exacte (Auslander-Goldman, Grothendieck, théorèmes de pureté de SGA4)

$$0 \to \mathrm{Br}\,(X) \to \mathrm{Br}\,(k(X)) \to \oplus_{x \in X^{(1)}} H^1(k(x), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

Cette suite exacte contient en particulier le fait que le groupe de Brauer d'une variété lisse est un groupe de torsion.

Elle implique aussi que pour le complémentaire $U \subset X$ d'un fermé de codimension au moins 2 dans X, la restriction $\mathrm{Br}\,(X) \to \mathrm{Br}\,(U)$ est un isomorphisme.

De ceci l'on conclut que le groupe de Brauer est un invariant k-birationnel des variétés projectives et lisses sur un corps k. Et que pour une telle variété X il est donné par une formule ne faisant pas intervenir le modèle précis X, mais seulement l'ensemble T des valuations v discrètes de rang 1 sur le corps des fonctions $k(X)$ qui sont triviales sur k :

$$\mathrm{Br}\,_{nr}(k(X)/k = \{\alpha \in \mathrm{Br}\,(k(X)), \forall v \in T, \partial_v(\alpha) = 0 \in H^1(\kappa(v), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})\}$$

formule où $\kappa(v)$ désigne le corps résiduel de v et δ_v l'application résidu.

2. Le groupe de Brauer géométrique

Soient k un corps de caractéristique zéro et $\overline{k}$ une clôture algébrique, Soit X une k-variété algébrique projective, lisse et géométriquement intègre. Notons $\overline{X} = X \times_k \overline{k}$.

La suite de Kummer en cohomologie étale donne naissance à des suites exactes de groupes finis

$$0 \to \mathrm{Pic}(\overline{X})/l^n \to H^2_{\text{ét}}(\overline{X}, \mu_{l^n}) \to \mathrm{Br}\,(X)[l^n] \to 0$$

soit encore

$$0 \to \mathrm{NS}(\overline{X})/l^n \to H^2_{\text{ét}}(\overline{X}, \mu_{l^n}) \to \mathrm{Br}\,(X)[l^n] \to 0$$

puis par passage à la limite projective, à

$$0 \to \mathrm{NS}(\overline{X}) \otimes \mathbf{Z}_l \to H^2_{\text{ét}}(\overline{X}, \mathbf{Z}_l(1)) \to T_l(\mathrm{Br}\,(\overline{X})) \to 0$$

et par passage à la limite inductive

$$0 \to \mathrm{NS}(\overline{X}) \otimes \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l \to H^2_{\text{ét}}(\overline{X}, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(1)) \to \mathrm{Br}\,(\overline{X})\{l\} \to 0.$$

On a par ailleurs des suites exactes

$$H^2_{\text{ét}}(\overline{X}, \mathbf{Z}_l(1)) \to H^2_{\text{ét}}(\overline{X}, \mathbf{Q}_l(1)) \to H^2_{\text{ét}}(\overline{X}, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(1)) \to H^3_{\text{ét}}(\overline{X}, \mathbf{Z}_l(1)) \to H^3_{\text{ét}}(\overline{X}, \mathbf{Q}_l(1)).$$

On voit donc que l'on a les suites exactes

$$0 \to (\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l)^{b_2} \to H^2_{\text{ét}}(\overline{X}, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(1)) \to H^3_{\text{ét}}(\overline{X}, \mathbf{Z}_l(1))_{tors} \to 0$$

et

$$0 \to (\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l)^{b_2-\rho} \to \mathrm{Br}\,(\overline{X})\{l\} \to H^3_{\text{ét}}(\overline{X}, \mathbf{Z}_l(1))_{tors} \to 0$$

où $b_2 \in \mathbb{N}$ est le second nombre de Betti l-adique de $\overline{X}$ et $\rho \in \mathbb{N}$ est le rang du groupe de Néron-Severi de $\overline{X}$.

Comme car(k)=0, on a (théorie de Hodge) équivalence entre $b_2 - \rho = 0$ et $H^2(X, O_X) = 0$.

Si l'on a un plongement $\overline{k} \subset \mathbb{C}$, les nombres de Betti l-adiques coïncident avec les nombres de Betti topologiques de $X(\mathbb{C})$, et les groupes finis $H^3_{\text{Betti}}(X(\mathbb{C}), \mathbf{Z})_{tors}$ et $\oplus_l H^3_{\text{ét}}(\overline{X}, \mathbf{Z}_l(1))$ sont isomorphes.

3. L'image du groupe de Brauer dans le groupe de Brauer géométrique

L'énoncé suivant n'a été observé que récemment.

Théorème 3.1. — *(CT et Skorobogatov, 2011)* [43] *Soit k un corps de caractéristique zéro. Pour toute k-variété projective, lisse, géométriquement intègre, le conoyau de l'application naturelle*

$$\mathrm{Br}\,(X) \to \mathrm{Br}\,(\overline{X})^{\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)}$$

est fini.

Démonstration (esquisse). Soit $G = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$. Le groupe $\mathrm{Br}\,(\overline{X})$ est de cotype fini, il en est donc de même de tout sous-quotient. Pour établir l'assertion de l'énoncé, il suffit donc de montrer que le conoyau de $\mathrm{Br}\,(X) \to \mathrm{Br}\,(\overline{X})^G$ est d'exposant fini. Par un argument de corestriction il suffit d'établir le résultat après une extension finie du corps de base. On peut donc supposer $X(k) \neq \emptyset$. La suite spectrale de Hochschild-Serre

$$E_2^{pq} = H^p(G, H^q_{\text{ét}}(\overline{X}, \mathbf{G}_m)) \Longrightarrow H^n_{\text{ét}}(X, \mathbf{G}_m))$$

donne alors naissance à une suite exacte courte

$$\mathrm{Br}\,(X) \to \mathrm{Br}\,(\overline{X})^G \to H^2(G, \mathrm{Pic}(\overline{X})).$$

La suite exacte ci-dessus est fonctorielle en les k-variétés X.

L'idée est de considérer la restriction aux images d'un nombre fini de morphismes de k-courbes $C_i \to X$ et d'utiliser le fait le groupe de Brauer d'une courbe sur un corps algébriquement clos est nul (Tsen, Grothendieck). Il faut trouver les courbes C_i de façon que le noyau des applications de restriction au niveau de $H^2(G, \mathrm{Pic}(\overline{X}))$ soit d'exposant fini. On a une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Pic}^0(\overline{X}) \to \mathrm{Pic}(\overline{X}) \to NS(\overline{X}) \to 0.$$

On se ramène ainsi à étudier les restrictions sur $H^2(G, \mathrm{Pic}^0(\overline{X}))$ et sur $H^2(G, NS(\overline{X}))$. Pour le premier, on utilise le fait (Lefschetz) que si C est une section hyperplane lisse, alors la restriction $\mathrm{Pic}^0(\overline{X}) \to \mathrm{Pic}^0(\overline{C})$ est presque scindée. Ceci permet de traiter $H^2(G, \mathrm{Pic}^0(\overline{X}))$.

Par l'argument de corestriction, on peut supposer que l'action de G sur le groupe de Néron-Severi (qui est de type fini comme groupe abélien) est triviale, et qu'il existe un nombre fini de k-courbes projectives, lisses, géométriquement intègres $C_i, i = 1, \dots, n$ et de k-morphismes $C_i \to X$ tels que la restriction $NS(\overline{X}) \to \mathbf{Z}^n$ donnée par intersection avec ces courbes ait un noyau fini (égal à la torsion de $NS(\overline{X})$). Ceci utilise le fait (Matsusaka) que l'équivalence algébrique et l'équivalence numérique sur les diviseurs coïncident à torsion près. Ceci permet de traiter $H^2(G, NS(\overline{X}))$. QED

On voit donc que l'image de $\mathrm{Br}\,(X)$ dans $\mathrm{Br}\,(\overline{X})$ est finie si et seulement si $\mathrm{Br}\,(\overline{X})^{\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)}$ est fini.

On peut pousser les calculs, donner des bornes pour l'exposant et l'ordre du conoyau. Par exemple, pour une surface quartique diagonale sur un corps de nombres, le conoyau est un sous-groupe de $(\mathbf{Z}/8)^2$.

Pour k un corps de nombres, et plus généralement pour k un corps de type fini sur le corps premier, une conjecture de Tate implique ([42, §4]) que pour tout nombre premier l et toute surface X la partie l-primaire de $\mathrm{Br}\,(\overline{X})^{\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)}$ est finie. Il y a aussi un tel énoncé en dimension quelconque si l'on postule de plus la semi-simplicité de certaines représentations.

Hormis les cas où $\mathrm{Br}\,(\overline{X})$ est fini (soit encore $H^2(X, O_X) = 0$), la finitude de $\mathrm{Br}\,(\overline{X})^{\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)}$ sur k un corps de type fini sur $\mathbf{Q}$ a été établie pour les variétés abéliennes et pour les surfaces $K3$ (Skorobogatov et Zarhin [**110**]).

Définition 3.2. — Soient k un corps et X une k-variété géométriquement connexe. On appelle *groupe de Brauer transcendant* de X le quotient de $\mathrm{Br}\,(X)$ par le sous-groupe formé des classes qui s'annulent par passage à une extension finie séparable de k. Pour $\overline{k}$ une clôture séparable de k, et $\overline{X} = X \times_k \overline{k}$, ce groupe est isomorphe à l'image de $\mathrm{Br}\,(X) \to \mathrm{Br}\,(\overline{X})$.

Pour k de caractéristique zéro et X/k projective, lisse, géométriquement connexe, le théorème 3.1 montre que $\mathrm{Br}_{\,tr}(X)$ est fini si et seulement si $\mathrm{Br}\,(\overline{X})^{\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)}$ est fini.

4. Le groupe de Brauer algébrique

Pour X une k-variété algébrique, on définit le *groupe de Brauer algébrique* de X par la formule

$$\mathrm{Br}_{\,1}(X) = \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}\,(X) \to \mathrm{Br}\,(\overline{X})].$$

On a donc par définition une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Br}_{\,1}(X) \to \mathrm{Br}\,(X) \to \mathrm{Br}_{\,tr}(X) \to 0.$$

Supposons X/k projective, lisse, géométriquement connexe. La suite spectrale de Leray pour la cohomologie étale, le morphisme $X \to \mathrm{Spec}(k)$ et le faisceau $\mathbf{G}_m$ donne naissance à la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(\overline{X})^{\mathrm{Gal}(\overline{K}/k)} \to^{*} \mathrm{Br}\,(k) \to \mathrm{Br}_{\,1}(X)$$

$$\to H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{X})) \to^{*} \mathrm{Ker}[H^3(k, \mathbf{G}_m) \to H^3_{\text{ét}}(X, \mathbf{G}_m)],$$

où les flèches avec une astérisque sont nulles quand $X(k)$ est non vide, car tout k-point donne une rétraction des flèches suivantes. Le groupe $H^3(k, \overline{k}^*)$ est nul si k est un corps de nombres (c'est un résultat difficile de la théorie du corps de classes.)

La suite spectrale donne aussi l'information suivante.

Proposition 4.1. — *Supposons X/k projective, lisse, géométriquement connexe. Si l'on a $H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{X})) = 0$ et $\mathrm{Br}\,(\overline{X}) = 0$, alors la flèche naturelle $H^3(k, \mathbf{G}_m) \to H^3_{\text{ét}}(X, \mathbf{G}_m)$ est injective.*

Pour contrôler $H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{X}))$, on utilise la suite exacte de modules galoisiens

$$0 \to \mathrm{Pic}^0_{X/k}(\overline{k}) \to \mathrm{Pic}(\overline{X}) \to \mathrm{NS}(\overline{X}) \to 0.$$

La variété $\mathrm{Pic}^0_{X/k}$ est la variété de Picard de X, c'est une variété abélienne de dimension la dimension sur k du k-vectoriel $H^1(X, O_X)$. Le groupe de Néron-Severi $\mathrm{NS}(\overline{X})$ est un groupe abélien de type fini. Lorsque ce groupe est sans torsion, le groupe $H^1(k, \mathrm{NS}(\overline{X}))$ est fini.

Proposition 4.2. — *(*[37, Thm. 2.B.1, p. 463]*) Soit k un corps de caractéristique zéro. Soit $\mathcal{C}$ une classe de variétés projectives, lisses, géométriquement connexes X/K, K variant parmi les surcorps de k, stable par changement de corps de base, et satisfaisant $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$.*

Si l'un des énoncés

(i) le $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$-module $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ est un module de permutation ;

(ii) le $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$module $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ est un facteur direct d'un module de permutation ;

(iii) $H^1(K, \mathrm{Pic}(\overline{X})) = 0$;

vaut pour la sous-classe de $\mathcal{C}$ formée des variétés X/K avec $X(K) \neq \emptyset$, alors le même énoncé vaut pour toutes les variétés de la classe.

Démonstration (esquisse) Pour X/K donnée, on passe de la K-variété X à la $K(X)$-variété $X \times_K K(X)$, qui a un $K(X)$-point rationnel. QED

Remarque 4.1. — Cet énoncé apporte une explication partielle au phénomène suivant. Si on a une classe de variétés X/F, sur un corps variable F, avec la propriété :

"Si une variété X/F dans la classe a un point F-rationnel, alors elle est F-rationnelle"

alors, quand on est sur un corps de nombres, on arrive souvent à montrer le principe de Hasse pour les variétés d'une telle classe. La proposition ci-dessus dit au moins qu'on ne saurait avoir d'obstruction de Brauer-Manin, comme défini plus avant dans les notes.

Proposition 4.3. — *Soit k un corps de caractéristique zéro. Soit X une k-variété projective, lisse, géométriquement connexe, satisfaisant*

$H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$. *Soit L/k une extension de corps. Si k est algébriquement fermé dans L, alors l'application naturelle*

$$\mathrm{Br}\,(X)/\mathrm{Im}(\mathrm{Br}\,(k)) \to \mathrm{Br}\,(X_L)/\mathrm{Im}(\mathrm{Br}\,(L))$$

est injective.

Démonstration (esquisse) Par un argument de spécialisation on montre que toute classe dans le noyau provient d'un élément de $\mathrm{Br}\,_1(X)$. On est alors ramené à observer que l'application

$$H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{X})) \to H^1(L, \mathrm{Pic}(X_{\overline{L}})$$

est injective, ce qui résulte du fait que $\mathrm{Pic}(\overline{X}) = Pic(X_{\overline{L}})$ est un module galoisien de type fini comme groupe abélien. QED

5. Exemples

5.0.1. Les courbes. — Pour une courbe C/k projective et lisse, il résulte du calcul général, ou du théorème de Tsen, que l'on a $\mathrm{Br}\,(\overline{C}) = 0$. On a donc $\mathrm{Br}\,_1(C) = \mathrm{Br}\,(C)$.

Notons J la variété jacobienne de C. La suite exacte ... s'écrit ici

$$0 \to J(\overline{k}) \to \mathrm{Pic}(\overline{C}) \to \mathbf{Z} \to 0.$$

Puisque $H^1(k, \mathbf{Z}) = 0$, on en déduit la suite exacte

$$0 \to J(k) \to (\mathrm{Pic}(\overline{C}))^{\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)} \to \mathbf{Z} \to H^1(k, J(\overline{k})) \to H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{C})) \to 0.$$

Le groupe $H^1(k, J(\overline{k}))$ classifie les espaces principaux homogènes sous J. L'application $\mathbf{Z} \to H^1(k, J(\overline{k}))$ envoie 1 sur la classe de l'espace principal homogène $\mathrm{Pic}^1_{C/k}$.

Si k est un corps de nombres, on a donc une application sujective de $\mathrm{Br}\,(C)$ vers un quotient de $H^1(k, J(\overline{k}))$. En pratique il est difficile de relever un élément de ce quotient en un élément de $\mathrm{Br}\,(C)$.

Remarque 5.1. — Pour toute courbe C, éventuellement singulière, non nécessairement complète, on a encore $\mathrm{Br}\,(\overline{C}) = 0$. Dans le cas lisse, c'est une conséquence de l'injectivité $\mathrm{Br}\,(\overline{C}) \hookrightarrow \mathrm{Br}\,(\overline{k}(C))$ et du théorème de Tsen, qui implique $\mathrm{Br}\,(\overline{k}(C)) = 0$. Dans le cas singulier, voir Grothendieck ou CT/Ojanguren/Parimala.

Remarque 5.2. — Étant donnée une k-variété X/k, on peut produire des éléments "explicites" dans le groupe de Brauer algébrique $\mathrm{Br}_1(X)$ par cup-produit

$$H^1_{\text{ét}}(X,\mu_n)\times H^1(k,\mathbf{Z}/n)\to H^2_{\text{ét}}(X,\mu_n)\to \mathrm{Br}(X)[n].$$

On peut aussi considérer les éements de $\mathrm{Br}_1(X)$ dont la restriction à un ouvert U non vide convenable s'écrit comme un tel cup-produit.

Un exemple classique consiste en les cup-produits

$$(f,K/k)\in \mathrm{Br}(k(X))$$

où K/k est une extension cyclique et $f\in k(X)^*$ est une fonction rationnelle sur X dont le diviseur sur X est une norme d'un diviseur sur X_K.

On peut aussi penser au sous-groupe du groupe de Brauer $\mathrm{Br}(X)$ engendré par les cup-produits

$$H^1_{\text{ét}}(X,\mu_n)\times H^1_{\text{ét}}(X,\mathbf{Z}/n)\to H^2_{\text{ét}}(X,\mu_n)\to \mathrm{Br}(X)[n].$$

Pour les variétés qui admettent des revêtements abéliens non ramifiés, par exemple pour les courbes de genre au moins 1, on peut se demander dans quelle mesure ces sous-groupes engendrent tout le groupe de Brauer.

On peut aussi penser aux éléments du groupe de Brauer de X obtenus comme corestrictions d'éléments de $\mathrm{Br}\, X_K$ pour K/k une extension finie de corps.

On trouvera de tels exemples dans les articles [**123**, **124**].

5.0.2. L'espace projectif. — Pour $X=\mathbf{P}^n_k$, on a $J=\mathrm{Pic}^0_{X/k}=0$ et $\mathrm{NS}(\overline{X})=\mathbf{Z}$ avec action triviale du groupe de Galois, ce qui implique $H^1(k,\mathrm{Pic}(\overline{X})=0$. La flèche naturelle $\mathrm{Br}(k)\to\mathrm{Br}(\mathbf{P}^n_k)$ est donc un isomorphisme.

Pour la droite projective, on a la suite exacte

$$0\to \mathrm{Br}(k)\to\mathrm{Br}(k(\mathbf{P}^1))\to\oplus_{x\in(\mathbf{P}^1_k)^{(1)}}H^1(k(x),\mathbf{Q}/\mathbf{Z})\to H^1(k,\mathbf{Q}/\mathbf{Z})\to 0,$$

où les flèches $H^1(k(x),\mathbf{Q}/\mathbf{Z})\to H^1(k,\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ sont des flèches de corestriction.

5.0.3. Les coniques. — Soit X/k une conique projective et lisse. Si $X(k)\neq\emptyset$, alors $X\simeq\mathbf{P}^1_k$. Supposons $X(k)=\emptyset$.

On a encore ici $J=\mathrm{Pic}^0_{X/k}=0$ et $\mathrm{Pic}(\overline{X})=\mathrm{NS}(\overline{X})=\mathbf{Z}$ avec action triviale du groupe de Galois, ce qui implique $H^1(k,\mathrm{Pic}(\overline{X}))=0$. La flèche

$\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(\overline{X})^{\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)}$, c'est-à-dire $\mathrm{Pic}(X) \to \mathbf{Z}$ a pour image $2\mathbf{Z} \subset \mathbf{Z}$. On a ici une suite exacte

$$0 \to \mathbf{Z}/2 \to \mathrm{Br}\,(k) \to \mathrm{Br}\,(X) \to 0,$$

et l'image de $1 \in \mathbf{Z}/2$ dans $\mathrm{Br}\,(k)$ est la classe de l'algèbre de quaternions associée à la conique X. Ce résultat remonte en substance à E. Witt.

Pour X/k une conique, comme $\mathrm{Br}\,\overline{X} = 0$ et $H^1(k, \mathrm{Pic}\,\overline{X}) = 0$, la flèche naturelle $H^3(k, \mathbf{G}_m) \to H^3_{\text{ét}}(X, \mathbf{G}_m)$ est injective.

5.0.4. Variétés rationnelles, unirationnelles, rationnellement connexes. — Pour une telle variété X, on a $H^1(X, O_X) = 0$ et $H^2(X, O_X) = 0$, $\mathrm{Pic}(\overline{X}) = \mathrm{NS}(\overline{X})$. De plus, le groupe fondamental de ces variétés est trivial. En particulier le groupe de Picard géométrique $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ est sans torsion.

Ainsi $\mathrm{Br}\,_1(X)/\mathrm{Br}\,_0(X) = H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{X})) = H^1(k, \mathrm{NS}(\overline{X}))$ est un groupe fini.

Le groupe $\mathrm{Br}\,(\overline{X})$ est fini, on a un isomorphisme

$$\mathrm{Br}\,(\overline{X}) \xrightarrow{\simeq} \oplus_l H^3_{\text{ét}}(\overline{X}, \mathbf{Z}_l(1))_{tors}.$$

Ce dernier groupe est nul pour les variétés rationnelles, par invariance birationnelle de $\mathrm{Br}\,(\overline{X})$ et nullité sur l'espace projectif.

Sur $k = \mathbb{C}$, le terme de droite s'identifie à la torsion de $H^3_{Betti}(X(\mathbb{C}), \mathbf{Z})$, torsion qui est l'invariant initialement utilisé par Artin et Mumford pour donner des exemples de variétés unirationnelles non rationnelles.

Pour une intersection complète de dimension au moins 3 dans un espace projectif, de multi-degré arbitraire, on a encore $H^1(X, O_X) = 0$ et $H^2(X, O_X) = 0$. De fait :

Proposition 5.3. — *Soit $X \subset \mathbf{P}^n_k$ une intersection complète lisse de dimension au moins 3. Alors* $\mathrm{Br}\,(k) = \mathrm{Br}\,(X)$.

On notera qu'une hypersurface de degré $d \geq 5$ dans $\mathbf{P}^4$ est une variété de type général.

On peut montrer (Salberger, voir CT, appendice à article de Browning) :

Proposition 5.4. — *Soit $X \subset \mathbf{P}^n_k$ une hypersurface cubique géométriquement intègre de dimension au moins 3 et qui n'est pas un cône. Soit $Z \subset X$ son lieu singulier. Soit Y un k-modèle projectif et lisse de X. Si Z est vide, ou si la codimension de Z dans X est au moins 4, alors* $\mathrm{Br}\,k = \mathrm{Br}\,Y$.

5.0.5. Fibrations au-dessus de la droite projective. — Soit $f : X \to \mathbf{P}^1_k$ un k-morphisme dominant de k-variétés projectives, lisses, géométriquement intègres, de fibre générique X_η lisse et géométriquement intègre.

On définit

$$\mathrm{Br}_{\,vert}(X/\mathbf{P}^1) = \{A \in \mathrm{Br}\,(X), A \otimes k(X) \in \mathrm{Im}[\mathrm{Br}\,(k(\mathbf{P}^1) \to \mathrm{Br}\,(k(X)]\}.$$

On a par définition une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Br}_{\,vert}(X/\mathbf{P}^1) \to \mathrm{Br}\,(X) \to \mathrm{Br}\,(X_\eta)/Im(\mathrm{Br}\,(k(\mathbf{P}^1)).$$

On peut chercher à déterminer $\mathrm{Br}\,(X)$ au moyen de cette suite exacte. Nous discutons ici le terme $\mathrm{Br}_{\,vert}(X/\mathbf{P}^1)$. Pour une discussion de l'image de $\mathrm{Br}\,(X) \to \mathrm{Br}\,(X_\eta)/Im(\mathrm{Br}\,(k(\mathbf{P}^1))$ pour une k-surface X, voir [45].

On a un diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathrm{Br}\,(k) & \to & \mathrm{Br}\,(k(\mathbf{P}^1)) & \to & \oplus_{x \in \mathbf{P}^{1\,(1)}} H^1(k(x), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) & \to & H^1(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ 0 & \to & \mathrm{Br}\,(X) & \to & \mathrm{Br}\,(X_\eta) & \to & \oplus_{y \in X^{(1)}, y \notin X_\eta} H^1(k(y), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) & & & & \end{array}$$

où la flèche $H^1(k(x), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to H^1(k(y), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ est nulle si $x \neq f(y)$ et est égale à $e_{y/x}.\mathrm{Res}_{k(y)/k(x)}$ si $x = f(y)$ et $e_{y/x}$ désigne l'indice de ramification.

Soit S l'ensemble fini des points fermés de $\mathbf{P}^1_k$ dont la fibre $f^{-1}(P)$ n'est pas géométriquement intègre. Du diagramme ci-dessus on tire que le sous-groupe de $\mathrm{Br}\,(k(\mathbf{P}^1))$ formé des éléments dont les résidus sont triviaux en dehors de S et qui en tout point $x \in S$ appartiennent au noyau de

$$\{e_{y/x}.\mathrm{Res}_{k(y)/k(x)}\} : H^1(k(x), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to \prod_{y \mapsto x} H^1(k(y), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}),$$

se surjecte sur $\mathrm{Br}_{\,vert}(X)$. Pour chaque $y \mapsto x$, soit $\kappa_y \subset k(y)$ la clôture intégrale de $k(x)$ dans $k(y)$ et $f_{y/x} = [\kappa(y) : k(x)]$. C'est une extension finie de $k(x)$. Le noyau de $\mathrm{Res}_{k(y)/k(x)} : H^1(k(x), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to H^1(k(y), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ coïncide avec le noyau, fini, de $H^1(k(x), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to H^1(k(y), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ (lequel est annulé par $f_{y/x}$).

Le morphisme f est localement scindé pour la topologie étale sur $\mathbf{P}^1$ si et seulement si, pour tout $x \in \mathbf{P}^1$, il existe un $y \mapsto x$ avec $e_{y/x} = 1$. De ce qui précède résulte la proposition :

Proposition 5.5. — *Soit $f : X \to \mathbf{P}^1_k$ comme ci-dessus. Le quotient $\mathrm{Br}_{\,vert}(X/\mathbf{P}^1_k)/\mathrm{Im}(\mathrm{Br}\,(k))$ est fini sous l'une ou l'autre des hypothèses ci-dessous :*

(i) Le morphisme f est localement scindé pour la topologie étale sur $\mathbf{P}^1$.

(ii) Pour chaque $x \in \mathbf{P}^{1(1)}$, le pgcd des $e_{y/x}$ (où y parcourt les points de codimension 1 tels que $f(y) = x$) est égal à 1.

Exercice. Soit $X \to \mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}$ de fibre générique donnée par

$$u^3 + tv^3 + t^2w^3 = 0.$$

Montrer que $\mathrm{Br}_{\,vert}(X/\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}})/\mathrm{Br}\,(\mathbf{Q})$ est infini.

5.0.6. Fibrés en coniques sur une droite. — Soit X/k une surface projective, lisse, géométriquement connexe équipée d'un morphisme $X \to \mathbf{P}^1_k$ dont la fibre générique X_η est une conique lisse sur $K = k(\mathbf{P}^1_k) = k(t)$. Après des transformations k-birationnelles, on peut supposer qu'en tout point fermé $P \in \mathbf{P}^1_k$ la fibre X_P est une conique réduite sur le corps résiduel $k(P)$ et que $X \to \mathbf{P}^1_k$ est relativement minimal. Soit S l'ensemble fini des points fermés $P \in \mathbf{P}^1_k$ pour lesquels X_P n'est pas lisse sur $k(P)$. En un tel point P, il existe une extension quadratique de corps F_P/k_P sur laquelle X_P se décompose en un couple de droites transverses, d'intersection un unique point défini sur $k(P)$. Écrivons $F_P = k_P(\sqrt{a_P})$.

Soit $A \in \mathrm{Br}\,(K)$ la classe d'une algèbre de quaternions sur K associée à la conique X_η/K. Supposons que A n'est pas dans l'image de $\mathrm{Br}\,(k)$, ce qui revient à dire que la fibration $X/\mathbf{P}^1_k$ n'est pas $\mathbf{P}^1_k$-birationnelle au produit d'une coniques sur k et de $\mathbf{P}^1_k$. De plus $\mathrm{Br}\,(k) \to \mathrm{Br}\,(X)$ est injectif.

La fibration $X \to \mathbf{P}^1_k$ ne possède pas de section. La classe $A \in \mathrm{Br}\,(K)$ est non nulle, on a une suite exacte

$$0 \to \mathbf{Z}/2 \to \mathrm{Br}\,(K) \to \mathrm{Br}\,(X_\eta \to 0.$$

On a donc ici $\mathrm{Br}_{\,ver}(X/\mathbf{P}^1_k) = \mathrm{Br}\,(X)$.

La discussion de la section précédente montre que dans la longue suite exacte associée à $\mathbf{P}^1_k$, à chaque point $P \in S$, le résidu $\delta_P(A) \in H^1(k_P, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ est dans $H^1(F_P/k_P, \mathbf{Z}/2) = \mathbf{Z}/2$, c'est-à-dire qu'il vaut 1 ou a_P dans k_P^*/k_P^{*2}, et que l'on a une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Br}\,(k) \to \mathrm{Br}\,(X) \to (\bigoplus_{P \in S} (\mathbf{Z}/2)_P)/(\{\delta_P(A)\}) \to k^\times/k^{\times 2}.$$

La dernière application envoie

$$1 \in (\mathbf{Z}/2)_P = H^1(F_P/k_P, \mathbf{Z}/2) \subset H^1(k_P, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

sur la classe de $N_{k_P/k}(a_P) \in k^\times/k^{\times 2}$.

Dans cette situation on peut donner des générateurs explicites pour $\mathrm{Br}\,(X)/\mathrm{Br}\,(k)$.

Ce sont les images par l'application naturelle $\mathrm{Br}\,(k(t)) \to \mathrm{Br}\,(k(X))$ des combinaisons d'éléments de la forme

$$\mathrm{Cores}_{k_P/k}(t-\alpha_P, a_P) \in \mathrm{Br}\,(k(t)),$$

où P parcourt les points de S, $k_P = k(\alpha_P)$, $\beta_P \in k_P^\times$ et $(t-\alpha_P, a_P)$ est une algèbre de quaternions sur $k_P(t)$, qui satisfont la condition

$$\prod_{P \in \mathbf{P}^{1\,(1)}_k} N_{k_P/k}(a_P) = 1 \in k^*/k^{*2}.$$

Exercice. Soit $P(x) \in k[x]$ un polynôme séparable et soir $a \in k, a \notin k^{*2}$. Soit $X/\mathbf{P}^1_k$ un modèle projectif et lisse de la surface de type Châtelet généralisée donnée par l'équation affine :

$$y^2 - az^2 = P(x).$$

Montrer :

(1) Si $P(x)$ est irréductible, ou si c'est le produit de deux polynômes irrréductibles de degré impair, alors $\mathrm{Br}\,(X)/\mathrm{Br}\,(k) = 0$.

(2) Si $P(x)$ est le produit de deux polynômes irréductibles de degré pair, et que chacun est irréductible sur $k(\sqrt{a})$, alors $\mathrm{Br}\,(X)/\mathrm{Br}\,(k) = \mathbf{Z}/2$.

(3) Supposons le degré de P pair. Soit n le nombre de facteurs irréductibles de P de degré pair qui restent irréductibles sur $k(\sqrt{a})$. Soit m le nombre de facteurs irréductibles de degré impair.

Sauf erreur, on a $\mathrm{Br}\,(X)/\mathrm{Br}\,(k) = (\mathbf{Z}/2)^s$, avec $s = n-1$ si $m = 0$, $s = n+m-1$ si m est impair, et $s = n+m-2$ si $m > 0$ est pair.

Remarques 5.6. — (1) Une autre méthode consiste à calculer le module galoisien $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ puis $H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{X}))$. C'est ce qui avait été fait initialement, mais c'est un peu moins efficace pour trouver des générateurs dans $\mathrm{Br}_1(X)$, qui ici coïncide avec $\mathrm{Br}\,(X)$.

Références : [**40**], [**104**], [**106**, §7.1] (comparer les deux premières propositions.)

Un point intéressant est le suivant. Pour une fibration en coniques $X/\mathbf{P}^1_k$ l'application naturelle $\mathrm{Br}_1(X) \to H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{X}))$ est automatiquement surjective. Cette flèche, qui vient de la suite spectrale de Hochschild-Serre, fait partie d'une suite exacte

$$\mathrm{Br}_1(X) \to H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{X})) \to H^3(k, \mathbf{G}_m)$$

qui est fonctorielle en les k-variétés projectives géométriquement intègres. Soit $C \subset X$ une fibre lisse au-dessus d'un k-point de $\mathbf{P}^1_k$. Pour une telle conique, $\mathrm{Pic}(\overline{C}) = \mathbf{Z}$ avec action triviale du groupe de Galois. On a donc $H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{C})) = 0$. La fonctorialité de la suite exacte ci-dessus pour $C \to X$ donne alors que la flèche $H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{X})) \to H^3(k, \mathbf{G}_m)$ est nulle.

On ne dispose malheureusement pas d'un tel argument pour les surfaces cubiques lisses.

(2) Pour d'autres calculs de groupes de Brauer verticaux de fibrations, aussi dans des cas où on n'a pas un modèle projectif et lisse sur k explicite pour l'espace total, voir Skorobogatov (familles de quadriques de dimension 2 sur $\mathbf{P}^1_k$) [**103**], CT-Swinnerton-Dyer [**46**].

On s'intéresse particulièrement aux variétés projectives et lisses géométriquement connexes équipées d'un morphisme dominant $X \to \mathbf{P}^1_k$ dont la fibre générique X_η est géométriquement connexe et contient un ouvert E qui est un espace homogène d'un $k(\mathbf{P}^1)$-groupe linéaire connexe G. Dans ce cas la fibration admet une section sur une extension finie de k.

Déjà le cas où le groupe G est un tore T est non trivial. On ne sait pas en général donner de formule simple pour le groupe de Brauer $\mathrm{Br}\,(X)$. Le quotient de $\mathrm{Br}\,(X)$ par le sous-groupe $\mathrm{Br}\,_{vert}(X)$ est un sous-groupe d'un groupe que l'on sait calculer, à savoir le groupe de Brauer non ramifié du tore T modulo $\mathrm{Br}\,(k(\mathbf{P}^1))$, mais on ne sait pas en général quel sous-groupe. Un cas concret est celui de fibrations $X \to \mathbf{P}^1_k$ birationnelles à une variété donnée par une équation affine

$$N_{K/k}(\Xi) = P(t)$$

avec K/k une extension séparable de corps, ou plus généralement un produit fini de telles extensions, et $P(t) \in k[t]$ non nul. La projection sur $\mathbf{P}^1$ est donnée par la variable t. Pour des calculs partiels, voir CT-Harari-Skoro [**28**] et Dasheng Wei [**123**]. Pour un calcul similaire sur une base de dimension plus grande, voir Poonen [**95**] et [**?**]

CTsurPoonen (2010) (solide fibré en coniques sur une surface).

Citons un résultat curieux de [**28**]. Si $P(t)$ possède une racine simple sur k, alors $\mathrm{Br}\,(X) \subset \mathrm{Br}\,_{vert}(X)$.

6. Calculer le groupe de Brauer géométrique non ramifié quand on ne dispose pas d'un modèle projectif et lisse

Il y a deux aspects : d'une part donner des formules pour le groupe de Brauer, d'autre part exhiber des algèbres d'Azumaya concrètes (ou du moins des algèbres simples centrales sur le corps des fonctions dont la classe est non ramifiée).

Travaux de Artin-Mumford, Saltman, Bogomolov.

Références originelles : Artin-Mumford, Bogomolov, Saltman.

Littérature complémentaire : Exposé de Deligne à Bourbaki sur Artin-Mumford, CT-Ojanguren Inv. Math., CT-SantaBarbara, CT-Sansuc (Bombay) sur Bogomolov et Saltman.

Il y a des développements du côté de la cohomologie non ramifiée de degré plus grand que 2 (en particulier travaux de Merkur'ev), mais ceci ne sera pas considéré dans ce texte.

6.0.7. Espaces homogènes de groupes linéaires connexes. —

Théorème 6.1. — *(Borovoi, Demarche, Harari 2012)* [10] *Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique zéro. Soit G un k-groupe linéaire connexe et soit $H \subset G$ un sous-groupe algébrique connexe. Alors* $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(k(G/H)) = 0$.

Ce théorème a une longue histoire. le cas $G = GL_n$ et $H = PGL_m$ fut établi par Saltman (1985). Le cas G semisimple simplement connexe fut établi par Bogomolov (1989). La démonstration de Bogomolov est détaillée dans CT-Sansuc (Bombay). Le cas général vient d'être établi récemment. La première démonstration est arithmétique (Borovoi, Demarche, Harari, 2012). Elle est indépendante du théorème de Bogomolov. La seconde démonstration, due à Borovoi (2012), établit le théorème par réduction au théorème de Bogomolov.

Le théorème suivant, établi par voie arithmétique, est aussi dû à Borovoi, Demarche, Harari, 2012.

Théorème 6.2. — *(Borovoi, Demarche, Harari 2012)* [10] *Soit k un corps de caractéristique zéro. Soit G un k-groupe algébrique linéaire connexe vérifiant* $\mathrm{Pic}\,\overline{G} = 0$. *Soit T son quotient torique maximal. Soit X un espace homogène de G de stabilisateur géométrique $\overline{H}$. On suppose que le $\overline{k}$-groupe $\overline{H}$ est extension d'un groupe de type multiplicatif par un groupe linéaire connexe sans caractères. Soit alors S le k-groupe de type multiplicatif associé à $(X, \overline{H})$. On a une injection naturelle*

$$\mathrm{Br}_1(X^c)/\mathrm{Br}\,k \hookrightarrow Ш^1_{\omega,alg}([\hat{T} \to \hat{S}])$$

(le complexe étant en degrés -1 et 0) qui est un isomorphisme si l'on a $X(k) \neq \emptyset$ ou $H^3(k, \mathbf{G}_m) = 0$.

On a donc le théorème

Théorème 6.3. — *Soit k un corps de caractéristique zéro. Soit G un k-groupe algébrique linéaire* **connexe** *vérifiant* $\mathrm{Pic}\,\overline{G} = 0$. *Soit T son quotient torique maximal. Soit X un espace homogène de G de stabilisateur géométrique $\overline{H}$ connexe. Soit alors S le k-tore associé à $(X, \overline{H})$. On a une injection naturelle*

$$\mathrm{Br}\,(X^c)/\mathrm{Br}\,k \hookrightarrow \text{Ш}^1_{\omega,alg}([\hat{T} \to \hat{S}])$$

(le complexe étant en degrés -1 et 0) qui est un isomorphisme si $X(k) \neq \emptyset$ ou $H^3(k, \mathbf{G}_m) = 0$.

Un certain nombre de particuliers de ces théorèmes avaient été établis auparavant.

La cas $G = T$ un tore, $\overline{H} = 1$ (CT-Sansuc [38]). Dans ce cas

$$\text{Ш}^1_{\omega,alg}([\hat{T} \to \hat{S}]) = \text{Ш}^1_{\omega,alg}([\hat{T} \to 0]) = \text{Ш}^2_{\omega,alg}(k, \hat{T}).$$

Le cas G un k-groupe semisimple, vu comme quotient d'un k-groupe semisimple simplement connexe $\tilde{G}$ par un sous-k-groupe abélien fini μ fini abélien (CT-Kunyavskii [30]). Dans ce cas

$$\text{Ш}^1_{\omega,alg}([\hat{T} \to \hat{S}]) = \text{Ш}^1_{\omega,alg}([0 \to \hat{S}]) = \text{Ш}^1_{\omega,alg}(k, \hat{\mu}).$$

Le cas G semisimple simplement connexe et $\overline{H}$ connexe (CT-Kunyavskiĭ [31]). Dans ce cas

$$\text{Ш}^1_{\omega,alg}([\hat{T} \to \hat{S}]) = \text{Ш}^1_{\omega,alg}([0 \to \hat{S}]) = \text{Ш}^1_{\omega,alg}(k, \hat{S}).$$

Sur un corps F quelconque pour G/F semisimple, Blinstein–Merkurjev (2012) [2] établissent $\mathrm{Br}\,(F) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Br}_{\,nr}(GL_n/G)$.

Quotients par un groupe fini, le cas géométrique

Soit G un groupe fini et V une représentation linéaire fidèle.

Saltman donna les premiers exemples avec $\mathrm{Br}_{\,nr}(V/G) \neq 0$. Bogomolov donna une formule générale.

Théorème 6.4. — *(Bogomolov) Pour une représentation complexe linéaire fidèle V de dimension finie d'un groupe fini G,*

$$\mathrm{Br}_{\,nr}(\mathbb{C}(V)^G) = \mathrm{Ker}[H^2(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to \prod_{A \subset G, A\ bicyclique} H^2(A, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})]$$

soit encore

$$\mathrm{Br}_{\,nr}(\mathbb{C}(V)^G) = \mathrm{Ker}[H^3(G, \mathbf{Z}) \to \prod_{A \subset G, A\ bicyclique} H^3(A, \mathbf{Z})].$$

Un groupe est dit bicylique s'il est abélien et engendré par au plus 2 éléments.

Dans cette formule on peut remplacer l'ensemble des sous-groupes bicycliques de G par l'ensemble des sous-groupes abéliens de G.

La même formule vaut pour $\mathrm{Br}_{nr}(\mathbb{C}(SL_n/G)$ pour G sous-groupe fini de SL_n.

L'énoncé plus général suivant ne semble pas avoir été remarqué.

Théorème 6.5. — *Soit $H/\mathbb{C}$ un groupe semisimple simplement connexe. Soit $G \subset H$ un sous-groupe fini. On a alors la formule*

$$\mathrm{Br}_{nr}(H/G) = \mathrm{Ker}[H^2(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to \prod_{A\subset G, A\ bicyclique} H^2(A, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})]$$

Démonstration. — La méthode est en substance la même que celle de Bogomolov (cf. [**39**, Thm. 7.1]). Il suffit de combiner divers théorèmes de Bogomolov [**3**], tels que décrits dans [**39**], article auquel se font les références dans la démonstration qui suit. D'après le théorème 6.1, le groupe $\mathrm{Br}_{nr}(H/G)$ consiste en les éléments de $\mathrm{Br}\,(\mathbb{C}(H/G))$ dont la restriction à tout $\mathrm{Br}\,(\mathbb{C}(H/A))$ avec $A \subset G$ abélien bicyclique est non ramifiée. D'après la proposition 9.12, tout H/A avec A fini bicyclique est une variété rationnelle, et donc $\mathrm{Br}_{nr}(\mathbb{C}(H/A)) = 0$. Ainsi $\mathrm{Br}_{nr}(H/G)$ consiste en les éléments de $\mathrm{Br}\,(\mathbb{C}(H/G))$ dont la restriction à chaque $\mathrm{Br}\,(\mathbb{C}(H/A))$ avec A abélien bicyclique est nulle. Par la suite de restriction-inflation en cohomologie galoisienne et le théorème de Hilbert 90, c'est donc le groupe

$$\mathrm{Ker}[H^2(G, \mathbb{C}(H)^*) \to \prod_{A\subset G, A\ bicyclique} H^2(A, \mathbb{C}(H)^*)].$$

Comme $\mathbb{C}[H]^* = \mathbb{C}^*$ et $\mathrm{Pic}(H) = 0$ (car H est simplement connexe), on a la suite exacte de G-modules

$$1 \to \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}(H)^* \to \mathrm{Div}(H) \to 0.$$

Comme $\mathrm{Div}(H)$ est un G-module de permutation, on a $H^1(B, Div(H)) = 0$ pour tout sous-groupe B de G, et le noyau de

$$H^2(G, \mathrm{Div}(H)) \to \prod_{g\in G} H^2(\{g\}, \mathrm{Div}(H))$$

est nul. Comparant les suites exactes

$$0 \to H^2(G, \mathbb{C}^*) \to H^2(G, \mathbb{C}(H)^*) \to H^2(G, \mathrm{Div}(H))$$

et les diverses suites

$$0 \to H^2(A, \mathbb{C}^*) \to H^2(A, \mathbb{C}(H)^*) \to H^2(A, \mathrm{Div}(H))$$

pour $A \subset G$ abélien bicyclique, on voit que le groupe

$$\mathrm{Ker}[H^2(G, \mathbb{C}(H)^*) \to \prod_{A \subset G, A \ bicyclique} H^2(A, \mathbb{C}(H)^*)].$$

s'identifie au groupe

$$\mathrm{Ker}[H^2(G, \mathbb{C}^*) \to \prod_{A \subset G, A \ bicyclique} H^2(A, \mathbb{C}^*)].$$

□

Corollaire 6.6. — *Soit $H/\mathbb{C}$ un groupe semisimple simplement connexe. On a* $\mathrm{Br}_{nr}(\mathbb{C}(H/G)) = 0$ *pour tout sous-groupe abélien fini $G \subset H$.*

Démonstration. — Il suffit de savoir que

$$\mathrm{Ker}[H^2(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to \prod_{A \subset G, A \ bicyclique} H^2(A, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})] = 0$$

pour tout groupe abélien fini G. On peut certainement le voir en utilisant de façon appropriée la formule de Künneth. On peut aussi appliquer le théorème ci-dessus à $H = SL_{n,\mathbb{C}}$, utiliser le fait que dans ce cas $SL_{n,\mathbb{C}}/G$ est stablement birationnel à $GL_{n,\mathbb{C}}/G$ (considérer le quotient de $SL_n \times GL_n$ par le plongement diagonal de G, et considérer les deux projections évidentes), et dans le cas de $GL_{n,\mathbb{C}}/G$ raisonner comme pour le théorème de Fischer, car G se plonge dans un tore maximal. □

Pour des raisons arithmétiques, il est intéressant d'essayer d'obtenir, sur un corps k de car. zéro quelconque, des formules analogues pour une représentation linéaire fidèle d'un groupe fini G, soit encore pour $\mathrm{Br}_{nr}(SL_{n,k}/G)$, On consultera à ce sujet Harari [70], Demarche [53], Colliot-Thélène [25].

Lemme 6.7. — *Soit F un corps de caractéristique zéro. Soient G un F-groupe semisimple simplement connexe E un espace principal homogène de G, et X une E-variété projective lisse géométriquement connexe birationnelle à E. Alors :*

(i) La flèche naturelle $\mathrm{Br}(F) \to \mathrm{Br}(E)$ *est un isomorphisme.*

(ii) La flèche naturelle $\mathrm{Br}(F) \to \mathrm{Br}(X)$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. — Soit $\overline{F}$ une clôture algébrique de F et $g = \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$. Comme G est semisimple simplement connexe, on a

$$\mathrm{Br}\ F \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Br}\ G.$$

On a $\overline{F}^* = \overline{F}[E]^*$ et $\mathrm{Pic}(\overline{E}) = 0$. La suite exacte bien connue donne alors $\mathrm{Br}\ (F) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Br}\ (E)$. Pour X comme dans l'énoncé, il existe un ouvert non vide $U \subset E$ et un F-morphisme birationnel $U \to X$. Comme X est projectif et E lisse, on peut supposer que U contient tous les points de codimension 1 de E. Par pureté du groupe de Brauer, la restriction $\mathrm{Br}\ (E) \to \mathrm{Br}\ (U)$ est un isomorphisme. Par ailleurs, la flèche $\mathrm{Br}\ (X) \to \mathrm{Br}\ (U)$ est injective, comme on voit en passant au corps des fonctions de X et U, et en utilisant l'injectivité de $\mathrm{Br}\ (X) \to \mathrm{Br}\ (k(X))$. Ceci établit le point (ii). □

Proposition 6.8. — *Soit k un corps, $\mathrm{car}(k) = 0$, X et Y deux k-variétés projectives, lisses, géométriquement connexes et $f : X \to Y$ un morphisme dominant dont la fibre générique $X_\eta/k(Y)$ est $k(Y)$-birationnelle à un espace principal homogène d'un $k(Y)$-groupe G semisimple simplement connexe.*

Alors :

(i) En tout point y de codimension 1 de Y la fibre $X_y/k(y)$ contient une composante géométriquement intègre de multiplicité 1.

(ii) L'application $f^* : \mathrm{Br}\ (Y) \to \mathrm{Br}\ (X)$ est un isomorphisme.

Démonstration. — Lorsque la fibre générique X_η contient un ouvert espace homogène principal d'un $k(Y)$-groupe comme dans l'énoncé, l'énoncé (i) est une application du théorème 4.2 de [**31**], dont la démonstration dans le cas qui nous intéresse ici repose essentiellement sur le théorème de Bruhat et Tits que tout espace principal homogène d'un groupe semisimple simplement connexe sur un corps $F((t))$ avec F de dimension cohomologique 1 est trivial. L'énoncé (i) dans le cas général résulte alors de la Proposition 3.9 (b) de [**24**].

On dispose des inclusions $\mathrm{Br}\ (Y) \hookrightarrow \mathrm{Br}\ (k(Y))$ et $\mathrm{Br}\ (X) \hookrightarrow \mathrm{Br}\ (X_\eta)$. D'après le lemme 6.7, la flèche

$$\mathrm{Br}\ (k(Y)) \to \mathrm{Br}\ (X_\eta)$$

est un isomorphisme. Quand on combine avec la partie (i), on voit que tout élément α de $\mathrm{Br}\ (X)$ a son image dans $\mathrm{Br}\ (X_\eta)$ qui vient d'un unique élément β de $\mathrm{Br}\ (k(Y)$, et que tous les résidus de β aux points de codimension 1 de Y sont nuls (voir [**24**, §4]), donc qui par la pureté pour le le groupe de Brauer appartient à $\mathrm{Br}\ (Y)$. □

Corollaire 6.9. — *Soit k un corps,* $\mathrm{car}(k) = 0$, *H un k-groupe linéaire non nécessairement connexe et $r_i : H \hookrightarrow G_i$ des plongements de H dans des k-groupes semisimples simplement connexes. Alors*

$$\mathrm{Br}_{nr}(k(G_1/H)) \simeq \mathrm{Br}_{nr}(k(G_2/H)).$$

Démonstration. — On considère le plongement diagonal $H \to G_1 \times G_2$. La k-variété $X = (G_1 \times G_2)/H$ se projette sur $X_1 = G_1/H$ et sur $X_2 = G_2/H$. La première projection fait de X un G_2-torseur sur X_1, la second de X un G_1-torseur sur X_2. Il existe des k-compactifications lisses X^c, X_1^c et X_2^c de X, X_1 et X_2 et des morphismes $X^c \to X_1^c$ et $X^c \to X_2^c$ étendant $X \to X_1$ et $X \to X_2$. Une application de la proposition 6.8 montre alors $\mathrm{Br}\,(X_1^c) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Br}\,(X^c)$ et $\mathrm{Br}\,(X_2^c) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Br}\,(X^c)$. □

Théorème 6.10. — *(Saltman) Soit G un groupe fini et M un G-réseau fidèle. Soit $\mathbb{C}(M)$ le corps des fonctions de l'algèbre de groupe $\mathbb{C}[M]$. Alors*

$$\mathrm{Br}_{nr}(\mathbb{C}(M)^G) = \mathrm{Ker}[H^2(G, \mathbb{C}^* \oplus M) \to \prod_{A \subset G, A \text{ bicyclique}} H^2(A, \mathbb{C}^* \oplus M)].$$

Pour tout p premier il existe (G, M) avec $G = (\mathbf{Z}/p)^3$ pour lequel $\mathrm{Br}_{nr}(\mathbb{C}(M)^G) \neq 0$.

La question ouverte suivante est bien connue.

Question 6.11. — Soit G un groupe linéaire connexe sur $\mathbb{C}$ et $H \subset G$ un sous-groupe fermé connexe. Le quotient G/H est-il une variété rationnelle ?

Le problème est ouvert déjà pour $G = GL_n$ ou SL_n, et $H = PGL_m$ (problème de la rationalité du centre de l'algèbre à division générique).

Sur un corps de base non algébriquement clos, un tel quotient n'est pas forcément rationnel, comme l'a montré A. Merkujev [**91**].

6.0.8. Variétés fibrées en coniques. — L'exemple d'Artin-Mumford revu par CT-Ojanguren. On a vu que pour une conique sans point rationnel sur un corps F le noyau de l'application $\mathrm{Br}\,(F) \to \mathrm{Br}\,(C)$ est $\mathbf{Z}/2$. Ainsi, ce noyau n'est pas nul, mais il est contrôlé. C'est là une situation assez exceptionnelle.

On l'a utilisé de la façon suivante. Soit $X \to Y$ un morphisme dominant de variétés géométriquement intègres, projectives et lisses sur un corps k, tel que la fibre générique $X_\eta/k(Y)$ soit une conique sans point rationnel. Soit $\alpha \in \mathrm{Br}\,(k(Y))$ la classe d'algèbre de quaternions correspondante. Dans certaines circonstances favorables, on peut trouver un élément $\beta \in \mathrm{Br}\,(k(Y))$, ramifié sur Y, mais qui devient non ramifié sur X, et qui n'est ni nul ni égal à α. Son image dans $\mathrm{Br}\,(k(X))$ est alors un élément non nul de $\mathrm{Br}\,(X)$ (et qui si l'on s'y prend bien ne vient pas de $\mathrm{Br}\,(k)$). Pour assure ce que l'on veut, il faut choisir β de telle sorte que sa ramification sur Y soit en quelque sorte strictement plus petite, en un sens bien précis, que la ramification de α, tout en étant non triviale. Comme la ramification de α est tuée sur X, il en est alors aussi de même de celle de β, et comme la ramification de β sur Y est non nulle et distincte de celle de α, alors β n'est pas dans le noyau $\mathbf{Z}/2.\alpha$ de $\mathrm{Br}\,(k(Y)) \to \mathrm{Br}\,(k(X))$.

Références : CT-Ojanguren Inv. math., CT Santa Barbara.

La méthode peut être poursuivie en degré cohomologique supérieur : voir CT-Ojanguren Inv. math., E. Peyre.

6.0.9. Fibrations plus générales. — Sur une courbe elliptique E sur un corps F donnée par une équation affine

$$y^2 = (x-a)(x-b)(x-c)$$

les algèbres de quaternions du type $(x-a,\alpha)$, $(x-b,\beta)$, $(x-c,\gamma)$, avec $\alpha,\beta,\gamma \in F^*$ sont non ramifiées. Si F n'est pas algébriquement clos, ces algèbres ne proviennent pas forcément de $\mathrm{Br}\,(F)$. On peut aussi dans certains cas fabriquer des classes similaires sur des courbes de genre 1 sans point rationnel.

On a ainsi fabriqué des éléments non ramifiés sur des variétés lisses projectives complexes de l'un des types suivants :

produit de courbes ;

une surface fibrée au-dessus d'une courbe et dont la fibre générique est une courbe de genre 1 (et parmi celles-ci, des surfaces $K3$).

Dans le dernier cas, on a une fibration $X \to \mathbf{P}^1_k$, on part d'une classe dans le groupe de Brauer $\mathrm{Br}\,(X_\eta)$ de la fibre générique X_η, et l'on doit s'assurer que les résidus de cet élément en tout point de codimension 1 de la surface sont nuls. Si l'on est sur $k = \mathbb{C}$, le groupe de Brauer de X est étroitement lié au groupe de Tate-Shafarevich de la la jacobienne de la fibre générique de $X \to \mathbf{P}^1_k$.

On renvoie à CT [22], Wittenberg [125], CT-Sk-SwD [45], SwD [117] Wittenberg [126], Ieronymou [82], Ieronymou, Skorobogatov et Yu.G. Zarhin [83], Skorobogatov et Swinnerton-Dyer [109], Skorobogatov-Zarhin [111] pour des calculs dans cette direction.

Certains des calculs font intervenir un calcul du groupe $\mathrm{Br}\,(\overline{X})$ et de l'action du groupe de Galois sur ce groupe. voir Skorobogatov et Zarhin. Voir Skorobogatov et Zarhin [**110**].

7. Calculer le groupe de Brauer algébrique non ramifié quand on ne dispose pas d'un modèle projectif et lisse

Il y a deux aspects : d'une part donner des formules pour le groupe de Brauer, d'autre part exhiber des Algèbres d'Azumaya concrètes (ou du moins des algèbres simples centrales sur le corps des fonctions dont la classe est non ramifiée).

Pour les exercices suivants, on peut utiliser la proposition 4.2.

Exercice. Montrer que le groupe de Brauer d'une quadrique lisse de dimension au moins 1 est trivial.

Exercice. Montrer que le groupe de Brauer non ramifié d'un modèle projectif et lisse de la variété donnée dans $\mathbf{A}^m_k \times \mathbf{P}^n_k$, par une équation

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(t_1, \ldots, t_m) X_i^2 = 0$$

avec les a_i polynômes non nuls et $n \geq 4$, est réduit à l'image de $\mathrm{Br}\,(k)$.

Exercice. Montrer que le groupe de Brauer non ramifié d'un système

$$0 \neq q_1 = q_2 \cdots = q_n,$$

où les q_i sont des formes quadratiques non dégénérées de rang au moins 2, en des variables indépendantes, est réduit à l'image de $\mathrm{Br}\,(k)$.

Exercice. Montrer que le groupe de Brauer non ramifié d'une variété

$$N_{K/k}(\Xi) = c$$

avec $c \in k^*$ et K/k cyclique, ou de degré premier, est réduit à l'image de $\mathrm{Br}\,(k)$.

Comment relever une classe de $H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{X}))$ dans $\mathrm{Br}\,_1(X)$?

Soit X une k-variété projective, lisse, géométriquement connexe. Comme on a expliqué, on a une suite exacte

$$\mathrm{Br}\,_1(X) \to H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{X})) \to \mathrm{Ker}[H^3(k, \mathbf{G}_m) \to H^3_{\text{ét}}(X, \mathbf{G}_m)].$$

Même lorsque l'on sait que $H^3(k, \mathbf{G}_m) = 0$, par exemple si k est un corps de nombres ou si $k = F(t)$ avec F un corps de nombres, et que l'on connaît des classes non triviales dans $H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{X}))$, il est en général difficile d'exhiber des représentants concrets dans $\mathrm{Br}_1(X)$.

Le problème de pose déjà dans le cas d'une compactification lisse d'un espace homogène d'un k-tore algébrique, et même déjà dans le cas d'une compactification lisse d'un k-tore algébrique, i.e. avec $X(k) \neq \emptyset$.

Le cas le plus simple non trivial est celui d'une équation

$$Norm_{K/k}(\xi) = c,$$

avec K/k biquadratique.

On consultera les articles CT [26] et Wei [124] pour quelques progrès dans cette direction.

Exercice ([26]) Soit k un corps, $\mathrm{car}(k) \neq 2$. Soient $a, b, c \in k^*$. Soit U la k-variété lisse (ouverte) définie par l'équation

$$(x^2 - ay^2)(u^2 - bv^2)(z^2 - abw^2) = c.$$

C'est un espace principal homogène sous le k-tore défini par

$$(x^2 - ay^2)(u^2 - bv^2)(z^2 - abw^2) = 1.$$

Montrer que l'algèbre d'Azumaya sur U définie par l'algèbre de quaternions $(x^2 - ay^2, b)$ est non ramifiée sur tout modèle projectif et lisse X de U. Lorsque aucun de a, b, ab n'est un carré dans k, montrer que la classe de A dans $\mathrm{Br}\,(X)/\mathrm{Br}\,(k)$ est non nulle. On peut en fait montrer que le groupe $\mathrm{Br}\,(X)/\mathrm{Br}\,(k)$ est d'ordre 2, engendré par A. Cet exemple est remarquable en ce qu'on a ici un générateur simple explicite pour le groupe $\mathrm{Br}\,(X)/\mathrm{Br}\,(k)$.

7.0.10. Groupe de Brauer non ramifié d'espace total de fibrations. — On a vu ci-dessus comment calculer le groupe de Brauer de modèles projectifs et lisses de surfaces affines d'équation

$$y^2 - az^2 = P(t).$$

D'un point de vue diophantien, les équations de la forme

$$N_{K/k}(\Xi) = P(t),$$

où K/k est une extension finie de corps, ou plus généralement K est un produit d'extensions finies de corps, et $P(t)$ est un polynôme, sont intéressantes.

Il n'est pas facile de calculer le groupe de Brauer d'un modèle projectif et lisse de ces variétés. Pour des résultats partiels, on consultera [28], [123], [120].

Références

[1] A. Beauville, On the Brauer group of Enriques surfaces. Math. Res. Lett. 16 (2009), no. 6, 927–934.

[2] S. Blinstein et A. Merkurjev, Cohomological invariants of algebraic tori, preprint 2012. 15

[3] F. A. Bogomolov, Le groupe de Brauer des espaces quotients de représentations linéaires (en russe), Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **51** (1987) 485–516, 688. 16

[4] F. A. Bogomolov, Brauer groups of the fields of invariants of algebraic groups, Mat. Sb. **180** (1989), 279–293 ; English transl. : Math. USSR Sb. 66 (1990), 285–299.

[5] M. V. Borovoi, Abelianization of the second nonabelian Galois cohomology. Duke Math. J. **72** (1993), no. 1, 217–239.

[6] M. Borovoi, The Brauer-Manin obstructions for homogeneous spaces with connected or abelian stabilizer. J. reine angew. Math. (Crelle) **473** (1996), 181–194.

[7] M. Borovoi, A note on the unramified Brauer group of a homogeneous space, http ://arxiv.org/abs/1206.1023v1.

[8] M. Borovoi, J.-L. Colliot-Thélène, A. Skorobogatov, The elementary obstruction and homogeneous spaces, Duke math. J. **141** no. 2 (2008) 321–364.

[9] M. Borovoi et C. Demarche, Manin obstruction to strong approximation for homogeneous spaces, to appear in Comment. Math. Helv., http ://arxiv.org/abs/0912.0408v2.

[10] M. Borovoi, C. Demarche et D. Harari, Complexes de groupes de type multiplicatif et groupe de Brauer non ramifié des espaces homogènes, http ://arxiv.org/abs/1203.5964v1, à paraître dans Ann. Sc. Éc. Norm. Sup. 14

[11] M. Borovoi, B. Kunyavskiĭ, Formulas for the unramified Brauer group of a principal homogeneous space of a linear algebraic group. J. Algebra **225** (2000), no. 2, 804821.

[12] M. Borovoi et B. Kunyavskiĭ, with an appendix by P. Gille, Arithmetical birational invariants of linear algebraic groups over two-dimensional geometric fields. J. of Algebra **276** (2004) 292-339.

[13] M. Borovoi et J. van Hamel, Extended Picard complexes and linear algebraic groups, J. reine angew. Math. 627 (2009), 53–82.

[14] M. Borovoi et J. van Hamel, Extended equivariant Picard complexes and homogeneous spaces, Transf. Groups 17 (2012), 51–86.

[15] M. Bright, Brauer groups of diagonal quartic surfaces, J. Symb. Computat. 41(5) (2006), 544–558.

[16] M. Bright, Efficient evaluation of the Brauer–Manin obstruction, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **142** (2007) 13–23.

[17] M. Bright, Evaluating Azumaya algebras on cubic surfaces, Manuscripta math. **134** (2011) 405–421.

[18] M. Bright, The Brauer-Manin obstruction on a general diagonal quartic surface, Acta Arith. 147 (2011), no. 3, 291–302.

[19] M. Bright et P. Swinnerton-Dyer, Computing the Brauer-Manin obstructions. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 137 (2004), no. 1, 1–16.

[20] Carter, Andrea C., The Brauer group of del Pezzo surfaces. Int. J. Number Theory 7 (2011), no. 2, 261–287.

[21] J.-L. Colliot-Thélène, Birational invariants, purity and the Gersten conjecture, K- theory and algebraic geometry : connections with quadratic forms and division algebras (Santa Barbara, CA, 1992), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, pp. 1–64.

[22] J.-L. Colliot-Thélène, Exposant et indice d'algèbres simples centrales non ramifiées. Avec un appendice par Ofer Gabber. Enseign. Math. (2) 48 (2002), no. 1-2, 127–146. 20

[23] J.-L. Colliot-Thélène, Groupe de Brauer non ramifié des hypersurfaces cubiques singulières (d'après P. Salberger) Appendice un article de Tim Browning, Compositio mathematica 146 (2010) 882–883.

[24] J.-L. Colliot-Thélène, Variétés presque rationnelles, leurs points rationnels et leurs dégénérescences (cours au CIME, Cetraro, septembre 2007), in Arithmetic Geometry (CIME 2007), Springer LNM 2009 (2011), p. 1–44. 18

[25] J.-L. Colliot-Thélène, Groupe de Brauer non ramifié de quotients par un groupe fini, prépublication janvier 2012 (sur arXiv), à paraître, Proc. Amer. Math. Soc. 17

[26] J.-L. Colliot-Thélène, Groupe de Brauer non ramifié d'espaces homogènes de tores, prépublication, 2012, sur arXiv. 22

[27] J.-L. Colliot-Thélène et D. Harari, Approximation forte en famille, prépublication, 2012, sur arXiv.

[28] J.-L. Colliot-Thélène, D. Harari et A. N. Skorobogatov, Valeurs d'un polynôme à une variable représentées par une norme, in Number theory and algebraic geometry (M. Reid, A. Skorobogatov editors), London Math. Society Lecture Notes Series 303, Cambridge University Press (2003). 69-89. 13, 22

[29] J.-L. Colliot-Thélène, D. Kanevsky et J.-J. Sansuc, Arithmétique des surfaces cubiques diagonales, in *Diophantine approximation and transcendence theory*, Bonn, 1985 (ed. G. Wüstholz), Lecture Notes in Mathematics **1290** (Springer, Berlin, 1987), pp. 1–108.

[30] J.-L. Colliot-Thélène et B. È. Kunyavskiĭ, Groupe de Brauer non ramifié des espaces principaux homogènes de groupes linéaires, J. Ramanujan Math. Soc. 13 (1998), 37-49. 15

[31] J.-L. Colliot-Thélène et B. Kunyavskiĭ, Groupe de Picard et groupe de Brauer des compactifications lisses d'espaces homogènes, J. Algebraic Geom. 15 (2006), 733–752. 15, 18

[32] J.-L. Colliot-Thélène, B. Kunyavskiĭ, V. L. Popov, Z. Reichstein, Is the function field of a reductive Lie algebra purely transcendental over the field of invariants for the adjoint action ? Compositio Math. 147 (2011), no. 02, 428–466

[33] J.-L. Colliot-Thélène et M. Ojanguren, Variétés unirationnelles non rationnelles : au- delà de l'exemple d'Artin et Mumford, Invent. math. 97 (1989), no. 1, 141–158.

[34] J.-L. Colliot-Thélène, A. Pál. et A. N. Skorobogatov, Pathologies of the Brauer-Manin obstruction. Math. Zeitschrift, to appear. arXiv :1310.5055

[35] J.-L. Colliot-Thélène et P. Salberger, Arithmetic on some singular cubic hypersurfaces, Proceedings of the London Mathematical Society (3) **58** (1989) 519-549.

[36] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, La R-équivalence sur les tores. Ann. Sc. Éc. Norm. Sup. **10** (1977) 175–229.

[37] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, La descente sur les variétés rationnelles, II, Duke Math. J. **54** (1987) 375-492. 6

[38] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, Principal homogeneous spaces under flasque tori : applications, J. Algebra **106** (1987) 148–205. 15

[39] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, The rationality problem for fields of invariants under linear algebraic groups (with special regards to the rationality problem), in *Proceedings of the International Colloquium on Algebraic groups and Homogeneous Spaces* (Mumbai 2004), ed. V. Mehta, TIFR Mumbai, Narosa Publishing House (2007), 113–186. 16

[40] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc and Sir Peter Swinnerton-Dyer, Intersections of two quadrics and Châtelet surfaces, I, J. für die reine und angew. Math. (Crelle) **373** (1987) 37-107 ; II, ibid. **374** (1987) 72-168. 12

[41] J-L. Colliot-Thélène et A.N. Skorobogatov, Descent on fibrations over $\mathbf{P}^1_k$ revisited, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **128** (3) (2000) 383–393.

[42] J-L. Colliot-Thélène et A.N. Skorobogatov, Good reduction of the Brauer–Manin obstruction, Trans. Amer. Math. Soc., à paraître. `http://arxiv.org/abs/1009.0247`. 4

[43] J-L. Colliot-Thélène et A.N. Skorobogatov, Descente galoisienne sur le groupe de Brauer, J. für die reine und ang. Math. (Crelle), à paraître. `http://arxiv.org/abs/1106.6312v2`. 3

[44] J.-L. Colliot-Thélène, A. N. Skorobogatov and Sir Peter Swinnerton-Dyer, Rational points and zero-cycles on fibred varieties : Schinzel's hypothesis and Salberger's device, Journal für die reine und angewandte Mathematik **495** (1998) 1–28.

[45] J.-L. Colliot-Thélène, A. N. Skorobogatov and Sir Peter Swinnerton-Dyer, Hasse principle for pencils of curves of genus one whose Jacobians have rational 2-division points. Inventiones math. **134** (1998) 579–650. 10, 20

[46] J.-L. Colliot-Thélène and Sir Peter Swinnerton-Dyer, Hasse principle and weak approximation for pencils of Severi-Brauer and similar varieties, J. für die reine und angew. Math. (Crelle) **453** (1994) 49-112. 13

[47] J.-L. Colliot-Thélène et O. Wittenberg, Groupe de Brauer et points entiers de deux familles de surfaces cubiques affines (23 pages), à paraître dans Amer. J. Math.

[48] J.-L. Colliot-Thélène et F. Xu, Brauer-Manin obstruction for integral points of homogeneous spaces and representation of integral quadratic forms, Compositio Mathematica, vol. 145 (2) Mars 2009 p. 309-363. With an appendix by Dasheng Wei and Xu.

[49] J.-L. Colliot-Thélène et F. Xu, Strong approximation for the total space of certain quadric fibrations, à paraître dans Acta Arithmetica.

[50] D. F. Coray, M. A. Tsfasman, Arithmetic on singular Del Pezzo surfaces. Proc. London Math. Soc. (3) 57 (1988), no. 1, 25–87.

[51] P. Corn, The Brauer-Manin obstruction on del Pezzo surfaces of degree 2. Proc. Lond. Math. Soc. (3) 95 (2007), no. 3, 735–777.

[52] C. Demarche, Obstruction de descente et obstruction de Brauer-Manin étale, Algebra and Number Theory 3 (2009), no. 2, 237–254.

[53] C. Demarche, Groupe de Brauer non ramifié d'espaces homogènes à stabilisateurs finis, Math. Annalen **346** (2010) 949–968. 17

[54] C. Demarche, Le défaut d'approximation forte dans les groupes linéaires connexes. Proc. Lond. Math. Soc. (3) 102 (2011), no. 3, 563–597.

[55] C. Demarche, Une formule pour le groupe de Brauer algébrique d'un torseur, http ://arxiv.org/abs/1011.5100v1.

[56] U. Derenthal et D. Wei, Strong approximation and descent, http ://arxiv.org/abs/1311.3914v2

[57] U. Derenthal, A. Smeets et D. Wei, Universal torsors and values of quadratic polynomials represented by norms, arXiv :1202.3567v2 [math.NT].

[58] S. Gille, The first Suslin homology sheaf of a split simply connected semisimple algebraic group. J. Algebra 333 (2011), 26–39.

[59] B. Fantechi, L. Göttsche, L. Illusie, S.L. Kleiman, N. Nitsure, and A. Vistoli. *Fundamental algebraic geometry. Grothendieck's FGA explained.* Mathematical Surveys and Monographs **123**, AMS, Providence, RI, 2005.

[60] K. Fujiwara. A proof of the absolute purity conjecture (after Gabber). In : *Algebraic geometry 2000, Azumino*, *Adv. Stud. Pure Math.* **36** (2002), pp. 153–183.

[61] O. Gabber. Some theorems on Azumaya algebras. In : The Brauer group (Séminaire, Les Plans-sur-Bex, 1980) *Lecture Notes in Math.* **844** Springer-Verlag, Berlin-New York, 1981, pp. 129–209.

[62] P. Gille, T. Szamuely, Central Simple Algebras and Galois Cohomology, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 101, Cambridge University Press, 2006. 1

[63] A. Grothendieck, Le groupe de Brauer, I, II, III, in *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, J. Giraud et al., Adv. Stud. Pure Math., **3**, Masson & North-Holland, Amsterdam, 1968, pp. 46–188.

[64] D. Harari, Méthode des fibrations et obstruction de Manin, Duke Math. J. **75** (1994) 221–260.

[65] D. Harari, Obstructions de Manin transcendantes. Number theory (Paris, 19931994), 75–87, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 235, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996.

[66] D. Harari, Flèches de spécialisation en cohomologie étale et applications arithmétiques, Bull. Soc. Math. France 125 (1997), no. 2, 143–166.

[67] D. Harari, Weak approximation and non-abelian fundamental groups., Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 33 (2000), no. 4, 467–484.

[68] D. Harari, Groupes algébriques et points rationnels. Math. Ann. 322 (2002), no. 4, 811–826.

[69] D. Harari, The Manin obstruction for torsors under connected algebraic groups. Int. Math. Res. Not. 2006, Art. ID 68632, 1–13.

[70] D. Harari, Quelques propriétés d'approximation reliées à la cohomologie galoisienne d'un groupe algébrique fini. Bull. Soc. Math. France 135 (2007), no. 4. 17

[71] D. Harari, Spécialisation des conditions de Manin pour les variétés fibrées au-dessus de l'espace projectif, Compositio Math. 143, no 3, 603-617 (2007).

[72] D. Harari et A. N. Skorobogatov, The Brauer group of torsors and its arithmetic applications, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 53 (2003), no. 7, 1987–2019.

[73] D. Harari et A. N. Skorobogatov, Non-abelian descent and the arithmetic of Enriques surfaces, Int. Math. Res. Not. 52 (2005), 3203–3228.

[74] D. Harari et A. N. Skorobogatov, Descent theory for open varieties, à paraître dans Torsors, étale homotopy and applications to rational points (Edinburgh, 2011).

[75] D. Harari et J. Stix, Descent obstruction and fundamental exact sequence, dans The Arithmetic of Fundamental Groups – PIA 2010, Contributions in Mathematical and Computational Sciences, Vol. 2, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012.

[76] D. Harari et J. F. Voloch, The Brauer-Manin obstruction for integral points on curves. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 149 (2010), no. 3, 413–421.

[77] D. Harari et J. F. Voloch, Descent obstructions and Brauer-Manin obstructions in positive characteristic, à paraître dans le Journal de l'Institut de Mathématiques de Jussieu.

[78] Y. Harpaz et A. N. Skorobogatov, Singular curves and the étale Brauer-Manin obstruction for surfaces. Ann. Sci. E.N.S. 47 (2014) 765–778.

[79] B. Hasssett et Yu. Tschinkel, Effective computation of Picard groups and Brauer–Manin obstructions of degree two $K3$ surfaces over number fields, arXiv 1203.2214v1 [math.AG] 10 Mar 2012.

[80] B. Hassett, A. Várilly-Alvarado et P. Varilly, Transcendental obstructions to weak approximation on general K3 surfaces. Adv. Math. 228 (2011), no. 3, 13771404.

[81] B. Hassett et A. Várilly-Alvarado, Failure of the Hasse principle on general K3 surfaces, arXiv :1110.1738v1 [math.NT].

[82] E. Ieronymou, Diagonal quartic surfaces and transcendental elements of the Brauer groups. J. Inst. Math. Jussieu 9 (2010), no. 4, 769–798. 20

[83] E. Ieronymou, A.N. Skorobogatov et Yu.G. Zarhin, On the Brauer group of diagonal quartic surfaces. J. London Math. Soc. 83 (2011) 659-672. 20

[84] N. Katz, Applications of the weak Lefschetz theorem. Appendix to B. Poonen and J.F. Voloch, Random Diophantine equations. *Progr. Math.* **226** *Arithmetic of higher-dimensional algebraic varieties* (Palo Alto, CA, 2002), Birkhäuser, Boston, MA, 2004, pp. 175–184.

[85] A. Kresch et Yu. Tschinkel, On the arithmetic of del Pezzo surfaces of degree 2, Proc. London Math. Soc. (3) 89 (2004), no. 3, 545–569.

[86] Two examples of Brauer–Manin obstruction to integral points, Bull. Lond. Math. Soc. 40 (2008), no. 6, p. 995–1001.

[87] A. Kresch et Yu. Tschinkel, Effectivity of Brauer-Manin obstructions on surfaces. Adv. Math. 226 (2011), no. 5, 4131–4144.

[88] B. È. Kunyavskiĭ, The Bogomolov multiplier of finite simple groups, in *Cohomological and geometric approaches to rationality problems*, 209–217, Progr. Math. **282**, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2010.

[89] Yu. I. Manin, Le groupe de Brauer-Grothendieck en géométrie diophantienne, in : Actes du Congrès International des Mathématiciens, Nice, 1970, Gauthier-Villars, Paris, 1971, pp. 401–411.

[90] Yu. I. Manin, Cubic Forms : Algebra, Geometry, Arithmetic (North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1974) ; Translated from Russian by M. Hazewinkel.

[91] A. S. Merkurjev, Unramified cohomology of classifying varieties for classical simply connected groups. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 35 (2002), no. 3, 445–476. 19

[92] A. S. Merkurjev, Unramified elements in cycle modules. J. Lond. Math. Soc. (2) 78 (2008), no. 1, 51–64.

[93] J.S. Milne. *Étale cohomology*. Princeton University Press, 1980.

[94] J.S. Milne. *Arithmetic Duality Theorems*. 2nd edition. Kea Books, BookSurge, 2004.

[95] B. Poonen, Insufficiency of the Brauer-Manin obstruction applied to étale covers. Ann. of Math. (2) 171 (2010), no. 3, 2157–2169. 13

[96] B. Poonen et J. F. Voloch, The Brauer-Manin obstruction for subvarieties of abelian varieties over function fields. Ann. of Math. (2) 171 (2010), no. 1, 511–532.

[97] P. Salberger, On obstructions to the Hasse principle. Number theory and algebraic geometry, 251277, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 303, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.

[98] D.Saltman,The Brauer group and the center of generic matrices, J. Algebra 97 (1) (1985) 53–67.

[99] J.-J. Sansuc, Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires, J. für die reine und angew. Math. (Crelle) 327 (1981) 12–80.

[100] J-P. Serre. *Corps locaux*. Hermann, 1968.

[101] J.-P. Serre, *Cohomologie galoisienne*, 5ème édition, révisée et complétée, Lecture Notes in Mathematics **5**, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1994.

[102] A. N. Skorobogatov, On the fibration method for proving the Hasse principle and weak approximation, in *Séminaire de théorie des nombres de Paris 1988-1989*, éd. C. Goldstein, Progress in Math. **91** (1990) 205-219.

[103] A. N. Skorobogatov, Arithmetic on certain quadric bundles of relative dimension 2. I, J. für die reine und angew. Math. **407** (1990) 57-74 . 13

[104] A. N. Skorobogatov, Descent on fibrations over the projective line, Amer. J. Math. **118** (1996) 905-923. 12

[105] A. N. Skorobogatov, Beyond the Manin obstruction, Invent. Math. 135 (1999), 399424.

[106] A. Skorobogatov, *Torsors and rational points*, Cambridge Tracts in Mathematics **144**, Cambridge University Press, Cambridge, 2001. 12

[107] A. N. Skorobogatov, Descent obstruction is equivalent to étale Brauer-Manin obstruction, Math. Ann. 344 (2009), 501–510.

[108] A. N. Skorobogatov, Descent on toric fibrations, To appear in “Arithmetic Geometry” (Proceedings of the Hausdorff trimester, 2013). Dieulefait, L. ; Faltings, G. ; Heath-Brown, R. ; Manin, Y. ; Moroz, B. ; Wintenberger, J.-P. (eds.), C.U.P. `http://arxiv.org/abs/1312.7539`

[109] A. N. Skorobogatov and P. Swinnerton-Dyer, 2-descent on elliptic curves and rational points on certain Kummer surfaces, Adv. Math. 198(2) (2005), 448–483. 20

[110] A.N. Skorobogatov and Yu.G. Zarhin, A finiteness theorem for the Brauer group of abelian varieties and K3 surfaces, *J. Alg. Geom.* **17** (2008) 481–502. 5, 21

[111] A.N. Skorobogatov and Yu.G. Zarhin, The Brauer group of Kummer surfaces and torsion of elliptic curves, J. reine angew. Math., 666 (2012). 20

[112] A.N. Skorobogatov and Yu.G. Zarhin, The Brauer group and the Brauer–Manin set of products of varieties, arXiv :1112.3089 J. Eur. Math. Soc., to appear.

[113] M. Stoll, Finite descent obstructions and rational points on curves. Algebra Number Theory 1 (2007), no. 4, 349–391.

[114] P. Swinnerton-Dyer, The Brauer group of cubic surfaces, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 113(3) (1993) 449460.

[115] Sir Peter Swinnerton-Dyer, Rational points on pencils of conics and on pencils of quadrics, J. London Math. Soc. (2) **50** (1994) 231–242.

[116] P. Swinnerton-Dyer, Brauer-Manin obstructions on some Del Pezzo surfaces. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 125 (1999), no. 2, 193–198.

[117] P. Swinnerton-Dyer, Arithmetic of diagonal quartic surfaces, II, Proc. Lond. Math. Soc. 80(3) (2000), 513–544. Corrigenda : Proc. London Math. Soc. (3) **85** (2002), no. 3, 564. 20

[118] Sir Peter Swinnerton-Dyer, The solubility of diagonal cubic surfaces. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **34** (2001), no. 6, 891–912.

[119] A. Várilly-Alvarado, B. Viray, Failure of the Hasse principle for Enriques surfaces. Adv. Math. 226 (2011), no. 6, 4884–4901.

[120] A. Várilly-Alvarado and B. Viray, Higher-dimensional analogs of Châtelet surfaces. Bull. Lond. Math. Soc. 44 (2012), no. 1, 125–135. 22

[121] V. E. Voskresenskiĭi, Maximal tori without affect in semisimple algebraic groups, Mat. Zametki 44 (1988), no. 3, 309–318, 410.

[122] V. E. Voskresenskiĭ, *Algebraic groups and their birational invariants*, Amer. Math. Soc., Translations of mathematical monographs 179 (1998).

[123] D. Wei, On the equation $N_{K/k}(\Xi) = P(t)$, prépublication, 2011. arXiv :1202.4115. 8, 13, 22

[124] D. Wei, The unramified Brauer group of norm one tori, arXiv. 1202.4714v1 [math.NT]. 8, 22

[125] O. Wittenberg, Transcendental Brauer-Manin obstruction on a pencil of elliptic curves. Arithmetic of higher-dimensional algebraic varieties (Palo Alto, CA, 2002), 259–267, Progr. Math., 226, BirkhŁuser Boston, Boston, MA, 2004. 20

[126] O. Wittenberg, Intersections de deux quadriques et pinceaux de courbes de genre 1/Intersections of two quadrics and pencils of curves of genus 1. Lecture Notes in Mathematics **1901**. Springer, Berlin, 2007. viii+218 pp. 20

[127] O. Wittenberg, Zéro-cycles sur les fibrations au-dessus d'une courbe de genre quelconque, Duke Math. J. **161** (2012) no. 11, 2113–2166.

[128] O. Wittenberg, Une remarque sur les courbes de Reichardt–Lind et de Schinzel, in The arithmetic of fundamental groups, PIA 2010 (ed. J. Stix), 329–337, Contributions in Mathematical and Computational Sciences 2, Springer-Verlag, Heidelberg, 2012.

[129] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas* (SGA 4). Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1963-1964. Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck et J.-L. Verdier. Avec la collaboration de N. Bourbaki, P. Deligne et B. Saint-Donat. Lecture Notes in Math. **269**, **270**, **305**. Springer-Verlag, 1972, 1973.

[130] *Cohomologie étale* (SGA $4\frac{1}{2}$). Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie. Avec la collaboration de J.F. Boutot, A. Grothendieck, L. Illusie et J.-L. Verdier. Lecture Notes in Math. **569**. Springer-Verlag, 1977.

18 février 2015

JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE, CNRS & Université Paris Sud, Mathématiques, Bâtiment 425, F-91405 Orsay Cedex, France • *E-mail :* `jlct@math.u-psud.fr`